１９９１年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by Y. Giga & Y. Watatani

Series ♯ 23. June, 1992

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.

♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.

♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.

♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.

♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.

♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.

♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.

♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

１９９１年度談話会・特別講演アブストラクト

				ページ
1.	島　田　伊知朗	(北大・理)	正標数の曲面に特有なある種の曲線族について	1
2.	河　東　泰　之	(東大・理)	可解格子膜型，Dynkin 図形上の flat connection，そして作用素環	3
3.	松　本　和一郎	(龍谷大・理工)	双曲型方程式“系”の初期値問題について	4
4.	若　山　正　人	(鳥取大・教養)	量子群上の定数係数微分作用素の発見	7
5.	橋　爪　道　彦	(岡山理科大・理)	正則グラフと半正則２部グラフに対するセルバーグ跡公式とその応用	9
6.	立　川　　　篤	(静岡大・教養)	非コンパクト多様体間の調和写像の非存在定理について	24
7.	上　見　練太郎	(北大・理)	The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations	26
8.	酒　井　　　隆	(岡山大・理)	いくつかの幾何学的不等式について	30
9.	望　月　　　清	(信州大・理)	準線形放物型方程式の爆発解について	33
10.	陳　　　蘊　剛	(北大・理)	平均曲率による曲面の運動の数値計算	35
11.	Martin Walter	(コロラド大)	Classification of finite groups and C*-algebras	39
12.	倉　西　正　武	(コロンビア大)	Bergmann Kernel と CR 構造	40
13.	四　方　義　啓	(名大・理)	雪結晶方程式の非線型性	41
14.	長　岡　昇　勇	(近畿大・理工)	ある Jacobi modular 群に対する Eisenstein 級数	44
15.	肥　田　晴　三	(ｶﾘﾌｫﾙﾆｱ大・ﾛｻﾝｾﾞﾙｽ校)	The residue of the p-adic Dedekindl zeta function of CM fields	45
16.	桂　田　英　典	(室工大・工)	二次形式の局所密度	47
17.	S. Lipschutz	(テンプル大)	Generalizing Stallings' Pregroup	49
18.	C. Siebeneicher	(ビーレフェルト大)	Enumerating necklaces	50
19.	海老原　　　円	(学習院大)	ある種の n 次元代数多様体の単有理性について	52
20.	W. Schempp	(ジーゲン大)	Harmonic analysis on the Heisenberg group with applications	53
21.	朴　　　恵　淑	(東北大・理)	Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions for toric varieties	54
22.	宮　崎　　　誓	(長野高専)	Arithmetically Buchsbaum subschemes	58
23.	渡　辺　恵　一	(新潟大・理)	非可換 L^p 空間について	61
24.	P. Tondeur	(イリノイ大)	Riemannian foliations and tautness	62
25.	中　村　　　郁	(北大・理)	P^4 と Q^4　－小平・Spencer の問題－	65
26.	濱　地　敏　弘	(九大・教養)	Orbits, suborbits and basic extension in ergodic theory	66
27.	和　田　倶　幸	(東京農工大)	p-可解群における $\ell(B)=2$ のブロックのカルタン行列	67
28.	Lang Wu	(ｵｰｽﾄﾗﾘｱ国立大)	Ricci flow for complete, noncompact surfaces	69
29.	S. Altschuler	(ｵｰｽﾄﾗﾘｱ国立大)	Mean curvature flow for curves in space	70
30.	三　松　佳　彦	(中央大・理工)	極めて低次元の多様体への Lie 群の作用	71
31.	辻　　　　　元	(都立大・理)	カレントによる標準因子の Zariski 分解の構成	73
32.	S.B. Angenent	(ｳｨｽｺﾝｼﾝ大)	Anisotropic curvature driven evolution	75
33.	小　松　　　玄	(大阪大・理)	ベルグマン核とゼゲー核の漸近解析	81
34.	小　薗　英　雄	(九大・教養)	非有界領域における Navier-Stokes 方程式	83
35.	小　林　一　章	(東京女子大・文理)	Spatial graph について	85
36.	真　島　秀　行	(お茶の水女子大・理)	合流型超幾何微分方程式に対するEcalleの再生方程式とStokes現象について	86
37.	Thomas Roby	(MIT/東大)	Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets	88
38.	小　谷　眞　一	(東大・理)	非コンパクトリーマン多様体のスペクトルの下限について	90

39.	荒　木　不二洋　(京大・数理研)	ＸＹ模型の Master Symmetries	93
40.	松　元　重　則　(日大・理工)	The Lie affine foliations on 4-manifolds	95
41.	鈴　木　　　寛　(大阪教育大)	Antipodal Characterization and Local Characterization of Distance Regular Graphs	96
42.	山　田　裕　史　(都立大)	Ｂ型ＫＰ方程式系と Schur 多項式に関する一注意	100
43.	中　野　裕　治　(滋賀大・経済)	経済時系列の因果分析	103
44.	野　田　明　男　(浜松医科大)	ガウス過程　―　標準表現と KM_2O-Langevin 方程式	106
45.	山　崎　　　満　(東大・教養)	Global Existence of Discrete Boltzmann Equation in a Thin Infinite Tube for Small Initial Data	108
46.	伊　藤　栄　明　(統計数理研)	生存競争系の確率モデルと積分可能な力学系	109
47.	丹　原　大　介　(弘前大・理)	トレースとノルムの抽象化	110
48.	O. Riemenschneider (ﾊﾝﾌﾞﾙｸﾞ大)	ADE classification and singularities	111
49.	押　切　源　一　(東北大)	Mean curvature functions of codimension-one foliations	112
50.	竹ヶ原　裕　元　(室工大)	対称群への準同型写像について	113
51.	福　田　拓　生　(東工大)	実特異点の topological triviality について	114
52.	小　泉　澄　之　(慶応大・理工)	Some Theorems on Real Analysis	116
53.	尾　畑　伸　明　(名大・理)	ホワイトノイズ解析とその応用	130
54.	高　井　博　司　(都立大)	C^*-環の rank について	131

談 話 会・特 別 講 演 一 覧 （１９９１年度）

1.	４月１１日（木）	H.-H. Kuo	氏（ﾙｲｼﾞｱﾅ州立大）	Some introductions to white noise analysis
2.	４月１７日（水）＊	島田 伊知朗	氏（北大・理）	正標数の曲面に特有なある種の曲線族について
3.	４月２２日（月）	J. D. Gould	氏（ｳｪｰﾙｽﾞ大・ｽｵﾝｼﾞｰ校）	Dimension groups, Embeddings and Representations of AF algebras associated to Solvable lattice models
4.	４月２４日（水）＊	河東 泰之	氏（東大・理）	可解格子膜型，Dynkin 図形上の flat connection，そして作用素環
5.	５月 １日（水）	O. Bratteli	氏（ﾄﾛﾝﾊｲﾑ大）	Noncommutative Cantor sets
6.	５月 ７日（水）＊	松本 和一郎	氏（龍谷大・理工）	双曲型方程式“系”の初期値問題について
7.	５月１５日（水）＊	若山 正人	氏（鳥取大・教養）	量子群上の定数係数微分作用素の発見
8.	５月１５日（水）＊	橋爪 道彦	氏（岡山理科大・理）	正則グラフと半正則２部グラフに対するセルバーグ跡公式とその応用
9.	５月２２日（水）＊	立川 篤	氏（静岡大・教養）	非コンパクト多様体間の調和写像の非存在定理について
10.	５月２９日（水）	本多 尚文	氏（北大・理）	$\mathcal{D}$加群と Holonomic 系
11.	６月 ５日（水）＊	上見 練太郎	氏（北大・理）	The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations
12.	６月１２日（水）＊	酒井 隆	氏（岡山大・理）	いくつかの幾何学的不等式について
13.	６月１８日（火）	M. Deza	氏（パリ大）	The geometry of numbers and hypermetrics
14.	６月１９日（水）＊	望月 清	氏（信州大・理）	準線形放物型方程式の爆発解について
15.	６月２５日（火）	鈴木 通夫	氏（イリノイ大）	Dade 予想について
16.	６月２６日（水）＊	陳 蘊剛	氏（北大・理）	平均曲率による曲面の運動の数値計算
17.	７月 １日（月）＊	Martin Walter	氏（コロラド大）	Classification of finite groups and C*-algebras
18.	７月 ２日（火）＊	倉西 正武	氏（コロンビア大）	Bergmann Kernel と CR 構造
19.	７月 ３日（水）＊	四方 義啓	氏（名大・理）	雪結晶方程式の非線型性
20.	７月１０日（水）＊	長岡 昇勇	氏（近畿大・理工）	ある Jacobi modular 群に対する Eisenstein 級数
21.	７月１０日（水）＊	肥田 晴三	氏（ｶﾘﾌｫﾙﾆｱ大・ﾛｻﾝｾﾞﾙｽ校）	The residue of the p-adic Dedekind zeta function of CM fields
22.	７月１１日（木）＊	桂田 英典	氏（室工大・工）	二次形式の局所密度
23.	７月１６日（火）＊	S. Lipschutz	氏（テンプル大）	Generalizing Stallings' Pregroup
24.	７月２５日（木）	原田 耕一郎	氏（オハイオ州立大）	Monster and Generalized Kac-Moody Algebra
25.	８月１３日（木）	H. Wenzl	氏（ｶﾘﾌｫﾙﾆｱ大・ｻﾝﾃﾞｨｴｺﾞ校）	Three manifolds invariants from operator algebras
26.	８月２６日（月）	O. Mathieu	氏（CNRS, ラトガス大）	Cohomology of Lie algebra of Hamiltonian vector fields
27.	９月１３日（金）	R. Gerard	氏（ストラスブーグ大）	Artin's type theorem for partial differential equations
28.	９月２５日（水）＊	C. Siebeneicher	氏（ビーレフェルト大）	Enumerating necklaces
29.	９月２６日（木）＊	海老原 円	氏（学習院大）	ある種の n 次元代数多様体の単有理性について
30.	９月２７日（金）＊	W. Schempp	氏（ジーゲン大）	Harmonic analysis on the Heisenberg group with applications
31.	１０月１４日（月）＊	朴 恵淑	氏（東北大・理）	Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions for toric varieties
32.	１０月１４日（月）＊	宮崎 誓	氏（長野高専）	Arithmetically Buchsbaum subschemes
33.	１０月３０日（水）＊	渡辺 恵一	氏（新潟大・理）	非可換 L^p 空間について
34.	１１月 ６日（水）	S. Dimiev	氏（ﾌﾞﾙｶﾞﾘｱ科学ｱｶﾃﾞﾐｰ）	Some problem of A. Dynkin
35.	１１月１２日（火）＊	P. Tondeur	氏（イリノイ大）	Riemannian foliations and tautness
36.	１１月１３日（水）＊	中村 郁	氏（北大・理）	P^4 と Q^4 －小平・Spencer の問題－

37.	11月20日（水）	*	濱地敏弘 氏	（九大・教養）	Orbits, suborbits and basic extension in ergodic theory
38.	11月27日（水）	*	和田倶幸 氏	（東京農工大）	p-可解群における $\ell(B)=2$ のブロックのカルタン行列
39.	11月28日（木）		Attila Sali 氏	（ﾊﾝｶﾞﾘｰ科学ｱｶﾃﾞﾐｰ）	On the rigidity of some spherical t-designs
40.	12月3日（火）		P. Podles 氏	（京大・ﾜﾙｼｬﾜ大）	Quantum spheres
41.	12月4日（水）	*	Lang Wu 氏	（ｵｰｽﾄﾗﾘｱ国立大）	Ricci flow for complete, noncompact surfaces
42.	12月4日（水）	*	S. Altschuler 氏	（ｵｰｽﾄﾗﾘｱ国立大）	Mean curvature flow for curves in space
43.	12月11日（水）	*	三松佳彦 氏	（中央大・理工）	極めて低次元の多様体への Lie 群の作用
44.	12月11日（水）		佐藤幹夫 氏	（京大・数理研）	雑談
45.	12月18日（水）	*	辻元 氏	（都立大・理）	カレントによる標準因子の Zariski 分解の構成
46.	12月25日（水）	*	S.B. Angenent 氏	（ｳｨｽｺﾝｼﾝ大）	Anisotropic curvature driven evolution
47.	12月26日（木）		R. Weiss 氏	（タフツ大）	s-arc transitive graphs
48.	1月16日（木）		Peng Tsu Ann 氏	（シンガポール大）	On finite groups with an Engel condition
49.	1月21日（火）		並河良典 氏	（上智大・理工）	3次元 Calabi-Yau 多様体
50.	1月22日（水）	*	小松玄 氏	（大阪大・理）	ベルグマン核とゼゲー核の漸近解析
51.	1月23日（木）	*	小薗英雄 氏	（九大・教養）	非有界領域における Navier-Stokes 方程式
52.	1月28日（火）	*	小林一章 氏	（東京女子大・文理）	Spatial graph について
53.	1月29日（水）	*	真島秀行 氏	（お茶の水女子大・理）	合流型超幾何微分方程式に対するEcalleの再生方程式と Stokes 現象について
54.	2月3日（月）	*	Thomas Roby 氏	（MIT/東大）	Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson -Schensted correspondence to differential posets
55.	2月5日（水）	*	小谷眞一 氏	（東大・理）	非コンパクトリーマン多様体のスペクトルの下限について
56.	2月5日（水）	*	荒木不二洋 氏	（京大・数理研）	XY模型の Master Symmetries
57.	2月5日（水）	*	松元重則 氏	（日大・理工）	The Lie affine foliations on 4-manifolds
58.	2月13日（木）		小木曽啓示 氏	（東大・理）	Calabi-Yau 3-fold 上の線形系について
59.	2月14日（金）	*	鈴木寛 氏	（大阪教育大）	Antipodal Characterization and Local Characterization of Distance Regular Graphs
60.	2月14日（金）	*	山田裕史 氏	（都立大）	B型KP方程式系と Schur 多項式に関する一注意
61.	2月18日（火）	*	中野裕治 氏	（滋賀大・経済）	経済時系列の因果分析
62.	2月18日（火）	*	野田明男 氏	（浜松医科大）	ガウス過程 — 標準表現と KM_2O-Langevin 方程式
63.	2月20日（木）	*	山崎満 氏	（東大・教養）	Global Existence of Discrete Boltzmann Equation in a Thin Infinite Tube for Small Initial Data
64.	2月20日（木）		Alain Grigis 氏	（東大/パリ13大）	Asymptotics for Hill Equations
65.	3月4日（水）		W. Cieslak 氏	（ルブリン大）	Isoptics (Differential Geometry and Mechanics)
66.	3月9日（月）	*	伊藤栄明 氏	（統計数理研）	生存競争系の確率モデルと積分可能な力学系
67.	3月16日（月）	*	丹原大介 氏	（弘前大・理）	トレースとノルムの抽象化
68.	3月16日（月）	*	O. Riemenschneider 氏	（ハンブルグ大）	ADE classification and singularities
69.	3月17日（火）	*	押切源一 氏	（東北大）	Mean curvature functions of codimension-one foliations
70.	3月17日（火）		池田正 氏	（道教育大・函館）	Interior G-Algebra のいくつかの性質
71.	3月17日（火）	*	竹ヶ原裕元 氏	（室工大）	対称群への準同型写像について
72.	3月18日（水）		保江邦夫 氏	（ﾉｰﾄﾙﾀﾞﾑ清心女子大）	量子脳力学
73.	3月19日（木）	*	福田拓生 氏	（東工大）	実特異点の topological triviality について

74.	3月23日（月）＊	小泉澄之	氏（慶応大・理工）	Some Theorems on Real Analysis
75	3月24日（火）	後藤俊一	氏（九大・工）	非線形な成長法則による界面の成長
76.	3月24日（火）＊	尾畑伸明	氏（名大・理）	ホワイトノイズ解析とその応用
77.	3月25日（水）＊	高井博司	氏（都立大）	C^*-環の rank について

談話会 Abstract

「正標数の曲面に特有なある種の曲線族について」

島田 伊知朗

kを標数 $p>0$ の代数的閉体とし，X を k上定義された非特異既約曲面，Tを k上定義された非特異既約曲線とする．Tによって parametrize された X上の完備既約曲線の族 $\{C_t\}_{t\in T}$ で，$\bigcup_{t\in T} C_t$ が X 上 dense となるものを考える．閉点 $t\in T$ に対し，$\eta_t : \tilde{C}_t \to C_t$ を normalization とし，$\tilde{C}_t$ 上の normal sheaf N_t を $0\to \Theta_{\tilde{C}_t} \to \eta_t^* \Theta_X|_{C_t} \to N_t \to 0$ で定義する．

定義：general な $t\in T$ に対して $\deg(N_t/\mathrm{torsion})<0$ であるとき $\{C_t\}_{t\in T}$ を supercuspidal であるという．

kの標数が 0 ならば supercuspidal family は存在しない．一方，正標数においては次のような例がある．(1) 小平次元 $\kappa(X)$ が非負の曲面上の有理曲線の covering family は supercuspidal．(2) $f: X\to T$ を general fibre が特異点をもつ既約曲線となる射とする．このとき f の fibres は supercuspidal family をなす．

$\{C_t\}$ を supercuspidal family とする．$\mathcal{C}\to T$ を $\{C_t\}$ を定義する T上の曲線とする．Tの純非分離拡大 $B\to T$ で，S を $B\times_T \mathcal{C}$ の normalization としたとき，$\pi: S\to B$ の general fibre が非特異になるものが存在する．$\varphi: S\to X$ を $\mathcal{C}\to X$ から自然に定まる射とする．

<u>定理</u>　次のような可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] \arrow[d, "\pi"'] & & X \\ B \arrow[dr, "\psi"'] & \tilde{S} \arrow[ur] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & \\ & \tilde{B} & \end{tikzcd}$$

$\tilde{S}$は normal, ψは純非分離, $\tilde{\pi}$の general fibre Fは特異点 Pをもつ. さらに Pにおける $\tilde{S}$の formal parameters x, y 及び $\tilde{\pi}(P)$ における $\tilde{B}$の formal parameter t をうまくえらべば, $\tilde{\pi}$のPにおける completion は次のいずれかの形にかける.

(i)　$t = x^p - y^{m+1}$　　　$m+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$

(ii)　$t = x^p + y^q + x^{pm} y$　　　$q = p^\nu \ (\nu > 0),\ m > 0$.

特に例(2)において, fの generic fibre の特異点 $\tilde{P}$が $k(T)$の degree pの純非分離拡大上で解消されるなら, $\tilde{P}$の specialization として得られる fの general fibre 上の特異点 Pにおいて, fは上の(i)又は(ii)によって書きあらわされる.

1991年4月24日

可解格子模型, Dynkin 図形上の flat connection, そして作用素環

河東泰之(東大・理)

Jonesによって創始された subfactor の index 理論の自然な発展として、Ocneanu による paragroup の理論がある。これは factor (ある種の simple な無限次元 algebra) の inclusion に関する Galois 群の類似として現れるもので、有限群の適当な quantization と言ってよい。これは、グラフに、ある種の代数的構造をともなったもので、グラフの Perron-Frobenius 固有値の2乗が Jones index (群の位数の quantization) になっている。ここで現れる構造は可解格子模型によく似ており、次のような対応がある。

paragroup	lattice model
connection	Boltzmann weight
unitarity	the first inversion relation
commuting square	crossing symmetry
flatness	?

ここで、flatness というのが作用素環で重要な条件であるが、格子模型では対応はないようである。(ある種のいい条件下では Yang-Baxter 方程式が flatness に対応する。)

Flatness に関し、Ocneanu は、(1) D_{2n} 上には flat connection が一つに定まる、(2) D_{2n+1} 上には flat connection はない、(3) $\tilde{D}_{2n}$ 上には flat connection が一つだけある、とのアナウンスを行ったが、証明はない。Orbifold model に類似の考えを用い、上の(1)、(2)を証明し、(3)については上の主張は誤りで、本当は $n-2$ 個あることを証明した。

On the Levi condition for first order systems with characteristics of constant multiplicity

WAICHIRO MATSUMOTO

We consider the Cauchy problem in $\mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^\ell$ for a first order system:

$$
(1) \qquad \begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u \equiv D_t u - A(t,x,D_x)u \\ \qquad \equiv D_t u - \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} A_i(t,x)D_i u - B(t,x)u = f(t,x)\,, \\ u(t_\circ,x) = u_\circ(x)\,. \end{cases}
$$

We consider the Levi condition on $P(t,x,D_t,D_x)$ assuming the followings.

ASSUMPTION 0. (Constant multiplicity of characteristics)

The equation on λ : $\det(\,\lambda I - \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t,x)\xi_i\,) = 0$ *has the real roots* $\lambda_j(t,x,\xi)$ *of constant multiplicity* m_j *on* $\mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^\ell \times (\mathbb{R}_\xi^\ell \setminus O)$ ($1 \le j \le d$ *and* $\sum_{j=1}^{d} m_j = N$).

and

ASSUMPTION 1. (Real analyticity of coefficients)

All coefficients of $P(t,x,D_t,D_x)$ *are real analytic.*

In [1], a normal form of systems in (real) meromorphic symbol class S_M was given.

THEOREM 1. (= Theorem 3.1 in [1]) *Let* $P(t,x,D_t,D_x) = D_t - A(t,x,D_x)$ *be an* $N \times N$ *matrix with entries of partial differential operators of order one. We suppose that* $P(t,x,D_t,D_x)$ *satisfies Assumptions 0 and 1. Then, there exist* $\{r_j\}_{1\le j\le d}$, $\{n_{jk}\}_{1\le j\le d, 1\le k\le r_j}$ ($\sum_{k=1}^{r_j} n_{jk} = m_j$) *and an invertible matrix* $N(t,x,\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(t,x,\xi)$ *in* S_M *such that*

$$(2)\quad N^{-1}\circ P\circ N = \oplus_{1\le j\le d}\oplus_{1\le k\le r_j} Q^{jk}(t,x,D_t,\xi),$$

$$Q^{jk}(t,x,D_t,\xi) = I_{n_{jk}}\,(D_t - \lambda_j(t,x,\xi)) - D^{jk}(t,x,\xi),$$

$$D^{jk}(t,x,\xi)\in Mat(n_{jk}; S^1_M(\widehat{\omega})), \qquad D^{jk} = \sum_{i=0}^{\infty} D^{jk}_i(t,x,\xi),$$

$$D^{jk}_0 = J_{n_{jk}}\,\|\xi\|, \qquad D^{jk}_i(t,x,\xi) = \begin{pmatrix} & 0 & \\ b^{jk}(1), & \cdots\cdots, & b^{jk}(n_{jk}) \end{pmatrix}, \qquad (i\ge 1),$$

where J_q *is the Jordan matrix of order* q *with zero eigenvalue.*

Now, we state our result.

THEOREM. *Let* $A(t,x,D_x)$ *be a* $N\times N$ *matrix with entries of partial differential operators of order one. We suppose Assumptions 0 and 1. The following (a),(b) and (c) are equivalent.*

(a) *The Cauchy problem (1) for* $P(t,x,D_t,D_x)$ *is well posed in* C^∞.

(b) *In the normal form of* $P(t,x,D_t,D_x)$ *in* S_M *in Theorem 1, the following relations hold:*

$$(3)\quad \text{Order of } b^{jk}(q) \leqq -(n_{jk}-q),$$

$$(1\le j\le d,\ 1\le k\le r_j,\ 1\le q\le n_{jk}-1).$$

(c) *The system* $P(t,x,D_t,D_x)$ *can be reduced to a first order hyperbolic system with a diagonal principal part by a similar transformation in the meromorphic formal symbol class* S_M.

[1] ——, *Normal form of systems of partial differential and pseudo-differential operators in formal symbol classes and applications* (to appear).

[2] W.Matsumoto and H.Yamahara, *On the Cauchy Kowalevskaya theorem for systems* (to appear).

量子群上の定数係数微分作用素の発見

鳥取大学 教養部　　若山 正人

一般線型群 $GL(n)$ の座標環の q-deformation を座標環にもつ量子群 $GL_q(n)$ に於て，座標に関する微分とはどんな物であるか，という自然な問いかけに，一つの有力な解答を提出することを目的とした．標題の用語"定数係数の微分作用素"とは，量子群 $GL_q(n)$ の座標環（函数環）の生成元を t_{ij}（これらに非可換な relation が入る）としたとき $\partial/\partial t_{ij}$ と書かれるべき対象のことである．詳しいことは，下記の論文（[NUW1] 等）を参考していただくことにして，簡単に結論を述べたい．

まず，目的の定数係数微分作用素の定義方法は，$GL_q(n)$ の座標環と（Hopf 代数として）双対的な関係にあるリー環 $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環の q-deformation $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の $GL_q(n)$ の函数環への，左右両方からの自然な作用と両立するように導入する．つまり，polarization operator（偏極作用素）を考えて“逆解き”するのである．この事をここでは“発見”と呼んだ．非可換性の為 compatibility は始めから明らかと言うのではないが，結果として旨くゆく．

ところで，$GL_q(n)$ の座標環（函数環）の生成元の満たす関係式の非可換度は高いが，それらを縦横に標準的に行列形で並べたときの列（或は，行）達はそれぞれ q-可換になっている．我々の見つけた $\partial/\partial t_{ij}$ は，この様な列（或は，行）の生成する多項式環に制限したときは，q-可換性を考慮したスタンダードな q-差分作用素を与えている．また，ある意味での Leibniz 則をも備えている．更には，不変式論で重要な役割を果たしている“Capelli 恒等式”の量子群版および，その系として“量子 b-函数”に対する“Cayley の公式”の成立も言える．以上，定式化から結果の証明に至るまで，すべて量子 R-行列（Yang-Baxter 方程式の A-型の解）を用いた枠組みで議論した．

さて，談話会の時点では，上に述べたことに大体尽きるが，その後の研究により $\partial/\partial t_{ij}$ のより深い意味（先程述べた“逆解き”以上のものであり，それは単に $GL_q(n)$ にとどまるものではないことなど）が解明されて，それとともにその応用が得られてきている [N2],[NUW2]．

必要最小限の参考文献のみを掲げておくが，より詳しいことは，例えば [W] の References を参照して戴きたい．また，これらの研究は，野海正俊氏，梅田 亨氏との共同研究に基づくものであることをお断りしておきたい．最後になったが，談話会の前後の滞在中お世話になった北大数学教室の方々にお礼を申し上げたい．

REFERENCES

[HW] T. Hibi and M. Wakayama, *A q-analogue of Capelli's identity for $GL_q(2)$*, to appear in Adv. in Math..

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[J] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[N1] M. Noumi,「現代の母函数」に向けて, in "論集「現代の母函数」," 1991, pp. 1–29.

[N2] ―――――, Private communication on "the quantum Grassmannian and Gelfand's hypergeometric functions".

[NUW1] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$*, Preprint, University of Tokyo.

[NUW2] ――――――――, *A quantum dual pair and related Capelli's identity*, in preperation.

[RTF] N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtadzyan and L.D. Faddeev, *Quantization of the Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.

[U] T. Umeda, １００年目の *Capelli identity*, to appear in 数学（日本数学会編）.

[W] M. Wakayama, 量子群上の"定数係数微分作用素", in "第３０回実函数論・第２９回函数解析学合同シンポジウム講演集録 ," 1991, pp. 113–125

（１９９２年5月２５日提出）

北海道大学 数学教室 談話会　1991年5月15日

正則グラフと非正則グラフに対するSelberg跡公式とその応用.

岡山理科大(理学部)　橋爪道彦.

はじめに.

グラフとは位相幾何における1次元単体的複体のことである。そのスペクトルとはグラフの隣接行列の固有値を意味する。グラフの構造とそのスペクトルとの関係については、グラフ理論の内部において様々な結果が得られているが、最近になってリーマン多様体のスペクトル幾何との関連を意識した研究が登場するようになってきた。またそれと共に離散群上の調和解析と関連して無限グラフのスペクトルに関する研究も発展しつつある。

ここではリーマン多様体のスペクトル幾何における中心的テーマの1つであるSelberg跡公式のグラフ版について最近得られた結果について話す。本来のSelberg跡公式はコンパクトリーマン面上において、その閉測地線の長さ分布とラプラス作用素の固有値分布とを結びつける等式である。我々はコンパクトリーマン面の代りに標題のグラフを考え、閉測地線の代りにグラフ上のサイクルをとり、ラプラス作用素の代りにグラフの隣接行列を考えてSelberg跡公式のグラフ類似

物を与える。その応用として与えられた長さをもつサイクルの個数を具体的に決定する公式を導びく。またグラフ版 Selberg ゼータ関数に関する等式を与える。本来の跡公式の導出において，コンパクトリーマン面の普遍被覆である双曲平面上の調和解析が重要な役割を果したが，全く同様に我々の場合においても上記グラフの普遍被覆である正則樹木や半正則樹木上の調和解析が本質的な役割を果す。

1°) グラフに関する諸定義

はじめにグラフの正確な定義を Serre に従って述べておく。

定義　$M=(V, E, i, t, \iota)$ がグラフ

$\Leftrightarrow$
- i) V, E : 可算集合
- ii) $i, t : E \longrightarrow V$ 写像
- iii) $\iota : E \rightarrow E$ 全単写像 $(\iota \neq 1, \iota^2=1)$; $a \in E$ に対し以下 $\iota(a) = a^{-1}$ と記す。
- iv) 各 $a \in E$ に対し次が成りたつ：
  $i(a^{-1}) = t(a)$, $t(a^{-1}) = i(a)$。

$M=(V, E, i, t, \iota)$ をグラフとする。$V=V(M)$ を頂点集合，$E=E(M)$ を(有向)辺集合と呼ぶ。辺 $a \in E$ に対し $i(a)$ をその始点，$t(a)$ をその終点，a^{-1} をその逆辺と呼ぶ。各頂点 $x \in V$ に対し，x を始点とする辺の個数を $\deg x$ で表わし頂点 x の次数という。各頂点の次数が一定でその値が $(q+1)$ であるグラフを $(q+1)$―正則グラフと呼ぶ。各頂点 $x, y \in V$ に対し x を始点，y を

終点とする辺の個数を $A(x,y)$ で表わす。V 上の複素数値関数全体のなす線型空間を $\mathbb{C}^V$ と書く。$\mathbb{C}^V$ 上の線型作用素(行列) $A(M)$ を

$$A(M)f(x) = \sum_{y\in V} A(x,y)f(y), \quad x\in V,\ f\in\mathbb{C}^V$$

で定義し、グラフ M の隣接行列と呼ぶ。$\deg M = \sup\{\deg x ; x\in V\}$ が有限のとき $A(M)$ は $\ell^2(V)=\{f\in\mathbb{C}^V ; \sum_{x\in V}|f(x)|^2<+\infty\}$ 上の有界自己共役作用素を定める。$A(M)$ のスペクトル集合を $\mathrm{Spec}\, M$ で表わしグラフ M のスペクトル(集合)と呼ぶ。

定義 (i) グラフ $M=(V,E,i,t,\tau)$ が頂点クラス V_0, V_1 をもつ2部グラフ

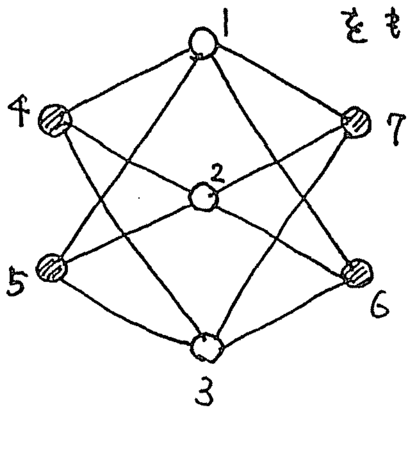
$\Leftrightarrow$ i) $V = V_0 \cup V_1$ (disjoint union),

ii) $x\in V$ に対し x と辺で結ばれる頂点の集合を $N(x)$ で表わすとき $x\in V_0$ ならば $N(x)\subset V_1$, $y\in V_1$ ならば $N(y)\subset V_0$ が成りたつ。

(ii) 頂点クラス V_0, V_1 をもつ2部グラフが (q_0+1, q_1+1)-半正則グラフ

$\Leftrightarrow$ 各 $x\in V_0$ に対し $\deg x = q_0+1$ (一定), 各 $y\in V_1$ に対し $\deg y = q_1+1$ (一定) が成りたつ。

例 M : 下図は頂点クラス $V_0=\{1,2,3\}$, $V_1=\{4,5,6,7\}$ をもつ $(4,3)$半正則グラフ; $V=V_0\cup V_1$, 辺集合は



a_1 : $i(a_1)=1$, $t(a_1)=4$

a_2 : $i(a_2)=1$, $t(a_2)=5$

a_3 : $i(a_3)=1$, $t(a_3)=6$

a_4 : $i(a_4)=1$, $t(a_4)=7$

a_5 : $i(a_5)=2$, $t(a_5)=4$　　a_9 : $i(a_9)=3$, $t(a_9)=4$

a_6 : $i(a_6)=2$, $t(a_6)=5$　　a_{10} : $i(a_{10})=3$, $t(a_{10})=5$

a_7 : $i(a_7)=2$, $t(a_7)=6$　　a_{11} : $i(a_{11})=3$, $t(a_{11})=6$

a_8 : $i(a_8)=2$, $t(a_8)=7$　　a_{12} : $i(a_{12})=3$, $t(a_{12})=7$

とおくとき　$E=\{a_1^{\pm1}, a_2^{\pm1}, \cdots, a_{12}^{\pm1}\}$ である。

定義　$M=(V,E,i,t,\iota)$ をグラフとする。

(i) 辺列 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ が散歩道(walk)

$\Leftrightarrow$ $i(a_{j+1}) = t(a_j)$ $(1 \leq j \leq n-1)$ が成りたつ.

(ii) 散歩道 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ に対し $i(\alpha) = i(a_1)$ をその始点，$t(\alpha) = t(a_n)$ をその終点，$l(\alpha) = n$ をその長さという。

(iii) 散歩道 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ が道(path) = あともどりのない散歩道

$\Leftrightarrow$ $a_{j+1} \neq a_j^{-1}$ $(1 \leq j \leq n-1)$ が成りたつ。

(iv) $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$, $\beta = b_1 b_2 \cdots b_m$ を散歩道とする。$t(\alpha) = i(\beta)$ のときその積 $\alpha \circ \beta$ を $\alpha \circ \beta = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ で定義する。

(v) 閉道 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ (即ち $i(\alpha)=t(\alpha)$ なる道) が無駄がないとは $\alpha \circ \alpha = \alpha^2$ も閉道となるときをいう。

(vi) 無駄のない閉道 α が原始的 (primitive) とは，α が他の閉道 β を用いて $\alpha = \beta^m$ $(m \geq 2)$ の形に決して表わせないことである。

(vii) 無駄のない閉道 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ の cyclic shift $S\alpha$ とは $S\alpha = a_2 a_3 \cdots a_n a_1$ で与えられる閉道のことである。

(viii) 2つの無駄のない閉道 α と β が同値とは $\beta = S^k \alpha$ と表わされるときをいう。

(ix) 無駄のない閉道 α の定める同値類 $[\alpha]$ を，αの定めるサイクルと呼ぶ。 $l([\alpha]) = l(\alpha)$ とおき サイクル $[\alpha]$ の長さを定める。

(x) $[M](l)$ = 長さ l のサイクルの集合, $[M]^{\sharp}(l)$ = 長さ l の原始的サイクルの集合.

(注) 2部グラフでは 閉道の長さは つねに偶数である。

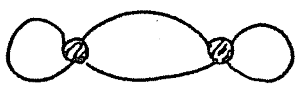
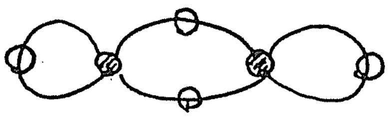
M上のサイクルとは M上の 自由ホモトピー類 に他ならぬ。

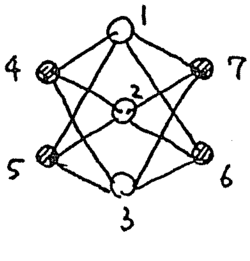
定義 (i) グラフ M の重心細分 $\hat{M}$ とは $V_0 = V(M)$, $V_1 = \{$辺の重心$\}$ とおいて得られる 2部グラフ のこと。

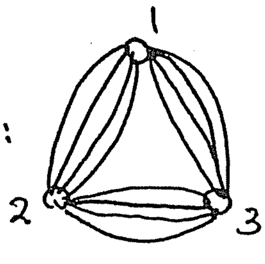
(ii) 2部グラフ M が与えられたとき，そのfoldings M^0, M^1 とは次で与えられるグラフのことである。

$V(M^0) = V_0$, $E(M^0) = \{$始点,終点とも V_0 に属す長さ2の道$\}$

$V(M^1) = V_1$, $E(M^1) = \{$始点,終点とも V_1 に属す長さ2の道$\}$.

例  の重心細分: 

例 

の folding M^0 : 

(注) M (グラフ) の重心細分 $\hat{M}$ の folding M^0 は元のMに等しい。

$[M]^{\sharp}(l)$ と $[\hat{M}]^{\sharp}(2l)$ は 1対1 に対応する。

M が $(q+1)$-正則グラフ ならば $\hat{M}$ は $(q+1, 2)$-半正則グラフ。

定理1（半正則グラフに対するSelberg跡公式）

M は頂点クラス V_0, V_1 をもつ (q_0+1, q_1+1)-半正則連結2部グラフとする。$q = q_0 q_1$ とおく。非負整数の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の台有限な関数の空間を $C_0(\mathbb{Z}_+)$ で表わす。$g \in C_0(\mathbb{Z}_+)$ に対しそのフーリエ変換 $\hat{g}$ を

$$\hat{g}(t) = g(0) + \sum_{n \geq 1} g(n)(t^n + t^{-n}) \qquad (t \in \mathbb{C}^\times)$$

で定義する。また $g \in C_0(\mathbb{Z}_+)$ の逆Abel変換 $A_0^{-1} g \in C_0(\mathbb{Z}_+)$ を

$$A_0^{-1} g(n) = q^{-n/2} \left\{ g(n) - (q_1+1)^{-1} \sum_{j \geq 1} \left(q-1+(q_0-q_1)(-q_1)^j \right) q^{-j/2} g(n+j) \right\}$$

で定める。$k \geq 1$ に対し長さ $2k$ の M 上の原始サイクルの集合を $[M]^*(2k)$ で表わし

$$N(n) = \sum_{k \mid n} k \left| [M]^*(2k) \right| \qquad (n \geq 1)$$

とおく。M^0 を M の folding とし $\mathrm{Spec}\, M^0 \ni \lambda$ に対し $t(\lambda) \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\lambda - q_1 + 1 = q^{1/2}(t + t^{-1})$$

の根の1つとする。このとき次の等式が成立する。

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, M^0} \hat{g}(t(\lambda)) = |V_0| (A_0^{-1} g)(0) + \sum_{n \geq 1} q^{-n/2} N(n) g(n).$$

（注）左辺は $t(\lambda)$ のとり方によらず $\lambda \in \mathrm{Spec}\, M^0$ にのみ依存する。

系1. 多項式列 $(F_k(\lambda))_{k\geq 0}$ を

$$F_0(\lambda)=1,\quad F_1(\lambda)=\lambda,\quad F_2(\lambda)=\lambda^2-2q,\quad F_{k+1}(\lambda)=\lambda F_k(\lambda)-q F_{k-1}(\lambda)\quad(k\geq 2)$$

即ち $$\sum_{k\geq 0} F_k(\lambda) z^k = \frac{1-qz^2}{1-\lambda z+qz^2}$$

で定めるとき $n\geq 1$ に対し

$$|[M]^*(2n)| = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\mu(n/k)\left\{\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}M^0} F_k(\lambda-q_1+1) + \frac{|V_0|}{q_1+1}\left(q-1+(q_0-q_1)(-q_1)^k\right)\right\}$$

が成立する。ここに μ はメービウス関数を表わす。

系2 頂点クラス V_0, V_1 をもつ (q_0+1, q_1+1)-半正則グラフ M に対しそのゼータ関数を

$$\zeta_M(z) = \prod_{[\delta]\in[M]^*}\left(1-z^{\ell(\delta)/2}\right)^{-1}$$

で定義する。ここに $[M]^*$ は M 上の素始的サイクルの集合である。このとき

$$\zeta_M(z) = (1-z)^{|V|-|E|/2}(1+q_1 z)^{|V_0|-|V_1|}\prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}M^0}\left(1-(\lambda-q_1+1)z+qz^2\right)^{-1}$$

が成立する。

(注) 系2は早稲田大の橋本氏が跡公式を使わず別の方法ですでに証明している結果である。ここでは跡公式の1つの応用として系2が導かれることを示す。

定理1 ⇒ 系1 の証明.

$n \geq 1$ を固定し $g_n \in C_0(\mathbb{Z}_+)$ を $g_n(m) = q^{n/2}\delta_{m,n}$ $(m \geq 0)$ で定める。これを定理1の跡公式に用いる。g_n の定義より

$$\sum_{m \geq 1} q^{-m/2} N(m)\, g_n(m) = N(n)$$

は明らか。$\hat{g}_n(t(\lambda)) = q^{n/2}\left(t(\lambda)^n + t(\lambda)^{-n}\right)$ であるが、$t(\lambda)$ が $q^{1/2}(t+t^{-1}) = \lambda - q_1 + 1$ の1根であることから容易に

$$\hat{g}_n(t(\lambda)) = F_n(\lambda - q_1 + 1)$$

を得る。また $(A_0^{-1} g_n)(0) = -(q_1+1)^{-1}\left(q-1+(q_0-q_1)(-q_1)^n\right)$ も明らか。
以上を跡公式に代入すれば

$$N(n) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, M^0} F_n(\lambda - q_1 + 1) + \frac{|V_0|}{q_1+1}\left(q-1+(q_0-q_1)(-q_1)^n\right)$$

を得る。所で $N(n) = \sum_{k|n} k\,|[M]^*(2k)|$ だから メービウス反転公式により系が示される。//

定理1 ⇒ 系2 の証明.

先づ 定理1は $C_0(\mathbb{Z}_+)$ をふくむより広いclassの関数(急減少関数)に対しても成立する事を注意しておく。
$z \in \mathbb{C}$ に対し $g_z : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ を $g_z(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ q^{n/2} z^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$ で定める。これを跡公式に用いる。

$$\hat{g}_z(t) = \frac{d}{dz} \log\left(1 - q^{1/2}(t+t^{-1})z + qz^2\right)^{-1},$$

$$A_0^{-1} g_z(n) = \frac{1}{z}\left\{ \frac{(1-qz^2)z^n}{(1-z)(1+q_1 z)} - \delta_{0,n} \right\} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\sum_{n \geq 1} q^{-n/2} g_z(n) N(n) = \sum_{n \geq 1} N(n) z^{n-1}$$

である。所で $\log \zeta_M(z) = -\sum_{[\delta]\in[M]^*} \log(1-z^{\ell(\delta)/2})$，従って

$$\frac{d}{dz}\log \zeta_M(z) = \sum_{[\delta]\in[M]^*} \frac{\ell(\delta)/2\, z^{\ell(\delta)/2-1}}{1-z^{\ell(\delta)/2}} = \sum_{[\delta]\in[M]^*}\sum_{m\geq 1} \ell(\delta)/2\, z^{m\ell(\delta)/2-1}$$

$$= \sum_{\ell\geq 1}\sum_{[\delta]\in[M]^*(2\ell)}\sum_{m\geq 1} \ell z^{m\ell-1} = \sum_{\ell,m\geq 1} \ell\,|[M]^*(2\ell)|\, z^{m\ell-1}$$

$$= \sum_{n\geq 1} N(n) z^{n-1}$$

であり，

$$|V_0|(d_0^{-1} g_z)(0) = |V_0|\frac{q-1}{q_1+1}\left(\frac{-1}{1-z}\right) + |V_0|\frac{q_0-q_1}{q_1+1}\left(\frac{q_1}{1+q_1 z}\right)$$

である。更に $(q_0+1)|V_0| = (q_1+1)|V_1| = |E|/2$ ，$|V|=|V_0|+|V_1|$ を用いると

$$|V_0|(d_0^{-1} g_z)(0) = (|E|/2-|V|)\left(\frac{-1}{1-z}\right) + (|V_0|-|V_1|)\left(\frac{q_1}{1+q_1 z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\log (1-z)^{|E|/2-|V|}(1+q_1 z)^{(|V_0|-|V_1|)}$$

である。以上を跡公式に用いると

$$\frac{d}{dz}\zeta_M(z) = \frac{d}{dz}\log \prod_{\lambda\in \mathrm{Spec}\, M^0} (1-(\lambda-q_1+1)z+qz^2)^{-1}$$

$$-\frac{d}{dz}\log\left[(1-z)^{|E|/2-|V|}(1+q_1 z)^{|V_0|-|V_1|}\right]$$

を得る。これより系2は容易に従う。//

$(q+1)$-正則グラフ M に対する跡公式は M の重心細分 $\hat{M}$

を考えると $\hat{M}$ は $(q+1,2)$-半正則グラフであり しかも $\hat{M}^0=M$ であることから 定理1の $q_0=q$, $q_1=1$ の場合に帰着される。
更に $[M]^*(k)=[\hat{M}]^*(2k)$ $(k\geq 1)$ に注意すると次を得る。

定理2. (正則グラフに対するSelberg跡公式)
M を $(q+1)$-正則グラフとする。$g\in C_0(\mathbb{Z}_+)$ に対しその逆Abel変換 $A^{-1}g\in C_0(\mathbb{Z}_+)$ を

$$(A^{-1}g)(n)=q^{-n/2}\{g(n)-(q-1)\sum_{j\geq 1}q^{-j}g(n+2j)\}$$

で与える。また

$$N(n)=\sum_{k|n}k\,|[M]^*(k)| \qquad (n\geq 1)$$

とおく。各 $\lambda\in\mathrm{Spec}\,M$ に対し $t(\lambda)\in\mathbb{C}^\times$ を

$$\lambda=q^{1/2}(t+t^{-1})$$

の1根とする。このとき次の等式が成立する。

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}\,M}\hat{g}(t(\lambda))=|V|(A^{-1}g)(0)+\sum_{n\geq 1}q^{-n/2}N(n)g(n).$$

系3. $(F_k(\lambda))_{k\geq 0}$ を系1で与えられた多項式列とするとき $(q+1)$-正則グラフ M の長さ n の素始サイクルの個数は

$$|[M]^*(n)|=\frac{1}{n}\sum_{k|n}\mu(n/k)\{\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}\,M}F_k(\lambda)+|V|(q-1)(1+(-1)^k)/2\}$$

で与えられる。

以下 定理2の証明 の概略を述べる。定理2は 定理1の直接の系として得られるが 以下述べるように直接証明することもできる。なお定理1 の証明は 定理2のそれと方針は同じであるが ここでは省略する。

定理2 の証明.

$M=(V,E,i,t,\tau)$ を $(q+1)$-正則有限連結グラフとする。従って位相幾何における1次元単体的複体である。Mの普遍被覆は $(q+1)$-正則樹木 T_{q+1} であり, Mの基本群を Γ とするとき M は商グラフ $\Gamma\backslash T_{q+1}$ に他ならぬ。Γは T_{q+1} に isometry として自由に作用している。T_{q+1} の頂点集合を $X\ (=V(T_{q+1}))$ とおく。またΓのXにおける基本領域をDで表わす。$\{\Gamma\}$でΓの共役類の集合を表わすとき Mのサイクルの集合$[M]$と$\{\Gamma\}-\{1\}$との間には自然な1対1対応が存在する。以下サイクルと共役類を同一視する。また $l^2(V)$ は

$$\{\phi\in\mathbb{C}^X;\ \phi(\gamma\cdot x)=\phi(x)\quad(\gamma\in\Gamma),\ \sum_{x\in D}|\phi(x)|^2<+\infty\}$$

と自然に同一視できる。

$g\in C_0(\mathbb{Z}_+)$ に対し $f=A^{-1}g\in C_0(\mathbb{Z}_+)$ とおく。$K_f\in \mathrm{End}(l^2(V))$ を

$$(K_f\phi)(x)=\sum_{y\in D}K_f(x,y)\phi(y)$$

但し

$$K_f(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f(d(x,\gamma\cdot y))$$

で定める。ここに $d(x,y)$ はX上のグラフ距離を表わす。この積分型作用素 K_f のトレースを2通りの方法で計算する。

(1) 幾何学的方法.

$\gamma\in\Gamma$ に対し その中心化部分群 を $\Gamma_\gamma=\{\sigma\in\Gamma;\ \sigma^{-1}\gamma\sigma=\gamma\}$ とおく。
また D_γ で Γ_γ の X における基本領域 を表わす。このとき

$$\mathrm{Tr}(K_f)=\sum_{x\in D}K_f(x,x)=\sum_{x\in D}\sum_{\gamma\in\Gamma}f(d(x,\gamma\cdot x))$$

$$=|D|f(0)+\sum_{x\in D}\sum_{\{\gamma\}\in\{\Gamma\}-\{1\}}\sum_{\beta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}f(d(x,\beta^{-1}\gamma\beta\cdot x))$$

$$=|V|f(0)+\sum_{\{\gamma\}\in\{\Gamma\}-\{1\}}\sum_{x\in D_\gamma}f(d(x,\gamma\cdot x))$$

となる。 $\gamma\neq 1$ に対し

$$l(\gamma)=\min\{d(x,\gamma\cdot x):x\in X\}$$

とおくと $l(\gamma)$ は $\{\gamma\}$ にのみ依り, 対応するサイクルの長さに等しい。

$$X_\gamma=\{y\in X;\ d(y,\gamma\cdot y)=l(\gamma)\}$$

とおく。X_γ は T_{q+1} 内の T_2 と同型な部分グラフの頂点集合であり, Γ_γ は X_γ に自由に作用している。 これより Γ_γ は無限巡回群 で その生成元を $\delta\in\Gamma$ とすると δ は Γ の原始元で $\gamma=\delta^m$ $(m\geq 1)$ と表わされ, しかも $\Gamma_\gamma=\Gamma_\delta$ かつ $l(\gamma)=m\,l(\delta)$ である。更に $X_\gamma=X_\delta$ にも注意する。C_γ で Γ_γ の X_γ における基本領域 を表わすとき $C_\gamma=C_\delta$ であり $|C_\gamma|=|C_\delta|=l(\delta)$ である。 また写像 $\pi_\gamma:X\longrightarrow X_\gamma$ を $d(x,\pi_\gamma(x))=d(x,X_\gamma)$ $(x\in X)$ で定めよう。 このとき 各 $x\in X$ に対し

$$d(x,\gamma\cdot x)=l(\gamma)+2\,d(x,\pi_\gamma(x))$$

が成りたつ。 π_γ が Γ_γ の作用と可換なことから Γ_γ の X に

おける基本領域 D_γ として

$$D_\gamma = \bigcup_{y \in C_\gamma} \pi_\gamma^{-1}(y)$$

がとれる事に注意する。以上の準備のもとに $\gamma \neq 1$ のとき

$$\sum_{x \in D_\gamma} f(d(x, \gamma \cdot x)) = \sum_{y \in C_\gamma} \sum_{x \in \pi_\gamma^{-1}(y)} f(\ell(\gamma) + 2d(x, y))$$

$$= \sum_{y \in C_\gamma} \sum_{j \geq 0} \sum_{x \in \pi_\gamma^{-1}(y),\, d(x,y) = j} f(\ell(\gamma) + 2j)$$

$$= \sum_{y \in C_\gamma} \left\{ f(\ell(\gamma)) + \sum_{j \geq 1} (q-1) q^{j-1} f(\ell(\gamma) + 2j) \right\}$$

$$= |C_\gamma| \left\{ f(\ell(\gamma)) + (1 - q^{-1}) \sum_{j \geq 1} q^j f(\ell(\gamma) + 2j) \right\}$$

を得る。そこで $f \in C_0(\mathbb{Z}_+)$ に対しその Abel 変換 Af を

$$(Af)(n) = q^{n/2} \left\{ f(n) + (1 - q^{-1}) \sum_{j \geq 1} q^j f(n + 2j) \right\} \qquad (n \geq 0)$$

で定義する。定理2中で与えた逆 Abel 変換はこの変換の逆変換であることが容易に確められる。Af を用いると

$$\sum_{x \in D_\gamma} f(d(x, \gamma \cdot x)) = |C_\gamma| q^{-\ell(\gamma)/2} (Af)(\ell(\gamma)) = |C_\gamma| q^{-\ell(\gamma)/2} g(\ell(\gamma))$$

を得る。ここに $f = A^{-1} g$ を用いた。以上より

$$\mathrm{Tr}(K_f) = |V| (A^{-1} g)(0) + \sum_{\{\gamma\} \in \{\Gamma\} - \{1\}} |C_\gamma| q^{-\ell(\gamma)/2} g(\ell(\gamma))$$

である。所で $\{\Gamma\}^*$ で Γ の原始共役類の集合を表わすとき

$$\{\Gamma\} - \{1\} = \bigcup_{\{\delta\} \in \{\Gamma\}^*} \bigcup_{m \geq 1} \{\delta^m\}$$

であり， $|C_{\delta^m}| = l(\delta)$ ， $l(\delta^m) = m\,l(\delta)$ を用いると

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} K_f &= |V|A^{\tau}g(0) + \sum_{m\geq 1}\sum_{[\delta]\in\{\Gamma\}^*} l(\delta)\, q^{-m l(\delta)/2}\, g(m\,l(\delta)) \\
&= |V|A^{\tau}g(0) + \sum_{m\geq 1}\sum_{l\geq 1}\sum_{[\delta]\in[M]^*(l)} l\, q^{-ml/2}\, g(ml) \\
&= |V|A^{\tau}g(0) + \sum_{n\geq 1}\Bigl(\sum_{l\mid n} l\,|[M]^*(l)|\Bigr) q^{-n/2}\, g(n) \\
&= |V|A^{\tau}g(0) + \sum_{n\geq 1} N(n)\, q^{-n/2}\, g(n)
\end{aligned}$$

となり 定理2の等式の右辺が得られた。

ロ) 解析的方法.

$$\begin{aligned}
(K_f\phi)(x) &= \sum_{y\in D} K_f(x,y)\,\phi(y) \\
&= \sum_{y\in D}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(d(x,\gamma\cdot y))\,\phi(\gamma\cdot y) \\
&= \sum_{y\in X} f(d(x,y))\,\phi(y) \\
&= \sum_{n\geq 0}\ \sum_{y\,:\,d(x,y)=n} f(d(x,y))\,\phi(y) \\
&= \sum_{n\geq 0} f(n)\,(A_n\phi)(x)
\end{aligned}$$

である。ここで

$$(A_n\phi)(x) = \sum_{y\in X\,:\,d(x,y)=n} \phi(y)$$

とおいた。 特に A_1 は T_{q+1} の隣接作用素であり その $l^2(V)$ への制限は M の隣接行列に他ならぬ。即ち

$$A_1|\ell^2(V) = A(M)$$

である。T_{q+1} 上の調和解析でよく知られているように 多項式列 $(P_n(\lambda))_{n\geq 0}$ を $P_0(\lambda)=1$, $P_1(\lambda)=\lambda$, $P_2(\lambda)=\lambda^2-(q+1)$, $P_{n+1}(\lambda)=\lambda P_n(\lambda)-qP_{n-1}(\lambda)$ $(n\geq 2)$ で定めれば

$$A_n = P_n(A_1) \qquad (n\geq 0)$$

が成立する。従って

$$\mathrm{Tr}(A_n|\ell^2(V)) = \mathrm{Tr}(P_n(A_1)|\ell^2(V)) = \mathrm{Tr}\, P_n(A(M))$$
$$= \sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}\, M} P_n(\lambda)$$

である。ゆえに

$$\mathrm{Tr}(K_f) = \sum_{n\geq 0} f(n)\,\mathrm{Tr}(A_n|\ell^2(V))$$

$$= \sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}\, M}\ \sum_{n\geq 0} f(n)P_n(\lambda)$$

が成立する。所で T_{q+1} 上の調和解析の結果から

$$\sum_{n\geq 0} f(n)P_n(\lambda) = (\mathcal{A}f)^{\wedge}(t(\lambda))$$

が知られている。$\mathcal{A}f = g$ より

$$\mathrm{Tr}\, K_f = \sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}\, M} \hat{g}(t(\lambda))$$

が導かれる。これは定理２の等式の左辺に他ならない。//

完備非コンパクト多様体間の調和写像の非存在定理について

立川　篤　(静岡大学教養部)

M^m, N^n をリーマン多様体とする。写像 $U : M^m \to N^n$ に対して $p \in M^m$ における U のエネルギー密度 $e(U)(p)$ を

$$e(U)(p) = \frac{1}{2}\|du\|^2$$

により定義する。ただし、$\| \ \|$ は $T_p^*M \otimes T_{U(p)}N$ のテンソル積ノルムを表す。さらに、M^m の有界領域 Ω に対して U の Ω 上でのエネルギー汎関数 $E(U;\Omega)$ を次のように定義する。

$$E(U;\Omega) = \int_\Omega e(U)d\mu$$

ただし、$d\mu$ は M 上の体積要素を表す。$U : M^m \to N^n$ が C^2級の写像でエネルギー汎関数の Euler-Lagrange 方程式の解となっているとき U を調和写像と呼ぶ。M^m がコンパクトな場合に対しては、楕円型方程式の解に対するアプリオリ評価を用いた存在定理、変分解析の直接法、heat flow を用いた方法等により調和写像の存在について多くの結果が得られている。しかし、M^m が非有界な多様体である場合、M^m 全体で定義された調和写像についてはあまり多くは知られていない。存在定理としては Li-Tam [2] による $\mathbf{H}^m$ から $\mathbf{H}^n$ への、また Choi-Treibergs [1] による $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{H}^2$ のなかへの調和写像の存在定理等が知られているだけである。また一方、調和写像はその名が示すように調和関数の自然な拡張となっているため、例えば Liouville 型定理のような何らかの非存在定理が得られることも期待される。実際、いくつかの Liouville 型定理が証明されている。

ここでは、M^m が極を持つ多様体で、N^n が負曲率を持つアダマール多様体である場合に対して、ある非存在定理を示す。ここで、M^m が極 $p \in M^m$ を持つとは $\exp_p$ が $\mathbf{R}^m$ から M^m への微分同相写像を与えることをいう。従って、この場合 p を中心とする正規座標系が M^m 全体を覆う。また、N^n がアダマール多様体であるとは、N が単連結で断面曲率が非正であることをいう。アダマール多様体はその任意の点を極とすることが知られている。

［定理 1 ］([3])　　M^m を、p を極に持つ多様体とし、$\exp_p$ により M^m 全体に正規座標系 $(x^1, ..., x^m)$ を入れておく。さらに、M^m の点 q における断面曲率の最小値 $k(q)$ が

$$-\min\{k(p), 0\} \leq O(\mathrm{dist}(p,q)^{-2}) \qquad \mathrm{dist}(p,q) \to +\infty$$

を満たし、さらに M^m の計量テンソルが有界であるとする。また、N^n をアダマール多様体とし、断面曲率の上限が負であるとする。このとき、調和写像 $U : M^m \to N^n$ で、$U(p)$ を中心とする正規座標系 $(u^1, ..., u^n)$ と $(x^1, ..., x^m)$ に関する U の表現 $u(x)$ がある正定数ε にたいして、

$$(1) \qquad |x|^2 |D\frac{u(x)}{|u(x)|}|^2 = |x|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha \frac{u^i}{|u|} D_\beta \frac{u^i}{|u|} \geq \varepsilon$$

を満たすようなものは存在しない。

この定理の条件 (1) は Liouville 型定理の条件と違って、U の growth に関するものではなく、原点を中心とした回転方向の非退化性の条件である。

アダマール多様体に対しては、理想境界という無限遠方での境界を考え、そこでの境界値に対する Dirichlet 問題を扱うことが多い。前に述べた Li-Tam [2] の結果は $\mathbf{H}^m$ から $\mathbf{H}^n$ への調和写像に対してこの Dirichlet 問題を解いたものである。一方、Choi-Treibergs [1] の結果では、$\mathbf{H}^2$ の理想境界上に有限個の点をとったときそれらの点の凸包に $\mathbf{R}^2$ が調和写像でうつることを示したもので、また、この場合は $\mathbf{R}^2$ の理想境界から $\mathbf{H}^2$ の理想境界への Dirichlet 条件 φ の像が正の 1 次元ハウスドルフ測度をもつとき、上に述べたような Dirichlet 問題は調和写像にたいしては解けないことも示している。また、ここで述べた定理 1 は、曲率が非負であるかまたは負であっても十分速く 0 に収束するような多様体から負曲率アダマール多様体の上への調和写像は回転方向の微分が消えていくようなものしか存在しないことを示している。しかし、残念ながら Dirichlet 問題に対する非存在までは示せない。ここでは理想境界上での Dirichlet 問題よりはかなり強い次のような無限遠方での境界条件を考えてみることにする：

M^m 、N^n を定理 1 におけるものと同じとし、$u : M^m \to N^n$ に対して、

$$u_R(\omega) = \frac{u(R\omega)}{|u(R\omega)|}, \qquad \omega \in \mathbf{R}^m,\ |\omega| = 1$$

により $u_R : S^{m-1} \to S^{n-1}$ を定義する。S^{m-1} から S^{n-1} への写像 φ で Jacobian 行列のランクが 1 以上ものを与え、次の条件を考える。

$$(2) \qquad u_R \to \varphi, \quad D_\omega u_R \to D_\omega \varphi \quad \text{on} \quad S^{m-1} \quad \text{as} \quad R \to +\infty$$

このようなある種の境界条件を考えたとき、定理 1 より直ちにつぎの系を得る。

［系 2］（[3]）　M^m 、N^n 及び φ を上述のようにとる。このとき (2) をみたす M^m から N^n への調和写像でいたるところ Jacobian 行列のランクが 2 以上となるものは存在しない。

参考文献

[1] H.I.Choi & A.Treibergs, *Gauss maps of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of Minkowski space*, J. Diff. Geom., **32** (1990), 775–817.

[2] P.Li & L.Tam, *The heat equation and harmonic maps of complete manifolds*, (preprint).

[3] A.Tachikawa, *Harmonic maps from a Riemannian manifold with a pole into an Hadamard manifold with negative sectional curvatures*, (preprint).

The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations

Rentaro Agemi

In the present paper we study the lifespan of solutions to initial value problems for nonlinear wave equations of the form

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = A|u(x,t)|^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\
&u(x,0) = f(x), \ \partial_t u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

where p and A are positive constants and $n = 2, 3$.

F. John [6] has proved the following remarkable results in three space dimensions. The global classical solution to (1.1) exists for small initial data with compact support provided $p > p_0(3) = 1+\sqrt{2}$, and the lifespan of classical solution to (1.1) is finite provided $1 < p < p_0(3)$, $f = 0$, $g \geq 0$ (also see F. John [7], p.32). Here $p_0(n)$ stands for the positive root of the quadratic $q(n,p) = 0$ where

$$
q(n,p) = \frac{n-1}{2}p^2 - \frac{n+1}{2}p - 1 \tag{1.2}
$$

and the lifespan of a solution u to (1.1) means the largest T such that $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,T))$. He also proved in [6] that the lifespan T_ε of solutions to (1.1) with $f(x) = \varepsilon\varphi(x)$ and $g(x) = \varepsilon\psi(x)$ is equivalent to ε^{-2} for $p = 2$. Recently H. Lindblad [9] has refined this result by showing that the following limit exists for $1 < p < p_0(3)$:

$$
\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-p(p-1)/q(3,p)} T_\varepsilon.
$$

R. T. Glassey [3] has proved in two space dimensions that the global solution to (1.1) exists for small initial data with compact support provided $p > p_0(2)$. R. T. Glassey [4] proved that if $1 < p < p_0(2)$ then the lifespan of a solution to (1.1) is finite. Moreover, J. Schaeffer [10] proved that the lifespan is finite for critical values $p = p_0(2)$ and $p_0(3)$.

The main aim of this paper is to look for the upper and lower bounds for the lifespan in two space dimensions.

THEOREM 1. *Let u_ε be a C^2- solution to (1.1) with initial data $f(x) = \varepsilon\varphi(x)$ and $g(x) = \varepsilon\psi(x)$, where $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_0^3(\mathbb{R}^2)$ and $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$. Then there exist positive constants ε_0 and C depending only on p, A, φ and ψ such that the lifespan T_ε of u_ε satisfies the following inquality for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:*

$$
\begin{array}{lll}
T_\varepsilon \geq \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \textit{for} & p = p_0(2), \\
\varepsilon^{p-1} T_\varepsilon^{-q(2,p)/p} \log T_\varepsilon \geq C & \textit{for} & 2 \leq p < p_0(2),\ p \neq 3, \\
\varepsilon^2\, T_\varepsilon^{1/3} (\log T_\varepsilon)^2 \geq C & \textit{for} & p = 3.
\end{array}
$$

THEOREM 2. *Let u_ε be a C^2- solution to (1.1) with initial data $f(x) = 0$ and $g(x) = \varepsilon\psi(x)$, where $\varepsilon > 0$, $\psi(x) \geq 0$, $\not\equiv 0$ and $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Then there exists a positive constant C depending only on p, A and ψ such that the lifespan T_ε of u_ε has an upper bound:*

$$
T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{p(p-1)/q(2,p)} \qquad \textit{for} \quad 1 < p < p_0(2).
$$

We give here some remarks. Firstly, H. Lindblad [9] has proved for $p = 2$ that if $\int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)dx = 0$ then $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon T_\varepsilon$ exists and if $\int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)dx \neq 0$ then $\lim_{\varepsilon\to 0} a(\varepsilon)^{-1} T_\varepsilon$ exists, where $a(\varepsilon)$ is defined by $a(\varepsilon)^2\varepsilon^2 \log(a(\varepsilon) + 1) = 0$. His results are much sharper than ours. Secondly, making use of the method proving Theorem 1 or the one in K. Kubota [8], we can prove simply the existence of global solutions in R. T. Glassey [3] (see Appendix). Thirdly, we do not know the results of lower bounds of T_ε for $1 < p < 2$. Finally the assumption of Theorem 2 does not require that the support of initial data is compact.

When the supports of initial data is non compact and $p > p_0(3)$, F. Asakura [2] has proved in three space dimensions the following results. Let $D^\alpha f(x)$, $D^\beta g(x)$ $= O(|x|^{-1-\kappa})$ as $|x| \to \infty$ $(|\alpha| \leq 3, |\beta| \leq 2)$. Then the global solution to (1.1) exists for small initial data provided $\kappa > 2/(p-1)$. Moreover, he also proved that the lifespan of a solution to (1.1) is finite if $0 < \kappa < 2/(p-1)$ and initial data satisfy

$$f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) \geq \varepsilon(1+|x|)^{-1-\kappa}. \tag{1.3}$$

The next aim of this paper is to show that, in two space dimensions, the lifespan is finite under the same assumption above. For global existence of solutions, see K. Kubota [8].

THEOREM 3. *Let u_ε be a C^2- solution to (1.1) with initial data satisfying (1.3). Then there exists a positive constant C depending only on A, p and κ such that the lifespan T_ε of u_ε has an upper bound:*

$$T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{(\kappa-\frac{2}{p-1})^{-1}} \quad \textit{for} \quad p > 1 \quad \textit{and} \quad 0 < \kappa < \frac{2}{p-1}.$$

We state here the relations between the upper bounds of T_ε in Theorem 2 and Theorem 3. Let $1 < p < p_0(2)$, then we have

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} < \frac{2}{p-1},$$

because

$$\frac{q(2,p)}{p(p-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} < 0.$$

Therefore the upper bound in Theorem 2 (3) is better than one in Theorem 3 (2) provided $1/2 + 1/p \leq \kappa < 2/(p-1)$ $(0 < \kappa < 1/2 + 1/p)$, respectively.

In § 2, we define the norm to be used and formulate an a priori estimate which plays an important role in the proof of the existence theorem. Making use of a priori estimate, we prove Theorem 1, employing the iteration method in F. John [6]. In §3, we prove a priori estimate mentioned above. Theorem 2 will be proved in §4 by making use of the methods in F. John [6] and R. Agemi [1]. Theorem 3 will be also proved in §5 by the same method as in §4. In Appendix, we give a simple proof of the global existence theorem for $p > p_0(2)$.

After this work was completed, we were informed of a recent work of K. Tsutaya [11] closely related to our Theorem 3. He also proved the global existence mentioned before Theorem 3 by using different way from K. Kubota [8].

談話会要旨

「幾つかの幾何学的不等式」（6月12日）

岡山大・理　酒井隆

平面の単一閉曲線の長さとそれの囲む領域の面積の間には等周不等式（isoperimetric inequality）と呼ばれる著名な不等式がある。リーマン幾何においてもこの様な測度に関する不変量の間に成り立つ不等式がある。ここでは閉曲面の場合に限って次の2つのタイプの不等式について述べたい。

1° 等縮不等式（isosystolic inequality）

Mを閉じた単連結でない曲面，gをM上のリーマン計量とする。このときMの1点に可縮でない閉曲線の長さの下限 $Sys(M,g)$ は正で閉測地線によって実現される。gに対して $Area(M,g)$ を面積とし，不変量

$$Arsys(M,g) = Area(M,g)/Sys(M,g)^2$$

を考える。これをM上のリーマン計量全体の汎関数と考えてその最小値と最大値を実現する計量 — 云わば最も丸い計量 — が何であるかを問題とする。

まず Löwner, P.M. Pu は次を示した。

定理1. (1)　$M = T^2$ をトーラスとすれば

$$Arsys(T^2, g) \geqq \sqrt{3}/2$$

であり等号成立は (T^2, g) が flat で平面の正3角形格子から得られる場合

(2)　$M = P^2$ を射影平面とすれば

$$Arsys(P^2, g) \geqq 2/\pi$$

であり等号成立は g が正の定曲率の場合．

次に簡単な Klein bottle K の場合 C. Bavard は次を得た.

定理2. $\mathrm{Ar\,sys}(K, g) \geq 2\sqrt{2}/\pi$ で 等号成立は g が正の定曲率(特異点をもつ)計量の場合である.

ここでは C. Blatter の結果を用いた講演者による証明をのべた。一般の種数を持つ閉曲面の場合, $\mathrm{Inf\,Ar\,sys}(M, g)$ の評価について M. Gromov による結果があるが, 種数2の場合でも最小値と最小値を与える計量は分っていない。

2° 等径不等式 (isodiametric inequality)
今度は $\mathrm{sys}(M, g)$ の代りに直径 $\mathrm{Diam}(M, g)$ を考える。最も簡単なのは (S^2, g) の場合であろう. すなわち

$$g \longrightarrow \mathrm{Area}(S^2, g)/\mathrm{Diam}(S^2, g)^2$$

がどの様な振舞いをするかを問題とする. このときは曲率が関係し. g の Gauss 曲率 $K_g \geq 0$ の場合

$$(*) \quad \mathrm{Area}(S^2, g)/\mathrm{Diam}(S^2, g)^2 \leq \frac{\pi}{2} \; (=0.5\pi)$$

で, 等号成立は $\mathbb{R}^2$ の平坦な円板の double の場合であろうと予測されている (A. D. Alexandrov の問題). $K_g \geq 0$ なら $\mathrm{Area}(S^2, g)/\mathrm{Diam}(S^2, g) < \pi$ は容易に示せる。
また $K_g \geq 0$ なる回転面のクラスについては $(*)$ は正しい.
部分的な結果として講演者は $K_g \geq 0$ ならば $\mathrm{Area}(S^2, g)/\mathrm{Diam}(S^2, g) < 0.985\pi$ を示し, 塩谷氏は 0.906π まで良くした.
問題の難しさの一因はリーマン計量の $(*)$ に関する対称化が容易でない点にあると思われる。対称化の方法を考えて次の関連する不等式を得た。

定理3. (D^2, g) を2次元円板上の実解析的なリーマン計量

で Gauss曲率 $K_g \geqq 0$ ，境界 $C = \partial D$ が凸であるとする.
d^*で D上 ∂Dからの距離の最大値を表す. このとき d^*を実現する ∂Dからの最遠点 pは唯一つであり
(1) ∂Dと pを結ぶ最短測地線が無限個存在すれば
$$\mathrm{Area}(D,g)/(d^*)^2 \leqq \pi$$
(2) ∂Dとpを結ぶ最短測地線が有限個でそれらがpでなす角を $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とすれば
$$\mathrm{Area}(D,g)/(d^*)^2 \leqq \pi + \sum_{i=1}^{k} \left(\tan\frac{\alpha_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2}\right)$$

文献

T. Sakai : A proof of the isosystolic inequality for the Klein bottle, Proc. A.M.S. 104 (1988)

——— : On the isodiametric inequality for the 2-sphere, Geometry of Manifolds, Perspectives in Math., 8 (1989), Academic Press.

——— : On levels of the distance function from the boundary of convex domain, to appear in Hokkaido Math. J.

準線形放物型方程式の爆発解について

'91. 6. 19 信大理
望月 清

次の退化放物方程式を考える.

(1) $\beta(u)_t = u_{xx} + f(u), \quad (x.t) \in \Omega \times (0.T).$

(2) $u(x.0) = u_0(x) \geqq 0 \ (\not\equiv 0), x \in \Omega.$

$\Omega = (0.L) \subset \mathbb{R}$ であるか $\Omega = \mathbb{R}$ であるかどちらかとし, 最初の case では Neumann 境界条件を課す:

(3) $u_x(0.t) = u_x(L.t) = 0 \qquad t \in (0.T)$

(A1) $\beta(u), f(u) \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\beta(u), \beta'(u) > 0, \beta''(u) \leqq 0$ in $\mathbb{R}_+$,
$f(u) > 0$ in $\mathbb{R}_+$, $\lim_{u\to\infty} \beta(u) = \infty$, $f \circ \beta^{-1}$: Lipschitz cont

(A2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\beta'(u)}{f(u)} du < \infty$ (爆発条件)

<u>定義</u> $u(x.t)$ が時刻 T で爆発するとは

$$\sup_{x\in\Omega} u(x.t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \uparrow T$$

のときに言う. このとき $x \in \overline{\Omega}$ が爆発点であるとは $\exists (x_n.t_n) \in \Omega \times (0.T)$:

$$x_n \to x, \quad t_n \uparrow T, \quad u(x_n.t_n) \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

のときに言う.

まず Neumann 問題を考える.

$$U(t) = \sup_{x\in\Omega} u(x.t), \quad V(t) = \inf_{x\in\Omega} u(x.t)$$

$$\theta(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{a'(\eta)}{f(\eta)} d\eta \qquad \text{とおく}$$

定理1 (i) (A2)のもと (1), (2), (3) の どんな解も有限時間で爆発する. (ii) このとき

$$U(t) \gtrsim \theta^{-1}(T-t) \quad \text{near } t=T$$

であり, もし $V(t) \to \infty$ $(t \uparrow T)$ なら

$$V(t) \lesssim \theta^{-1}(T-t) \quad \text{near } t=T$$

定理2 (A3) $F(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi)d\xi = o(\xi^2)$ as $\xi \to \infty$

を仮定すると, $u(x,t)$ は全ての点で爆発し

$$\lim_{t \uparrow T} \frac{u(x,t)}{\theta^{-1}(T-t)} = 1 \quad \text{for any } x \in [0,L]$$

定理3 (A4) $f(\xi)$ が ξ にたいして早く増大する (Friedmann-McLeodの条件) とき, 初期 data が単調減少しているなら $u(x,t)$ の爆発点は $x=0$ だけである.

このような爆発の違いは Cauchy 問題についても起る。この場合, 初期データを compact support をもつとすると, 解の free bounday (or interface) の動きとも合わせて研究されている。

文献: T. Imai, K. Mochizuki Publ RIMS to appear

R. Suzuki 〃 〃

K. Mochizuki, R. Suzuki preprint

Numerical Analysis and Simulation for the Motion of a Surface by Its Mean Curvature

Yun-Gang CHEN

Department of Mathematics, Hokkaido University

In the research fields of applied sciences like physics, engineering and biology, it is important to track the evolution (motion) of a surface, such as the interface between two kind of materials or two different phases of a certain kind of material. The problem how to track and compute the motion of a surface with a curvature-dependent speed is usually a key point in the studies. Here, we introduce a class of difference schemes for computing the evolution of a surface moved by its mean curvature, with the *level surface approach* via *viscosity solutions*. The difference scheme is proved to be stable with respect to the maximum norm, which follows from the maximum principle. The method also applies to a generalized model, so-called generalized mean curvature flow equations (see [CGG1]).

§1. A stable difference scheme for the mean curvature flow equation.

We consider the Cauchy problem of the mean curvature flow equation

$$\text{(E)} \qquad u_t = |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), \quad (t,x) \in Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$$

$$\text{(IV)} \qquad u(0,x) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Let $u = u(t,x)$ be a continuous viscosity solution of (E)–(IV) which takes a negative constant for large $|x|$. If for each $t \in (0,\infty)$ there is a bounded open set $D(t)$ in $\mathbb{R}^N$ such that $u(t,x) > 0$ for $x \in D(t)$ and $u(t,x) < 0$ for $x \notin \overline{D(t)}$, then the 0-level set $\Gamma(t) = \{x;\ u(t,x) = 0\}$ of $u(t,x)$ determines a closed surface which moves with a speed $\mathbf{V} = (n-1)\mathbf{H}$ at each point $x \in \Gamma(t)$ where $\mathbf{H}(t,x)$ is the mean curvature vector at $x \in \Gamma(t)$, provided that $\nabla u \neq 0$ on $\Gamma(t)$. The global existence and uniqueness of the viscosity solution to (E)–(IV) have been proved by Chen, Giga & Goto [CGG1] and Evans & Spruck [ES]. And more important thing is that the level set $\Gamma(t)$ is uniquely determined by its initial data $\Gamma(0)$ which is independent of the choice of its *defining function* u_0, provided that u_0 is bounded, continuous and $u_0 > 0$ for $x \in D(0)$, $u_0 < 0$ for $x \notin \overline{D(0)}$ and $\Gamma(0) = \{x;\ u_0(x) = 0\}$. Moreover, in [CGG1] these results are proved for a general model (generalized mean curvature equations).

Here, we discuss the difference methods for computing $u(t,x)$, the viscosity solution of (E)–(IV). To overcome the difficulty of taking 0 value in the denominator which will cause errors in computers and stop the computation, we introduce a parameter $\delta > 0$ and consider the difference approximation of a modified equation

$$(\mathrm{E}_\delta) \qquad u_t = |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{(|\nabla u|^\sigma + \delta)^{1/\sigma}}\right), \quad (t,x) \in Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$$

with the same initial value (IV). Here, $\sigma \geqslant 1$ is fixed. We can show that the viscosity solution of (E_δ) with (IV) tends to that of (E) when $\delta \to 0$. Thus, it is reasonable to deal with the computation of the solution of (E_δ) as an approximation of the solution of (E) with the same initial value (IV), for a sufficiently small $\delta > 0$ (say, $\delta = 10^{-50}$).

Now we introduce our difference scheme for (E_δ), and for simplicity we interpret the scheme here for the case $N = 2$. Our difference equation for (E_δ) is given by

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = g_{jk}^n \sum_{i=1}^{2} \mathrm{D}_i \left(\frac{\mathrm{D}_i\, u_{jk}^{n+\theta}}{((g_{jk}^n)^\sigma + \delta)^{1/\sigma}}\right), \\ &\qquad\qquad j,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \ n = 0,1,2,\cdots; \\ &u_{jk}^0 = u_0(x_j, y_k), \quad j,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{aligned}$$

Here, several notations have been introduced as below. Denoting by x and y the spatial variables in $\mathbb{R}^2$, we use x_j and y_k for the spatial coordinates of the net points.

Notation:

$\tau \equiv \Delta t > 0$: increment of the time variable t;

$t_n = n\tau$: nth time step;

h_1, h_2: mesh sizes of x and y directions, respectively;

$(x_j, y_k) = (jh_1, kh_2)$: net point in $\mathbb{R}^2$, $j,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;

u_{jk}^n: value of the difference solution approximate to $u(t_n, x_j, y_k)$;

$\mathrm{D}_1\, u_{jk}^n = (u_{j+\frac12,k}^n - u_{j-\frac12,k}^n)/h_1$, $\mathrm{D}_2\, u_{jk}^n = (u_{j,k+\frac12}^n - u_{j,k-\frac12}^n)/h_2$: the approximations to $u_x(t_n, x_j, y_k)$ and $u_y(t_n, x_j, y_k)$ by central difference approach, respectively;

$g_{jk}^n \equiv g(\mathrm{D}\, u_{jk}^n)$: discretization of $|\nabla u|$ at (t_n, x_j, y_k), which is chosen positive definite for $\{\mathrm{D}_i^\pm\, u_{jk}^n;\ i = 1, \ldots, N\}$, where D^+ and D^- denote the standard forward and backward differences, respectively. For instance, we may take $g_{jk}^n = \left(\frac14 \sum_i^N \left(|\mathrm{D}_i^+\, u_{jk}^n| + |\mathrm{D}_i^-\, u_{jk}^n|\right)^2\right)^{1/2}$, or $g_{jk}^n = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \{|\mathrm{D}_i^+\, u_{jk}^n|, \ |\mathrm{D}_i^-\, u_{jk}^n|\}$.

The notation u^θ denotes $\theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n$ for a fixed parameter $\theta \in [0,1]$, and the difference equation (1) is explicit for u^{n+1} if $\theta = 0$, while implicit if $0 < \theta \leqslant 1$.

We can prove a sufficient condition for the L^∞ stability of maximum principle type for the difference scheme (1), as the following

Theorem 1. *The difference scheme (1) is stable in the sense of* $\|u^n\|_\infty \leqslant \|u^0\|_\infty$ *if either* $\theta = 1$ *or* $4\tau(1/h_1^2 + 1/h_2^2) \leqslant 1/(1-\theta)$ *when* $0 \leqslant \theta < 1$, *where* $\|u^n\|_\infty = \sup_{j,k} |u_{jk}^n|$.

It is sometimes convenient and economic to deal with a surface of rotation in a lower dimension space. Here, to compute the motion of a surface with axisymmetry in $\mathbb{R}^3$, i.e., surfaces of rotation, we rewrite (E) into

$$(\mathrm{E}_r) \qquad u_t = |\tilde{\nabla} u| \widetilde{\mathrm{div}}\Big(\frac{\tilde{\nabla} u}{|\tilde{\nabla} u|}\Big) + \frac{1}{r} u_r, \quad (t, r, z) \in Q = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, and the differential operators $\tilde{\nabla}$ and $\widetilde{\mathrm{div}}$ are those with respect to $(r, z) \in \mathbb{R}^2$.

For this equation, our difference scheme is constructed as

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{u_{0k}^{n+1} - u_{0k}^n}{\tau} &= g_{0k}^n \sum_{p,q=1}^{2} \mathrm{D}_i \Big(\frac{\mathrm{D}_i u_{0k}^{n+\theta}}{((g_{0k}^n)^\sigma + \delta)^{1/\sigma}} \Big) + \frac{2(u_{1k}^{n+\theta} - u_{0k}^{n+\theta})}{h_1^2}, \\ & k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ; \ n = 0, 1, 2, \cdots ; \\ \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} &= g_{jk}^n \sum_{p,q=1}^{2} \mathrm{D}_i \Big(\frac{\mathrm{D}_i u_{jk}^{n+\theta}}{((g_{jk}^n)^\sigma + \delta)^{1/\sigma}} \Big) + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{u_{j+1,k}^{n+\theta} - u_{jk}^{n+\theta}}{h_1}, \\ & k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ; \ j = 1, 2, \cdots ; \ n = 0, 1, 2, \cdots ; \\ u_{jk}^0 &= u_0(x_j, y_k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ; \ j = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned}$$

where u_{jk}^n is the approximation of $u(t_n, r_j, z_k)$, $(r_j, z_k) = (jh_1, kh_2)$, and D_1 and D_2 denote the difference operators for ∂_r and ∂_z. In this case, the stability condition is given by

Theorem 2. *The difference equation (2) is stable if either*

$$\theta = 1 \quad \text{or} \quad 6\frac{\tau}{h_1^2} + 4\frac{\tau}{h_2^2} \leqslant \frac{1}{1-\theta} \quad \text{when} \quad 0 \leqslant \theta < 1.$$

§2. A stable difference scheme for the generalized mean curvature flow equation.

With the above-mentioned methods, we can construct a stable difference scheme for the so-called generalized mean curvature flow equation

$$(\mathrm{E}') \qquad u_t = |\nabla u| \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big) + \nu |\nabla u|, \quad (t, x) \in Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}^N$$

where ν is a constant (see [CGG1]).

The difference scheme for (E') is constructed by the following two parts:

(1) the first part of the scheme is constructed as that for (E) in the previous section;

(2) the second part of the scheme is constructed in the way of any kind of stable difference scheme with monotonicity for the Hamilton-Jacobi equation $u_t = \nu|\nabla u|$, such as Lax-Friedrichs scheme, Godunov scheme, etc. (see, for example [CL]).

Then, we can show that the obtained difference scheme is stable if the value of τ/h_i^2 $(i = 1, 2)$ are taken sufficiently small ([CGH]).

§3. Remarks.

1. It is important to note that the stability conditions do not depend on $\delta > 0$ and $\sigma \geqslant 1$.

2. If g_{jk}^n is not positive definite for $\{\mathrm{D}^{\pm} u_{jk}^n\}$, then the difference solution may not converge to the solution of (E_δ), nor to that of (E) when $\delta \to 0$.

3. Osher and Sethian discussed some difference schemes, constructed in a different way, with level surface approach ([OS], [S]). They computed several interesting examples including the torus and dumbbells without discussing the fundamental theory such as stability, etc. In [S], an example of unstable computation of a torus was presented with a quite large Δt but no condition for the stability was given there.

4. In [OS] and [S], the axisymmetric surfaces are computed under the rectilinear coordinates instead of the cylindrical coordinates.

With our stable difference schemes and level surface approach, we investigated motions of several typical surfaces, including the shrink of a torus (surface of a doughnut) and the break of a dumbbell. With this method we can track motions of a surface even after the time when a singularity occurs.

References

[AAG]. S.Altshuler, S.Angenent and Y.Giga, *Motion by mean curvature through singularities for surfaces of rotation,*, preprint.

[CGG1]. Y.-G.Chen, Y.Giga and S.Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations.*

[CGG2]. Y.-G.Chen, Y.Giga and S.Goto, *Analysis toward snow crystal growth*, Proceedings of International Symposium on Functional Analysis and Related Topics, Sapporo, ed. S.Koshi (1991), 43–57.

[CGG3]. Y.-G.Chen, Y.Giga and S.Goto, *Remarks on viscosity solutions for evolution equations*, Proc. Japan Acad. Ser.A **67** (1991), 323–328.

[CGHH]. Y.-G. Chen, Y. Giga, T. Hitaka and M. Honma, *A stable difference scheme for computing motion of level surfaces by the mean curvature*, in preparation.

[CGH]. Y.-G.Chen, Y.Giga and M.Honma, *On difference schemes for generalized mean curvature flow equations*, in preparation.

[CL]. M.G. Crandall and P.L. Lions, *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comp. **43** (1984), 1–19.

[ES]. L.C.Evans and J.Spruck, *Motion of level sets by mean curvature, I.*, J.Differential Geom. **33** (1991), 635–681.

[OS]. S.Osher and J.A.Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Halmiton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79** (1988), 12–49.

[S]. J.A. Sethian, *Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equation and conservation laws*, J.Differential Geom. **31** (1990), 131–161.

July 1, 1991

Duality Theory, C^*-algebras and the Classification of Finite Groups

Martin E. Walter, Univ. of Colorado

If G is a locally compact group, then its Fourier-Stieltjes algebra, $B(G)$, or its semigroup of positive definite (continuous) functions, $P(G)$, are suitable duals for G in the following sense:

Theorem: $G \cong H \Leftrightarrow B(G) \cong B(H)$
$\Leftrightarrow P(G) \cong P(H)$

where $B(G) \cong B(H)$ means isometric isomorphism as Banach algebras and $P(G) \cong P(H)$ means affine isomorphism of ordered semigroups.

If two groups G, H have the property that $B(G)$ is algebraically isomorphic to $B(H)$ and $B(G)$ is isometrically isomorphic to $B(H)$, but $G \not\cong H$, hence $B(G) \not\cong B(H)$, then we say that the algebraic structure of $B(G)$ is oriented differently to the Banach space $B(G)$ than is the case of $B(H)$ as an algebra to $B(H)$ as Banach space. The difference in "orientation" (definition) between G & H is just the obstruction to obtaining an isometric, isomorphism of $B(G)$ with $B(H)$. Hopefully this concept will prove useful in classifying groups, particularly finite ones. We show that the 2 8 element non-commutative groups have orientations characterized by the 2 anti automorphism (classes) of M_2, the 2x2 matrices (transpose and quaternionic flip). This does not generalize, but another characterization does.

Bergman Kernel と Pseudo-Conformal Geometry

倉西正武

Ω を $\mathbb{C}^n$ の strongly pseudo convex な boundary の smooth な領域としたとき，その Bergman kernel $K_\Omega(z,w)$，$(z, w \in \Omega)$ は Ω の上の複素関数論で重要な Invariant であるが，それを実際に書いてみせることは今のところ特別の場合を除いて不可能にみえる。$K_\Omega(z,w)$ は z, w が boundary に近づくときの singularity の振舞は local な invariant であり、それを或程度実際に書いてみせることが出来る。boundary をきめる方程式：$\varphi = 0$ の φ を使って計算する柏原の方法が今まで一般にもちいられてきた。田中先生らによって開発された Boundary の上の Pseudo Conformal geometry の Frame bundle や Connection form を使って計算することを今こころみて居るので、その Progress Report をこの機会にお話しする。

雪の結晶の数理

（名大・理）　四方義啓

0　　従来，この方面の研究の多くは，局所理論から方程式，ひいてはモデルへ向かうという次図のような方向を持つものであった．

局所理論　→　方程式　→　解　→　（成長）形態

この方法は，一般的ではあるが，いわゆるモデルに対する十分性しか満足せず，必要性を欠いている，よって理論的には完全でない．そこで，上の論理の（矢印の）方向を逆にして，解の形態から出発して，それを解として持つ方程式（の位相型，一般型）を求めることによって新しいモデル理論を構成したい．ここでは（平面的な）雪の結晶の数理について考える．

1　　ｘｙ平面上の結晶成長を取り扱うことにし，まず，ｘｙ平面の図形Ｂを特性関数chによって関数空間にとりこむ，すなわち，平面図形Ｂに対して
特性関数ch（Ｂ）によって，平面図形Ｂの全体のなす集合を関数空間の中に埋め込む．

与えられた図形Ｂに対してその法ベクトルをn＝n（Ｂ）とかけば，成長速度は dn/dt である．結晶成長の問題は，与えられた結晶の（位相的）成長型，すなわち，dn/dtの位相型に対して，普遍的な微分作用素 G であって，

$$dn/dt = G(g*ch(B))$$

と表せるもの（の位相型）をすべて求めて，そしてその共通する特徴を調べようと言うことになる．ここで g は軟化作用素であって微分可能とはかぎらない関数の角を丸めて微分可能とする働きを持つものである．実験，ないしその観測においては，必ず何等かのいみでの軟化作用素が関係しているはずであり，全ての実験に共通する事実があるとすれば，その位相型は軟化作用素に無関係のはずである．これは，R. Ｔｈｏｍなどによって言われている位相安定性の考えにも相通ずるものである．従って，軟化作用素のもつ任意性から，その何れにも共通する性質は，既に，これによって，かなりの制限を受けることになる．

さて，雪の結晶の成長の場合，結晶Ｂの近くにある結晶ＣはＢの成長に対しては，ＢがＣのごく近くにある時を除いて，常に抑止的に働くことが知られている．また，樹枝状結晶成長などを考える場合は，dn/dtの（位相型の）線形変換に対する不変性も要求され，従って，上の軟化作用素の任意性と併せて微分作用素 G は高々２階の微分しか含まない事がわかる．この事実の証明は多少の技巧を必要とするが，要点は，例えばdn/dtが（局所的に）ｘ方向の三次の微分などであったとすれば，軟化作用素のとりかたによっては結晶の周りに，三カ所にわたってdn/dtの符号が交替する場所が出現し，従って，上の結晶の相互作用が近傍を除いては常に抑止的であると言う性質が保たれなくなる，と言う点にある．

ところで，微分作用素 G は座標軸のとりかたによらないはずであり，例えば，d/dx，d/dy などは，単独では G に現れない．

計算によって，座標軸によらない最小の２階の作用素は，ラプラシアン

Lと

$$\det(f) = (d/dxdy(f))^2 - 4\,d/dx(f)\,d/dy(f)$$

のみであり，1階のそれは，

$$\mathrm{grad}(f) = (d/dx(f))^2 + (d/dy(f))^2$$

であることが示されるから G は L，det，および grad の関数であることがわかる：

$$G = D(L, \det, \mathrm{grad})$$

ところが，その縁がx軸，y軸の正の部分である様な結晶Bに対しては det は原点を除いて恒等的に零である．実際，Bに対してy方向微分はx軸の正の部分を除いて零，従って，それを，さらにx軸方向に微分すれば原点以外では零となる，言い換えれば，これは edge detective ではなくて vertex detective である，よって，edge での成長のみを論じる場合には考慮の必要はない．また grad は結晶の周りでは一定の符号を持つために，本節冒頭におけると同様の議論によって考慮の対象から除外することができる（実は，det についても同様に考える事が可能である）．こうして，結局，問題となる微分作用素Gは結局ラプラシアンLのみの関数であることが導かれる：

$$G = D(L)$$

よって，（第一近似として）

$$dn/dt = D(L(g*ch(B)))$$

を得る．

2　上節1は，ある瞬間における理想的に均質な結晶に対する理論であり，その形態は単純にその特性関数によって代表させることができた．しかし，実際の結晶を取り扱う場合には，同じ結晶であっても時間によってそれを表す関数は異なっているべきであるし，また，結晶相互間の作用も考えにいれなければならない．

そこで，結晶Bの点Pおよび時刻tにおける”状態”を表現する関数

$$s(B)(P, t)$$

と結晶CのBに及ぼす影響を表現する関数

$$E(B, C)(P, t)$$

を導入する，これらは次によって相互に結ばれているものとする：

E（B，C）＝E（s（B），s（C）），
d/dt（s）＝E，　s（B）（0）＝ch（B）

もとより，結晶成長は

dn/dt＝D（L（s））

によって表現される．

ここで，もう一度，実験的な考察によって，結晶CのBに対する作用が（近傍以外では）抑止的であることに加えて，さらに，それが，加法的ででもあることを仮定する．このとき，前節と同様な方法によって関数Eはラプラシアン Lのみの線形関数K（L）によって次のようにかけることがわかる：

E（B，C）＝K（L（s（B）－s（C）））

結晶成長の形態（の位相型）のみを考えるのであるから，この線形関数 Kは恒等関数であるとして一般性を失わない，すると，上式は拡散過程の方程式

d/dt（s（B））＝L（s（B）－s（C））

となり，小さい単結晶が（単純な形の）理想結晶Bから針状に成長する場合などには（針状成長のうえで）具体的に解ける．この解sとそのラプラシアンL（s）とは成長の方向に単調に増大する，よって，もし関数Dが常に単調であれば成長を表す関数D（L（s））はまた単調であり，扇型の成長のみが可能となる．従って，樹枝状成長においては関数Dは常に単調ではありえない．

実際その次数を調べることによって，樹枝状成長のためには（もし，D（L）が多項式で書けたとすると）最低L（s）を2次で含むか，または，L（s）にsの1次式を掛けたものを含まねばならないことがわかる．しかし，前の場合は実際には無理があり，結局は後の場合のみが現実的である．

ある Jacobi modular 群に対する Eisenstein 級数について　　平成3年7月10日

近畿大学 理工学部　長岡昇勇

Jacobi modular 群 $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ に対する, weight k, index m の Eisenstein 級数 $E_{k,m}$ を,

$$E_{k,m}(\mathcal{Z},s)=\frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{s}{2}}\sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\\(c,d)=1}}\sum_{u\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}(c\tau+d)^{-k}|c\tau+d|^{-s}\,e^{m}\Big(N(u)\frac{a\tau+b}{c\tau+d}+\frac{uz_1+\bar{u}z_2}{c\tau+d}-\frac{cz_1z_2}{c\tau+d}\Big)$$

$$E_{k,m}(\mathcal{Z})=\lim_{s\to 0}E_{k,m}(\mathcal{Z},s),\quad k\geq 4:\text{integer},\quad \mathcal{Z}=(\tau,z_1,z_2)\in\mathbb{H}_1\times\mathbb{C}^2$$

と定義する. $E_{k,m}$ は weight k, index m の Jacobi modular form となり, その Fourier 展開は

<u>定理1.</u>　$E_{k,m}(\tau,z_1,z_2)=\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\,\alpha\in\mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{-1}\\ mn-N(\alpha)\geq 0}}C_{k,m}(n,\alpha)\,q^n\zeta_1^{\alpha}\zeta_2^{\bar{\alpha}}$ とすると

$$C_{k,m}(n,\alpha)=\begin{cases}\begin{cases}1 & \text{if } \alpha\equiv 0 \bmod m\mathcal{O}_{\mathbb{K}}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} & \text{if } mn=N(\alpha)\\[2ex] -\dfrac{2(k-1)}{B_{k-1,\chi_{\mathbb{K}}}}\,G_{\mathbb{K}}\Big(k-2,\det\Big(\sqrt{d_{\mathbb{K}}}\begin{pmatrix}m&\alpha\\ \bar{\alpha}&n\end{pmatrix}\Big)\Big)\cdot\prod_{p|m}(\text{elementary } p\text{-factor}) & \text{if } mn>N(\alpha)\end{cases}$$

ここで $G_{\mathbb{K}}(s,N)=\prod_{i=1}^{r}(1+|\chi_{d_i}(N)|)^{-1}\sum_{0<d|N}d^s\Big(\sum_{d_{\mathbb{K}}=D_1D_2}\chi_{D_1}(d)\chi_{D_2}(N/d)\Big)$.

Eichler-Zagier に従って我々は weight k, index 1 の Jacobi modular forms のなす空間から 2次, weight k の Hermitian modular forms のなす space への写像 I_k が構成でき, これによって $E_{k,1}$ は 2次の Hermitian modular 群 $\Gamma_2(\mathbb{K})$ に対する Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}$ の定数倍 ($-\frac{B_k}{2k}$ 倍) にうつされる. これは双方のある Hecke 作用素を考えることにより得られる. このことより

<u>定理2</u>　$E_k^{(2)}(Z)=\sum_{0\leq H\in\Lambda_2(\mathbb{K})}a_k^{(2)}(H)\,e[\mathrm{tr}(HZ)]$ と Fourier 展開すると

$$a_k^{(2)}(H)=\begin{cases}1 & \text{if } H=O_2\\[1ex] -\dfrac{2k}{B_k}\,\sigma_{k-1}(\varepsilon(H)) & \text{if } \mathrm{rank}\,H=1.\\[2ex] \dfrac{4k(k-1)}{B_k\cdot B_{k-1,\chi_{\mathbb{K}}}}\displaystyle\sum_{0<d|\varepsilon(H)}d^{k-1}\,G_{\mathbb{K}}(k-2,\det(\sqrt{d_{\mathbb{K}}}H)/d^2) & \text{if } \mathrm{rank}\,H=2.\end{cases}$$

ここで $\varepsilon(H)=\max\{q\in\mathbb{N}\mid q^{-1}H\in\Lambda_2(\mathbb{K})\}$.

The residue of p-adic Dedekind ζ-functions of CM-fields

肥田晴三 (UCLA)

本講演では, 総実体の p-進 Dedekind ζ-関数の $s=1$ での留数 (あるいは 0 での値) の計算における最近の進展及びその背景を解説することを目的とした. さらに CM 体の Katz の p-進 L-関数の 0 での値が総実体の場合と同じような代数的 invariants で書けることに言及した. これは新しい結果である. ここではこの新結果の概要を書く: K/F を総実体 F の総虚 2 次拡大とし, $p>2$ を素数で次の条件をみたすものとする:

p の F の整数環 $\mathfrak{r}$ での素因子は K の整数環 $\mathfrak{R}$ ですべて分解する.

この条件のもとで, $\mathcal{S}$ を $\mathfrak{R}$ での p の素因子たちの部分集合で複素共役 c について, $S \cup S^c$ が $\mathfrak{R}$ での p の素因子全体かつ $S \cap S^c = \phi$ をみたすものとするとき, 各 $\mathcal{S}$ について Katz の p-進 L-関数 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ が存在する [K]. $\mathcal{K}$ は多変数の p-進解析的関数であるが, $\mathcal{S}$ の外で不分岐な Hecke 指標の L-関数の値を p-進補間する部分だけを見れば, Leopoldt 予想のもとで, 1 変数である. この line を CW-line (Coates-Wiles の line) と呼ぼう. このとき新たな 1 変数の p-進 L 関数 $L_{CW}(s)$ が存在して

$$\mathcal{K}|_{CW\text{-}line}(s) = p\text{-進単数} \times s^g \times L_{CW}(s)$$

とかける. ここで $g = \#(\mathcal{S})$ である. $L_{CW}(s)$ は $s=0$ で高々 1 位の極をもちその留数は次の公式で与えられる:

定理 $\mathrm{Res}_{s=0} L_{CW}(s) = p\text{-進単数} \times \dfrac{R_{K,S}\, h(K)}{w_K \sqrt{D_F}} \prod_{\mathfrak{p} \in S} (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})$.

ここで D_F は F の判別式，$h(K)$ は K の類数，$R_{K,S}$ は K の S-進単数基準，w_K は K に含まれる1の巾根の個数である．

証明の方法は F の p-進 Dedekind ζ-関数の Colmez [C] による留数公式と $GL(2) \times GL(2)$ の p-進 L-関数の理論 [H] を組合わせるものである．

文献

[C] P. Colmez, Résidu en s=1 des fonctions zêta p-adiques, Inventiones Math. 91 (1988), 371-389

[H] H. Hida, Le produit de Petersson et de Rankin p-adique, Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1988-89, Progress in Math. 91 (1990), 87-102

[K] N. M. Katz, p-adic L-functions for CM-fields, Inventiones Math. 49 (1978), 199-297

二次形式の局所密度

桂田英典　（室蘭工大工）

Let p be a prime number different from 2. Let A and B be non-degenerate symmetric matrices of degree m and n $(m \geq n \geq 1)$, respectively, with entries in the ring $\mathbf{Z}_p$ of p-adic integers. We then define a local density $\alpha_p(B, A)$ by

$$\alpha_p(B, A) = \lim_{e \to \infty} p^{(-mn+<n>)e} \#\{\bar{X} \in M_{mn}(\mathbf{Z}_p)/p^e M_{mn}(\mathbf{Z}_p);\ {}^t XAX \equiv B \bmod p^e\},$$

where $< n >= n(n+1)/2$ and $M_{mn}(\mathbf{Z}_p)$ denotes the ring of (m, n)-matrices with entries in $\mathbf{Z}_p$. Local densities are important invariants in the arithmetic theory of quadratic forms. However it is difficult to express it explicitly. To obtain precise information on local densities Kitaoka [K2] introduced the following formal power series:

$$Q(B, A; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_p(p^r B, A) x^r.$$

He obtained a precise result on $Q(B, A; x)$ in a special but important case. On the other hand Böcherer and Sato [BS] defined a certain formal power series of several variables, and considered its rationality. In this talk we define another type of formal power series of several variables, and consider its rationality and denominator. That is, for the matrices A and B stated above we define a formal power series $P(B, A; x_1, ..., x_n)$ by

$$P(B, A; x_1, ..., x_n) = \sum_{r_1, ..., r_n = 0}^{\infty} \alpha_p(B[\mathrm{diag}(p^{r_1}, ..., p^{r_n})], A) x_1^{r_1} ... x_n^{r_n},$$

where for an (m, n)-matrix C and an (m, m)-matrix D we write $D[C] = {}^t CDC$, and for square matrices $A_1, ..., A_r$ we often simply write $\mathrm{diag}(A_1, ..., A_r) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$. Then we have

Theorem ([K1]) *Assume that B is a diagonal matrix. Then $P(B, A; x_1, ..., x_n)$ is a rational function of $x_1, ..., x_n$ and its denominator is of the following form:*

$$\prod_{\beta=1}^{n} \prod_{\gamma=0}^{m_0(m,n,\beta)} \prod_{1\le i_1<...<i_\beta\le n} \prod_{j_1,...,j_\gamma} (1-p^{\beta(-m+n+\gamma+1)}x_{i_1}...x_{i_\beta}x_{j_1}...x_{j_\gamma}) \prod_{i=1}^{n}(1-x_i),$$

where $m_0(m,n,\beta) = \min(n-\beta, m-n+\beta)$, and $j_1, ..., j_\gamma$ run all integers such that $1 \le j_1 < ... < j_\gamma \le n$ and $j_k \ne i_{k'}$.

For $B = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_n)$, we define a formal power series $Q(B, A; x_1, ..., x_n)$ by

$$Q(B, A; x_1, ..., x_n) = \sum_{r_1,...,r_n=0}^{\infty} \alpha_p(\mathrm{diag}(p^{r_1}b_1, ..., p^{r_n}b_n), A)x_1^{r_1}...x_n^{r_n},$$

which was introduced by Böcherer and Sato [BS]. Then we have

Corollary. *Let the notation and the assumptions be as above. Then $Q(B, A; x_1, ..., x_n)$ is a rational function of $x_1, ..., x_n$ and its denominator is of the following form:*

$$\prod_{\beta=1}^{n} \prod_{\gamma=0}^{m_0(m,n,\beta)} \prod_{1\le i_1<...<i_\beta\le n} \prod_{j_1,..,j_\gamma} (1-p^{\beta(-m+n+\gamma+1)}x_{i_1}^2...x_{i_\beta}^2x_{j_1}^2...x_{j_\gamma}^2) \prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2),$$

where $j_1, .., j_\gamma$ run all integers such that $1 \le j_1 < ... < j_\gamma \le n$ and $j_k \ne i_{k'}$.

References

[BS] S.Böcherer and F.Sato, Rationality of certain formal power series related to local densities, Comment. Math. Univ. St. Paul. 36(1987), 53-86.

[K1] H.Katsurada, A certain formal power series of several variables attached to local densities of quadratic forms I, preprint.

[K2] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J. 103(1986), 149-160.

Generalizing Stallings' Pregroup

S. Lipschutz

Stallings defined a Pregroup as a generalization of a Free product with an amalgamation. He uses 5 axioms. this paper weakens his last axiom so that the structure is a generalization of a tree product of groups.

Enumerating Necklaces

by

CHRISTIAN SIEBENEICHER

It is well known that the n^{th} exponent $M(q,n)$ of the so called *cyclotomic identity*

$$\frac{1}{1-qt} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{M(q,n)}$$

may be interpreted as

- the number of irreducible polynomials of degree n over the finite field $\mathbf{F}_q$ with q elements (C.F. Gauss ∼1800)
- the number of primitive or aperiodic necklaces with n beads from a set A with q elements (M.C. Moreau 1872)
- the dimension of the submodule of homogeneous elements of degree n in the free Lie algebra with q generators (E. Witt 1937).

Gauss has an immediate combinatorial verification of the identity since on the one hand the polynomials of degree n with leading coefficient 1 may be parametrized by their coefficients and on the other hand every polynomial may be factorized uniquely into irreducibles. But in the other two cases there is an evident combinatorial interpretation only of the right hand side of the identity and its left hand side enters via its logarithmic derivative. Hence a formal proof of the cyclotomic identity in these cases results by taking its logarithmic derivative and using Möbius inversion.

Recently N. Metropolis and G.–C. Rota raised the question to privide a direct combinatorial proof of this identity also for necklaces and also solved it by providing a series of bijections which finally led to a bijection from the set A^n to the set of all placements of primitive necklaces with n beads. Other bijections have been supplied by A. Dress and me. But none of these bijections is canonical.

Therefore it seemed interesting to try to find a context in which on the one hand it becomes clear, why there is no canonical such bijection and which provides on the other hand a scheme in which one can describe the different choices made by the different authors. The general background of this scheme consists of the simple observation that there are sets with equal cardinality but for which there is no canonical bijection between them.

The affine space $\mathbf{A}$ and its associated vector space $T(\mathbf{A})$ of translations of $\mathbf{A}$ provide a good example for this fact. Both sets have equal cardinality but there is no canonical bijection between $T(\mathbf{A})$ and $\mathbf{A}$. By choosing an arbitrary base point a in $\mathbf{A}$ one obtains an associated bijection $x \mapsto a + x$ from $T(\mathbf{A})$ onto $\mathbf{A}$. But this bijection—depending on the choice of the base point a—is not canonical. Turned the other way round: There is a canonical bijection only if there is a somehow distinguished base point $a \in A$, e.g. the point 0 in the affine space k^n. There is however a canonical bijection—independent of any choice—on a higher level between the sets $\mathbf{A} \times T(\mathbf{A})$ and $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. It results by considering the operation of the group $T(\mathbf{A})$ of translations on the affin space $\mathbf{A}$: The mapping $(a, x) \mapsto (a, a + x)$ collects in a canonical way all the non–canonical bijections $T(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$.

An elaboration on this fact provides a canonical bijection on a higher level which provides a canonical parametrization of all bijections of the requested type and and to single out the particular ones chosen by Metropolis and Rota and those by the Dress and me.

ある種の n 次元代数多様体の単有理性について

海老原　円

学習院大　理

定理. Xを n 次元非特異射影的代数多様体とする $(n \geq 3)$。Xが、非特異トーリック曲面 Sを含み、その法線束 $N_{S/X}$が次の条件 (a), (b) を満たすとする：

(a) $N_{S/X} \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} A_i$, 各 A_i $(0 \leq i \leq n-2)$ は豊富な直線束；

(b) $\mathrm{H}^1(S, N_{S/X} \otimes S^q(N_{S/X}^\vee)) = 0$ がすべての整数 $q > 0$ に対して成り立つ。

このとき、Xは単有理的である。

これは次の問題の部分的な解決になっている。

問題. n 次元代数多様体 X $(n \geq 3)$ が有理曲面 Sを含み、その法線束 $N_{S/X}$が豊富ならば、Xは単有理的であるか？

これは、Max Noether の定理の高次元化をめざすものである。

証明は、有理曲線の形式的近傍を考察し、広中-松村の $G3$ 定理を適用することによってなされる。

系として次が得られる

系. Xを n 次元非特異射影的代数多様体とし、L を X上の直線束とする。次の 3 条件 *(1) (2) (3)* を満たす部分多様体の列

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-2} = S$$

が存在するとする:

(1) X_iは X_{i-1}上の *linear system* $|L|_{X_{i-1}}|$ の *smooth member* $(1 \leq i \leq n-2)$;

(2) $X_{n-2} = S$はトーリック曲面;

(3) $L|_S$は S上豊富。

この時、Xは単有理的である。

REFERENCES

[1] M. EBIHARA, *Formal neighbourhoods of a toric variety and unirationality of algebraic varieties*, Preprint.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

o. Prof. Dr. Walter Schempp September 27, 1991

Harmonic analysis on the Heisenberg group with applications

A rigorous proof of quantum parallelism cannot be based on the Heisenberg inequality because the standard deviation of self-adjoint operators in Hilbert space is insensitive to fine structures of interference distributions. It is shown how the holographic transform allows to circumvent these difficulties by using a group theoretical implementation of the canonical commutation relations. The geometric quantization approach allows to describe by a Liouville density the flow and counterflow of single photons in split fan-in / fan-out coherent optical channels. It makes the heuristic arguments concerning quantum parallelism rigorous by considering coherent wavepackets as symplectic spinors on the hologram plane. Moreover, it implies the existence of single-photon holograms and includes the standard uncertainty inequality as a special case.

GKZ-decompositions for toric varieties

Hye Sook PARK (Tohoku Univ.)

Let N be a free $\mathbf{Z}$-module of rank r and M its dual. An r-dimensional algebraic torus $T_N \cong \mathbf{C}^\times \times \cdots \times \mathbf{C}^\times$ (r times) is defined by $T_N := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{C}^\times)$, where $\mathbf{C}^\times$ is the multiplicative group of non-zero complex numbers. A toric variety X is a normal algebraic variety containing T_N as a Zariski open dense subset with an algebraic action of T_N on X which is an extension of the group law of T_N. A toric variety X can be described in terms of a certain collection Δ, which is called a fan, of cones in $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. From this fact, the properties of a toric variety have strong connection with the combinatorial structure of the corresponding fan and the relations among the generators. For the precise definitions of toric varieties, see [1] and [4].

Let Ξ be a finite subset of *primitive* elements in N, such that Ξ spans $N_{\mathbf{Q}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ over the field $\mathbf{Q}$ of rational numbers. Let Z be the $\mathbf{Q}$-vector space with a basis $\{e_\xi \mid \xi \in \Xi\}$, which is in one-to-one correspondence with Ξ. By sending e_ξ to $\xi \in \Xi$, we get a surjective linear map $Z \to N_{\mathbf{Q}}$. Let $Z^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(Z, \mathbf{Q})$ be the dual space with the dual basis $\{e_\xi^* \mid \xi \in \Xi\}$. Then we have the dual injective linear map $M_{\mathbf{Q}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to Z^*$ which sends $m \in M_{\mathbf{Q}}$ to $\sum_{\xi \in \Xi} \langle m, \xi \rangle e_\xi^*$. The cokernel $G^{\mathbf{Q}} := Z^*/M_{\mathbf{Q}}$ of the injective map is a $\mathbf{Q}$-vector space of dimension $\#\Xi - r$, where $\#\Xi$ is the cardinality of Ξ. For each $\xi \in \Xi$, we denote by $g(\xi) \in G^{\mathbf{Q}}$ the image of $e_\xi^* \in Z^*$. Then by definition, the defining relations among the elements in $g(\Xi) := \{g(\xi) \mid \xi \in \Xi\}$ are

$$\sum_{\xi \in \Xi} \langle m, \xi \rangle g(\xi) = 0 \qquad \text{for all} \qquad m \in M_{\mathbf{Q}}.$$

More symmetrically, they can be written as a single equality

$$\sum_{\xi \in \Xi} \xi \otimes g(\xi) = 0 \qquad \text{in} \qquad N_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} G^{\mathbf{Q}},$$

which we call the *defining relation.* We call the pair $(G^{\mathbf{Q}}, g(\Xi))$ the $\mathbf{Q}$-*linear Gale transform* of $(N_{\mathbf{Q}}, \Xi)$ (cf. [3] and [4]).

Definition A simplicial fan Δ for N is said to be *admissible* for (N, Ξ) if

(i) Δ is quasi-projective,

(ii) $|\Delta| = \sum_{\xi\in\Xi} \mathbf{R}_{\geq 0}\xi$ and

(iii) $\Delta(1) \subset \{\mathbf{R}_{\geq 0}\xi \mid \xi \in \Xi\}$.

Let us denote by $n(\rho)$ the primitive element of N contained in a one-dimensional cone $\rho \in \Delta(1)$. We also denote by $\Xi(\Delta)$ the subset consisting of those elements in Ξ which are of the form $n(\rho)$ for some $\rho \in \Delta(1)$. Note that $\Xi(\Delta) \neq \Xi$ may happen.

Theorem 1 *Let Ξ be a finite subset of primitive elements in N such that Ξ spans $N_{\mathbf{R}}$ over $\mathbf{R}$. Then there exists a simplicial and admissible fan Δ for N which is* full, *that is, $\Xi(\Delta) = \Xi$. In the two-dimensional case, such a fan Δ is unique.*

For any simplicial and admissible fan Δ, we define the cone $\mathrm{CPL}^{\sim}(\Delta)$ in $Z^*_{\mathbf{R}} := Z^* \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ to be the set of all elements $x = \sum_{\xi\in\Xi} x_\xi e^*_\xi \in Z^*_{\mathbf{R}}$ satisfying the following: There exists a map $\eta : |\Delta| \to \mathbf{R}$ which is convex and piecewise linear with respect to Δ, such that

$$x_\xi \geq \eta(\xi) \quad \text{for all} \quad \xi \in \Xi \qquad \text{and that} \qquad x_\xi = \eta(\xi) \quad \text{for all} \quad \xi \in \Xi(\Delta).$$

$\mathrm{CPL}^{\sim}(\Delta)$ contains the nontrivial vector subspace $M_{\mathbf{R}}$. We denote by $\mathrm{cpl}(\Delta)$ the image of $\mathrm{CPL}^{\sim}(\Delta)$ in $G := G^{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Then $\mathrm{cpl}(\Delta)$ is a maximal-dimensional strongly convex cone.

Suppose that Δ_0 is a complete simplicial fan for N. Then the corresponding toric variety $X_0 := T_N\mathrm{emb}(\Delta_0)$ is a compact one which has at worst quotient singularities.

For a simplicial fan Δ, we define the Chow ring $A(\Delta)$ as the Stanley-Reisner ring $\mathrm{SR}(\Delta)$ (cf. [6]) of Δ modulo the linear equivalence relation. Then $A(\Delta)$ is a finite dimensional graded $\mathbf{Q}$-algebra of the form $A(\Delta) = \bigoplus_{k=0}^{r} A^k(\Delta)$ and is generated by $A^1(\Delta)$ over $A^0(\Delta) = \mathbf{Q}$, where $A^k(\Delta)$ is its homogeneous part of degree k. Furthermore, we see that for any $0 \leq k \leq r$, $A^k(\Delta)$ is generated over $\mathbf{Q}$ by the equivalence classes $v(\sigma)$ of the elements in $\mathrm{SR}(\Delta)$ corresponding to the k-dimensional cones $\sigma \in \Delta(k)$.

If $\Xi = \{n(\rho) \mid \rho \in \Delta_0(1)\}$, then we see that $(A^1(\Delta_0), \{v(\rho) \mid \rho \in \Delta_0(1)\})$ becomes the $\mathbf{Q}$-linear Gale transform of $(N_{\mathbf{Q}}, \{n(\rho) \mid \rho \in \Delta_0(1)\})$. By definition, the defining relation is of the form

$$\sum_{\rho\in\Delta_0(1)} n(\rho) \otimes v(\rho) = 0$$

in $N_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} A^1(\Delta_0)$.

The cone spanned by the linear equivalence classes of effective divisors on X_0 is of the form $(A^1(\Delta_0)_{\mathbf{R}})_{\geq 0} := \sum_{\rho\in\Delta_0(1)} \mathbf{R}_{\geq 0} v(\rho)$, while $\mathrm{cpl}(\Delta_0)$ is equal to the cone spanned by the linear equivalence classes of numerically effective divisors. The dual cone $\mathrm{cpl}(\Delta_0)^\vee$ is equal to the Mori cone $NE(X_0) = \sum_{\tau\in\Delta_0(r-1)} \mathbf{R}_{\geq 0} v(\tau)$.

Gelfand, Zelevinskij, and Kapranov [2] obtained some decompositions of $\mathbf{R}^N$ by using regular triangulations of integral polytopes corresponding to projective toric varieties. We have generalized and reformulated their results in [5]. We get some information on projective toric varieties when the corresponding fans are confined to have one-dimensional cones within some fixed set $\{\mathbf{R}_{\geq 0}\xi \mid \xi \in \Xi\}$.

Theorem 2 (cf. [5]) *The collection*

$$\{ \text{ the faces of } \mathrm{cpl}(\Delta) \mid \Delta : \text{simplicial and admissible } \}$$

forms a convex polyhedral cone decomposition of G with support $G_{\geq 0} := \sum_{\xi\in\Xi} \mathbf{R}_{\geq 0} g(\xi)$. We call it the Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decomposition (*the* GKZ-decomposition, *for short*).

Furthermore, $\mathrm{cpl}(\Delta) \cap \mathrm{cpl}(\Delta')$ is a facet of both $\mathrm{cpl}(\Delta)$ and $\mathrm{cpl}(\Delta')$ if and only if one fan is a star subdivision of the other, or two fans are the flops of each other.

Theorem 3 *The set*

$$\mathcal{C} := \bigcup \{ \mathrm{cpl}(\Delta) \mid \Delta : \text{simplicial, admissible and full } \}$$

forms a convex polyhedral cone contained in $G_{\geq 0}$.

If Δ is simplicial, by the definition of $\mathrm{cpl}(\Delta)$ we have

$$\mathrm{cpl}(\Delta) = \bigcap_{\sigma\in\Delta(r)} \left(\sum_{\xi\in\Xi\setminus(\Xi(\Delta)\cap\sigma)} \mathbf{R}_{\geq 0} g(\xi) \right).$$

By the property of the linear Gale transform, the set $\Lambda \subset \Xi$ is an $\mathbf{R}$-basis for $N_{\mathbf{R}}$ if and only if $g(\Xi \setminus \Lambda) := \{g(\xi) \mid \xi \in \Xi \setminus \Lambda\}$ is an $\mathbf{R}$-basis for G. Hence we see that every GKZ-cone $\mathrm{cpl}(\Delta)$ can be written as an intersection of cones which are generated by some $\mathbf{R}$-bases for G. Moreover, we get the converse correspondence as follows:

Proposition 4 *For an $\mathbf{R}$-basis $\Omega \subset g(\Xi)$ for G, we denote $C_\Omega := \sum_{g(\xi)\in\Omega} \mathbf{R}_{\geq 0} g(\xi)$, which is a maximal dimensional cone, that is, $\dim C_\Omega = \#\Xi - r$.*

There exists a one-to-one correspondence between the set of simplicial and admissible fans and the set of maximal dimensional cones $\bigcap_{\Omega\in\Theta} C_\Omega$ which are not separated by $C_{\Omega'}$ for any $\mathbf{R}$-basis $\Omega' \subset g(\Xi)$ for G, where Θ runs through all the possible subsets of all the $\mathbf{R}$-bases $\Omega \subset g(\Xi)$ for G.

Let π be a non-simplicial, rational, and strongly convex polyhedral cone of dimension r, whose proper faces are simplicial. Let Δ_π be the fan consisting of all the faces of π. Then the corresponding toric variety U_π has one bad singularity at the point $\mathrm{orb}(\pi)$. From the GKZ-decomposion, we can get all non-divisiorial subdivisions of π (cf. [5]).

A simplicial fan Δ with $|\Delta| = \pi$ is called a *small* simplicial subdivision of π if it satisfies the following:

(i) Any proper face of π is contained in Δ.

(ii) $\dim \sigma$ for any cone $\sigma \in \Delta$ is greater than $r/2$ whenever σ meets the interior $\mathrm{int}(\pi)$ of π.

Proposition 5 (1) *If π is 3-dimensional, then every non-divisorial subdivision Δ of π is small and $A^p(\Delta) = 0$ for $p = 2, 3$.*

(2) *If π is even-dimensional and if it has a small subdivision Δ, then* $\mathrm{cpl}(\Delta)$ *is isolated in the* GKZ-*decomposition. In particular, if π is 4-dimensional, then such a subdivision Δ is unique and $A^p(\Delta) = 0$ for $p = 2, 3, 4$.*

References

[1] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys, 33 (1978), 97–154 ; Uspekhi Mat. Nauk. 33 (1978), 85–134.

[2] I. M. Gelfand, A. V. Zelevinskij and M. M. Kapranov, General theory of A-discriminants, preprint, 1989; English translation by E. Horikawa, 1990; Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polyhedra, Leningrad Math. J. 2, No. 3 (1991), 449–505.

[3] P. McMullen, Transforms, diagrams and representations, in *Contributions to Geometry, Proc. of the Geometry Symp. in Siegen 1978* (J. Tölke and J. M. Wills, eds.), Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1979, 92–130.

[4] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry—An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Math. (3) 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.

[5] T. Oda and H. S. Park, Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions, Tohoku Math. J. 43 (1991), 375–399.

[6] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Math. 41, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1983.

Arithmetically Buchsbaum Subschemes

宮崎　誓（長野高専）

Noetherian local rings (or graded rings) の category の中で、Cohen-Macaulayという性質は、幾つかの重要な特徴付けができ、その環上のmoduleに対してlocal cohomology群の双対性が成り立つと言う点からも良いクラスであるが、その自然な拡張として、Buchsbaum環が研究されてきた([8])。

Definition & Proposition　Let A be a Noetherian local ring with maximal ideal $\underline{m}$ and M be a finitely generated A-module with dim M=d. Then M is called a Buchsbaum A-module if the following equivalent conditions are satisfied:

a) $l_A(M/\underline{q}M)-e(\underline{q};M)$ is constant for any parameter ideal $\underline{q}$ for M.

b) $\underline{m}\ \mathrm{Ker}(M/(x_1,\dots,x_{i-1})M \xrightarrow{x_i} M/(x_1,\dots,x_{i-1})M)=0 \quad (i=1,\dots,d)$

for any system of parameters $x_1,\dots,x_d$ for M.

Furthermore if A is a homomorphic image of some regular local ring S, then c) is also equivalent to a) and/or b).

c) $i(\tau^d(R\Gamma_{\underline{m}}(M))$ is isomorphic to $A/\underline{m}$-vector space in $D^+(S)$,

where $i : D^+(A) \longrightarrow D^+(S)$.

また、Buchsbaum module は、上の c) からもわかるようにquasi-Buchsbaum 即ち$\underline{m}H^i_{\underline{m}}(M)=0(i<d)$ であるが、その違いをはっきりさせたい。そこで、[4]において、r-Buchsbaum というのを定義し、spectral sequence による特徴付けを行った。また、最近、Fiorentini-Vogel-Hoaらによって、(k,r)-Buchsbaum という定義に拡張されている([2],[3])。

Definition Under the above notations, M is called r-Buchsbaum if the following conditions are satisfied:

For any system of parameters $x_1, \ldots, x_d$ for M, $M/(x_1, \ldots, x_s)M$ is quasi-Buchsbaum for $s<r$.

すると、次の結果が得られる。

Theorem([4]) r-Buchsbaum は spectral sequence で特徴付けできる。

[4]において、spectral sequence による特徴付けの応用として、Segre Product についての Buchsbaum性を考察したが、[5]においてその種のより一般的な定理を予想し、最近解決した([6])。[1]の言葉を借りて定理を書くと次のようになる。

Theorem([6]) Let R and S are graded rings over a field k. Let M be a Cohen-Macaulay graded R-module with dim $M=m>1$ and N be a Buchsbaum graded S-module with dim $N=n$ and depth $N>1$. Then $M\#N(=\oplus_{e\in Z} M_e \otimes N_e)$ is Buchsbaum if the following conditions 1)-4) are satisfied:

1) $a(N) \leqq \min\{e; M_e \neq 0\}$.
2) $a(M) \leqq \min\{e; N_e \neq 0\}$.
3) $H^m_{\underline{m}_R}(M)_{d+e}=0$ or $H^e_{\underline{m}_S}(N)_d=0$ for d and e(<n).
4) $M_d=0$ or $H^e_{\underline{m}_S}(N)_{d+n-e+1}$ for d and e(<n).

References

[1] Goto-Watanabe: On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30(1978).

[2] Fiorentini-Vogel: Old and new results and problems on Buchsbaum modules I, Semin. Geom., Univ. Bologna 1988-1991, 53-61, Bologna(1991)

[3] Hoa-Vogel: Castelnuovo-Mumford Regularity and Hyperplane Sections, J. Alg. (to appear)

[4] Miyazaki: Graded Buchsbaum Algebras and Segre Products, Tokyo J. of Math. 12(1989).

[5] Miyazaki: Buchsbaum環とSegre Product, 第１０回可換環論シンポジウム報告集(1988).

[6] Miyazaki: Spectral sequence theory for graded modules with application to Buchsbaum property and Segre products (preprint).

[7] Stückrad-Vogel: On Segre product and applications, J. Alg. 54(1978).

[8] Stückrad-Vogel: Buchsbaum Rings and Applications, Springer-Verlag, 1986.

非可換 L^p 空間について

新潟大・理　渡辺　恵一

(Ω,μ) を測度空間とするとき、$f \in L^p(\Omega,\mu)\,(0 < p \leq \infty)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega,\mu)$ 上の掛算作用素 M_f を引き起こす; $\mathfrak{D}(M_f) = \{\xi \in L^2(\Omega,\mu); f\xi \in L^2(\Omega,\mu)\}, (M_f\xi)(\omega) = f(\omega)\xi(\omega), \omega \in \Omega, \xi \in \mathfrak{D}(M_f)$. もう一つの原型は、Hilbert 空間上のコンパクト作用素がなす Schatten の C_p イデアルである。

これらは、半有限 von Neumann 環 $\mathcal{M}$ とそのトレース τ に対して、次の様に一般化される。a を $\mathcal{H}$ 上の稠密定義域をもつ閉作用素、$a = u|a| = u\int_0^\infty t de_t$ を極分解、スペクトル分解とする。$u, e_t \in \mathcal{M}$ の時、a は $\mathcal{M}$ に付随的であるといい、更にある $t \geq 0$ が $\tau(e_{(t,\infty)}(|a|)) < \infty$ の様に存在する時、a は τ-可測であるという（付随的であるとは "a がほとんど $\mathcal{M}$ の元" であることを意味し、τ-可測性は、非有界作用素の和や積が取り扱い易いような範囲を指定したと思える）。τ-可測作用素の全体を $\widetilde{\mathcal{M}}$ とかく。このとき、$L^p(\mathcal{M},\tau) = \{a \in \widetilde{\mathcal{M}}; \tau(|a|^p) < \infty\}$ と定義される (Segal, Dixmier, '53, Nelson, '74)。

一般化された s-number を用いることにより、L^p 空間の一般化である再配分不変関数空間の理論を非可換化して展開することも為されている。この事に関連し、最近、筆者は $\mathcal{M}$ が II_1 型因子、$\tau(1) = 1$ の時、$\widetilde{\mathcal{M}}$ 内の完備対称ノルム $\mathcal{M}$-両側加群と $[0,1]$ 上の再配分不変関数ノルムとが 1 対 1 に対応することを示し、$\mathcal{M}$-両側加群が可分であるための $\mathcal{M}$ と関数ノルムの条件を求めた。

トレースのない場合には、富田-竹崎理論の発展を利用して、Haagerup, '77 が忠実正規半有限荷重 φ_0 に対して非可換 L^p 空間 $L^p(\mathcal{M};\varphi_0)$ を定義した。初めの荷重 φ_0 を取り替えても等長同型なものができ、トレースの場合には Segal, Dixmier の空間と等長同型になる。Connes-Hilsum、荒木-増田、幸崎、Terp 達のいずれによる非可換 L^p 空間も Haagerup のものに等長同型である。$L^p(\mathcal{M};\varphi_0)$ は $L^p(\mathcal{M},\tau)$ に比べて取り扱いが困難である。例えば、関数空間 $L^p(\Omega,\mu)$ について考えた Banach に起源を持つ等距離作用素の問題に対し、Yeadon, '81 が $L^p(\mathcal{M},\tau)$ 上の等距離作用素の詳細な構造定理を得ているが、$L^p(\mathcal{M};\varphi_0)$ についてはまだ解決していない。筆者、'90 は等距離作用素 $T : L^p(\mathcal{M}_1;\varphi_1) \to L^p(\mathcal{M}_2;\varphi_2)$ が $*$-保存ならば $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ は Jordan $*$-同型であることを示し、その同型写像が T を記述している為の条件を T の満たすべき作用素不等式の形で表わした。

他にも、$0 < p < 1$ の時の $L^p(\mathcal{M};\varphi_0)$ 上の連続線型汎関数についての話題等があるが、ここでは省かせていただく。

Riemannian Foliations and Tautness

by Philippe Tondeur
University of Illinois
Urbana, Illinois (USA)

A foliation $\mathcal{F}$ on a Riemannian manifold (M, g) is Riemannian, and g a bundle-like metric for $\mathcal{F}$, if locally the foliation is given by the fibers of a Riemannian submersion. A foliation $\mathcal{F}$ on a manifold M is taut, if there exists a Riemannian metric g on M, such that all leaves of $\mathcal{F}$ are minimal submanifolds of (M, g). Rummler-Sullivan gave a criterion for the tautness of $\mathcal{F}$ in terms of the volume form of the ambient metric restricted to the leaves of $\mathcal{F}$.

In this lecture a sufficient condition for the tautness of a Riemannian foliation is discussed.

The normal bundle Q of $\mathcal{F}$ carries a canonical metric and torsion-free connection ∇. Associated to this connection are the usual curvature data: curvature tensor, Ricci curvature, and sectional curvature. These are the transversal curvature data of the foliation. Heuristically they correspond to the curvature data of the (local) Riemannian model space, or of the leaf space of $\mathcal{F}$. In particular consider the transversal Ricci operator $\rho : Q \to Q$, and the transversal curvature operator $\mathcal{R} : \Lambda^2 Q^* \to \Lambda^2 Q^*$. Then the following result holds.

Theorem. Let $\mathcal{F}$ be a transversely oriented Riemannian foliation of codimension $q \geq 2$ on a closed oriented Riemannian manifold (M, g).

Assume either $\rho > 0$ or $\mathcal{R} > 0$. Then $\mathcal{F}$ is taut

Lit: M. Min-Oo, E. Ruh and Ph. Tondeur, Vanishing theorems for the basic cohomology of Riemannian foliations, J. für die reine und angewandte Mathematik 415 (1991), 167-174.

M. Min-Oo, E. Ruh and Ph. Tondeur, Transversal curvature and tautness for Riemannian foliations, Proc. of the Conference on Global Analysis and global geometry, Berlin 1990, to appear in Springer Lecture Notes.

Moishezon Fourfolds Homeomorphic to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ or $\mathbf{Q}^4_{\mathbf{C}}$

IKU NAKAMURA

In my talk I reported some partial solutions to the following conjectures.

CONJECTURE MP_n (MQ_n). *Any Moishezon complex manifold homeomorphic to $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^n_{\mathbf{C}}$) is isomorphic to $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^n_{\mathbf{C}}$).*

Conjecture MP_n has been settled by Hirzebruch-Kodaira [1] and Yau [6] when the manifold under consideration is *projective or Kählerian.*

Recently Kollár [2] and the author [3] solved (MP_3) in the affirmative, each supplementing the other. Peternell [5] also asserts (MP_3).

THEOREM [2][3]. *Any Moishezon threefold homeomorphic to $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^3_{\mathbf{C}}$) is isomorphic to $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^3_{\mathbf{C}}$).*

THEOREM. *Let X be a Moishezon manifold homeomorphic to $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, and L a line bundle on X with $L^n = 1$. Assume $h^0(X, O_X(L)) \geq n+1$. If a complete intersection of general $(n-1)$-members of $|L|$ is nonempty outside* Bs $|L|$, *then X is isomorphic to $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$.*

THEOREM. *Let X be a Moishezon 4-fold, and L a line bundle on X. Assume that* Pic $X = \mathbf{Z}L$, *$c_1(X) = dc_1(L)$ $(d \geq 5)$ and $h^0(X, O_X(L)) \geq 5$. Then X is isomorphic to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$.*

THEOREM. *Let X be a Moishezon 4-fold homeomorphic to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$, and L a line bundle on X with $L^4 = 1$. Assume $h^0(X, O_X(L)) \geq 3$. Then X is isomorphic to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$.*

THEOREM. *Let X be a Moishezon 4-fold homeomorphic to $\mathbf{Q}^4$, and L a line bundle on X with $L^4 = 2$. Assume that $h^0(X, L) \geq 5$. Then $X \simeq \mathbf{Q}^4$.*

COROLLARY. *Any global deformation of $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^4$) is isomorphic to $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ (resp. $\mathbf{Q}^4$).*

THEOREM. *Let X be a Moishezon 3-fold and L a line bundle on X with $L^3 \geq 1$. Assume that $h^1(X, O_X) = 0$, $c_1(X) = 3c_1(L)$, $h^0(X, L) \geq 2$, and* dim Bs $|L| \leq 1$. *Then $X \simeq \mathbf{Q}^3$ or $\mathbf{P}(\mathcal{F}(a,b,0))$ $(a \geq b \geq n \geq 0,\ a+b = 3n+2)$, where $\mathcal{F}(a,b,0) := O_{\mathbf{P}^1}(a) \oplus O_{\mathbf{P}^1}(b) \oplus O_{\mathbf{P}^1}$.*

BIBLIOGRAPHY

[1]. F.Hirzebruch - K.Kodaira, *On the complex projective spaces*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957), 201-216.

[2]. J.Kollár, *Flips, flops, minimal models etc.*, preprint (1990).

[3]. I.Nakamura, *Moishezon threefolds homeomorphic to* $\mathbf{P}^3$, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 521-535.

[4]. I.Nakamura, *Threefolds homeomorphic to a hyperquadric in* $\mathbf{P}^4$, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata (1987), 379-404.

[5]. T.Peternell, *A rigidity theorem for* $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, Manuscripta Math. **50** (1985), 397-428.

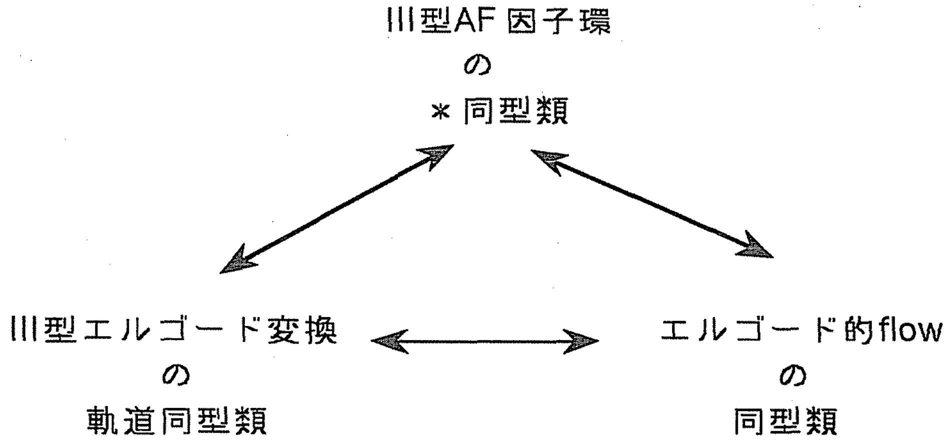
[6]. S.T.Yau, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1798-1799.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

浜地敏弘
九大教養部数学

談話会講演要旨（Orbits,suborbits and basic extension in ergodic theory）

エルゴード変換の軌道同型問題は、Dyeの先駆的な仕事からは思いもかけない程に発展し、現在では作用素環と密接に関連していることが明らかになった。ConnesのIII型因子環の分類にその結実を見ることが出来る。実際、次の１対１対応関係



が分かっている。

さてJones（1983）の導入したJones指数を用いる部分因子環の分類が現在進められている中にあって、トレースをもつ場合に適用されるJones指数が、そうでないIII型の因子環に一般に拡張定義される（幸崎,1986）ことが明かになって以来、III型についてもその部分因子環の分類問題がクローズアップしてきた。この方向の研究では、トレースをもつ場合と違って、エルゴード論的接近が部分環の分類にどの程度役立つかを明かにするのが焦点の一つではないかと思われる。

この講演では上記の図を部分環がらみで見て、特に下段においてそれをエルゴード変換に付随したrelation-subrelationの分類としてとらえ、flowレベルによる特徴付けを目指した研究を紹介する。

p-可解群における $\ell(B)=2$ のブロックのカルタン行列

和田倶幸　（東京農工大学）

G：有限群，k：標数 $p>0$ の代数的閉体とする。B：kG の block，$S_1, \cdots, S_{\ell(B)}$ を simple B-module，$U_1, \cdots, U_{\ell(B)}$ を projective indecomposable B-module s.t. $U_i/\mathrm{rad}\,U_i \cong S_i$ とする。このとき，U_i に組成因子として現れる S_j の重複度を c_{ij} とかき，行列 $C_B=(c_{ij})$ を B の Cartan matrix という。c_{ij} は B の構造を表す重要な不変量であり，色々な群（例えば，小さな対称群，小さな Lie type の群）で求められている。与えられた D を defect 群にもつような block B について，その C_B を求めるという問題は更に難しく，D が cyclic, dihedral, semidihedral, quaternion の場合に C_B が求められている。ここでは，G が p-可解群で $\ell(B)=2$ のとき，C_B が 2つの simple B-modules S_1, S_2 の次元により殆んど決まってしまうということを述べた。

$p^a := |G|_p = |G|$ の p-part，$p^d := |D|$ とする。p-可解群では次が成立する (P. Fong)。
$\dim S_i = f_i$，$\dim U_i = u_i$ とおくと $f_i = p^{a-d+e_i} f_i'$，$u_i = p^a f_i'$
ここで $e_i \geq 0$，$f_i' \not\equiv 0\ (p)$ なる integer。また $\exists e_i = 0$ であるから，

$$(*)\quad f_1 = p^{a-d} f_1',\ f_2 = p^{a-d+e} f_2',\ u_1 = p^a f_1',\ u_2 = p^a f_2' \quad (e \geq 0,\ f_i' \not\equiv 0 (p))$$

とする。すると

Theorem 1　G：p-可解群，$\ell(B)=2$ とすると，$2e<d$ で

$$C_B = \begin{bmatrix} p^d - p^{2e+\delta} h & p^{e+\delta} h f_1'/f_2' \\ p^{e+\delta} h f_1'/f_2' & p^{\delta}(1+hp^e) \end{bmatrix}$$

とかける。

但し，δ, h は $0 \leq \delta < d-2e$，$1 \leq h < p^{d-2e-\delta}$，$h \not\equiv 0\ (p)$ をみたす integer で，更に次をみたす。

(i)　$p^{d-e-\delta} - h\left(p^e + (f_1'/f_2')^2\right) = 1$

(ii)　p^{δ} は C_B の（小さい方の）単因子に一致する

☆ この定理により，C_Bは非常に制限を受け，特に $|D|$ が小さなときは，C_B の形は限られてくる。

<u>Corollary 1.</u> G：p-可解群，$\ell(B)=2$，$p=2$ のとき $e>0$ で

(i) $|D| = 2^3 \Longrightarrow (e, \delta, h) = (1, 0, 1)$，$f_1' = f_2'$ で $C_B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $|D| = 2^4 \Longrightarrow (e, \delta, h) = (1, 1, 1)$，$f_1' = f_2'$ で $C_B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(iii) $|D| = 2^5 \Longrightarrow (e, \delta, h) = (1, 0, 5)$，$f_1' = f_2'$ で $C_B = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ か又は，

$(e, \delta, h) = (1, 2, 1)$，$f_1' = f_2'$ で $C_B = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ etc

<u>Corollary 2.</u> G：p-可解群，$\ell(B)=2 \Longrightarrow k(B) \leqq |D|$ （$k(B)$は B に属する ordinary irreducible characters の個数）

∵) G：finite group，$\ell(B)=2$ のとき $k(B) \leqq c_{11} + c_{22} - c_{12}$ ということと，Theorem 1 から

☆ G：p-可解群，$\ell(B)=2$ で B が principal block のときは，$G/O_{p'p}(G)$ の構造が決まり従って，C_B が決まる。このとき $f_1' = f_2' = 1$ となっている。Corollary 1 でも $f_1' = f_2'$ になっている等たくさんの例から，次が言えるのではないか？

<u>Conjecture.</u> G：p-可解群，$\ell(B)=2 \Longrightarrow f_1' = f_2'$

<u>Theorem 2</u> G：p-可解群，$\ell(B)=2$ で D：abelian or $|D| = p^3 \Longrightarrow f_1' = f_2'$

∵) Fong reduction と，次の Higgs の定理による。

(Higgs) G：finite group，$\alpha \in H^2(G, \mathbb{C}^*)$ のとき G がちょうど 2個の irreducible α-projective representation をもつ $\Longrightarrow$ その2つの表現の次数は一致する。

参考文献：Y. Ninomiya and T. Wada, Cartan matrices for blocks of finite p-solvable groups with two simple modules, J. Algebra 143 (1991)

Lang-Fang Wu

Abstract

The Ricci Flow on Complete Noncompact $\mathbb{R}^2$.

The essential idea of the Ricci Flow is to evolve the metric in the direction of the Ricci curvature tenso[r]. The Ricci Soliton is a solution of the Ricci Flow which only moves by diffeomorphism. In this talk, we state the results on compact 2-spaces, give the motivation of the study on $\mathbb{R}^2$, and discuss our new results on $\mathbb{R}^2$.

On $\mathbb{R}^2$, the cigar solitons and the flat solitons are the two types of gradient solitons on $\mathbb{R}^2$. The flat solitons are metrics of constant zero curvature; the cigar solitons are metrics which can be expressed as $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{1+x^2+y^2}$, where $\{x, y\}$ are rectangular coordinates.

In order to classify the limit at time infinity, we introduce the concepts of the circumference at infinity, the aperture, and the total finite negative curvature. It turns that under our assumption, all the above geometric quantities are preserved under the Ricci Flow. This enables us to classify the limit as a cigar soliton if the circumference is finite initially, or a flat soliton if the aperture is positive at $t = 0$.

Steven Altschuler
12-4-91

HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO 060, JAPAN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

In this talk, we will discuss some recent work on the mean curvature flow applied to space curves. In particular, we will demonstrate a classification of asymptotic shapes of forming singularities. Next, we will show computer generated pictures of all solutions which move by similarity (joint work with John Sullivan). Many of these solutions were previously unknown and provide new examples of non planar "soliton" solutions. Finally, we will discuss an application of space curve evolution to flow through singularies of plane curve evolutions. The idea, suggested by E. Calabi, is to lift a plane curve to a periodic space curve. These lifts last for infinite time and provide, for small lifting parameter, good approximations to planar curve shortening. This program was successfully completed in joint work with Matt Grayson.

極めて低次元の多様体へのLie群の作用

三松 佳彦（中央大・理工）

0-0. 多様体Mにどの様なLie群がどの様に作用するか？又は，Lie群Gはどの様な多様体にどの様に作用し得るか？という、漠然とした問題を考える。特に極めて低次元（$= 1$ 又は2次元）の多様体への作用を中心に考える。

0-1. “Mを1次元多様体とすると、Lie群は、本質的に $SL_2\mathbb{R}$，又は、その部分群（$Aff\,\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}$）”というLIEの定理が、解答を与える。

0-2. 2次元多様体ではどうか。MOSTOWは学位論文で“2次元等質空間のeuler標数 $\geqq 0$”を証明し，それらの作用をLie環レベルでlist upした。一方、非推移的な作用の場合は、可解Lie群と(半)単純Lie群の場合に分かれ、2次元の場合単純Lie群は $SL_2\mathbb{R}$ となることが分る。（J. F. PLANTE）

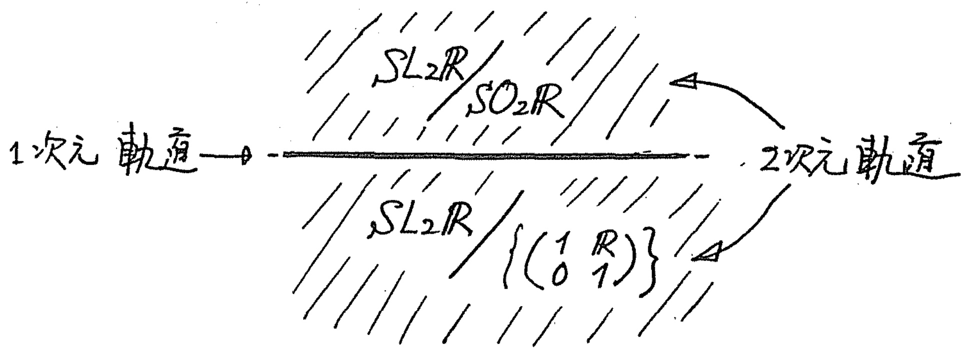
0-3. 一般の次元では、巾零（可解）Lie環の作用について、EPSTEIN-THURSTONに依り“軌道の次元 $\geqq$ derived length (+1)”なる評価が成立するが、Lie群の次元と軌道の次元を比較するのは、一般には無理である。

1-0. 今回の話では、先ず以上を復習し，次に2次元多様体への非推移的な単純Lie環 $sl_2\mathbb{R}$ の作用の分類を考える。

1-1. これらの，特に C^ω 級の作用は，STOW，SCHNEIDER により，偏微分方程式系として直接解いて分類されているが，より初等的な方法（単純 Lie 環の作用から，特性関数を定義する）により，作用を類別することを考える。

2. 例えば，次の様な事柄が，容易に分る。

<u>定理.</u> C^ω 級の $sl_2\mathbb{R}$ 作用では，



という状況は起こらない。

講演要旨　　　　都立大理　　辻　元

題名　カレントによる標準因子のZariski分解の構成

要旨　Xを非特異代数多様体、K_Xをその標準因子とする。代数幾何学に於て標準環 $R(X,K_X)=\bigoplus_{\nu\geq 0} H^0(X,\mathcal{O}_X(\nu K_X))$ の構造の研究は重要である。一般に次の予想が信じられている

予想）$R(X,K_X)$は有限生成。

ここでは上の予想の解析的な解法を考える。

まず題にあるZariski分解を定義しよう。

$D\in \mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{R}$とする。

$D=P+N$ $(P,N\in \mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{R})$がZariski分解であるとは 1) Pは nef. 2) Nは effective. 3) $H^0(X,\mathcal{O}_X([\nu P]))\simeq H^0(X,\mathcal{O}_X([\nu D]))$ が全ての$\nu\geq 0$について成立

以上が成立することをいう。一般にZariski分解が存在する為にはDは pseudo effective であることが必要であるが $\dim X\geqq 3$の時は十分ではない。

一方~~□□~~ 川又により、Xが一般型の時は適当な modification $f: Y\to X$で f^*K_XがZariski分解を許容するものが存在すること（これを単にK_XがZariski分解をもつと呼ぶことにしよう）と$R(X,K_X)$が有限生成であることは同値であることが示されている。

そこで予想を解くには K_X の Zariski 分解の存在を示せばよい。
筆者は次の定理を得た。

定理. X を非特異一般型代数多様体とする
このとき X の Zariski 開集合上で C^∞ 級の d-closed 正カレント ω で次のようなものがある
(1) ω は X の Zariski 開集合上 Kähler-Einstein
即ち $\omega = -\mathrm{Ric}_\omega$ をみたす
(2) ω から K_X の Zariski 分解が得られる。
□

(2)は具体的には ω を
$$\omega = (\omega - \omega_{sing}) + \omega_{sing}$$
と測度として分解したとき $\omega - \omega_{sing}$ が P に ω_{sing} が N に対応している。

Anisotropic - Curvature driven motions.

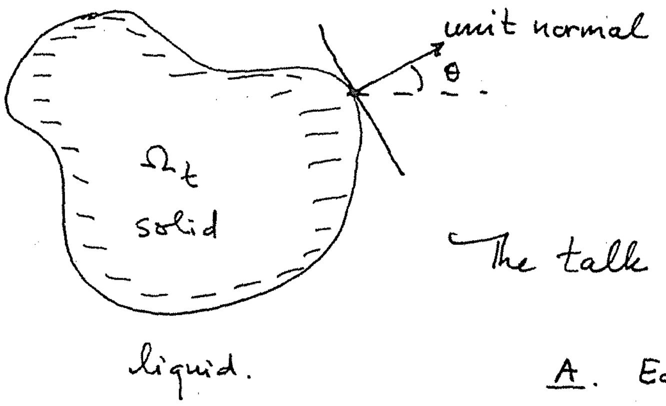
S.B. Angenent

This talk will describe joint work with Morton E. Gurtin (from Carnegie Mellon-University, Pittsburgh, Pennsylvania).

Gurtin formulated several models for the evolution of a solid which is melting. The simplest of these models assumes the solid occupies a region $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$ at time t, and that Ω_t evolves according to

$$(1) \qquad \beta(\theta)\, v = \big(f(\theta) + f''(\theta)\big)k - F ,$$

where
v = normal velocity of $\partial\Omega_t$
$f(\theta)$ = free energy of the boundary $\partial\Omega_t$
F = relative free energy density of Ω_t w.r.t. Ω_t^c
($F \in \mathbb{R}$ is constant)
$0 < \beta(\theta)$ = the "kinetic coefficient".



The talk will have 3 parts:

A. Equilibrium shapes, Frank-diagram, Wulff shape.

B Well-posedness of initial value problem.

C Qualitative properties of solutions.

A EQUILIBRIUM SHAPES

The problem of finding equilibrium shapes was studied by crystallographers, a long time ago (early this century!).

They wanted to solve:

$$(*) \qquad \min \Big(\oint_{\partial\Omega} f(\theta)\, ds \Big) \quad \text{with constraint } |\Omega| = \text{fixed}.$$

The Euler-Lagrange equations for this problem are:

$$\delta \int_{\partial\Omega} f(\theta)\, ds = -\int_{\partial\Omega} \big(f(\theta) + f''(\theta)\big) k \; v \, ds \qquad (v = \text{normal variation in } \Omega)$$

$$\delta\, |\Omega| = \int_{\partial\Omega} v \, ds$$

so

$$\delta \int f ds + \lambda \cdot \delta \oint |\Omega| = 0 \iff \big(f(\theta) + f''(\theta)\big) k = \lambda$$

Euler-Lagrange multiplier.

This gives k as function of θ, and you can find a parametrization of $\partial\Omega$ as follows:

$$X(\theta) - X(0) = \int_0^\theta e^{i\theta}\, ds = \int_0^\theta e^{i\theta} \frac{d\theta}{k} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\theta (f + f'')(\theta)\, e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\lambda} \Big[\big(f'(\theta) - i f(\theta) \big) e^{i\theta} \Big]_0^\theta = \frac{1}{\lambda} \Big[-f(\theta)^2 \frac{d}{d\theta} \frac{e^{i\theta}}{f(\theta)} \Big]_0^\theta$$

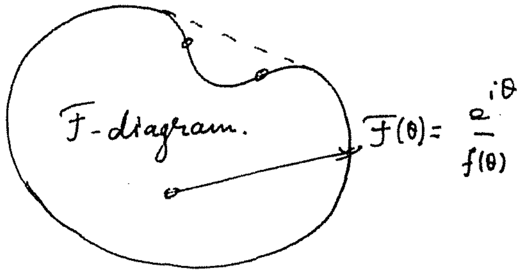
so

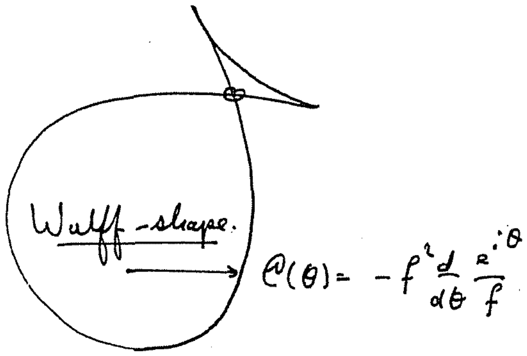
$$X(\theta) = \frac{1}{\lambda}\, \mathcal{C}(\theta) \quad \text{with} \quad \mathcal{C}(\theta) = -f(\theta)^2 \frac{d}{d\theta} \frac{e^{i\theta}}{f(\theta)}$$

is ~~a~~ the solution to $(*)$

Observe: The solution is a smooth curve $\iff$ ~~$\partial\Omega$ is~~ $f(\theta) + f''(\theta) \neq 0$ for all θ.

The Wulff shape:





Curvature of the Frank diagram (curve parametrized by $\frac{e^{i\theta}}{f(\theta)}$) is

$$(\text{positive quantity}) \times \left(f(\theta) + f''(\theta)\right).$$

So $f + f'' > 0$ for all θ $\Leftrightarrow$ the Frank diagram is convex.

Further interpretation of $@(\theta)$: The tangent to the $\mathcal{F}$-diagram at $e^{i\theta}/f(\theta)$ is given by

$$\det\left(@(\theta), x\right) = 1$$

$$\left(\text{where } \det(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1\right)$$

If you allow Locally Lipschitz curves, then $(*)$ has a solution even if $\mathcal{F}$ is not convex: truncate the Wulffshape!

B Gurtin's evolution equation & Well posedness.

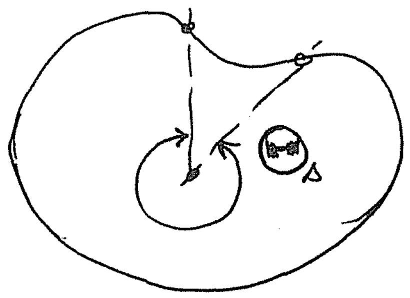
If $f+f''>0$ for all θ (i.e. if F diagram is convex)

then (1) can be reduced to a quasilinear parabolic PDE (locally) and „standard theorems" imply that you get short time existence of smooth solutions.

If $f+f''<0$ for some θ, so the F diagram is not convex, then define

$$\Theta_s = \{\theta \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} : f(\theta)+f''(\theta)>0\}$$

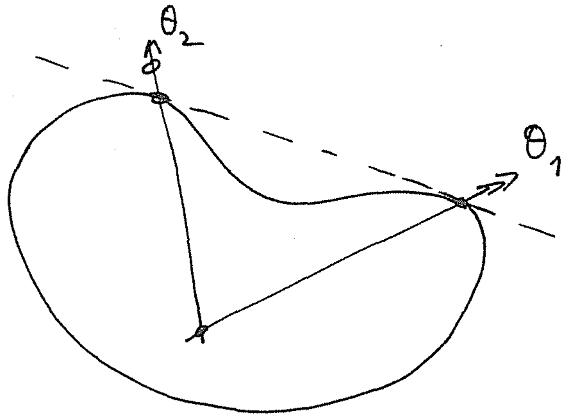
(the set of stable angles).

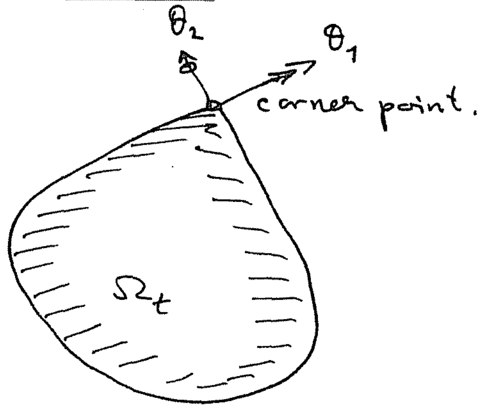


F diagram.

We consider domains Ω_t with $\partial\Omega_t$ piecewise smooth, such that $\theta \in \Theta_s$ everywhere on $\partial\Omega_t$.

Such a domain has corners





Gurtin derived (by some thermodynamical argument) a condition on the tangents at any corner: the quantity $\Theta(\theta)$ must be continuous on $\partial\Omega$. Thus allowable corners correspond to bitangents of the Frank diagram.

We proved a short time existence theorem for piecewise $C^{2,\alpha}$ domains with allowable corners.
(The proof is technical!)

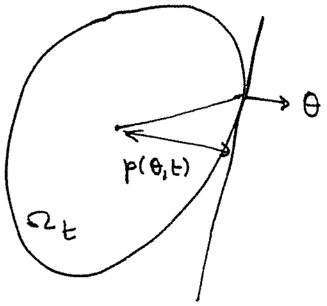
C Qualitative properties

Consider a (piecewise) smooth solution Ω_t of (1) with @(θ) continuous on $\partial\Omega_t$.
The number (#) of points at which θ is equal to a given value does not increase with time.

The # of inflection points of $\partial\Omega_t$ does not increase.
In particular: if Ω_0 is convex then Ω_t is convex $(0<t<T)$.

Assume from here on that F is convex (so $f(\theta)+f''(\theta)>0\ \forall\theta$) and that Ω_0 is convex.

Then the <u>support function</u> $p(\theta,t)$ of Ω_t evolves by



$$\frac{\partial p}{\partial t} = v = \frac{(f(\theta)+f''(\theta))k - F}{\beta(\theta)} \qquad (2)$$

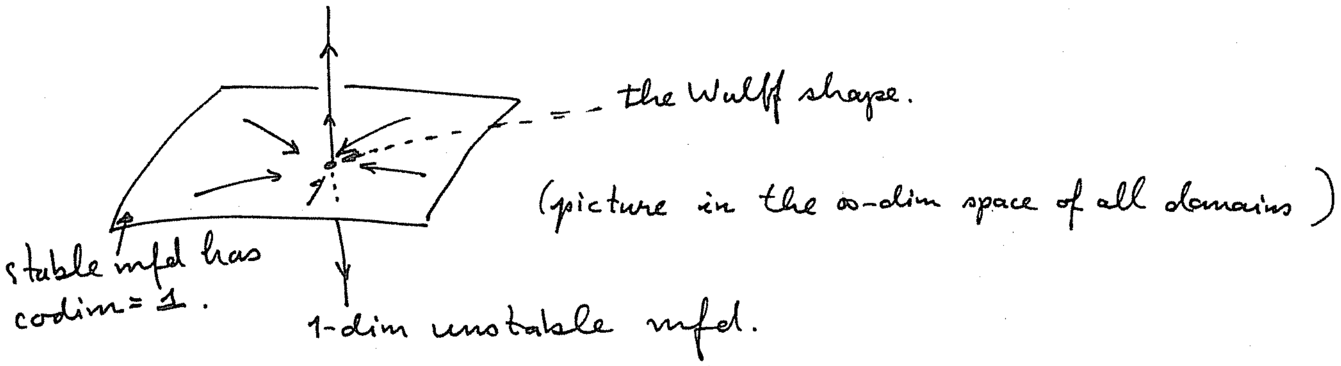
Using $k = \dfrac{-1}{p_{\theta\theta}+p}$ one gets a PDE for the normal velocity if one differentiates (2) w.r.t. time

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(\beta(\theta)v+F)^2}{\beta(\theta)\,(f(\theta)+f''(\theta))}\,(v_{\theta\theta}+v) \qquad (3)$$

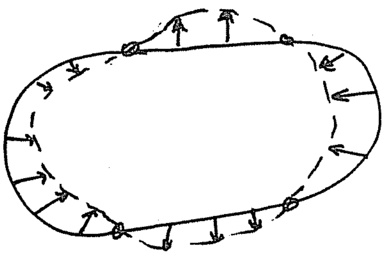
This eqn. is of the form $v_t = A(\theta,v)\,(v_{\theta\theta}+v)$.

If $F<0$ then $v\equiv 0$ is in the domain where (3) holds (namely $v < \dfrac{-F}{\beta(\theta)}$); so $v\equiv 0$ is an equilibrium.
The corresponding domain is the Wulff shape.

We did a linearized stability analysis in this case, and found that the Wulff shape is <u>unstable</u> with one unstable eigenvalue



<u>Four-node theorem</u> If Ω_{*} lies on the stable mfd of the Wulff-shape then $\partial\Omega$ has at least <u>four</u> points where $v = 0$, i.e. where
$(f(\theta)+f''(\theta))\,k - F = 0$.



<u>Growth of large domains</u> If Ω_0 is convex, $\Omega_0 \supsetneq \Omega_{Wulff}$ then Ω_t is smooth and $\frac{\Omega_t}{t} \longrightarrow \Omega_*$ for some fixed shaped which is completely determined by $\beta(\theta)$: In the limit Ω_t evolves according to $v = \frac{-F}{\beta(\theta)}$. Ω_* is smooth $\Leftrightarrow$ Polar diagram of β is convex.

<u>Small domains</u> The problem is still partially open, although there are results by M. Gage and Y. Li. If $\Omega_0 \subsetneq \Omega_{Wulff}$ then Ω_t shrinks to a point in finite time, but the asymptotic shape is not known in all cases. Gage & Co showed that <u>if</u> there is a self similar solution then Ω_t behaves like the self similar solution.

ベルグマン核とゼゲー核の漸近解析

小松　玄　（大阪大学理学部）

１．序． 強擬凸領域において，ベルグマン核とゼゲー核の特異性を具体的に計算する方法を二つ述べる．（阪大の平地健吾君と東北大の中澤則之君との共同研究である．）一方は柏原－ブテドモンヴェルの方法とでも呼ぶべきものであり，他方はボホナーに起源を持つ古典的なフーリエ解析の方法である．これらは共に不変式論に関するフェッファーマンのプログラムの一部分を実行するために用いられる．まずその話から始めよう．

２．不変式論． 滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域において，ベルグマン核を対角線集合に制限したものＢを考える．Ｂは領域内部では半正値であるが，境界上に特異性を持つ．領域が球の場合には，Ｂは簡単な表示を持つ．よって一変数の領域においては，Ｂの特異性の形はリーマンの写像函数から完全にわかる（変換則と局所化原理を使う）．即ち，Ｂの特異性は領域の定義函数に関して極の形をしている．多変数の強擬凸領域の場合にも同様のことが予想されるが，実際には少し違っていて，定義函数の０乗に対応して対数項を含む弱い特異性が現われる．即ち，境界の近傍では

$$B(z)=\text{極の形の強い特異性}+\text{対数項を含む弱い特異性}+\text{滑らかな余り}$$
$$=\varphi(z)/r^{n+1}+\psi(z)\log r$$

となっている．但し r は定義函数であって，函数 φ, ψ は境界まで込めて滑らかである．これらの函数 φ, ψ の定義函数 r に関するテイラー展開を考える．但し，滑らかな余りの部分は無視する．

定義函数を上手に選んで，特異性の係数（境界上の函数である）を不変な形に表わしたい．函数 φ の境界値は，定義函数のレヴィ行列式の境界値である．この値が領域内部でも１になるように定義函数を選ぼうとすれば，複素モンジュ・アンペール境界値問題が得られる．この境界値問題は一意的な解を持つが，もしそれが境界まで込めて滑らかならば話は簡単である．実際，この解は双正則写像に関してウェイト－１の変換則をみたす．但しウェイトはヤコビアンの冪を正規化して定義される．ウェイトをこのように測ることにすれば，Ｂはウェイトが $n+1$ の変換則をみたすから，特異性の係数は局所相対不変量になるはずである（局所化原理による）．

現実には，複素モンジュ・アンペール境界値問題の解は境界まで込めて滑らかでないので，上の話は少しぼけた形でしか成り立たない．もう少し正確に述べよう．

事実． 簡単なアルゴリズムによって，境界まで込めて滑らかな近似解を構成することができる．真の解は近似解を用いて漸近展開されるが，その展開はある程度まで局所的である．これを用いると，変換則がぼける手前までは，ベルグマン核の不変式論が可能である．特に二次元の場合には，初めの五つの項が二つの普遍定数を除いて決定される．ゼゲー核についても同様である．

3．計算方法． 簡単のため，二次元の場合に話を限ろう．以下に述べる二つの方法は共に次元によらずに有効であるが，高次元の場合には不変式論の一般論の研究が進んでいないので話が中途半端になる．また，何れの方法でも限りなく計算を続けることができるが，得られた結果の不変な意味はまだわかっていない．

柏原－ブテドモンヴェルの方法は，ベルグマン核が解析的な擬微分方程式系（ミクロ微分方程式系）をみたすという事実に基づく．但し，領域の境界は実解析的と仮定し，全ての操作を複素化の世界で超局所的に行なう．この方程式系は，領域のヘヴィサイド函数がみたす方程式系に現われる作用素の形式的な共役作用素を用いて表わされる．この方程式系をフーリエ積分作用素によって球に移植して，具体的な計算を実行したい．そのために，領域の境界を局所的に考えたときのモーザーの標準形を，最後の変数については正則になるように修正して用いる．そうすれば，フーリエ積分作用素を無限階の正則ミクロ微分作用素として具体的に実現することができ，ベルグマン核の漸近展開の計算が特殊な定義函数に関して可能になる．得られた結果を通常のモーザーの標準形の係数を用いて書き直せば，漸近展開の初めの五項が普遍定数も込めて決定される．但しその前に，複素モンジュ・アンペール境界値問題の解をこの定義函数に関して漸近展開しておく．ゼゲー核の場合には，無限階の正則ミクロ微分作用素のつくりかたに工夫が必要である．

古典的なフーリエ解析の方法においては，柱状領域およびラインハルト領域の上でベルグマン核を考える．ラインハルト領域上の正則函数はローラン展開されるが，自乗可積分な函数に限ればそれはフーリエ展開になっている．これをスペクトル分解と考えてそれを与えるユニタリ変換を仮にフーリエ・ローラン変換とでも呼べば，柱状領域の場合には対応するユニタリ変換はフーリエ・ラプラス変換である．こうして，ラインハルト領域と柱状領域において，ベルグマン核のローラン級数表示とラプラス積分表示が得られる．（両者はポワソンの和公式によって関係しており，本質的に同じ形の特異性を持つのである．）以下，簡単のため，柱状領域の場合に話を限ろう．底領域の境界をグラフの形に表わしておき，その表示に対応する定義函数を用いよう．参照境界点を一つ固定して，その近傍でベルグマン核の漸近展開を考えたい．球と双正則な柱状領域の底領域は放物線によって囲まれているから，参照境界点において底領域の境界を二次式で近似する．具体的な計算を実行するために，底領域の境界とそれを近似する放物線とを具体的なホモトピーで結ぶ．このホモトピーを実現するパラメーター t に関する変分を全て取って $t=0$ のまわりでテイラー級数をつくれば，$t=1$ での値が漸近展開を与えている．そこに現われる積分はエルミート函数の正規化定数だけであるから，具体的な計算が可能である．この操作は底領域の境界を放物線に移植するフーリエ積分作用素を求めることに相当するが，必要な情報は擬微分作用素の表象によって与えられる．得られた漸近展開を不変な形に書くためには，ホドグラフ変換を補助的に用いる必要がある．（そうしないと項が何十と現われて様子が見えない．）この場合にも，複素モンジュ・アンペール境界値問題の解を，上のように選んだ定義函数に関して漸近展開しておく．計算は全て初等的であるが，長い．ゼゲー核の計算も同様である．

非有界領域における Navier-Stokes 方程式

小薗英雄（九大・教養）

Abstract

Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^2$ with uniform C^3-boundary $\partial\Omega$. We may cover the case when Ω is an unbounded domain with non-compact boundary. Consider the Navier-Stokes equations in Ω:

$$(N\text{-}S)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad x\in\Omega,\ t>0; \\ u|_{\partial\Omega} = 0; \quad u|_{t=0} = a. \end{cases}$$

Our results read as follows:

THEOREM 1. (Existence of a strong solution) Let $a \in L^2_\sigma$. Then there is a unique strong solution of (N-S) in the following sense:

(1) $u \in C([0,\infty); L^2_\sigma) \cap C^1((0,\infty); L^2_\sigma) \cap C((0,\infty); D(A))$;

(2) $du/dt + Au + P(u\cdot\nabla u) = 0 \ (t>0), \quad u(0) = a$.

Moreover, $u \in C^1((0,\infty); D(A^\alpha))$ for $0 \le \alpha < 1$. Here A denotes the Stokes operator in L^2_σ and P is the projection

from L^2 onto L^2_σ.

THEOREM 2. (Decay) Let $a \in L^2_\sigma \cap L^p$ for $1 < p < 2$.
Suppose that u is the strong solution of (N-S) in Theorem 1.
Then we have the following decay properties:

(1) $\|u(t)\|_r = o(t^{1/r - 1/p})$, $\quad 2 \leq r < \infty$,

(2) $\|u(t)\|_\infty = o(t^{-1/p}\sqrt{\log t})$,

(3) $\|\nabla u(t)\|_2 = o(t^{-1/p})$,

(4) $\|\partial_t u(t)\|_r = o(t^{1/r - 1/p - 1})$, $\quad 2 \leq r < \infty$,

(5) $\|\partial_t u(t)\|_\infty = o(t^{-1/p}\sqrt{\log t})$,

(6) $\|\nabla \partial_t u(t)\|_2 = o(t^{-1/p - 1})$,

as $t \to \infty$, where $\| \ \|_r$ denotes the L^r-norm over Ω.

Spatial graph について　　　1992.1.28

東京女子大.文理　小林一章

Spatial graph の研究は knot theory の拡張としての spatial θ-curves の研究と高分子化学や分子生物学における空間内の異性体の研究等を出発点として持ち，未だ高々20年位の歴史しか無い数学の新しい一分です．数学的には graph theory と knot theory を土台に持っています．研究方法，テーマ等は knot theory をモデルにしていますが円周の埋め込みである knot に比べて頂点の所で多様体でなくなるグラフの埋め込みの分類は格段に難かしく一つのグラフの spatial graphs の世界に knot theory 全体が組み込まれてしまう感じです．特に理論としての発展が遅れている最大の原因は planar graph 以外の graph に対し "standard" spatial graph の定義が出来ていない事です．この談話会では pseudo Hamilton graph というクラスに対し book presentation という概念を使って standard spatial graph を定義し，それが "standard" である事を示す状況証拠として locally unknotted という概念と Topological symmetry group という概念を説明します．そして主に完全グラフ K_5, K_6, K_7 に対しこの状況証拠が揃っている事を示します。又1つのグラフの standard spatial graphs の間の同値性を示す同値関係として book の sheet translation という概念を導入し，これが knot の間の同値関係である $\mathbb{R}^3$ の ambient isotopy や $\mathbb{R}^3$ の homeomorphism より spatial graphs に対しては適切な概念である事を示します

合流型超幾何微分方程式に対する
Ecalle の再生方程式と Stokes 現象について

お茶の水女子大学理学部数学科　真島秀行 (Hideyuki Majima)

要旨

2 階合流型超幾何微分方程式の不確定特異点の状況を調べるのに Laplace-Borel-Ecalle の方法を使うと見通しよく Stokes 係数を計算できる．すなわち，

$$\frac{d^2}{dz^2}w + (A_0 + \frac{A_1}{z})\frac{d}{dz}w + (B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2})w = 0.$$

を考えると，無限遠点で次の形の形式解

$$\exp(\rho_j z)\phi(\rho_j; z), \qquad \phi(\rho_j; z) = z^{-\kappa_j}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho_j) z^{-k}, \quad (j = 1, 2)$$

をもつ．この Borel 変換

$$\Phi(\rho_j; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\rho_j)}{\Gamma(k + \kappa_j)} \zeta^{k+\kappa_j-1},$$

が Gauss の超幾何関数で表され， Ecalle の再生方程式

$$\Phi(\rho_1; \zeta \exp(2i\pi)) - \Phi(\rho_1; \zeta)$$

$$= (\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)\Phi(\rho_1; \zeta)$$

$$= (\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)ca_{12}\Phi(\rho_2; \zeta - (\rho_1 - \rho_2))$$

$$+(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)\frac{(\rho_1-\rho_2)^{\kappa_1-1}}{\Gamma(\kappa_1)}c_0(\rho_1)a_{11}F(\alpha_2,\beta_2;\gamma_2;1+\frac{\zeta}{\rho_2-\rho_1}),$$

$$\Phi(\rho_2;\zeta\exp(2i\pi))-\Phi(\rho_2;\zeta)$$

$$=(\exp(2i\pi\kappa_2)-1)\Phi(\rho_2;\zeta)$$

$$=(\exp(2i\pi\kappa_2)-1)c^{-1}a_{21}\Phi(\rho_1;\zeta-(\rho_2-\rho_1))$$

$$+(\exp(2i\pi\kappa_2)-1)\frac{(\rho_2-\rho_1)^{\kappa_2-1}}{\Gamma(\kappa_2)}c_0(\rho_2)a'_{11}F(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1;1+\frac{\zeta}{\rho_1-\rho_2}),$$

の係数が超幾何関数の接続公式に現れるものを用いて書き表せる．それをLaplace 変換することにより形式解に漸近展開される解がえられ Stokes 係数が明示的に計算できる．この方法は古典的に知られているともいえるが再生方程式を明示的に用いると非常に見通しよく計算ができることを強調したい．なお，(一般に) 形式解の Borel 変換が限りなくどこまでも解析接続できる，すなわち，resurgent 関数であることをことを初めて主張し，それを詳しく解析するための手段，resurgent calculus を発見したのは Ecalle である．同様の方法で，2 変数の合流型超幾何微分方程式のうち，Φ_1，Φ_2，Ψ_2 の Stokes 係数を求めることができる．

Applications and Extensions of Fomin's Generalization of the Robinson-Schensted Correspondence to Differential Posets

Tom Roby

3 February 19912

The Robinson-Schensted (R-S) correspondence and its many variations lie at the combinatorial heart of many facts from representation theory and symmetric function theory. They provide concrete bijective proofs of results that were often originally obtained in much more algebraic or abstract ways. Most of these results can be viewed as counting Hasse walks in certain partially ordered sets. Stanley was able to derive many enumerative results on the class of *differential posets* (of which Young's lattice is a member) using a highly algebraic approach which converted certain enumerative problems to (solvable) partial differential equations. Fomin (independently) defined essentially the same class of graphs and constructed a generalization of the R-S correspondence to differential posets. We show how Fomin's construction can be used to unify many of the R-S variants, including Knuth's generalization to semi-standard tableaux, the skew algorithms of Sagan and Stanley, the oscillating algorithms of Sundaram, and the oscillating Knuth algorithm of Gessel. It allows one to view all these variants as natural constructions.

Besides Young's lattice, the other interesting example of a differential poset is the Fibonacci lattice. We use Fomin's methods to construct a R-S type bijection and prove some of its properties. In particular, we are able to give an equivalent insertion algorithm and an analogue of the Greene-Kleitman-Fomin correspondence for turning a permutation into a poset.

Sequentially differential posets are a more general class of posets which include the differential posets as a special case. There are many more interesting examples of sequentially differential posets, but the enumeration of their Hasse walks is more complicated. By generalizing Fomin's construction, we are able to give bijective proofs of Stanley's results and derive some new results as well.

Following Fomin, we define the notion of a growth, i.e., a map between finite partially ordered sets which preserves the relations "covers or is equal to". In particular, tableaux represent a certain kind of "one-dimensional" growth in Young's lattice. Fomin's basic technique was to extend these growths to "two-dimensional" growths defined on all the vertices of a Convex subset of $\mathbb{Z}^2$. The existence and uniqueness of these extensions allows one to see Schensted's correspondence in a more general way, and make it easier to construct variants and extentions.

We give one example, which shows how this approach gives a nice pictorial way of viewing a recent Schensted variant constructed by Sagan and Stanley.

Let PS_n denot the set of partial permutations on n, i.e., the biwords obtainable by taking a subset of the terms in a permutation. A tableaux of shape λ/μ is called *partial* if its elements are distinct (but not necessarily the numbers $1, 2, \ldots, n$). Let $PT(\lambda/\mu)$ denote the set of all partial tableaux of shape λ/μ.

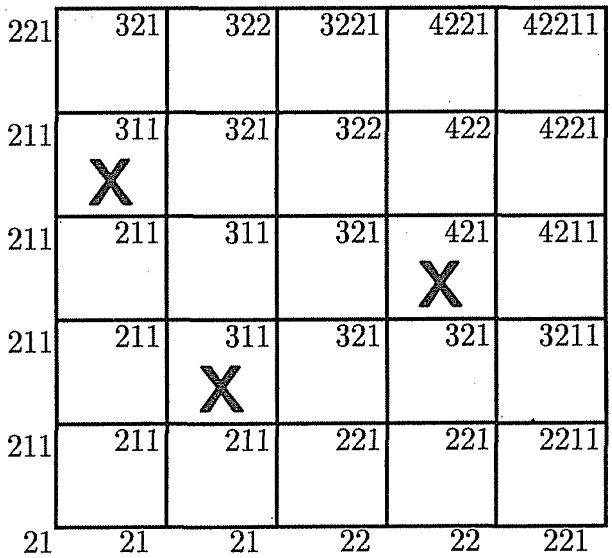
The basic result of [SS] follows. In the following, "$\uplus$" denotes "disjoint union". Also, recall the notation $\hat{\pi}$ and $\check{\pi}$ for the top and bottom lines of a biword.

Theorem 1.1 Let n be a fixed positive integer and α a fixed partition (not necessarily of n). Then there is a map

$$(\pi, T, U) \longleftrightarrow (P, Q)$$

defined below which is a bijection between $\pi \in PS_n$ with $T, U \in PT(\alpha/\mu)$ such that $\check{\pi} \uplus T = \hat{\pi} \uplus U = \{1, 2, \ldots, n\}$, on the one hand, and $P, Q \in ST(\lambda/\alpha)$ such that $\lambda/\alpha \vdash n$, on the other.

Example 1.2 This is the same example Sagan and Stanley give in their paper [SS, p. 165], but we reinterpret it using Fomin's approach. Let $n = 5$, $\alpha = (2, 2, 1)$, $\pi = \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{matrix}$. In the picture below, P is the right edge, Q the upper edge, T the left edge, and U the lower edge. The partial permutation is represented by X's, as usual.



References

[Rob] T. W. Roby, "Applications and Extensions of Fomin's Generalization of the Robinson-Schensted Correspondence to Differential Posets," Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1991.

[SS] B. E. Sagan and R. P.Stanley, "Robinson-Schensted algorithms for skew tableaux," *J. Combin. Theory Ser. A* **55**, #2 (1990), 161-193.

談話会要旨、

（東大・理）　小谷眞一

"非コンパクトリーマン多様体上の $-\Delta$ のスペクトルの下限について。"

M を非コンパクトリーマン多様体でその曲率作用素 R が非正とする。さらに M は単連結完備とすれば、H.P. McKean により

$$R \leqq -kI \quad \exists\, k > 0$$

の仮定の下で $-\Delta$ のスペクトルの下限 $\lambda_0(M)$ は

$$\lambda_0(M) \geqq \frac{1}{4}k(n-1)^2$$
$$(n = \dim M)$$

という評価を持ち　これが最良の評価であることが知られている。この談話会では講演者が最近得た結果で、R が平坦な部分も持

多く持つ場合にも $\lambda_0(M)$ の下からの
評価が、曲率の言葉で言えることを記す。
つまり、Ω を M の単位球面接ベクトルとし
$T_t:\Omega\to\Omega$ を測地流とする。このとき、

(仮定) $^\exists p\in M,\ ^\exists T>0$ s.t.

$$\rho(T)\equiv \inf_{\substack{\xi\in T_pM\\ \|\xi\|=1\\ t\geq 0}} \int_t^{t+T}\{-\mathrm{Tr}\,R(T_s\omega)\}ds > 0 \qquad (\omega=(p,\xi))$$

の下で

<u>定理</u>

$$\lambda_0(M)\geqq \frac{1}{4}\kappa_0(T)^2$$

$$\left(\text{但し}\quad \kappa_0(T)=\frac{1}{T+\rho(T)^{-1}}\right)$$

を得た。これは H.P. McKean の定理
$R\leqq -\kappa I$ の下では $\sup_{T>0}\kappa_0(T)=\frac{\sqrt{(n-1)\kappa}}{2}$ となり.

$$\lambda_0(M) \geqq \frac{1}{16}\kappa(n-1)$$

を得，$\lambda_0(M) \geqq \frac{1}{4}\kappa(n-1)^2$ より悪い結果であるが，M に平坦な部分が相当にあってもスペクトルの下限が正になるという点では良くなっている。

XY 模型の Master Symmetries

（京大・数理研）　荒木不二洋

古典力学系（質点系）の時間変化（運動）は相空間の点の動き方で表される．そのような系の物理量は相空間上の関数で与えられ，相空間の無限遠で 0 になる連続関数に限定すれば，それは可換な C^* 環（の典型的な例）になる．系の時間変化は相空間の点の運動を通じて物理量の変化として捕らえることができて，物理量のなす可換 C^* 環の自己同型写像のなす 1 径数群（径数は時間）として記述される．

量子力学では物理量は非可換になり，系の時間変化は非可換な C^* 環の自己同型写像のなす 1 径数群で記述されることになる．特に空間に無限に拡がった系のような無限自由度の系では一般に示量変数であるエネルギーが無限大になることを反映してハミルトン作用素が定義できず，このような記述が本質的に必要になる．

特に格子（例えば立方格子）の各点にスピンのような同一の有限な系が置かれているスピン格子系ではそのような記述が理想的な形で行えて，種々の結果が得られている．そのようなスピン格子系の中には，いわゆる厳密解が求まる場合があり，一次元の XY 模型はその一例である．通常可解模型では無限個の“保存量”が存在すると考えられている．有限自由度の系ではハミルトニアンと可換な量として保存量を定義することもできるが，無限自由度では時間変化と可換な自己同型写像として捕らえなおす方がよい．

一次元の XY 模型について，Barouch と Fuchssteiner はこのような保存量を無限に作り出す方式として Master Symmetry を考えた．彼らは有限サイズの一次元格子（鎖）を考えているので，　すべて有限次元行列の問題であり，ハミルトニアン H も作用素として意味をもつ．Master Symmetry M というのは $H_1 = i[M,H], H_2 = i[M,H_1], \cdots$ がすべて H と可換になるような作用素 M のことである．実はそのような M を $M, M_1, i[M,M_1] = M_2, M_3 = [M,M_2], \cdots$ のようにまた無限個作っている．

彼らの論文ではいくつかの問題点がある．ひとつはすべての計算は有限個の例について計算機によってチェックしたということで，数学的な証明は与えていない．また本当に $[H_i, H_j] = 0$ が成立するかについて，格子の境界でどうなるかチェックしていないように見受けられる．いずれにしても有限の行列では無限個の保存量はあり得ない．

これらの点を無限に延びた一次元格子について明らかにしたのがこの仕事の主要なポイントである．定式化は初めに述べた C^* 環の自己同型写像の 1 径数群を用い，その generators が H, M, H_j, M_j 等を微分作用として捕らえたものになる．証明の主要な技法は，正準交換関係の Fock 表現についての種々の結果と作用素環論的な議論を駆使する．Barouch と Fuchssteiner が気がつかなかった結果としては $H_1^j = i[M_j, H], H_2^j = i[M_j, H_1^j], \cdots$ のようにして得られた可換な " 保存量 " はすべて M から得られたものの線形結合になる点である．正確には H と可換なある作用素 S について $S_1 = i[M, S], S_2 = i[M, S_1], \cdots$ として得られる $S, S_1, S_2, \cdots$ を含む可換系についてそのようなことが云える．またここで用いた計算法は H_j や M_j の一般形が容易に書き下せる点で Barouch-Fuchssteiner の計算機による計算より優れている．

いくつかの問題が残されている．ひとつはこのようにして得られる " 保存量 " が極大可換系を作るかどうかということで，これは岸本晶孝氏の定理に関係している．もうひとつは 2 次元可解格子模型との関連で得られる可換系との関係である．後者は多分少し計算を進めれば明らかにできるのではないかと考えている．前者は作用素環的なアイデアが必要のように感じられる．

THE LIE AFFINE FOLIATIONS ON 4-MANIFOLDS

by S. Matsumoto (A joint work with N.Tsuchiya)

§*1. Definition of Lie affine foliation.* G; Lie group, X; C^ω-mfd on which G acts, M; mfd.

Suppose $\exists D; \widetilde{M} \to X$, a submersion and $\exists \phi; \pi_1(M) \to G$ s.t.

(Equivalence Condition) $\qquad D(\gamma x) = \phi(\gamma)D(x)$ for $\gamma \in \pi_1(M), x \in \widetilde{M}$.

DEFINITION. 1. *D induces a foliation $\mathcal{F}$ on M. $\mathcal{F}$ is called a (G, X)-foliation, D the developing submersion and ϕ the holonomy homomorphism*

Our main concern: $G = X = \mathit{Aff}_+(\mathbf{R})$; Lie gr. of ori. pre. affine transformations of $\mathbf{R}$, the action of G on X is the left translation.

DEFINITION. 2. *In this case F is called a Lie affine foliation.*

§*2. Another way to introduce Lie affine foliation.* Left invariant 1-forms of $\mathit{Aff}_+(\mathbf{R})$ are generated by ω and η satisfying

(Fundamental Relation) $\qquad d\omega = \omega \wedge \eta$ never vanishes, $d\eta = 0$.

They are pulled back to $\widetilde{M}$ by D and projected down to M by the equivariance condition. (Also denoted by ω and η.)

PROPOSITION. 3. *Conversely given 1-forms ω and η on M satisfying the fundamental relation, then they yield a Lie affine foliation.*

§*3. Examples.* Usual way to construct a Lie affine foliation is as follows. N: mfd, ω_0; closed 1-form on N, $f : N \to N$, diffeo. s.t. $f^*\omega_0 = \exp(\lambda)\omega_0$ $(\lambda \neq 0)$.

Form M, a mapping torus of f. i.e.

$$M = N \times \mathbf{R}/\sim, \text{ where } (x, t+1) \sim (x, f(x)).$$

M is an N-bundle over S^1. Define 1-forms ω and η on M by

$$\omega = \exp(\lambda t)\omega_0 \text{ and } \eta = -\lambda dt.$$

Then they satisfy the fundamental ralation and give an affine foliation $\mathcal{F}$.

REMARK. 4. *Notice that any leaf of $\mathcal{F}$ is contained in the fiber of $M \to S^1$. Hence it can never be dense in M.*

§*4. The result.* Heafliger constructed an all-leaves-dense Lie affine foliation on a closed 5-manifold. On the contrary we have the following.

THEOREM. 5. *In dim ≤ 4, all the Lie affine foliations are constructed as in §3. In fact they can be classified in terms of solvable Lie groups.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

鈴木 寛 (大阪教育大)

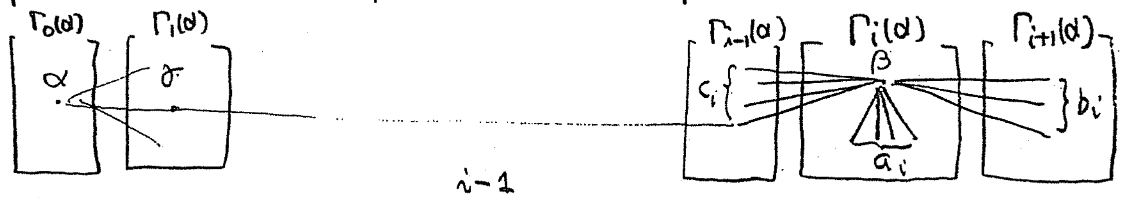
ANTIPODAL CHARACTERIZATION & LOCAL CHARACTERIZATION OF DISTANCE REGULAR GRAPHS

Γ: connected undirected finite graph without loops or multiple edges.
∂: distance in Γ. = the length of a shortest path
$\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \in \Gamma \mid \partial(\alpha,\beta) = i\}$.

rank 1 symmetric space

DEF. Γ: DTG (distance-transitive graph)
$\Leftrightarrow$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ $\partial(\alpha,\beta) = \partial(\gamma,\delta) \to \exists \sigma \in Aut(\Gamma)$, $\alpha^\sigma = \gamma$, $\beta^\sigma = \delta$.
Γ: DRG (distance-regular graph)
$\Leftrightarrow$ The cardinality of $D^i_j(\alpha,\beta) = \Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)$
depends only on $\partial(\alpha,\beta) = m$. We write $p^m_{ij} = |D^i_j(\alpha,\beta)|$.
$\Rightarrow$ Examples J, H, A, $\tilde{A}$, B, $\tilde{B}$, C, $\tilde{C}$, D, $\tilde{D}$, ${}^2A$, ${}^2\tilde{A}$, ${}^2D$, ${}^2\tilde{D}$, | GP
リータイプに対応して きれいな Family それと Sporadics が存在

Γ: DRG.
$p^i_{1\,i-1} = c_i$, $p^i_{1\,i} = a_i$, $p^i_{1\,i+1} = b_i$ $c_i + a_i + b_i = k$ $= k(\Gamma) = p^0_{11}$



$\div\, p^0_{ii}$
$k_i = |\Gamma_i(\alpha)|$

$c_i \geq c_{i-1}$. each c_{i-1}-graph is a subgraph of some c_i-graph.

構造論的条件

$1 = c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_d$ $\quad d = d(\Gamma) = \max\{\partial(\alpha,\beta)\}$
$b_0 = k \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{d-1} \geq 1$

$$\iota(\Gamma) = \left\{\begin{array}{cccccc} * & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & & a_i & & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & & b_i & & b_{d-1} & * \end{array}\right\}$$
intersection array

BCN chap 5
Brouwer Cohen Neumaier (Distance-Regular Graphs)

A_i: $\Gamma \times \Gamma$ matrix (i-th adjacency matrices)
$A_i[\alpha,\beta] = 1$ if $\partial(\alpha,\beta) = i$, 0 otherwise.
$$A_i A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p^\ell_{ij} A_\ell$$
$A_1 A_i = b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1}$ So there are polynomials $v_i(x)$
s.t. $x v_i(x) = b_{i-1} v_{i-1}(x) + a_i v_i(x) + c_{i+1} v_{i+1}(x)$
$v_0(x) = 1$, $v_1(x) = x$ & then $v_i(A_1) = A_i$.
$A_1 A_{d-1} = b_{d-2} A_{d-2} + a_d A_d$
$x v_{d-1}(x) = b_{d-2} v_{d-2}(x) + a_d v_d(x) + v_{d+1}(x)$
then $v_{d+1}(A_1) = 0$
A_1 has $d+1$ distinct eigenvalue $k = \theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d \geq -k$

No.

Date

$\mathfrak{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle_{\mathbb{R}} = \langle A_1 \rangle_{\mathbb{R}\text{-alg}} \curvearrowright \mathbb{R}\Gamma = V_0 \oplus \cdots \oplus V_d$

$m(\theta_i) = \dim V_i = |\Gamma| \Big/ \sum_{i=0}^{d} \dfrac{v_i(\theta)^2}{k_i} \in \mathbb{N}$

This is a basic property but gives a very strong necessary condition for DRG to exist.

表現論的条件

Bannai-Ito Conjecture

$d \le f(k)$

there are finitely many DRGs with fixed valency

$b_i - c_i$ $\quad k > \underset{k-2}{b_1 - 1} \ge \cdots \ge \underbrace{b_{d-1} - c_{d-1}}_{\ge 2-k} \ge -c_d \ge -k$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} * & 1 & \cdots & 1 & c_{r+1} \\ 0 & a & & a & a_{r+1} \\ k & b & & b & b_{r+1} \end{array}\right. \qquad (r \text{ columns } 1, a, b)$$

$r = r(\Gamma)$: $(c_{r+1}, a_{r+1}, b_{r+1}) \neq (1, a, b)$

So if the array has same columns they are consecutive ones.

構 **Thm (A.A. Ivanov)**

$d \le 2^{2k-4}(r+1)$ $\leftarrow$ 改良

There are many refinements of this result.

Conjecture (A.V. Ivanov)

$\ell(c, a, b) = \#\{ i \mid (c, a, b) = (c_i, a_i, b_i) \} \le r(\Gamma) + 1$

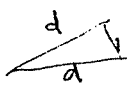
構 **Thm (A.V. Ivanov)**

If $\ell(c, a, b) > r(\Gamma) + 1$, $1 < c$, $b \le k/2$ $\quad (\nearrow b_1)$

構＋表 **Thm** ('90.12, '91.7)

$d \le f(k_d)$ if $a_d \neq 0$.

If Δ is not a coclique, there are finitely many DRGs with $\Gamma_d(\alpha) \simeq \Delta$.



構 $(k \le)\ k p_{dd}^{?} \le k_d a_d \le k_d(k_d - 1)$

If $r(\Gamma) > 2(k_d - 1)$,

every connected component of $\Gamma_d(\alpha)$ is a clique $\quad \leftarrow$ thin

moreover $b_1 = c_{d-1}$ $\quad$ extra th

Antipodal characterization

Example $\quad \Gamma_d(v) \simeq K_3$

$k p^1_{dd} = k_d a_d = 3 \cdot 2 \qquad\qquad k = \cancel{1}, \cancel{2}, 3, 6$

If $k = 3, \quad c_d = 1$.

$$\left\{\begin{array}{cc|cc} * & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & * \end{array}\right\}, \qquad \left\{\begin{array}{cccc} * & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & * \end{array}\right\}$$

$k = k_{d-1}$ ※ $\qquad\qquad$ $k_d = 3$ に矛盾

If $k = 6, \quad c_d = 4$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} * & 1 & \cdots & 1 & 1 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 0 & 1 & & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 6 & 4 & & 4 & 2 & 1 & \cdots & 1 & * \end{array}\right\}$$

$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Delta$ ← maximal clique 全体

$\Gamma \simeq \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}$ 距離2を結んだ $\qquad \iota(\tilde{\Gamma}) = \left\{\begin{array}{cccccccc} * & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 3 & 2 & & 2 & 1 & & 1 & * \end{array}\right\} \Rightarrow$ B-I theory.

Prop $\quad$ If $b_1 = c_{d-1}$, with $a_d \neq 0$, $\quad k = a_d(a_d+1) = (a_1+1)(a_1+2)$

Conjecture $\quad$ If $b_1 = c_{d-1}$ with $k = (a_1+1)(a_1+2)$, $c_2 = 1$.
Then either $k_d = 1$ or $\tilde{\Gamma}$ is DRG $\quad$ (or $\Gamma \simeq \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}$)

Thin → 表現論必要. $\qquad$ NOT THIN → 構造論 ?

Local characterization

$k=3$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \cdots 1}}^{t}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{2 \cdots 2}}^{s}} & \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} * & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & c \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & & 1 & 0 & & 0 & a \\ 3 & 2 & & 2 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & * \end{array}\right\}$$

1) $r = 0$ → 無. $\quad$ easy

2) $t = 0$ $\quad$ bipartite $\quad$ T. Ito 表

3) $s > 0$ $\quad$ Biggs-Boshier-Shawe-Taylor 表

4) $s = 0$ $\quad$ Bannai-Ito.

8 graphs.
Circuit chasing technique 構
$t \le 4$
Boshier Nomura - Hiraki

$$\left\{\begin{array}{ccccc} * & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ k & k-1 & k-1 & k-2 & k-2 \end{array}\right.$$

表現論.

- Terwilliger $\quad$ if $a_1 = 0$ $\quad m(\Theta) = \dim V_\Theta \geq 2(k-1)^r$. $\quad k(k-1)^{r-2}$
- Bannai Ito $\quad \Theta \to k \Rightarrow \dfrac{m(\Theta)}{|\Gamma|} \sim Ce^{d}$

Date

Thm (Bannai-Ito, s)

(1) $\ell(c, a, c) \leq 10 k 2^k$

(2) $s(\Gamma) = \#\{ i \mid (a_1 - 2\sqrt{b_1},\ a_1 + 2\sqrt{b_1}) \not\subset (a_i - 2\sqrt{b_i c_i},\ a_i + 2\sqrt{b_i c_i}) \}$

$d \leq f(s(\Gamma), k)$ (if $b_1 \geq (a_1+1)^2$)

Bipatite $\Rightarrow s(\Gamma) = 0$

$k=4$.
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & r & u & t & v & s & \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{ccccccc} * & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & c \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & * \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} * & 1 & 2 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 & * \end{array} \right\} \Rightarrow d \leq 90$$

$r = 0$ $u > 0$

$\Gamma \simeq L(\Delta)$. OK

($k = 2(a_1+1)$, $c_2 = 1$)

$r > 0$ B-N, B-I

finite.

$k=5$: even girth $\rightarrow$ finite.

odd girth $= 2r+1$? 平木 (r を fix すれば OK) 小さい

$k=6$ girth 3 $\rightarrow$ finite

$k = 3(a_1+1)$ 山崎氏(北大)のよい結果が適用可能

$k=8$, $\left\{ \begin{array}{cc} * & 1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 6 \end{array} \right.$ $k=9$ $\left\{ \begin{array}{cc} * & 1 \\ 0 & 2 \\ 9 & 6 \end{array} \right.$

$\tilde{\Gamma} = \Delta \cup \Gamma$

この二つの case はまだわからない

後日 山崎氏らの努力により 後者は diameter が有限であることがわかった

B型 KP方程式系 と Schur 多項式に関する一注意

山田 裕史（東京都立大学）

ここでいう B型 KP方程式系とは佐藤幹夫氏の KP hierarchy の B面として10年以上も前に、京都スクールの人々によって導入された BKP hierarchy のことです。ここではその有理解を問題にしたいと思います。

BKP hierarchy は通常、擬微分作用素を用いて記述されますが、次の形の広田型双線型方程式系で与えることも可能です。まず、変数を $t = (t_1, t_3, t_5, \ldots)$，パラメータを $z = (z_1, z_3, z_5, \ldots)$ とします。τ-函数 $\tau(t) = \tau(t_1, t_3, t_5, \ldots)$ に関する方程式は z の母函数として

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(2z) q_{k+1}(-2\tilde{D}) e^{z_1 D_1 + z_3 D_3 + \cdots} (\tau(t).\tau(t)) = 0$$

で与えられます。ただしここで、D と書いた作用素は広田微分と呼ばれるもので、函数のペア $(f(t), g(t))$ に対して

$$P(D) f(t).g(t) = P(\tfrac{\partial}{\partial s})\ f(t+s) g(t-s)|_{s=0}$$

により定義されます。また $\tilde{D} = (D_1, D_3/3, D_5/5, \ldots)$，$D_n = D_{t_n}$ の意味です。多項式 $q_k(z)$ は次の母函数で定義されます。

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(z) \lambda^k = e^{z_1 \lambda + z_3 \lambda^3 + \cdots}.$$

この方程式系には $t = (t_1, t_3, \ldots)$ の多項式となっている解 $\tau(t)$ が十分たくさん存在します。通常の従属変数（ポテンシャル）に変換すると t の有理式となるので、一般にそのような解を有理解と呼びます。他にもソリトン解、準周期解など厳密解が多々存在します。

有理解の説明のため Macdonald の本に従って Hall-Littlewood 函数を

導入します。n 変数整数係数対称多項式全体のなす graded ring を Λ_n とします：$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1,\ldots x_n]^{S_n} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_n^k$. $m \geq n$ のとき変数の restriction $\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \longrightarrow \Lambda_n^k$ による逆極限を考えそれを Λ^k とします：$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$. さらに $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$ とおいてこの環のことを対称函数環 ($/\mathbb{Z}$) といいます。Hall-Littlewood 函数とは，分割（又は Young 図形）$\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$) でパラメトライズされる Λ の適当な係数拡大の（直交）基底の一つで パラメータ t をもっています。まず $\Lambda_n \otimes \mathbb{Q}(t)$ の元を

$$Q_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t) = \frac{(1-t)^{\ell(\lambda)}}{\phi_{n-\ell(\lambda)}(t)} \sum_{w \in S_n} \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

で定義します。ここで $\ell(\lambda)$ は分割 λ の長さ、即ち正なる λ_i の個数、また $\phi_m(t) = \prod_{i=1}^{m} (1-t^i)$ です。 $t=0$ とおくとこれは Schur の S-函数、いわゆる Schur 函数で $GL(n,\mathbb{C})$ の最高ウエイト $\sum_i \lambda_i \varepsilon_i$ をもつ有限次元既約表現の指標を対角部分群の座標で見たものに他なりません。 $m \geq n$ に対して変数の制限を考えると $\rho_{m,n} Q_\lambda(x_1,\ldots,x_m;t) = Q_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t)$ となるので無限変数版 $Q_\lambda(x;t)$ が考えられますがこれを Hall-Littlewood 函数と呼びます。$\{ Q_\lambda(x,t) ; |\lambda| = k \}$ は $\Lambda^k \otimes \mathbb{Q}(t)$ の $\mathbb{Q}(t)$-基底をなすことがわかります。巾和函数 $p_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$, $p_\lambda(x) = p_{\lambda_1}(x) p_{\lambda_2}(x) \ldots$ との間の変換公式 (Frobenius の公式) が非常に重要です。

$$Q_\lambda(x;t) = \sum_\rho z_\rho(t)^{-1} X_\rho^\lambda(t) p_\rho(x)$$

ここで和は λ と同じ次数を持つ分割 ρ を動きます。$\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots) = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$ と書いたとき

$$z_\rho(t) = z_\rho \Big/ \prod_j (1-t^{\rho_j}) = \prod_i i^{m_i} m_i! \Big/ \prod_j (1-t^{\rho_j})$$

$$\chi^{\lambda}_{\rho}(t) = \sum_{\mu} \chi^{\mu}_{\rho} K_{\mu\lambda}(t) \in \mathbb{Z}[t] \qquad \text{(Green 多項式)}$$

です。 χ^{μ}_{ρ} は $|\mu|$ 次の対称群の既約指標、$K_{\mu\lambda}(t)$ は Kostka-Foulkes 多項式とよばれるもので $K_{\mu\lambda}(0) = \delta_{\mu\lambda}$ です。これから、t=0 とおいた Schur の S-函数が対称群の指標と関係があることは、一目瞭然ですが t=-1 とおいたもの $Q_{\lambda}(x) = Q_{\lambda}(x;-1)$ （これを Schur の Q-函数と呼びます）は対称群のスピン表現の指標と深い関係があります． $Q_{\lambda}(x)$ は λ が strict な分割 ($\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,...)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > ...$) でないときには恒等的にゼロになってしまい、また strict な分割 λ に対して

$$Q_{\lambda}(x) = \sum_{\rho} 2^{\ell(\rho)} z_{\rho}^{-1} \chi^{\lambda}_{\rho}(-1) p_{\rho}(x).$$

と展開したとき ρ は奇数のみからなっている分割を動きます。新しい変数を $t_n = \frac{2}{n} p_n(x)$ (n=1,3,5,...) と定義すると Q_{λ} は

$$Q_{\lambda}(t) = \sum_{\rho=(1^{m_1}3^{m_3}...)} \chi^{\lambda}_{\rho}(-1) \frac{t_1^{m_1} t_3^{m_3} \cdots}{m_1! \, m_3! \cdots}$$

と $t=(t_1,t_3,...)$ の斉重多項式 ($\deg t_n = n$) になります。我々の結果は次のとおりです。

定理　任意の strict な分割 λ に対して $Q_{\lambda}(t)$ は BKP hierarchy の解（τ-函数）である。逆に BKP hierarchy の τ-函数で斉重多項式になっているものは const.$Q_{\lambda}(t)$ に限る。

KP hierarchy の τ-函数と Schur の S-函数の関係については、日比、若山両氏の編集になる絶版の報告集 現代の母函数 所収の拙文をご覧下さい

経済時系列の因果関係分析

中野裕治　　　　滋賀大学経済学部

1. 目的

経済学での大きな研究テーマの一つである，GNP とマネーサプライのマクロ経済変量間の因果解析を行う．GNP は国民総生産のことで，一定期間に生産された財及びサービスの総額である．ここでは，物価の変動等を考えて調整してある実質 GNP を対象とする．マネーサプライは通貨供給量で，現金通貨，預金通貨 (当座預金，通知預金，普通預金，別段預金)，準通貨 (定期性預金)，譲渡性預金の合計から成っている．

2. Granger 流の局所因果関係の定義

時系列間の局所因果性はまず岡部 (1988) によって定義，特徴付けがなされその検定方法も提案されている．ここでは，Granger 流の局所因果関係の定義をし，分析する．

$\mathbf{X}=(X(n);|n|\leq N)$, $\mathbf{Y}=(Y(n);|n|\leq N)$ をそれぞれ d_1, d_2 次元の局所弱定常過程とする． さらに $\mathbf{Z}=(Z(n);|n|\leq N)$, $Z(n)={}^t(Z_1(n),\cdots,Z_{d_1+d_2}(n))={}^t({}^tX(n),{}^tY(n))$ が (d_1+d_2) 次元の局所弱定常過程であることを仮定する．$X(n)={}^t(X_1(n),\cdots,X_{d_1}(n))$, $Y(n)={}^t(Y_1(n),\cdots,Y_{d_2}(n))$ と置く．$n\in\{0,\cdots,N\}$ とする．$X_i(n)$, $Y_j(n), i=1,\cdots,d_1, j=1,\cdots,d_2$ を含む，時点 n で観測可能な集合を J_n とする．$U_0^n=\{J_m;\ 0\leq m\leq n\}$ と置く．$U_0^n-\bar{X}_0(n)$ を U_0^n から $X_i(m)$, $m=0,\cdots,n$, $i=1,\cdots,d_1$ をのぞいた集合とする．$U_0^n-\bar{Y}_0(n)$ も同様に定義される．Iをある観測可能な集合とする時，$X(n)$ の Iによる線形最良予測を$\hat{X}_I(n)$ とする．予測誤差，その分散を $\epsilon(X(n)|I)=X(n)-\hat{X}_I(n)$, $e^2(X(n)|I)=\|\epsilon(X(n)|I)\|^2$ と置く．

定義 **1** (Granger 流の局所因果性) 任意の $n\in\{0,\cdots,N\}$ に対し，

$$e(X(n)|U_0^{n-1})=e(X(n)|U_0^{n-1}-\bar{Y}_0(n-1)) \tag{1}$$

の時，U_0^N のもとで $\mathbf{Y}$ から $\mathbf{X}$ への Granger の意味での局所因果関係がないという．

定義 **2** (Granger 流の瞬間的局所因果性) 任意の $n\in\{0,\cdots,N\}$ に対し，

$$e(X(n)|U_0^{n-1},Y(n))=e(X(n)|U_0^{n-1}) \tag{2}$$

の時，U_0^N のもとで $\mathbf{Y}$ から $\mathbf{X}$ への Granger の意味での瞬間的局所因果関係がないという．

$M_0^n(\mathbf{Z})$ を $\{Z_j(m);1\leq j\leq d,0\leq m\leq n\}$ から生成される閉部分空間とする．$M_0^n(\mathbf{X})$, $M_0^n(\mathbf{Y})$ も同様に定義される．以下，$U_0^n=M_0^n(\mathbf{Z})$, $n=0,\cdots,N$ とす

る．$P_{M_0^n(\mathbf{Z})}$, $P_{M_0^n(\mathbf{X})}$ を $M_0^n(\mathbf{Z})$, $M_0^n(\mathbf{X})$ への射影とする時，KM$_2$O-ランジュバン方程式から，任意の $n \in \{0,\cdots,N\}$ に対して

$$X(n) = P_{M_0^n(\mathbf{X})}X(n) + \nu_{\mathbf{X}}(n), \tag{3}$$
$$Z(n) = P_{M_0^n(\mathbf{Z})}Z(n) + \nu_{\mathbf{Z}}(n) \tag{4}$$

を得る．

3. 検定方法

まず，Granger の意味での局所因果関係に対し次の定理が成立する．

定理 **1**　**Y** から **X** への局所因果関係がない必要十分条件は，ある $d_2 \times d_1$ 行列の組 $\{A(n,k);\ 0 \le k \le n \le N\}$, $d_2 \times d_2$ 行列の組 $\{B(n,k);\ 0 \le k \le n \le N\}$ が存在して，任意の $n = 0,\cdots,N$ に対し

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)X(k) + \sum_{k=0}^{n} B(n,k)\nu^{\star}(k) \tag{5}$$

の形に，一意に表現できることである．ここで，$B(n,n), n = 0,\cdots,N$ は正則で，$(\nu^{\star}(n); 0 \le n \le N)$ は，$\mathbf{M}_0^N(\mathbf{X})$ と直交する，平均 $\mathbf{0}$，共分散 $(I)_{d_2}$ の d_2 次元ホワイトノイズである．

$n \in \{0,\cdots,N\}$ に対し，

$$V_{+X}(n) = E\nu_{+X}(n)^t\nu_{+X}(n), \tag{6}$$
$$V_{+Z,X}(n) = E\nu_{+Z,X}(n)^t\nu_{+Z,X}(n), \tag{7}$$
$$V_{+Z}(n) = E\nu_{+Z}(n)^t\nu_{+Z}(n) \tag{8}$$

と置く．$V_{+X}(n)$, $V_{+Z,X}(n)$, $V_{+Z}(n)$ はそれぞれ，$\nu_{+X}(n)$, $\nu_{+Z,X}(n)$, $\nu_{+Z}(n)$ の分散行列である．

下半三角行列 $W_{+X}(n)$, $W_{+Z,X}(n)$, $W_{+Z}(n)$ を

$$V_{+X}(n) = W_{+X}(n)^tW_{+X}(n), \tag{9}$$
$$V_{+Z,X}(n) = W_{+Z,X}(n)^tW_{+Z,X}(n), \tag{10}$$
$$V_{+Z}(n) = W_{+Z}(n)^tW_{+Z}(n) \tag{11}$$

となるようにとる．

この時，Granger の意味での局所因果関係，瞬間的局所因果関係の検証方法を得る．以下，"Granger の意味での" を省略する．

定理 **2**　**Y** から **X** への局所因果関係がない必要十分条件は，次の (1), (2), (3) のどれかが成立することである．但し，一般に $(I)_d$ は，d 次元の単位行列を表す．
(1) $W_{+Z,X}(n)^{-1}\nu_{+X}(n)$, $n = 0,\cdots,N$ が，平均 $\mathbf{0}$, 共分散行列 $(I)_{d_1}$ の d_1 次元ホワイトノイズである．

(2) $W_{+X}(n)^{-1}\nu_{+Z,X}(n),\ n=0,\cdots,N$ が，平均 $\mathbf{0}$, 共分散行列 $(I)_{d_1}$ の d_1 次元ホワイトノイズである．
(3)

$$W_{+Z}(n)^{-1}\begin{pmatrix}\nu_{+X}(n)\\ \nu_{+Z,Y}(n)\end{pmatrix},\ n=0,\cdots,N \tag{12}$$

が 平均 $\mathbf{0}$, 共分散行列 $(I)_{(d_1+d_2)}$ の (d_1+d_2) 次元ホワイトノイズである．

定理 3　**X** から **Y** への瞬間的局所因果関係がない必要十分条件は，

$$V_{+Z,ij}(n)=0,\ i=d_1,\cdots,d_1+d_2,\ j=1,\cdots,d_1,\ n=0,\cdots,N. \tag{13}$$

$$W_{+Z}(n)^{-1}=\begin{pmatrix}C_{11}(n) & \mathbf{0}\\ C_{21}(n) & C_{22}(n)\end{pmatrix} \tag{14}$$

と置く．ここで，$C_{ij}, i,j=1,2$ は $d_i\times d_j$ の行列である $(C_{12}=\mathbf{0})$．

定理 4　**X** から **Y** への瞬間的局所因果関係がない必要十分条件は，

$$\begin{pmatrix}C_{11}(n) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_{22}(n)\end{pmatrix}\nu_{+Z}(n),\ n=0,\cdots,N \tag{15}$$

が，平均 $\mathbf{0}$, 共分散 $(I)_d$ のホワイトノイズになることである．

定理 2，定理 4 から，時系列間の局所因果関係，瞬間的局所因果関係の検定が可能である．

4. 検定結果

期間 I (1965-1987), 期間 II (1965-1990) の四半期データのマネーサプライ，GNP を分析した．両期間とも，2 階の階差のデータが検定 (S) を通り弱定常過程の実現値と判断される．期間 I では，マネーサプライ，GNP は互いに局所因果関係を持ち，期間 II では GNP がマネーサプライに局所因果関係を与えその逆はない．さらに，期間 I では両者間に瞬間的局所因果関係が存在し，期間 II では存在しない．

参考文献

中野裕治 (1992), 経済時系列の統計的研究-岡部の理論とその応用-, 滋賀大学経済叢書第 20 号.

岡部靖憲 (1988), KM_2O-ランジュバン方程式と量子統計, *Hokkaido Univ. Tech. Repo. Ser.* No.9, 58-64.

Okabe, Y. and Nakano, Y. (1991), The theory of KM_20-Langevin equations and its applications to data analysis (I) : Stationary Analysis , *Hokkaido Mathematical Journal,* **20**, 45-90.

ｶﾞｳｽ過程 ── 標準表現とKM_2O-Langevin方程式

野田明男 （浜松医科大学）

1。 表現の多重度１のGauss過程$X(t)$は、標準表現

$$(1)\qquad X(t) = \int_0^t F(t,u)\sigma(u)dB(u), \qquad t\geqq 0,$$

によって、確率論的構造が解明される([1]). これと合わせて我々は、確率Ito-Volterra方程式

$$(2)\qquad X(t) = \int_0^t K(t,u)X(u)du + \int_0^t J(t,u)\sigma(u)dB(u)$$

を研究する。標準表現核の場合とは異なり、組(K, J)はuniqueに定まるわけではないけれど、(2)式は、(1)よりも詳しい内容を含む。即ち、innovation $B(t)$を $\{X(u);u\leqq t\}$ の言葉で陽に書き下そうとするとき、(1)からは

$$(1)'\qquad \sigma(t)\dot{B}(t) = (T_F^{-1}X)(t), \qquad (T_F\phi)(t) = \int_0^t F(t,u)\phi(u)du$$

が従う；他方、(2)は

$$(2)'\qquad \sigma(t)\dot{B}(t) = (T_J^{-1}(I-T_K)X)(t)$$

を生み出すことを考慮すると、Volterra核Fがinduceする積分変換の逆T_F^{-1}は、一つの分解$T_J^{-1}(I-T_K)$を付与されることになる。

さて、(1)から適切に組(K, J)を見出して、確率Ito-Volterra方程式(2)を確立したい。そのための一般理論は、残念ながら用意が整っていない；逆の方向(2)→(1)は容易で、Kのresolvent Rを求める仕事に帰着されることがわかる：

$$(3)\qquad \begin{cases} R(t,u) + K(t,u) = \int_u^t R(t,s)K(s,u)ds = \int_u^t K(t,s)R(s,u)ds \\ F(t,u) = J(t,u) - \int_u^t R(t,s)J(s,u)ds, \qquad 0<u\leqq t. \end{cases}$$

当面の我々の方策は、

$$(4)\qquad F(t,u) \sim (t-u)^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1) \qquad \text{as } u\uparrow t \qquad (\alpha > -1/2)$$

を仮定し、$J(t,u) = (t-u)^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$ と採れるｹｰｽを、重要な具体例 ── fractional Brown運動に沿って考察することである。

2。 まず$\alpha=0$の場合から始めよう。(2)式は、伊藤型確率微分方程式

$$(5)\qquad dX(t) = dt[K(t,t)X(t) + \int_0^t \frac{\delta}{\delta t}K(t,u)X(u)du] + \sigma(t)dB(t)$$

と同値。共分散関数$r(|t-s|)$をもつ定常過程に関しては、既に岡部・三好両氏によるKM_2O-Langevin方程式の理論が整備されている；この場合、$\sigma(t)=\alpha$, $K(t,t)=-\beta(t)$, $K(t,u)=\gamma(t,u)$, そして重要な関数 $\delta(t)=r'(t)+r(t)\beta(t)-\int_0^t \gamma(t,u)r(u)du$ を用いる([5], [6], 及び[6]に引用されている諸論文参照).

X(t)の共分散 $\Gamma(t,s)$を知ったとき、(5)における(K,σ)を決定する手順は線形であり、(1)から導かれる積分方程式

(6) $$\int_0^{t\wedge s} F(t,u)F(s,u)\sigma^2(u)du = \Gamma(t,s)$$

を直接攻めるよりもはるかに有効な方法である([4],[5]).

次にα=p(正の整数）の場合——p次導関数$X^{(p)}(t)$を(5)のﾀｲﾌﾟの方程式で書くことが可能。(2p+1)次元ﾊﾟﾗﾒｰﾀをもつLévy Brown 運動 $B_1(x)$から導かれるｶﾞｳｽ過程、M(t)-過程がこのような例として知られている([2]).

3。 我々が特に注目して論じたいﾃｰﾏは、αが非整数の場合。即ち、一般化されたα次の微分D_αを用いて、$D_\alpha X(t)$が(5)の形の方程式を満たす場合である。最良の例として、d次元ﾊﾟﾗﾒｰﾀをもつfractional Brown 運動 $B_\gamma(x)$(その共分散関数は $\Gamma_\gamma(x,y)=\{|x|^\gamma+|y|^\gamma-|x-y|^\gamma\}/2$)を取り上げ$(0<\gamma<2)$,球面調和関数 $\{S_{m,k}(\theta)\}$ によるMcKeanの展開から生ずるところの独立なｶﾞｳｽ過程列 $\{M^{\gamma,d}_{m,k}(t)\}$ を研究する。これらの標準表現は最近[3]によってすべて決定された。

我々の新しい主張は、$\alpha=(\gamma+d)/2-1$ と選んで、$X(t)=D_\alpha M^{\gamma,d}_{m,k}(t)$に移行すると、伊藤型確率微分方程式が成立するということ。この結果の詳細は、他日を期したい。

1992年２月北海道大学理学部滞在中に、有益な助言を与えていただいた岡部・井上両先生に心から感謝の言葉を申し述べます。

参考文献

[1]T.Hida and M.Hitsuda, Gaussian processes, Kinokuniya(1976).
[2]P.Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars(1948; Second edition 1965).
[3]H.Muraoka, A fractional Brownian motion and the canonical representations of its coefficient processes(to appear in Soochow J. of Math.).
[4]A.Noda, Lévy's Brownian motion and stochastic variational equation, Gaussian Random Fields ed. by K.Itô and T.Hida, World Scientific(1991), 309-319.
[5]A.Noda, Some double Markov Gaussian processes, 浜松医科大学紀要 一般教育 Vol.6(1992),25-35.
[6]岡部靖憲、Langevin方程式と因果解析、数学４３巻(1991),322-346.

講演題目 **Global Existence of the Discrete Boltzmann Equation in a Thin Infinite Tube for Small Initial Data**

１９９２年２月２１日（金）

東京大学基礎科学科　山崎満

空間１次元の場合に時間大域解の存在が知られている（[2]）細長い管内のボルツマン方程式と呼ばれる双曲型偏微分方程式系

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + C_i \cdot \nabla u_i = Q_i(u) + L_i(u)$$

を空間Ｎ次元十分小なる初期値に対して、時間大域解を考察することをこの講演の目的とする。質量保存則、運動量保存則、エントロピーに関する基本的事実を確認（[3]）した後、Bony（[1]）に倣い、初期値の大きさを計る量

$$\delta_\pi(u^0) = \sup_{i \in J(\pi)} \operatorname{ess\,sup} \left\{ \int_\pi \left| u_i^0 \right| d^p x; \pi \text{ trace type p-plane} \right\}$$

及び、時間発展する解を評価する量

$$M_{i,\Pi}(T) = \sup_{i \neq j} \int_{\Pi \cap (0,T)} u_i u_j (P) d^p P$$

$$N_{i,\Pi}(T) = \int_{\Pi \cap (0,T)} u_i(P) d^p P$$

を定義する。以上の準備のもと、特性曲線に沿って解を積分し、評価する。

参考文献

1. Bony J.M., *Problème de Cauchy et diffusion à données petites pour les modèles discrets de la cinétique des gaz*, Actes des journées E.D.P. Saint-Jean-de-Monts (1990).
2. Yamazaki M., *Existence globale pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann dans un tube mince infini*, Série I, C.R.Acad.Sci.Paris **t.313** (1991).
3. *Existence globale pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann dans un tube mince infini en dimension 1 d'espace*, J.Fac.Sci, Univ.Tokyo **39** (1992).

生存競争系の確率モデルと積分可能な力学系

伊藤　栄明（統計数理研究所, 総合研究大学院大学）

今、$2s+1$ 種からなる総粒子数 n 個の系を考える。。離散的な時点を考え、各時点において1度だけランダムな2体衝突が起こるものと仮定する。$\{1,2,\cdots,2s+1\}$ の $2s+1$ 種の間の強弱関係は次に述べるトーナメント $[T_s]$ であるとする。衝突に際し弱い種の粒子は強い種の粒子に変化する。総粒子数 n は t によらないが、各々の種の粒子数は t とともに変化していく。種を node に、2種間の強弱関係を oriented arc に対応させれば、各種間の強弱関係は1つの有向グラフ、トーナメントによって示される。トーナメント $[T_r]$ は $2r+1$ 個の node$\{1,2,\cdots,2r+1\}$ からなり、$i-j\equiv 1,2,\cdots,r(\mathrm{mod}\ 2r+1)$ のとき i は j より強いものとする。従って $[T_r]$ の各々の node は r 個の他の node より強く、残りの r 個の node より弱いということになる。いま、時刻 t における種 j の粒子数 $N_j(t)$ を並べ、ランダムベクトル $\vec{N}(t)\equiv(N_1(t),N_2(t),\cdots,N_{2s+1}(t))$ をつくる。

$\vec{N}(t)=\vec{\beta}$ なる状態にあるシステムから $2r+1$ 個の粒子をとりだしたとき、それらの強弱関係を表すトーナメントが $[T_r]$ に同型である場合の数を $H_r(\vec{\beta})$ と書く。これは $\vec{\beta}$ の $[T_r]$ らしさとでも言うべき量である。$\theta_r=1-2\frac{{}_{2r+1}C_2}{n(n-1)}$ とし、F_t を $\{\vec{N}(u),u=0,1,2,\cdots,t\}$ より生成される　σ-代数とすれば $\{\theta_r^{-t}H_r(\vec{N}(t)),F_t,t=1,2,\cdots\}$ はマルチンゲールとなる。

この確率モデルはつぎの常微分方程式系により近似されると考えられる。

$$\frac{d}{dt}x_i=c_1x_i(\sum_{j=1}^{s}x_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}x_{i+j})$$

この系は $s+1$ 個の保存量をもつ。例えば $s=2$ の場合

$$I_1=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$$
$$I_2=P_1P_2P_4+P_2P_3P_{P5}+P_3P_4P_1+P_4P_5P_2+P_5P_1P_3$$
$$I_3=P_1P_2P_3P_4P_5$$

となる。

上記の確率モデルの場合上述のマルチンゲールがこの保存量に対応している。非線形積分可能な力学系と確率モデルの関連は興味ある今後の問題とかんがえられる。

トレースとノルムの抽象化

丹原大介

We aim to give a unified treatment of trace and norm maps in field theory, induction and tensor induction in representation theory, and additive and multiplicative transfers in group cohomology.

We fix a finite group G. We consider a function S which assigns to each finite G-set X a commutative ring $S(X)$ and to each G-map $f: X \to Y$ three kinds of maps $f^*: S(Y) \to S(X)$, $f_*: S(X) \to S(Y)$, $f_\star: S(X) \to S(Y)$, which may be called a restriction, trace, norm map, respectively. They should satisfy certain axioms. We call such S a TNR-functor.

Green and Dress introduced a Mackey functor as a machinery to deal with trace maps. A TNR-functor is a Mackey functor with norm maps.

For example, let R be a commutative ring with G-action. Then a TNR-functor $\tilde{R}$ is defined as follows. For each subgroup H of G, $\tilde{R}$ takes the G-set G/H to the ring R^H of H-invarint elements. For a natural G-map $f: G/K \to G/H$ with $K \leq H \leq G$, the maps f^*, f_*, $f_\star$ are the inclusion, the trace, the norm in the usual sense, respectively.

We have the following results.

(i) Let S be a TNR-functor and $f: X \to Y$ a G-map. Then $S(X)$ is integral over the subring $f^*(S(Y))$.

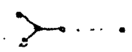
(ii) Let R be a commutative ring with G-action. We can define a TNR-functor $\hat{R}$, which is dual to the above $\tilde{R}$ in a certain sense. When G acts on R trivially, the value of $\hat{R}$ at the one point G-set is isomorphic to the Witt-Burnside ring $W_G(R)$ defined by Dress and Siebeneicher.

ADE classification and singularities

Oswald Riemenschneider (Hamburg) – 16.3.1992

The purpose of the lecture was to present some old and some recent results connecting objects in different classes, however classified by the same list of type A, D, E.

I. At the beginning, I introduced the Coxeter-Dynkin-Witt diagrams of type ADE

A_k : , D_k :  , E_6 :  , E_7, E_8 : 

as symbols for the (symmetric) Cartan matrices, classifying (homogeneous) root systems, (simply laced) simple complex Lie algebras etc, and derived the connection to the Platonic triples $p \geq q \geq r = 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

II. Then I linked these diagrams to surface singularities via resolution graphs of type ADE and presented some of the well known constructions of them as quotients $\mathbb{C}^2/\Gamma$, $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ a finite subgroup ("of type (p, q, r)") or as (a subspace of the) special fibre in a canonical mapping $G \to T/W$, G a (simply connected) Lie group of type ADE, $T \subset G$ a maximal torus, W the finite Weyl group, yielding the full "versal deformation" of the singularity, as well.

III. Then I discussed McKay's observation how to link representations of Γ directly to the CDW diagrams of type ADE via the McKay quiver, and gave a survey about new constructions of the versal deformation of an ADE singularity (after lifting by the Weyl group W) with the representations of quivers (work of Kronheimer, Ebeling, Slodowy, Lusztig, Cassens (Hamburg)).

IV. Finally, I gave a short report about the state of affairs for general quotient surface singularities $\mathbb{C}^2/\Gamma$, $\Gamma \subset GL(2, \mathbb{C})$ finite.

O. Riemenschneider

Mean Curvature Functions of Codimension-one Foliations.

GEN-ICHI OSHIKIRI

Let F be a transversely oriented codimension-one foliation of a closed connected manifold M. If we choose a Riemannian metric g on M, then we have a smooth function $H(x)$ on M. Here $H(x)$ is the mean curvature function at x of the leaf L_x of F through x with respect to the unit vector field N orthogonal to F and its direction coincides with the given transverse orientation. We call $H(x)$ the mean curvature function of F with respect to g. We say F is *tense* if we can find a Riemannain metric g so that the mean curvature function $H(x)$ is constant on each leaf of F. Recently, Walczak studied the following question for some foliations:

QUESTION. *Which smooth function on M can be written as a mean curvature function with respect to some Riemannian metric on M ?*

We call such a smooth function on M *admissible*. In this talk, we give an answer to this question:

THEOREM 1. *A smooth function f on M is admissible if and only if there is an oriented volume form dV on M so that*
(i) $\int_M f dV = 0$, and
(ii) $\int_D f dV > 0$ for any (+)-fcd D.

Here (+)-fcd D means a compact saturated domain with boundary where transverse orientation of F is outward everywhere. We also use (-)-fcd with inward orientation on the boundary. Using Theorem 1, we can give a topological characterization of tense foliations:

THEOREM 2. *Let (M, F) be a transversely oriented codimension-one foliation of a connected, closed, and oriented manifold M. Then F is tense if and only if each connected component of $M - C(F)$ does not contain (+)-fcd and (-)-fcd simultaneously. Here $C(F)$ is the union of all "thick" compact leaves of F.*

College of General Education
Tohoku University, Sendai

対称群への準同型写像について

室蘭工業大学 竹ヶ原裕元

A, G を有限群とするとき，その間の準同形写像の個数について次の予想がある。

Conjecture (浅井－吉田) $|\mathrm{Hom}(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/A'|, |G|)$

この予想は A/A' が巡回群であるとき正しいことが浅井－吉田により証明された。（特に A が巡回群，およびアーベル群のときにそれぞれ Frobenius と吉田氏により証明されている。）

ここでは G が対称群 S_n の場合に得られる結果を述べる。

Proposition : A : p-group, $p \neq 2$. A' を含まない A の真の部分群の位数は A' の位数以下であると仮定すると

$$|\mathrm{Hom}(A, S_n)| \equiv 0 \mod (|A/A'|, n!)$$

これは次の事実の特別の場合である。

$|A/A'| = p^m$ とし，$A \gneq B \not\supset A'$ である A の部分群 B の中で，位数が最大なものの位数を l とする。$m \leq p^{l-1} + \cdots + p + 1 - l$ が成り立つとすると，$|\mathrm{Hom}(A, S_n)| \equiv 0 \mod (|A/A'|, n!)$（この結果は $p=2$ でも成り立つ。）

この証明には次の Wohlfahrt による結果を用いる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(A)_n}{n!} t^n = \exp(t_A(t)), \quad h(A)_n = |\mathrm{Hom}(A, S_n)|,$$
$$t_A(t) = \sum_{B \leq A} \frac{t^{(A:B)}}{(A:B)}$$

以上。

Topological Triviality of Real Singularities
—実特異点に対するLê-Ramanujam型定理—

東工大・理・数
福田拓生

実解析的写像 $f=(f_1,\dots,f_p):(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 及びその零点集合芽 $f^{-1}(0)$ at 0（詳しくは3対 $(\mathbb{R}^n,f^{-1}(0),0)$）の位相にこの話では興味を持つ。

$\mathfrak{O}_n$：$\mathbb{R}^n$の原点で定義された実解析関数の芽のなす環（$\mathbb{R}$-代数）

(f)：fの成分関数 $f_1,\dots,f_p$ で生成される，$\mathfrak{O}_n$の，イデアル

とするとき，零点集合芽 $(\mathbb{R}^n,f^{-1}(0),0)$ は環 $\mathfrak{O}_n/(f)$ でその解析的構造が決る。しかし，$\mathfrak{O}_n/(f)$ は，moduliの分だけ，位相構造の研究には余分な情報をもっている。そこで次のような問題を考える。

問題1 イデアル (f) を含み，fから自然に構成されるイデアル $I(f)$ でなるだけ大きいもので，$\mathfrak{O}_n/(f)$ が $f^{-1}(0)$ の位相を決定するものを求めよ。

さて，実解析写像 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して零点集合芽 $(f^{-1}(0),0)$ は次のような錐構造を持っている事が知られている。$\varepsilon>0$ に対して

$$B^n_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le\varepsilon\},\quad S^{n-1}_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=\varepsilon\}\quad K_\varepsilon(f)=S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0)$$

とおくとき，充分小さい $\varepsilon>0$ に対して次が成立つ。

$$B^n_\varepsilon\cap f^{-1}(0)\underset{\text{homeo}}{\simeq}\mathrm{Cone}\,(K_\varepsilon(f))=K_\varepsilon(f)\times[0,\varepsilon]/K_\varepsilon(f)\times\{0\}.$$

従って $K_\varepsilon(f)$ の位相が $(\mathbb{R}^n,f^{-1}(0),0)$ の位相を決定する。

問題1を弱めて

問題2 $K_\varepsilon(f)$ の位相不変量（例えば オイラー標数，Betti数等）を $\mathfrak{O}_n/(f)$ の剰余環の numerical invariant（例えば次元）であらわせ。

最近問題1,2のイデアル $I(f)$ 及び剰余環 $\mathfrak{O}_n/I(f)$ の候補として次のものが有望ではないかと考えるに至った。 以下 $n > p$ とする。
$f=(f_1,\dots,f_p):(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して写像 $(f, x_1^2+\cdots+x_n^2):(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{p+1},0)$ のヤコビ行列 $D(f,x_1^2+\cdots+x_n^2)/D(x_1,\dots,x_n)$ の $(p+1)\times(p+1)$ 小行列式達で生成される $\mathfrak{O}_n$ のイデアルを $\underline{J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2)}$ であらわす。そのとき、

<u>予想</u> $\mathfrak{O}_n/(f, J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2))$ が $f^{-1}(0)$ の位相を決定するであろう。

<u>注意</u> ほとんど全ての f に対して $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{O}_n/(f,J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2)) < +\infty$ である。

この予想の傍証となる結果を三つ紹介する。

<u>傍証1</u> $p=n-1$ のとき，$f^{-1}(0)$ は原点を通る幾本かの曲線からなるが この本数を $b(f)$ であらわすとき，$b(f)$ は $\mathfrak{O}_n/(f,J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2))$ 上のある2次形式の符号(signature)として与えられる。 $p=n-1$ のとき $J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2)$ は写像 $(f,x_1^2+\cdots+x_n^2)$ のヤコビアンで生成される。それで同じ記号 $J(f,\Sigma x_i^2)$ であらわすとき，写像 $(f,J(f,\Sigma x_i^2))$ のヤコビアン $J(f,J(f,\Sigma x_i^2))$ はイデアル $(f,J(f,\Sigma x_i^2))$ に含まれない。(Serre-Berger)
$\varphi: \mathfrak{O}_n/(f,J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2))\to\mathbb{R}$ を $\varphi(J(f,J(f,\Sigma x_i^2)))>0$ なる線型関数とするとき，2次形式 $\langle\ ,\ \rangle_\varphi: \mathfrak{O}_n/(f,J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2))\times \mathfrak{O}_n/(f,J(f,x_1^2+\cdots+x_n^2))\to\mathbb{R}$ を $\langle a,b\rangle_\varphi=\varphi(ab)$ で与える。 すると

<u>定理1</u> (青木・福田・西村・孫) $b(f)=2\times \mathrm{signature}\langle\ ,\ \rangle_\varphi$

<u>傍証2</u> $f_t:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，$t\in[a,b]$，を実解析写像族とする.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{O}_n/(f_t,J(f_t,x_1^2+\cdots+x_n^2)) = \mathrm{const} < +\infty$$
$$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, f_t^{-1}(0),0) \text{ の位相型は } t \text{ に依らず不変である.}$$

<u>傍証3</u> $p=1$ のとき，$f_t:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$，実解析関数の族に対して

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{O}_n/(f_t,J(f_t,x_1^2+\cdots+x_n^2)) = \mathrm{const} < +\infty$$
$$\mu(f_t) = f_t \text{ の Milnor 数} = \mathrm{const} < +\infty$$
$$\Rightarrow f_t \text{ の位相型は } t \text{ によらず一定である。}$$

Some Theorems on Real Analysis

S. Koizumi (Keio Univ.)

§0. 多変数の関数のフーリエ解析に関し、A. Beurling [0] による convolultion algebra の研究について述べ、次に、これを出発点とするその後の研究および最近の動向について紹介したいと思います。

§1. Beurling algebra の構成

§2. Banach algebra A^p と空間平均が有界である関数空間の間の関係について.

§3 実軸 $\mathbb{R}^1$ 上の Banach algebra A^2.

§4. 最近における諸研究について.

§1. Beurling algebra の構成

$\mathcal{G}$ は局所コンパクトアーベル群，dx は不変測度とする。

Ω は $w(x) > 0$，dx に関し可積分で，ノルム $N(w)$ とともに次の諸性質を満足する $w(x)$ の作る族である。

I　$w \in \Omega$ に対し，$N(w)$ は有限で

(1.1)　$$0 < \int w\,dx \leqq N(w).$$

II　$\lambda > 0$，$w \in \Omega$ のとき $\lambda w \in \Omega$ で

(1.2)　$$N(\lambda w) = \lambda N(w).$$

III　$w_1, w_2 \in \Omega$ ならば $w_1 + w_2$，$w_1 * w_2 \in \Omega$ で，

(1.3)　$$N(w_1 + w_2) \leqq N(w_1) + N(w_2)$$

(1.4)　$$N(w_1 * w_2) \leqq N(w_1) \cdot N(w_2)$$

IV．$\{w_n\}_1^\infty \subset \Omega$，$\sum_1^\infty N(w_n) < \infty$ ならば，$w = \sum_1^\infty w_n \in \Omega$ で，

(1.5)　$$N(w) \leqq \sum_1^\infty N(w_n).$$

Ω_0 は Ω の部分集合で，$N(w) = 1$ を満たすものである。

$1 < p < \infty$ で，$q = p/p-1$ とする。$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$

(1.6) $$w' = \frac{1}{w^{p-1}}$$

とする Hölder の不等式より

(1.7) $$\int |\Phi F|\, dx \leq \left\{\int |\Phi|^q w\, dx\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\int |F|^p w'\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

とかける。ここで 各 $w \in \Omega_0$ に対し、次のノルムによって定義される $\mathcal{G}$ 上の可測関数の作る Banach space を $L^p_{w'}$, L^q_w とする

$$L^p_{w'} \ : \ \|F\|_{L^p_{w'}} = \left\{\int |F|^p w'\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$L^q_w \ : \ \|\Phi\|_{L^q_w} = \left\{\int |\Phi|^q w\, dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

これらの空間から、2つの関数の集合族

$$A^p(\mathcal{G}, \Omega) = A^p, \qquad B^q(\mathcal{G}, \Omega) = B^q$$

を、

(1.8) $$A^p = \bigcup_{w \in \Omega_0} L^p_{w'}$$

(1.9) $$B^q = \bigcap_{w \in \Omega_0} L^q_w$$

によって定義し、さらに

(1.10) $$\|F\| = \|F\|_{A^p} = \inf_{w \in \Omega_0} \|F\|_{L^p_{w'}}$$

(1.11) $$\|\Phi\| = \|\Phi\|_{B^q} = \sup_{w \in \Omega_0} \|\Phi\|_{L^q_w}$$

と定義する

このとき、次の定理が成立する

定理 1. ノルム(1.10)の下で A^p は加法と畳積に関し、Banach Algebra を作る。さらに

(1.12) $\|F_1 * F_2\| \leqq \|F_1\| \|F_2\|$

が成立する

ノルム(1.11)の下で B^q は Banach space をなす。それは、次の意味において A^p の dual space である

すなわち、A^p 上の線形汎関数 $\varphi(F)$ は

(1.13) $$\varphi(F) = \int \Phi F \, dx$$

とかける。ここで Φ は B^q の中の一意に定まる元で、

(1.14) $$\sup_{F \in A^p} \frac{|\int \Phi F \, dx|}{\|F\|} = \|\Phi\|$$

が成り立つ。

Hölder の不等式(1.7)を $\Phi \in B^q$, $F \in A^p$ に適用すると

(1.15) $$\int |\Phi F| \, dx \leqq \inf_{w \in \Omega_0} \|\Phi\|_{L^q_w} \|F\|_{L^p_{w'}}$$

$$\leqq \|\Phi\|_{B^q} \|F\|_{A^p}$$

ここで $\Phi \equiv 1$ とおくと、(1.17)より

(1.16) $$\|\Phi\| = \sup_{w \in \Omega_0} \left\{ \int w \, dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqq \sup_{w \in \Omega_0} N^{\frac{1}{q}}(w) = 1$$

これと(1.15)より

(1.17) $$\int |F| \, dx \leqq \|F\|_{A^p}$$

すなわち $A^p \subset L^1$ で $\|F\|_{A^p}$ は F の L^1-norm の majorant であり、$L^\infty \subset B^q$ で、$\|\Phi\|_{B^q}$ は Φ の L^∞-norm の minorant である。

B^q が Banach space であることは直ちに証明できるが、A^p が Banach space となることを証明するのは容易でない。そのために ノルム $\|F\|_{A^p}$ の新たな定義を導入する。

$$(1.18)\quad \overline{W}_p(F, w) = \overline{W}(F, w)$$

$$= \frac{1}{p}\int \frac{|F|^p}{w^{p-1}}\,dx + \frac{1}{q} N(w)$$

とおく。そして (1.18) が有限で、$\overline{W}(\lambda) = \overline{W}(F, \lambda w)$, $(\lambda > 0)$ が $\lambda = 1$ で最小値をとるとき、$w \in \Omega$ は $F \in A^p$ に対する relatively extremal (r.e.) であるという。

$$\frac{d\overline{W}}{d\lambda} = \frac{1}{q}\left\{-\frac{1}{\lambda^p}\int \frac{|F|^p}{w^{p-1}}\,dx + N(w)\right\}$$

故に、w が r.e. であるための必要十分条件は

$$(1.19)\quad \int \frac{|F|^p}{w^{p-1}}\,dx = N(w) = \overline{W}(F, w)$$

が成り立つことである。

任意の $w_0 \in \Omega$ に対して、λ を $\lambda w_0 = w$ が F に対する r.e. となるように定める。このとき

$$\left\{\int \frac{|F|^p}{w_0^{p-1}}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \min_{\lambda > 0} \overline{W}(F, \lambda w) = \overline{W}(F, w)$$

が成り立つ、故に

(1.20) $$\|F\| = \inf_{w \in \Omega} \overline{W}(F, w)$$

がいえる、これが、われわれの新しい F の A^p-ノルムである、これを用いて、A^p が Banach space となることが証明される。

§2. Banach algebra A^p と空間平均が有界である関数空間の関係について、

$\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 1)$ (n 次元ユークリッド空間)。

dx : ルベーグ測度

Ω ; $w(x) > 0$, $|x|$ について減少かつ可積分である関数族で、

ノルム $N(w)$ は

(2.1) $$N(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w\, dx = \int_0^\infty w(r)\, d\overline{V}_n(r)$$

とする。ただし、$\overline{V}_n(r)$ は球 $B(0, r) = \{x ; |x| \leqq r\}$ の体積である。

Ω は条件 I ~ IV を満たしている。

Ω_1 : $w \in \Omega$ かつ $w(0) = \lim_{x \to 0} w(x) < \infty$ を満たす関数族で、

ノルム $N(w)$ は

(2.2) $$N(w) = w(0) + \int_{\mathbb{R}^n} w\, dx$$

とする。

Ω_1 も条件 I〜III を満たしている。

空間 $B^q = B^q(\mathbb{R}^n)$;

$\Phi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ で

$$(2.3) \qquad \|\Phi\|_{B^q} = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\int_{|x|\leq r} |\Phi|^q dx}{v_n(r)} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty$$

となる Φ の作る関数族とする

空間 $\mathcal{B}^q = \mathcal{B}^q(\mathbb{R}^n)$

$\Phi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ で

$$(2.4) \qquad \|\Phi\|_{\mathcal{B}^q} = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\int_{|x|\leq r} |\Phi|^q dx}{1+v_n(r)} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty$$

となる Φ の作る関数族とする。

定理2. B^q は Banach algebra $A^p = A^p(\mathbb{R}^n; \Omega)$ の共役空間である。同様に、$\mathcal{B}^q$ は $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}^p(\mathbb{R}^n, \Omega_1)$ の共役空間である。ただし、Ω, Ω_1 は この節で定義した関数族である

§3 実軸 $\mathbb{R}^1$ 上の Banach algebra A^2.

Ω : $w(x) > 0$, $|x|$ について減少で、可積分である関数の作る族。

$$A^2 : \|F\|^2 = \inf_{w \in \Omega} \int w\,dx \int \frac{|F|^2}{w}\,dx < \infty$$

である関数 F の作る族。

$F, G, \cdots$ は A^2 の元。$f, g, \cdots$ は、それらのフーリエ変換：

$$f(t) = \int e^{-itx} F(x)\,dx$$

とする。

フーリエ変換 $f = \hat{F}$, $F \in A^2$ の作る環を $\tilde{A}^2$ で表わす。ここで

$$\|f\| = \|F\|$$

とする。また、

$$\eta(\alpha) = \eta(\alpha, f) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+\alpha) - f(t)|^2\,dt}$$

$$\Delta_\alpha f(t) = f(t+\alpha) - f(t).$$

$$A(f) = \int_0^\infty \eta(\alpha, f)\,\frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}}$$

とおく。

定理3. $f \in \tilde{A}^2$ であるための必要十分条件は

a) f は連続である。

b) $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$.

c) $A(f) < \infty$.

が成立することである。

この条件の下で、f はある $F \in A^2$ のフーリエ変換となり、次の不等式

$$(3.1) \qquad \|f\| < A(f) < 5\|f\|$$

が成立する。ただし $f \neq 0$ とする。

以上が A. Beurling [ ] による algebra の構成である。

§4. 最近における諸研究について。

§2で述べた空間 B^p, $\mathcal{B}^p$ に関連して。

(1). N. Wiener が Brownian motion の解析のために考案した一般調和解析の理論を展開する空間；

$$W^2; \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx \text{ が存在する}$$

あるいは

$$S'; \qquad \varphi(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{f(x)}\, dx \text{ が存在して連続.}$$

などの空間を含むもので、W^2 あるいは S' は Banach空間にならないので、これを拡大して B^2 あるいは $\mathcal{B}^2$ の枠内で論ずるのが望ましい。特に多変数の関数の一般調和解析について、まだ理論が未完成である。

K. Matsuoka [1], Y. Z. Chen - K. S. Lau [2, 3, 4, 5],

K. S. Lau [6, 7, 8], K. S. Lau - J. K. Lee [9].

(2). 空間 B^p あるいは $\mathcal{B}^p$ の間の線形作用素に関する補間理論は、共役空間 A^p あるいは $\mathcal{A}^p$ における議論に転換することによって解決された.

K. Matsuoka [1].

(3). 偏微分方程式における解の正則性の研究と関連して、空間 B.M.O が導入された

$$f^{\#}(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| \, dy < \infty.$$

ここで、 $f_Q = \dfrac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q f(x) \, dx$ とする.

これに倣って、空間 CMO^p $(1 < p < \infty)$ が J. Garcia-Cuerva によって導入され、C. Fefferman - E. M. Stein に倣って、Hardy 空間の研究がなされている.

F. John - L. Nierenberg [10], C. Fefferman - E. M. Stein [11], J. Garcia-Cuerva [12].

§3 で述べた空間 A^2 について、

(4). N. Wiener [13] の一般 Tauber 型定理：

f は有界 $K \in L^1$ で そのフーリエ変換 $\hat{K}(t) \neq 0$, $\forall t$ とする. もし、 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) \, dy \to A \int_{-\infty}^{\infty} K(y) \, dy$, $(x \to \infty)$

ならば，任意の $K_1 \in L^1$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y) f(y)\, dy \to A\int_{-\infty}^{\infty} K_1(y)\, dy, \quad (x\to\infty)$$

が成立する．

この定理を証明するために出発点となる補題は次のものである．

A： $f \in L^1(0, 2\pi)$ で，f のフーリエ級数が絶対収束する関数の作る族

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

$f\in A$ かつ $f(x) \neq 0$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ ならば $\dfrac{1}{f} \in A$ である．

同様の結果はフーリエ変換に関しても A. Beurling [ ] によって研究されているが，§3 で述べた定理3は，空間 A^2 において同様の問題を取扱ったものである．

この結果の興味ある応用は，Hoph-Wiener 型の積分方程式

$$\int_{0}^{\infty} f(x-y)\, \varphi(y)\, dy = \varphi(x) \qquad (x \geqq 0)$$

の解法である．

すなわち，「$f \in A^2$ のとき，ある附加条件の下で，上の方程式を満たす $\varphi \in B^2$ を求めよ．」である．

N. Wiener [13], R.E.A.C. Paley–N. Wiener [14].

H. Helson – J.P. Kahne – Y. Katznelson – W. Rudin [15],

J. Korevaar [16], E. Asplund [17].

(5). K. Anzai - K. Horie [18] は定理3を次のように $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間 A^2 に拡張することに成功している。

$$\Omega = \{ w(x) : w > 0,\ |x| \text{ について減少},\ w \in L^1(\mathbb{R}^n) \}$$

$$H(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\, dx$$

$$\|F\| = \inf_{w \in \Omega_0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|F(x)|^2}{w\left(|x|^{\frac{2\lambda}{n}}\right)}\, dx \qquad (0 < \lambda < 1)$$

とする。さらに

$f = \hat{F},\ F \in A^2$ であるような f の作る関数族を $\tilde{A}_2$ とし、$\|f\| = \|F\|$ とする。

定理4、 $f \in \tilde{A}^2$ であるための必要十分条件は、

a) f は連続である

b) $\lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0$

c) $$A(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(\alpha)}{|\alpha|^{n+\lambda}}\, d\alpha < \infty, \quad (0 < \lambda < 1)$$

このとき、次の不等式

$$C_n \|f\| < A(f) < d_n \|f\|$$

が成立する。

文献

[0] A. Beurling : Construction and analysis of some convolution algebras. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14 (1964) 1—32.

[1] K. Matsuoka (慶応志木高) : Generalized Harmonic Analysis of Several Variables. Dissertation, Keio Univ (1991).

[2], [3], [4], [5] : Y. Z. Chen - K. S. Lau.
[6], [7], [8], : K. S. Lau
[9] : K. S. Lau - J. K. Lee
については、K. Matsuoka [1] を参照のこと。

[10] F. John - L. Nirenberg : On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961) 415–426.

[11] C. Fefferman - E. M. Stein : H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972) 137–193.

[12] J. Garcia-Cuerva : Hardy spaces and Beurling algebras J. London Math. Soc., 39 (1989) 499–513.

[13] N. Wiener : The Fourier integral and Certain of its applications. Cambridge (1933)

[14] R. E. A. C. Paley - N. Wiener : Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloquim Pub. Vol XIX, (1934).

[15]. H. Helson - J. P. Kahne - Y. Katznelson - W. Rudin : The functions which operate on Fourier transforms, Acta Math. 102 (1959) 135-157.

[16] J. Korevaar ; Distribution proof of Wiener's Tauberian theorem, Proc. Amer. Math. Soc, 16 (1965) 353-355.

[17]. E. Asplund ; The Wiener-Hopf equations in an algebra of Beurling, Acta Math. 108 (1962) 89-111.

[18]. K. Anzai - K. Horie. On some theorems of convolution
(香大教育) (高松高専)
algebra of A. Beurling (under preparation).

May, 1992.

ホワイトノイズ解析とその応用

名古屋大学理学部　尾畑 伸明

$\mathbb{R}$ 上の超関数論は例えば, Gelfand triple $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を基礎として展開される. このとき, $A = 1 + t^2 - d^2/dt^2$ とおくと $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \bigcap_{p \geq 0} \mathrm{Dom}(A^p)$ であり, それは可算個のノルム $|\xi|_p = |A^p \xi|_{L^2}$ を備えた核型空間になっていることに注意しておく. 一方, μ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 上のガウス測度とすると, $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ は標準的に $L^2(\mathbb{R})$ 上のフォック空間と同型になる: $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} (L^2(\mathbb{R}))^{\widehat{\otimes} n}$. これに応じて $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ 上の作用素 $\Gamma(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{\otimes n}$ を導入し, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の場合と同様にして, $(\mathcal{S}) = \bigcap_{p \geq 0} \mathrm{Dom}(\Gamma(A)^p)$ に可算個のノルム $\|\phi\|_p = \|\Gamma(A)^p \phi\|_{L^2}$ を備えると核型空間になる. こうして新しい Gelfand triple $(\mathcal{S}) \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \subset (\mathcal{S})^*$ が得られるが, これを基礎とする無限次元解析をホワイトノイズ解析と呼んでいる (飛田).

場の理論や量子確率論への応用を念頭におけば, これらの空間に働く作用素の統一的な研究は興味深いと思われる. さて, フォック空間上の作用素を考える上で最も基本的なものは, 生成消滅作用素である. それらは, ホワイトノイズ解析では飛田微分によって作用素値超関数ではなく, 直接 $(\mathcal{S})$ 上の連続作用素として定義される. ここで飛田微分とは $t \in \mathbb{R}$ をパラメーターとする微分作用素であり, 次式で定義される:

$$\partial_t \phi(x) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\phi(x + \theta \delta_t) - \phi(x)}{\theta}, \qquad \phi \in (\mathcal{S}),\ x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

これが消滅作用素に対応し, 生成作用素はその双対である $\partial_t^* : (\mathcal{S})^* \to (\mathcal{S})^*$ で与えられる. これら基本的作用素の重ね合わせは形式的に

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) \partial_{s_1}^* \cdots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \cdots \partial_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m$$

と表される. ところが我々の枠組みでは, この積分作用素 $\Xi_{l,m}(\kappa)$ は双線形形式を通して, 任意の超関数積分核 $\kappa \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{l+m})$ に対して定義され, $(\mathcal{S})$ から $(\mathcal{S})^*$ への連続作用素となる. この積分作用素の重要性は例えば, 次の定理が成り立つことにある.

定 理: 任意の連続作用素 $\Xi : (\mathcal{S}) \to (\mathcal{S})^*$ に対して, 超関数積分核の列 $\kappa_{l,m} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{l+m})$, $l, m = 0, 1, 2, \cdots$, が存在して,

$$\Xi \phi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \phi, \qquad \phi \in (\mathcal{S}),$$

が成り立つ. ここで右辺の級数は, $(\mathcal{S})^*$ の位相 (強双対位相) で収束する. さらに, $\kappa_{l,m}$ は初めの l 変数, 終わりの m 変数に関して対称との条件のもとで一意である.

この定理の応用として $(\mathcal{S})$ 上の回転不変作用素を全部求めることができる. 結果として, そのような作用素は 2 つのラプラシアン:

$$N = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \tau(s,t) \partial_s \partial_t ds dt, \qquad \Delta_G = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \tau(s,t) \partial_s^* \partial_t ds dt$$

で生成されることが証明される. ただし, $\tau \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ は $\langle \tau, \xi \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ で定義される. なお, N は個数作用素, Δ_G は Gross のラプラシアンと呼ばれる.

この要旨では, 簡単のため ∂_t の t は $\mathbb{R}$ を走るものとしたが, 議論はもっと一般的な枠組みで可能である. また, 上記の積分核作用素については目下, 組織的に研究中である.

題目："C*-環の rank について"

要旨：位相空間の次元論は基本的な位相不変量として必要不可欠なものであるが、空間を量子化したとき、即ち非可換代数上の次元論も数理物理で又作用素環論自身で大切な理論となり得るが、現段階では次元論の根本的な性質が位相空間の時のように容易に導き得ない。従って次の問題が基本的でかつ重要である。"任意の $n \geq 2$ なる自然数 n に対して $\dim \mathfrak{A} = n$ なる単純 C*-環 $\mathfrak{A}$ を求めよ。" 単純 C*-環を構成する基本的方法は C*-接合積でありその単純性の完全条件は岸本により示されているので、C*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ に対して $\dim \mathfrak{A} \rtimes_\alpha G$ を決定すればよい。今回 Rieffel, Brown-Pedersen が示せなかった基本不等式を G がコンパクト可換群のとき、

$$2 \wedge \dim(\mathfrak{A}^\alpha) \leq \dim(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq \dim(\mathfrak{A}^\alpha)$$

が成り立ち、片側のみ等号が成立する例も存在することを示した。ただし $\mathfrak{A}^\alpha$ は $\mathfrak{A}$ の α による不動点代数である。一般の局所コンパクト可換群 G のとき、G_c をその極大コンパクト可換群とすると、一般的次元予想は次で与えられる：

$$2 \wedge \dim(\mathfrak{A}^{\alpha|G_c}) \leq \dim(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq \dim(\mathfrak{A}^{\alpha|G_c}) + \dim(G/G_c)$$

が成り立つ。

高井博司