１９８８年度談話会アブストラクト集

Colloquim Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by Y. Kamishima

Series ♯ 11. May, 1989

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
♯ 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquim Lectures, 96 pages. 1988.
♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.
♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.

1988年度 談話会アブストラクト

ページ

4月27日 談話会（岡部先生）

KM$_2$O ランジュヴァン方程式の理論と一般化された赤池情報量

時系列 — ランダムなデータ

$$\mathbb{Z} = (Z(0), Z(1), \cdots, Z(N)) \qquad Z(i) \in \mathbb{R}^d \quad (0 \leqq i \leqq N)$$

（例） 気象データ, 経済データ, 医学データ（脳波）　etc

研究の目的

データの分析 （局所定常性を持つか？）

- 局所定常性があるとき
  - 予測する
  - 因果関係（Causality）を調べる
    - 2つのデータのどちらが原因, 結果か？
- 局所定常性がないとき --- 異常性（anomaly）

1°. 分析

データ $\mathbb{Z}$ から標本相関函数 $R = (R_{p,q})_{1 \leqq p,q \leqq d}$ を求める

$$R_{p,q}(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N-n} (Z_p(n+j) - \mu_p)(Z_q(j) - \mu_q) \qquad (0 \leqq n \leqq N)$$

ここで $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_d) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} Z(n)$

これは近似的には 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上に $\exists$ 定常過程 $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{z}(n) : 0 \leqq n \leqq N)$ s.t

$$E[\mathfrak{z}(n)] = \mu, \qquad E[\mathfrak{z}(n)\, {}^t\mathfrak{z}(m)] = R(n-m)$$

?

本質的に大切なのは、相関函数である

2° 数学の理論

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の定常過程 $\mathbb{X} = (X(n) : 0 \leqq n \leqq N)$ s.t

$$E[X(n)] = 0 \qquad E[X(n)\, {}^t X(m)] = R(n-m)$$

があったとする.

> **KM$_2$O ランジュヴァン方程式**
>
> $\exists_1$ ランジュヴァンデータ $(\gamma_+(n,k), \delta_+(n), V_+(n) : 0 \leqq k < n \leqq N)$
>
> $\exists_1$ ランジュヴァン雑音 $\mathbb{V}_+ = (\nu_+(n) : 0 \leqq n \leqq N)$ （$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程） s.t
>
> $$\begin{cases} X(n) = -\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_+(n,k) X(k) - \delta_+(n) X(0) + \nu_+(n) \\ X(0) = \nu_+(0) \end{cases}$$

次の性質がある

(1) $E[\nu_+(n)\,{}^t\nu_+(m)] = \delta_{mn} V_+(n)$

(2) $R(\cdot)$ からランジュヴァンデータを求めるアルゴリズムがある

$$\begin{tikzcd}
R(\cdot) \arrow[r] & \delta_+(\cdot) \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \gamma_+(\cdot,*) \arrow[ll, shift left] \\
& & V_+(\cdot) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(3) $\mathbb{X}$ の局所定常性 $\Longleftrightarrow$ ξ_+ の白色雑音性

ただし $\xi_+ = (\xi_+(n) : 0 \leqq n \leqq N)$ は

$$\xi_+(n) = W_+(n)^{-1}\nu_+(n)$$

($W_+(n)$ は $W_+(n)\,{}^tW_+(n) = V_+(n)$ なる下三角行列)

3° 因果の考察

予測誤差 $\nu_+(n) = X(n) - P_{[X(0),\dots,X(n-1)]}X(n)$

$\|\nu_+(n)\|^2$ をできるだけ小さくしたい.

そこで $\mathbb{X} = (X(n) : |n| \leqq N)$ の $N \longrightarrow \infty$ とする

局所定常 $\longrightarrow$ 大域定常

KM$_2$O　　　KMO

KMO ランジュヴァン方程式

$\exists$ 白色雑音 $\eta_+ = (\eta_+(n) : n \in \mathbb{Z})$, $\exists V_+(\infty) \in GL(d;\mathbb{R})$ s.t

$$X(n) = -s\text{-}\lim_{l\to\infty}\sum_{k=0}^{l-1}\gamma_+(l, l-k)X(n-k) + V_+(\infty)^{\frac{1}{2}}\eta_+(n)$$

ただし $V_+(n) \longrightarrow V_+(\infty)$,　$\delta_+(n) \longrightarrow 0$　$(n \longrightarrow \infty)$

(d=1)　$\|X(0) - P_{[X(n):n\leqq -1]}X(0)\|^2 = V_+(\infty)$

(d=2)　$X(n) = \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{bmatrix}$　とおく

$$\|X_j(0) - P_{[X_j(n):n\leqq -1]}X_j(0)\|^2 =: C_j \qquad (j=1,2)$$

$$\|X_j(0) - P_{[X_1(n),X_2(n):n\leqq -1]}X_j(0)\|^2 =: d_j \qquad (j=1,2)$$

とおく

(1) $\frac{1}{2}\log C_i = \underline{H(\mathbb{X}_j)} - \frac{1}{2}\log 2\pi e$

単位時間あたりのエントロピー

(2) (因果)　$C_1 > C_2$ とする.

もちろん $C_1 \geqq d_1$,　$C_2 \geqq d_2$ である　(∵ 後者の方が情報が多い)

原因となる方は結果となる方のある程度の情報を持つと考えられるので C_i-d_i $(i=1,2)$ の大きい方が原因と考えられる

(3) 大数の法則より

$$\frac{\sum_{n=0}^{N}\nu_+(n)^2}{N+1}-\underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{N}V_+(n)}{N+1}}_{\downarrow\; V_+(\infty)}=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\nu_+(n)^2-V_+(n)\right)\longrightarrow 0$$

である. そこで

$$H(\mathbb{X};\omega):=\log\left(\frac{\sum_{n=0}^{N}\nu_+(n)^2}{N+1}\right)$$

とおき <u>標本予測誤差</u> という (cf. 赤池先生のAIC)

4° 再び分析

経験則として $0\leqq n\leqq M:=[3\sqrt{N}]-1$ まで信頼できるとされている

(定常性の検定) $0\leqq i\leqq N-M$ とする.

$$\mathbb{X}_i=(X(i+n):0\leqq n\leqq M)$$

に対して ν_{+i}, ξ_{+i} をつくる

(S)

(M) $\boxed{\text{平均}}$ $\displaystyle\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\xi_{+i}(n)=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{M+1}}\sum_{n=0}^{M}\xi_+(n)}_{\longrightarrow N(0,1)}$ (中心極限定理)

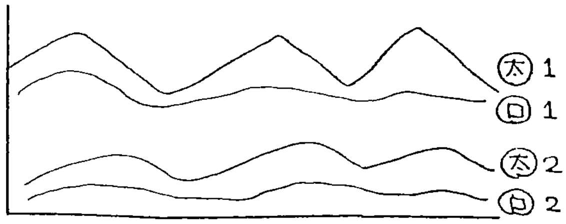
$$\left|\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\xi_{+i}(n)\right|<\frac{1.96}{\sqrt{M+1}}$$

(V) は95%で成り立つことが知られている そこで. このとき ξ_{+i} 等が白色雑音だと思うことにする

(C) $\boxed{\text{分散}}$と$\boxed{\text{直交性}}$ ⇒ が$\mathbb{X}$の定常性

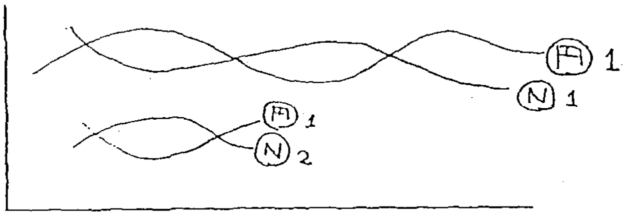
例 <u>因果関係</u>

(1) 太陽の黒点とロジスティック変換



⟹ 無関係
(あたりまえだが)

(2) 円とNEC



⇒ 円が原因となっている

Cf 経済の Granger Causality

もうひとつ 標本予測誤差が 精密になることが分かりかけてきた.

或るC*－環のK－理論

鈴　木　治　夫

可換環AのK$_0$－理論において積，外積ベキ（対称ベキ）演算が定義される。これは更にKn－理論に拡大され Reimann-Roch 定理の一般化に役だっている（[S] 参照）。特にAが可換 Banach 環ならば，これらの演算は $K_0(A)$ および懸垂同形により $K_1(A)$ において定義され， Gelfand 表現によって，幾何学的な積，ベキ演算の代数学的構成とみなされる。

しかし，Aが非可換の場合，この種の演算の構成は現在の所 $K_0(A)$ に対してすらできていない（[B]参照）。本講演ではある制限されたC*－環のカテゴリに対し，K$_0$における積及びベキ演算の構成を試みる。

任意の有限次元C*－環の準同形写像に整数≧０を成分とする行列（m_{ij}）が対応するが，この行列の各行の成分が丁度一つ１他は０であるとき，この準同型写像を <u>multiplicative</u> と呼ぶことにする。

multiplicative な準同形写像を射とする有限次元C*－環のカテゴリから得られるＡＦ－環Ａに対して $K_0(A)$ における積およびベキ演算を構成することができ，この制限されたカテゴリに関する限り，可換環の場合と全く同じ演算公理系を満足する。

この制限されたC*－環のカテゴリは実は Cantor 集合の非可換類似であることをつけ加えておく。一般ＡＦ－環のカテゴリではこの演算に対し障害が生ずると思われる。

文　　献

[B] B. Blackadar, K-Theory for Operator Algebras, MSRI Publ. Springer-Verlag 1986.

[S] C. Soule, Operations en K-theorie algebrique, Can. J. Math. (1985), 488-550.

Motion by Mean Curvature, Parabolic Harmonic Maps, and Singular Perturbations of Evolution Partial Differential Equations

Robert V. Kohn
Courant Institute

Consider the parabolic equation

$$u_\tau - \varepsilon^2 \Delta u + u^3 - u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$
$$\partial u / \partial \nu = 0 \qquad \text{at} \quad \partial\Omega \ ,$$

which represents gradient flow for the "energy"

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \tfrac{1}{4}(u^2-1)^2 .$$

It is well-known that for generic initial data the solution will approach a local minimum of E_ε as $t \to \infty$. If Ω is convex then the only local minima are $u \equiv +1$ and $u \equiv -1$; one might say that be "large time behavior of u admits no nontrivial spatial structure".

If ε is small, however, the solutions can keep nontrivial spatial structure for a very long time : one might call this phenomenon metastability. If Ω is an interval, u will be approximately ± 1 except near certain transition layers of width ε, which move exponentially slowly in ε ; this case was recently studied by J. Carr and R. Pego. In higher dimensions the transitions are along surfaces, which move with velocity $ck\varepsilon^2$, where c is a constant and k is the mean curvature. This result was obtained formally by Keller, Rubenstein, and Sternberg, expanding on earlier results of others; it has been linked to certain metallurgical phenomena by Allen and Cahn. For the radially symmetric case a rigorous proof has been obtained in joint work with L. Bronsard.

Curiously, the vector-valued analogue

$$u_\tau - \varepsilon^2 \Delta u + (|u|^2 - 1)u = 0, \quad u : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

has totally different behavior. Changing variables to $t = \varepsilon^2 \tau$, it becomes gradient flow for

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega [\tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 + \tfrac{1}{4} \varepsilon^{-2}(|u|^2 - 1)^2] \, dx ,$$

a penalization of the "energy" whose critical points are harmonic maps to the sphere S^{d-1}. In the limit as $\varepsilon \to 0$, Yunmei and (independently) Rubenstein and Sternberg have shown that one obtains a weak solution of the parabolic equation describing gradient flow for the harmonic map functional, and this has recently been extended to more general image manifolds by Struwe and Yunmei. The solutions so obtained are, however, very weak; it remains an open question whether or not they really have singularities.

1988年 6月 15日

Godbillon-Vey invariant について

坪井 俊

3次元多様体 M 上の余次元1葉層構造 $\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey 不変量は次のように定義される。葉層が 1-form ω で定義されるとき、積分可能条件より $d\omega = \omega \wedge \eta$ となる 1-form η が存在する。これを使って $GV(\mathcal{F}) = \int_M \eta \wedge d\eta$ で与えられる。

1970年に発見されたこの不変量は葉層同境群の不変量で、葉層の C^2 級の連続族に対し連続に変化する。(Thurston の例).

Godbillon Vey 不変量は C^2 級の葉層に対して定義されているが、これは、いくつかのより広い葉層のクラスに拡張されている。葉層 S^1 束を考えることにより GV は $Diff(S^1)$ の 2-cocycle を与えるので、群の cocycle としてみると次のようである。

Duminy Sergiescu (1981)　S^1の class P 同相の群に対して。
Ghys - Sergiescu (1985)　S^1の Piecewise Linear 同相の群に対して。
Ghys (1987)　S^1の class P 同相の群に対して 2つの不変量を定義
Hurder-Katok (1986)　S^1の $C^{1+\alpha}$ 級同相 $(\alpha > \frac{1}{2})$ の群に対して定義。

一方 C^1級葉層の分類空間 $B\Gamma_1^1$ は可縮で、$Diff_+^1(S^1)$ にはオイラー類以外の 2-cocycle は存在しない。そこで Godbillon-Vey 不変量の定義される葉層あるいは同相群の最も広いクラスを求めることが問題となる。

ここではまず $C^{1+\alpha}$ 級同相 $(\alpha < \frac{1}{2})$ の群に対しては GV は自然には定義されないことを示す。余裕があれば、GVを定義するクラスを求める試みについてのべたい。

定理1. GV は $C^{1+\alpha}$ 位相で連続でない $(\alpha<\frac{1}{2})$.

定理2. 次の様な $C^{1+\alpha}$ 葉層 $(M,\mathcal{F})$ が存在する。
Mは閉多様体, $M=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ (B_i は disjoint saturated Borel set)
B_i 上 GVは定義され $\sum_{i=1}^{\infty}GV(\mathcal{F}|B_i)=\infty$.

証明は葉層の example を作ることにより与えられる。
まず Thurston の例を使って次をみたす葉層 S^1 積の族 $\{\mathcal{F}_t\}$ を作る

$$|\mathcal{F}_t|_r \leq C_r t^{\frac{1}{2}} \quad \text{かつ} \quad GV(\mathcal{F}_t)=t \quad (0<t\leq T).$$

定理1の証明は $\mathcal{F}_t$ の S^1 方向への n-fold cover $\mathcal{F}_t^{(n)}$ についての次の評価式から得られる.

$$|\mathcal{F}_t^{(n)}|_{1+\alpha} \leq C_2 n^{\alpha} t^{\frac{1}{2}}, \quad GV(\mathcal{F}_t^{(n)})=nt.$$

$t=\frac{1}{n}$ とすると $\alpha<\frac{1}{2}$ ならば $|\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}^{(n)}|_{1+\alpha}\to 0$, $GV(\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}^{(n)})=1$ となる。
定理2の証明は $\mathcal{F}_{1/n}^{(n)}$ と同じ評価をうけるコンパクトな台をもつ葉層R積を構成し, それらの"無限和"を作ることにより与えられる。
このような葉層R積は fragmentation homotopy を使い, S^1方向への無限巡回被覆をとり, その一部分を貼りあわせることにより得られる。

GVを定義するクラスとして考えているのは次のようなものである。
S^1の cyclic order にならんだ有限個の点の集合 $A=\{x_1,\cdots,x_n\}$ と S^1上の関数 φ に対し. (φは右又は左に連続とする。)

$$W(\varphi,A)=\sum|\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})|^2 \quad \text{とおく。}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{mesh(A)\leq\varepsilon} W(\varphi,A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{mesh(A)\leq\varepsilon} W(\varphi,A) \quad \text{のとき}$$

この値は $\sum_{x\in S^1}|\varphi(x+0)-\varphi(x-0)|^2$ に等しくなる。 このとき
$\varphi(x+0)\neq\varphi(x-0)$ となる点 x に対し長さ $|\varphi(x+0)-\varphi(x-0)|^2$ の interval を挿入して得られる連続関数 $\bar{\varphi}$ について.

$s \longmapsto \sup_{\mathrm{mesh}\,\Delta \leqq e^s} w(\bar{\varphi}, \Delta)$ が $(-\infty, 0]$ 上可積分となるとき

φ は性質 Q を持つと呼ぶ

S^1 の(微分)同相 f が性質 Q をもつとは

「$\log Df$ が性質 Q をもつこと」あるいは正確には

「性質 Q をもつ φ が存在し, $f(x) = f(0) + \int_0^x e^{\varphi(t)}\,dt$

と書かれること」

と定義する。

性質 Q をもつ同相全体のなす群がこれまで GV が定義された群の中で最も広いものであると予想し，これを検証中である。

On C^0 determinancy of analytic functions related to weights

小池敏司（兵庫教育大学）

$\mathcal{E}_{[k]}(n,1):(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ の C^k 級関数芽全体の作る集合とする（但し $k=1,2,\cdots,\infty,\omega$）。この時 $f,g\in\mathcal{E}_{[k]}(n,1)$ が C^0-同値であるとは、局所同相写像 $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ が存在して $f=g\circ\sigma$ となる時いう。

次に、n 個の weight からなる system

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Q}^+\times\cdots\times\mathbb{Q}^+ \quad 但し \min_{1\leq j\leq n}\alpha_j=1$$

を考える。この時 α から定まる $\mathbb{Q}^+$ の部分集合を

$$I(\alpha)\equiv\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j \;\middle|\; \beta_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ (1\leq j\leq n),\ \beta_1+\cdots+\beta_n\geq 1\right\}$$

と定義する。そうすると、

$$I(\alpha)=\{i(N)\mid 0<i(1)<i(2)<\cdots<i(N)<\cdots\ (N\in\mathbb{N})\}$$

と表わされる。$\delta_N=i(N+1)-i(N)>0$ とおくことにしよう。

$f,g\in\mathcal{E}_{[\omega]}(n,1)$ の $0\in\mathbb{R}^n$ での展開を

$$f(x)=\sum_{\beta\in B}A_\beta x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n},\quad g(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n}$$

とする。この時 $i(N)\in I(\alpha)$ に対し f,g が $i(N)$-同値とは、

$$\sum_{\substack{\beta\in B\\ \alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_n\beta_n\leq i(N)}}A_\beta x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}=\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \alpha_1\gamma_1+\cdots+\alpha_n\gamma_n\leq i(N)}}B_\gamma x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n}$$

となる時いう。この関係 $\underset{i(N)}{\sim}$ は同値関係である。ここで、

$$J_\alpha^{i(N)}(n,1)\equiv\mathcal{E}_{[\omega]}(n,1)\big/\underset{i(N)}{\sim}$$

とおく。$j_\alpha^{i(N)}f(0)$ は f の $\underset{i(N)}{\sim}$ に関する同値類を表わすことにする。これは α に付随した次数が $i(N)$ を越えない多項式代表元と

同一視できる。

$f \in \mathcal{E}_{[\omega]}(n,1)$ に対し、$0 \in \mathbb{R}^n$ は f の特異点になっているものとする。その時、$i(N) \in I(\alpha)$、但し $\alpha_j < i(N)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ に対し、$0 \in \mathbb{R}^n$ の周りで

$$\tilde{\partial}_{i(N)} f(x) \equiv \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right|^{\frac{i(N)-1}{i(N)-\alpha_1}}, \cdots, \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right|^{\frac{i(N)-1}{i(N)-\alpha_n}} \right)$$

とおく。$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^+ \times \cdots \times \mathbb{Q}^+$ に対し、

$$|x|_\alpha = \sqrt{|x_1|^{\frac{2}{\alpha_1}} + \cdots + |x_n|^{\frac{2}{\alpha_n}}} \qquad (x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

と表わすことにする。この時、次の結果を得る。

<u>定理1.</u> $H \in J_\alpha^{i(N)}(n,1)$ $(n \leqq 3)$ とする。この時、$C, a > 0$, $\varepsilon > 1 - \delta_N$ が存在して

$$|\tilde{\partial}_{i(N)} H(x)| \geqq C |x|_\alpha^{i(N)-\varepsilon} \qquad (|x| < a)$$

が成立するならば、$j_\alpha^{i(N)} G(0) = 0$ を満たす任意の $G \in \mathcal{E}_{[\omega]}(n,1)$ に対し、$H+G$ と H は C^0-同値となる。

<u>注意.</u> ここで $\mathcal{E}_{[\omega]}(n,1)$ を $\mathcal{E}_{[[i(N)]+1]}(n,1)$ に変えることができる。

$\mathcal{H}(n,1)$: $(\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の正則関数芽全体の作る集合とする。この時、$f, g \in \mathcal{H}(n,1)$ が <u>C^0-同値</u>（又は <u>RL-C^0-同値</u>）であるとは、局所同相写像 $\sigma : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$（又は、$\tau : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$）が存在して、$f = g \circ \sigma$（又は、$\tau \circ f = g \circ \sigma$）となる時いう。複素の場合にも上と同様に、$\alpha$ に対して $I(\alpha)$, δ_N, $J_\alpha^{i(N)}(n,1)$, $\tilde{\partial}_{i(N)}$, $|\ \ |_\alpha$ が定義される。この時次を得る。

<u>定理2.</u> $H \in J_\alpha^{i(N)}(n,1)$ とする。この時、$C, a > 0$, $\varepsilon > 1 - \delta_N$ が存在して

$$|\tilde{\partial}_{i(N)} H(x)| \geqq C |x|_\alpha^{i(N)-\varepsilon} \qquad (|x| < a)$$

が成立するならば、$j_\alpha^{i(N)} G(0) = 0$ を満たす任意の $G \in \mathcal{H}(n,1)$ に対し、$H+G$ と H は RL-C^0-同値となる。更に $n \neq 3$ ならば、それらは C^0-同値になる。

Radon-Nikodým compact spaces and fragmentability.

Isaac Namioka

Abstract:

A compact Hausdorff space K is called Eberlein compact (EC) if it is homeomorphic to a weakly compact subset of a Banach space. The class of EC spaces is general enough to be useful in analysis, and yet it shares many properties with the class of compact metric spaces. In this talk, we introduce a new class of compact Hausdorff spaces which is suggested by the study of Banach spaces with the Radon-Nikodým property. A compact Hausdorff space is called a Radon-Nikodým compact (RNC) space if it is homeomorphic to a weak* compact subset of a dual Banach space with the Radon-Nikodým property. The class of RNC spaces contains all EC spaces and scattered compact Hausdorff spaces, and, therefore, the class of RNC spaces is strictly larger than that of EC spaces. A RNC space possesses many pleasant properties of EC spaces, but there are some subtle differences as well. For instance, if K is RNC then K is sequentially compact, and the unit ball of $C(K)^*$ is RNC under the weak* topology. The ~~countable~~ product of a countable family of RNC spaces is again RNC. In order to give a topological characterization of RNC spaces, we need the notion of fragmentability. A topological space $(X, \mathcal{T})$ is said to be fragmented by a metric ρ on X if for each non-empty subset A of X and each $\epsilon > 0$ there exists a non-empty $\mathcal{T}$-open subset U of X with $A \cap U \neq \phi$ and ρ-diam$(A \cap U) < \epsilon$. Then, a compact Hausdorff space K is RNC if, and only if, K is fragmented by a lower semicontinuous metric on K. Finally we mention some open problems concerning RNC spaces.

超幾何微分方程式系についての話題

佐々木武

1. Euler-Gauß の微分方程式について　ここで興味のある Gauß の発見から話を始める。方程式は
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$E(\alpha,\beta,\gamma):\quad x(1-x)z''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}z'-\alpha\beta z=0$$

と定義され，Euler の積分

$$(1)\qquad \int t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}\,dt$$

を解にもっている。いま $x_0 \neq 0, 1, \infty$ での2つの独立な解を z^0, z^1；σ を x_0 を始点とする $\mathbb{P}-\{0,1,\infty\}$ でのループとすると，σ に沿っての z^i 達の解析接続によって x_0 での新しい分岐 $\sigma_* z^i$ が得られ　表現

$$\sigma \longrightarrow M_\sigma \in GL(2,\mathbb{C})$$

$$\sigma_*\begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = M_\sigma \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

が定まる。この表現による $\pi_1(\mathbb{P}-\{0,1,\infty\}, x_0)$ の像を monodromy 群とよぶ。その共役類は x_0 や z^0, z^1 のとり方によらない。Gauß は 1807 年に次のことを示した：

(α,β,γ) が特殊な値をとる時，写像

$$x \longmapsto [z^0(x), z^1(x)] \in \mathbb{P}^1$$

の逆函数は1価となり modular 函数になること，例えば $(\alpha,\beta,\gamma)=(1/2, 1/2, 1)$ ならば λ-函数，対応する monodromy 群は楕円 modular 群 $\Gamma(2)$ である。

2. これを次のように一般化したい。そのために上記積分が曲線 $s^2 = t(1-t)(1-tx)$ の周期積分であることに注意しよう。そこで，genus $= 2$ の曲線

$$s^2 = t(1-t)(1-tx^1)(1-tx^2)(1-tx^3)$$

の周期積分に付随した微分方程式系を求めることを問題にする。1. との対応関係は

$E(\alpha,\beta,\gamma)$	(1)	$\mathbb{P}-\{0,1,\infty\}$	楕円 modular
?	(2)	$\mathbb{P}^3-\{x^i=0,1,x^i=x^j\ (i\neq j)\}$	Siegel modular

ただし

(2) $$\int t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx^1)^{-\beta_1}(1-tx^2)^{-\beta_2}(1-tx^3)^{-\beta_3}\,dt$$

をおく。

この積分が Lauricella の微分方程式系，$F_D(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma)$ とかく，をみたすことは古くから知られている。この方程式系の独立な解の個数は 4 である。ところが「4」では次の理由で都合が悪い。それは Gauss の場合，周期積分の行先は上半平面であり，いまの場合のそれは Siegel の上半平面 $\mathcal{H}_2 = \left\{\tau = \begin{pmatrix}\tau^1 & \tau^2\\ \tau^2 & \tau^3\end{pmatrix} ;\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\right\}$ であって欲しい。よく知られているように，$\mathcal{H}_2$ は自然な埋め込み

$$\mathcal{H}_2 \ni \tau \longmapsto [1,\tau^1,\tau^2,\tau^3,\tau^1\tau^3-(\tau^2)^2] \in Q_3 \subset \mathbb{P}^4$$

をもっている（Q_3 は $\mathbb{P}^4$ の quadric）。そうすると微分方程式系は $4+1=5$ つの独立な解をもつ筈である。

3. そこで新しい方程式系をつくる次のような操作を考えよう。方程式(系) E, F_D は可積分系

$$de = \omega e$$

とかける。ω は1次微分式を要素とする行列，e はベクトル e_i の有限な組 = 行列である。いま $e_i \in V = \mathbb{C}^r$ とする。

すると， $E_s = e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_s}\in\bigwedge^s V$ はまた可積分系をみたす。すなわち ω_s という形式がさだまり

$$dE_s = \omega_s E_s$$

である。とくに $s=r-1$ のとき $\bigwedge^{r-1}V\cong V^*$ でありベクトルの次元は V と同じである。例えばこの操作を F_D について行うと対応

$$e : F_D(\alpha,\beta_i,\gamma) \longrightarrow E_3 : F_D(1-\alpha,1-\beta_i,2-\gamma)$$

が得られる。考えるべき周期積分は $(\alpha,\beta_i,\gamma)=(1/2,1/2,1/2,1/2,1)$ のときであり，これはちょうどこの対応で動かない点になっている。そこで F_D について E_2 を考えよう。その解の個数は

$$\binom{4}{2} = 6$$

である。すなわち $\mathbb{P}^3-\{x^i=0,1,x^j{}_{(i\neq j)}\}$ から $\mathbb{P}^5$ への写像を与えている。しかも不思議なことに，$(\alpha,\beta_i,\gamma)=(1/2,1/2,1/2,1/2,1)$ ならば monodromy 群は5次元の不変部分空間をもつことがわかる。本質的にこの場合これは既約であることもわかる。従って $\mathbb{P}^3-\{x^i=0,1,x^j\}$ から $\mathbb{P}^4$ への写像が得られることになり，E_2 が外積から作られ Plücker の関係式より Q_3 に値をもつことに注意すれば，前章の方程式の形をしている。実はこれがちょうど Siegel modular 群 $\Gamma(2)$ を monodromy 群にもつ方程式であることが証明される。

4. 一般に方程式系の「⊗」とか「∧」とは具体的な方程式にあたってみると有用の様である。

なお，これは M. Yoshida, M. Hara（ともに九大）との共同の仕事である。

Bergman空間上のHankel作用素

神奈川大, 泉池敬司

D: open unit disc

$L^2(D)$: D上の L^2 空間

$L^2_a(D) = H(D) \cap L^2(D)$ Bergman空間

$H^2(\partial D) = \{ f \in L^2(\partial D) ;\ \hat{f}(n) = 0 \ \forall n < 0 \}$ Hardy空間

[1] $f \in L^\infty(\partial D)$ に対して

$T_f : H^2(\partial D) \ni h \to P(fh) \in H^2(\partial D)$ Toeplitz作用素

$H_f : H^2(\partial D) \ni h \to (I-P)(fh) \in L^2(\partial D) \ominus H^2(\partial D)$ Hankel作用素

◎ H_f compact $\iff f \in H^\infty + C$

Axler-Chang-Sarason-Volberg定理:

$H_f^* H_g$ compact $\iff f|_Q$ or $g|_Q \in H^\infty|_Q$ $\forall Q$: QC-level set

特別な場合: $f, g \in H^\infty(D)$ の時

◎ $H_{\bar{f}}$ compact $\iff f|_Q$ constant $\forall Q$

◎ $H_{\bar{f}}^* H_{\bar{g}} = T_g^* T_f - T_f T_g^*$ compact $\iff f|_Q$ or $g|_Q$ は constant $\forall Q$

[2] $f \in L^\infty(D)$ に対して

$T_f : L^2_a(D) \ni h \to P(fh) \in L^2_a(D)$

$H_f : L^2_a(D) \ni h \to (I-P)(fh) \in L^2(D) \ominus L^2_a(D)$

◎ $f \in H^\infty$ の時,

$H_{\bar{f}}$ compact $\iff f|_P$ constant $\forall P$: Gleason part $(P \neq D)$

$\iff \lim_{|z| \to 1} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0 \quad (f \in \mathcal{B}_0)$

Axler-Gorkin-Zheng定理。 $f, g \in H^\infty(D)$のとき,

$$H_{\bar f}^* H_{\bar g} = T_g^* T_f - T_f T_{\bar g} \text{ compact}$$

$\iff$ $f|P$ or $g|P$ constant $\quad \forall P$: Gleason part ($P \neq D$)

$$\iff \lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2) \min\{|f'(z)|, |g'(z)|\} = 0$$

[3] $f \in L_a^2(D)$ に対して

$$H_{\bar f} : H^\infty(D) \ni h \longrightarrow (I-P)(\bar f h) \in L^2(D) \ominus L_a^2(D)$$

Axler定理。

$H_{\bar f}$ は $L_a^2(D)$ に bounded に拡張可能

$$\iff \sup_{|z|<1} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty \quad (f \in \mathcal{B})$$

$H_{\bar f}$ は compact $\iff \lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0 \quad (f \in \mathcal{B}_0)$

$$\iff \lim_{|z|\to 1} \| f\circ\phi_z - f(z)\|_p = 0 \quad \forall p \geq 1$$

$$\left(\phi_z(\zeta) = \frac{z-\zeta}{1-\bar z \zeta} \right)$$

$\boxed{\text{予想}}$ $f, g \in \mathcal{B}$ のとき,

$$H_{\bar f}^* H_{\bar g} \text{ compact} \iff \lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2) \min\{|f'(z)|, |g'(z)|\} = 0$$

$$\left(\iff \lim_{|z|\to 1} \| \overline{(f\circ\phi_z - f(z))} (g\circ\phi_z - g(z))\|_p = 0 \quad \forall p \geq 1 \right)$$

$\Leftarrow$ OK, 多次元 Ball でも OK

命題: $f, g \in \mathcal{B}$, $H_{\bar f}^* H_{\bar g}$ compact

$$\Rightarrow \lim_{|z|\to 1} \| P[\overline{(f\circ\phi_z - f(z))} (g\circ\phi_z - g(z))] \|_2 = 0.$$

88/07/01

M. JAMBU

ARRANGEMENTS OF HYPERPLANES

Witt formula can be considered as a relation between the fundamental group of $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, the cohomology of X and the free Lie algebra over a set of n elements, as follows:

$$\sum_{p\geq 0}' \chi(p)t^p = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\varphi_{j-1}} = (1-nt)^{-1}$$

where $\chi(p) = \dim \mathcal{E}(Lib(A))$, $|A| = n$

$P_X(t) = 1+nt$, the Poincaré polynomial of X

$\varphi_j = \operatorname{rank} \Gamma_j \pi_1(X) / \Gamma_{j+1}\pi_1(X)$, (quotients of the lower central series)

This formula can be extended in the context of arrangements of hyperplanes. Let $A = \{H_1, \dots, H_n\}$ be a set of hyperplanes of $\mathbb{C}^\ell$ (through the origin) and $X = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{H\in A} H$.

Define an arbitrary linear order on A : $H_1 < H_2 < \dots < H_n$.

A <u>(p-1)-broken-circuit</u> $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_{p-1}}\}$ is an ordered sequence of hyperplanes of A such that there exists $H \in A$, $H > H_{i_{p-1}}$ and

$\operatorname{codim} \bigcap_{j=1}^{p-1} H_{i_j} = \operatorname{codim} \left(\bigcap_{j=1}^{p-1} H_{i_j}\right) \cap H = p-1$

Using the broken-circuits, we can describe $H^*(X)$ as the subvector space of the free exterior algebra $\mathcal{E}$ over A whose a basis is composed by the $H_{i_1} \wedge \dots \wedge H_{i_p}$ such that $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_p}\}$ does not contain any broken-circuit.

On the other hand, let $G_X = Lib(H_1(X, \mathbb{Q}))/J$ where J is the ideal generated by the image of δ the dual of the cup product, be the holonomy Lie algebra of X.

Then J is the ideal generated by the $[X_i, X_j]$ where $\{H_i, H_j\}$ is not a 2-broken-circuit and X_i is the holonomy class associated with H_i.

Let $\chi(p) = \dim \mathcal{E}_p(\mathcal{G}_X)$ and $\varphi_j(X) = \operatorname{rank} \Gamma_j \pi_1(X) / \Gamma_{j+1} \pi_1(X)$

By definition, X satisfies the LCS property iff

$$\sum_{p \geq 0} \chi(p) t^p = \prod_{j \geq 1} (1-t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)} = P_X(-t)^{-1}$$

Falk-Randell, Kohno, showed that the class of fiber-type arrangements, ie. whose lattice of intersections is supersolvable satisfies the LCS property.

Here, we give an elementary proof of this result as a direct corollary of the theorem:

Theorem: Let $\mathbb{A}$ be a fiber-type arrangement. Then

$$\mathcal{G}_X \simeq \bigoplus_{i=1}^{\ell} Lib(A_i)$$

where $\mathbb{A} = \coprod_{i=1}^{\ell} A_i$ is the partition associated with the maximal modular chain of the lattice or with the tower of fibrations given by the definition of fiber-type arrangement.

Sphere Packing and Applications

N J A Sloane
Mathematical Sciences Research Center
AT&T Bell Labs
Murray Hill, New Jersey USA

July 4 1988

Summary

This talk will describe one of the oldest problems in geometry, the ~~sphere~~ sphere packing problem, and will show how it is related to several problems of digital communication, and in particular to the problem of constructing codes for use on a band-limited channel. Besides the sphere packing problem, three closely related geometrical problems are also described: the kissing number problem (which asks how many ~~spheres~~ equal nonoverlapping spheres can touch another sphere of the same size), the covering problem (which asks for the most efficient way to cover space by

overlapping spheres), and the quantizing problem (which asks for the best lattice to use for data compression). For all four problems there has been considerable progress in recent years, and I shall describe some of these results. For example, A.M. Odlyzko and I found the ~~[illegible]~~ solution to the kissing number problem in dimensions 8 and 24 ~~(the only other dimensions~~ (before this the answers were known only in dimensions 1, 2, 3). Later Eiichi Bannai and I showed that the answers in 8 and 24 dimensions are ~~also~~ in fact unique. For the ~~[illegible]~~ quantizing problem, Eric Barnes and I proved that the body-centered cubic lattice is the optimal lattice quantizer in three dimensions, assuming the input to have a uniform distribution.

Several results concerning the sphere packing problem will be described. "Laminated lattices" are defined recursively, beginning with the integer ~~one dimensional~~ lattice in one dimension, and then taking the densest n-dimensional lattice(s) that contain any $(n-1)$-dimensional laminated lattice as a sublattice. In 1982 J. H. Conway and I determined all laminated lattices in dimensions up to 25, and found the density of any laminated lattice in dimensions up to 48, considerably extending the known results. There is a unique 24-dimensional laminated lattice, which is the Leech lattice. This is a "no-input" construction of the Leech lattice. The main reference for this talk is J. H. Conway and N. J. A. Sloane, "Sphere Packing, Lattices and Groups", Springer-Verlag, 1988. The talk will

conclude by mentioning that Motorola Inc. is
MODEM
now marketing a 19.2 kbit/sec modem
for digital communications, that uses signal
which are points in an eight-dimensional
sphere packing!

「擬斉次多項式で定義されるK3曲面のnegative cycles」

筑波大学 数学系 渡辺公夫

複素解析空間 X上の正規孤立特異点 (X,x)の基本的な不変量として、多重種数δ_mがある。この多重種数の値が総ての自然数 mに関して、1になるとき、その特異点を純楕円型特異点という。

定義　三次元Gorenstein純楕円型特異点で (0,2)-type のものを単純K3特異点という。

単純K3特異点は三次元純楕円型特異点の「最も簡単な」ものである。この単純K3特異点をminimal resolutionの言葉で特徴付けることができる。即ち、「三次元正規孤立特異点 (X,x)に対し、そのminimal resolutionを$f: Y \to X$とするとき、$D = f^{-1}(x)_{red}$が normal K3-surface ならば (X,x)は単純K3特異点である。」これは、単純K3特異点を minimal resolutionの例外集合で記述できたことを意味する。さらに三次元単純K3特異点が二次元単純楕円型特異点の拡張として妥当である、という証でもある。

次に、単純K3特異点が超曲面となるための条件を例外集合として現れる正規K3曲面の特異性で記述することを問題とする。まず考察の対象を非退化な正則関数fで定義された単純K3特異点に限り、その例外集合として現れる正規K3曲面のlattice 構造を計算し、超曲面となるための必要条件を求めてみよう。この場合、fが非退化であるという条件より minimal resolution は簡単に求まる。

fの Newton 図形の中に(1,1,1,1) を相対的内部に含む3次元の面が存在する。従って、3次元の面の方向比として四つの(正の)有理数が得られる(米村の計算によれば、これは95通りある)。これによりambient space である$\mathbb{C}^4$ の原点における(重み付き)blowing-upが定義できる。これから(X,x) のpartial resolutionが構成されるが、実は(一つの) minimal resolutionにもなっている。以上の事実より、例外集合として現れる正規K3曲面の代数的及び超越的サイクルを記述し、ピカールlattice の構造を決めることができる。さらには、正規K3曲面の特異点を通る Weil divisor のcomplement の intersection form を計算することにより正規K3曲面の lattice構造は完全に決定される。

さらに単純K3特異点を定義する非退化な4変数擬斉次多項式gの一般形について調べてみよう。gは3次元 weighted projective spaceの中でnormal K3-surface Sを定義する。このとき、Sの特異点を総て通るWeil divisorDで、S－DがStein 多様体となるものが存在する。H_2(S－D) に2次形式を定義し、S－Dの negative cycle をMの negative cycle とみることができる。この方法でMの transcendental negative cycle のすべてを捉えることができる。一方、解析的 de Rham 理論によりS－Dの cycle に正則2型式が対応している。このtranscendetal negative cycleに対応する正則2型式を用いると、$\mathbb{C}^4$ における単純K3特異点の定義式とみた擬斉次多項式$\cancel{f}$ gのweightを保った変形を表現することができる。例えば、gが$x^2+y^3+z^7+w^{42}$のとき、結果は$x^2+y^3+z^7+w^{42}+t_1zw^{36}+t_2z^2w^{30}+t_3yw^{28}+t_4z^3w^{24}+t_5yzw^{22}+t_6z^4w^{18}+t_7yz^2w^{16}+t_8z^5w^{12}+t_9yz^3w^{10}+t_{10}yz^4w^4$ となる。

Levi-Malćev Theorems for Smooth Poisson Algebras

August 17, 1988

Abstract:

Motivated by the classical results of Levi-Malćev on existence and conjugacy of semisimple subalgebras in finite-dimensional Lie algebras, we discuss in this talk the formulation and proof of analogous results for the Lie algebra of germs of smooth functions at a singular point of a smooth Poisson manifold.

Jack F. Conn

(School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota
USA)

H. HEYER

September 6, 1988

Potential Theory on a hypergroup

Hypergroups are locally compact spaces with group-like structures on which the bounded measures convolve in a similar way to that on a locally compact group. Important examples of hypergroups are double coset spaces and duals of compact groups; also the sets $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$ of nonnegative integers and reals respectively, the unit interval I and the unit disk D, but with operations different from the usual group operations in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ and the complex numbers $\mathbb{C}$ respectively. In fact a hypergroup K can be viewed as a probabilistic group in the sense that to each pair $x, y \in K$ there is a probability measure $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ on K with compact support, not necessarily equal to the Dirac measure $\varepsilon_{x \cdot y}$ for a composition $x \cdot y$ in K, such that $(x,y) \to \mathrm{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ is a continuous mapping from $K \times K$ into the space $\mathfrak{K}(K)$ of compact subsets of K. The convolution $*$ extends to all bounded measures on K and shifts the algebraic-topological analysis from K to the generalized measure algebra $\mathfrak{M}^b(K)$ of K.
In the talk to be given we will restrict ourselves to commutative hypergroups which admit a Haar measure and the usual "Abelian" harmonic analysis.
The speaker plans to give a survey of recent results mainly published by himself together with Professor W.R. Bloom from Murdoch University, Perth (Western Australia), on the transience of continuous convolution semigroups on K which correspond to space (and time-) homogeneous Markov processes taking

values in K. It turns out that on a large class of commutative hypergroups all adapted convolution semigroups are necessarily transient, and that the potential kernels of transient convolution semigroups are exactly the perfect kernels in the sense of J. Deny (generalized to hypergroups)

Recent reference:

W. R. Bloom, H. Heyer: Characterization of potential kernels of transient convolution semigroups on a commutative hypergroup.
To appear in: Proceedings of the Conference "Probability Measures on Groups IX" Springer Lecture Notes in Math. 1989

複素2進展開とフラクタル

伊藤 俊次（津田塾大学）

$\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$，$m=1,2,\cdots$ を虚2次体の整数とする。
$\alpha\in\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$，$\mathcal{D}=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_{N-1}\}$，$\alpha_i\in\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$ の pair $(\alpha,\mathcal{D})$ が number system であるとは 次のように定義する。

$\forall z\in\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$ に対して $\exists a_k\in\mathcal{D}$ $(0\leq k\leq n)$

$$: \quad z=\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k$$

ここで N とは α の ..

例えば $\mathbb{Z}(i)$ において，$\alpha=-1+i$，$\mathcal{D}=\{0,1\}$ とするとき，$(\alpha,\mathcal{D})$ は number system である，すなわち任意の Gauss 整数 $z\in\mathbb{Z}(i)$ は

$$z=\sum_{k=0}^{n}a_k(-1+i)^k \qquad a_k\in\{0,1\}$$

と表わすことが出来る，ことが知られている。
この講義では 次の結果を紹介することが目的である。

命題1　$\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$ を虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の整数とし，
$\alpha\in\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$，$\mathcal{D}=\{0,1,2,\ldots,N(\alpha)-1\}$ を考える。
このとき $(\alpha,\mathcal{D})$ が number system である必要十分条件は

(1)　$-m\equiv 2,3 \pmod{4}$ のとき

$$\alpha=-n\pm\sqrt{-m} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

（但し，$m=1$ のときは $n=1,2,\cdots$）

(2)　$-m\equiv 1 \pmod{4}$ のとき

$$\alpha=\frac{-2n+1\pm\sqrt{-m}}{2} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

（但し，$m=3$ のときは $n=1,2,\cdots$）

命題2　$(\alpha,\mathcal{D})$ は命題1 の条件をみたすとする。X_α を

$$X_\alpha:=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k\alpha^{-k} \;\middle|\; a_k\in\mathcal{D}\right\}$$

とする。このとき X_α は次の性質をみたす。

(1) space tiling property : $\displaystyle\bigcup_{z\in\mathbb{Z}(\sqrt{-m})}(X_\alpha+z)=\mathbb{C}$ (複素平面)

$$\mathrm{int.}(X_\alpha+z)\cap\mathrm{int.}(X_\alpha+z')=\phi \qquad (z\neq z')$$

(2) self similarity :

$$\alpha\cdot X_\alpha=\bigcup_{k=0}^{N-1}(X_\alpha+k)$$

(3) $\mathrm{int.}\,X_\alpha\ni 0$

(4) $$\dim_H\partial X_\alpha=\frac{2\log\lambda_n}{\log N(\alpha)}$$

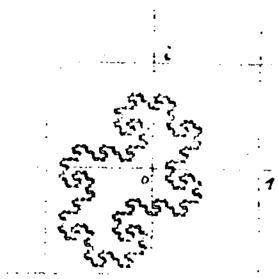
ここで λ_n は次の3次方程式の最大実根

$\lambda^3-(2n-1)\lambda^2-(N-2n)\lambda-N=0$ if $-m\equiv 2,3 \pmod 4$, $n=1,2,\ldots$

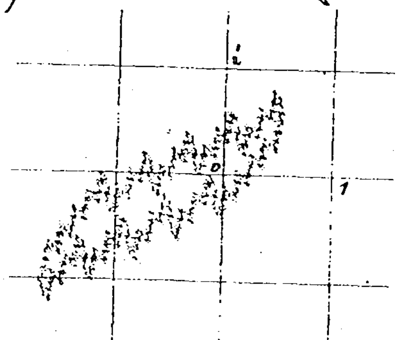
$\lambda^3-(2n-2)\lambda^2-(N-2n+1)\lambda-N=0$ if $-m\equiv 1 \pmod 4$, $n=1,2,\ldots$

$\lambda^3-(N-1)\lambda-N=0$ if $-m\equiv 1 \pmod 4$ and $n=0$

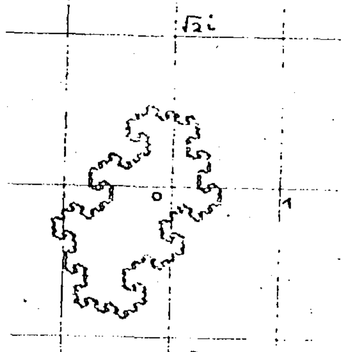
X_α の boundary は下のような fractal となる。(詳しくは. Tokyo. Journal をみよ.)



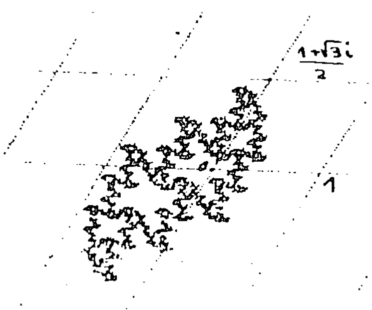
$\alpha=-1+i$



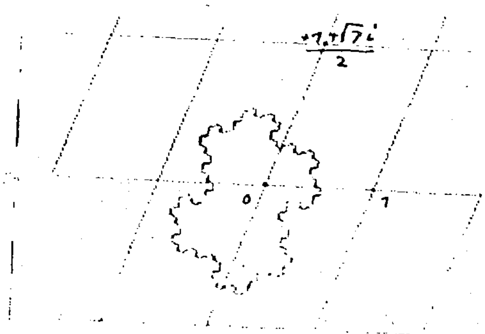
$\alpha=-2+i$



$\alpha=-1+\sqrt{2}i$



$\alpha=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$



$\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

北大談話会 1988.9.14

多変数のGalois表現について

この話では 総実代数体 F と奇素数 $p>2$ を固定して話を進める. Fが1度与えられると次の3つの研究対象が得られる:

① S_k : 重さが k の正則な保型形式の空間
ただし ここでは S_k は代数群 $GL(2)/_F$ の p巾 level の cusp form のなす空間で, $\mathbb{Q}$上代数的な Fourier係数をもつもの全体のこととする. $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$の中で $\mathbb{Q}$上代数的な数全体のなす体とすると S_k は $\overline{\mathbb{Q}}$上無限次元の vector空間である.

② $\overline{S}$: p-進保型形式の全体 $=$ S_k の p-進完備化 (kに依存しない).

③ h : p-進 Hecke algebra $=$ $\mathrm{End}(\overline{S})$ の subalgebra で位相的に Hecke作用素 $T(n)$ で生成されるもの.
(あとで h の定義は詳しく述べる)

ここで hは pro-artinian ring; すなわち, $\mathbb{Z}_p$上の Artin環 ($=$ $\mathbb{Z}_p$-algebra で元の数が有限なもの) の射影的極限と表わされて とくに Compact環である. わかりやすい $\mathbb{Z}_p$上の pro-Artin環の例としては $\mathbb{Z}_p$の有限拡大や 巾級数環 $\mathbb{Z}_p[[X_1,\dots,X_s]]$ 等がある. 次の定理が h と Galois表現との関係の原理を与える:

Principle-Theorem : A を $\mathbb{Z}_p$上の pro-artinian integral domain とし Kをその商体とする. 連続な$\mathbb{Z}_p$-algebraの準同型 $\lambda : h \to A$ が与えられれば, このλに対応して連続な Galois表現

$$\pi(\lambda) : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F) \longrightarrow GL_2(K)$$

が一意的に存在して次をみたす.

(i) $\pi(\lambda)$は完全可約 (semi-simple) でかつ pの外で不分岐

(ii) $\sigma_{\mathfrak{q}}$ を $\mathfrak{q}\nmid p$ なる Fの素ideal $\mathfrak{q}$ に対する Frobenius置換とすると

$$\det(1-\pi(\lambda)(\sigma_{\mathfrak{q}})X) = 1 - \lambda(T(\mathfrak{q}))X + \lambda(\langle \mathfrak{q}\rangle)X^2$$

が成り立つ. ここで $\langle \mathfrak{q}\rangle$ は diamond operator と呼ばれ Hecke作用素で表わせば $\langle \mathfrak{q}\rangle = T(\mathfrak{q})^2 - T(\mathfrak{q}^2)$ である.

$\mathbb{C} \supset \overline{\mathbb{Q}} \supset \overline{\mathcal{O}} \supset \overline{\mathfrak{q}}$

$F \supset \mathcal{O} \supset \mathfrak{q}$

ここで 不分岐性について少し解説を加える. $\overline{\mathbb{Q}}$ の中での整数環（$\mathbb{Z}$ 上 monic な多項式の根全体）を $\overline{\mathcal{O}}$ とかき F の整数環を $\mathcal{O}$ とかく. $\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ が $\overline{\mathcal{O}}$ の素 ideal $\overline{\mathfrak{q}}$ について

$\overline{\mathfrak{q}}^{\sigma} = \overline{\mathfrak{q}}$ かつ $x \in \overline{\mathcal{O}}$ について $x^{\sigma} \bmod \overline{\mathfrak{q}} = x^{N(\mathfrak{q})} \bmod \overline{\mathfrak{q}}$

をみたすとき $\overline{\mathfrak{q}}$ の Frobenius 置換という. ここで $\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{q}} \cap \mathcal{O}$ で $N(\mathfrak{q}) = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{q})$ である. σ は $\overline{\mathfrak{q}}$ について一意的に定まる訳ではない. 実際 定義から明らかな如く $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の部分群, これは惰性群と呼ばれる, を

$$I_{\overline{\mathfrak{q}}} = I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F) \mid \overline{\mathfrak{q}}^{\sigma} = \overline{\mathfrak{q}} \text{ かつ すべての } x \in \overline{\mathcal{O}} \text{ について } x \equiv x^{\sigma} \bmod \overline{\mathfrak{q}}\}$$

で定義すると $\overline{\mathfrak{q}}$ の Frobenius 置換全体は 1つの $I_{\overline{\mathfrak{q}}}$ の coset である. $I_{\overline{\mathfrak{q}}}$ の共役類は $\mathfrak{q}$ で定まるので $I_{\mathfrak{q}}$ ともかき $\mathfrak{q}$ の惰性群と呼ばれる. $\pi : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to GL_2(K)$ を表現とするとき, $\overline{\mathfrak{q}} \nmid p$ なる $\overline{\mathcal{O}}$ の素 ideal $\overline{\mathfrak{q}}$ どれを取っても その Frobenius 置換 σ について $\pi(\sigma)$ の共役類が $\mathfrak{q} = \mathcal{O} \cap \overline{\mathfrak{q}}$ のみに依存して定まるとき π を p の外で不分岐という. (これは $Ker(\pi) \supset I_{\overline{\mathfrak{q}}}$ と同値である). π が p の外で不分岐ならば Frobenius 置換の全体の π による像は $Im(\pi)$ の中で dense であることが知られており, $\pi(\lambda)$ の連続性と (iii) の条件により $\pi(\lambda)$ は一意的に定まる.

さて $f \in S_k$ がすべての $T(n)$ の同時固有関数ならば algebra の準同型 $\lambda : \mathfrak{h} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $f|h = \lambda(h) f$ で定めることが出来る. この λ の像は $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大, すなわち, pro-artinian ring に入ることが知られており Th. により f に伴う Galois 表現 $\pi(f)$ を得る. このような cusp form に対応する Galois 表現の研究には歴史がある. これは志村先生に始まる研究で 太田 及び Tunnel - Rogawski が

$[F : \mathbb{Q}]$ が奇数なら $\pi(f)$ の全部

$[F : \mathbb{Q}]$ が偶数なら $\pi(f)$ の大半を 構成した.

逆に言えば $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数なら 同時固有関数から いつでも Galois表現が作れる訳ではなく <u>missing representation</u> があった訳である. ところが最近 Wiles と その弟子 Taylor によって この missing representation の構成法が見つかった. 我々の定理の証明は これらの人々 とくに Wiles に負う所が大きい.

この定理より A を $\mathbb{Q}_p$ とか その代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ とすると

$$\mathrm{Spec}(h)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p\text{-alg}}(h, A) + \text{代数幾何的位相}$$

なる空間を考えて 幾何的に見ると, 各点 $P \in \mathrm{Spec}(h)$ に Galois表現 $\pi(P)$ が対応する. P を動かすと $\pi(P)$ はそれに応じて deform (変形) する訳である. これより P を通る $\mathrm{Spec}(h)$ の連結成分から $\pi(P)$ の (Mazur によって存在の証明された) universal deformation space への scheme の写像が得られる:

この写像が全射かどうかは 1つの重要な問題である.

これらのことから h の構造の研究は それなりの意味がある. 例えば $h \to \mathbb{Z}_p[[X_1,\dots,X_s]]$ なる algebra の全射準同型 をみつければ 自動的に 多変数の Galois表現 $\pi(\lambda): \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to GL_2(\mathbb{Z}_p[[X_1,\dots,X_s]])$ を得る訳である. F が $\mathbb{Q}$ の真の拡大体だと cusp form の weight k は F の $\overline{\mathbb{Q}}$ への埋め込みによって parametrize された正の整数の組である: $k=(k_\sigma)_{\sigma\in I}$ で $I=\{F\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}\}$ である. $k_\sigma \neq k_\tau$ のとき k を multiple, すべての σ について $k_\sigma = k_0$ のとき k を parallel weight と呼ぶ. multiple weight の cusp form の存在が $[F:\mathbb{Q}]$ を大きくするに従って h を非常に大きくする. h 全体の構造を決定するのは難しいから その易しい部分を見つけ出し それを研究しよう. この易しい部分は nearly ordinary part と呼ばれる.

Nearly Ordinary part の定義は algebraic なものと analytic なものと2つあり analytic なものの方が見かけは強い条件である. まず algebraic なものについて述べる. $\lambda : h \to A$ に対応する Galois 表現 $\pi(\lambda)$ が nearly ordinary であるとは p を割る $\mathcal{O}$ の素 ideal $\mathfrak{P}$ どれを取っても, $\pi(\lambda)$ の $\mathfrak{P}$ の惰性群 $I_{\mathfrak{P}}$ への制限が可約であること, すなわち適当な $\pi(\lambda)$ の共役を取れば $\pi(\lambda)(I_{\mathfrak{P}}) \subset \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ となることとして定義する. このとき代数的 nearly ordinary part h_0 は

$$h_0 = h \Big/ \bigcap_{\pi(\lambda):\,n.ord} \mathrm{Ker}(\lambda)$$

で定義される. 後で述べる解析的定義の方が(見かけは)強く この2番目の定義による nearly ordinary part $h^{n.ord}$ は h_0 の剰余環である. 解析的定義はあと回しにして $h^{n.ord}$ の構造について結果を述べる:

Theorem $d = [F:\mathbb{Q}]$ とおくと

① ある整数 s で $d+1 \leq s < 2d$ をみたすものがあって h は $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[X_1, X_2, \cdots, X_s]]$ 上の algebra である.

② $h^{n.ord}$ は reduced, すなわち nil radical をもたない

③ $h^{n.ord}$ は Λ 上 torsion-free でかつ階数有限である.

(④ (F,p) に関する Leopoldt conj. が正しければ $s = d+1$ である.)

この定理により $h^{n.ord}$ は大体 Λ あるいはその有限次拡大の積である. これによって $\lambda : h^{n.ord} \to \Lambda$ あるいはその有限次拡大への全射準同型を多く得ることが出来, 多変数の Galois 表現を構成することが出来る.

さて $h^{n.ord}$ と h の定義を述べよう, F の cusp form の weight は $(k_\sigma)_{\sigma \in I}$ だったから $k = \sum_\sigma k_\sigma \sigma$ とおくことによって I で $\mathbb{Z}$ 上生成される

+は det >>0 の元

自由加群 $\mathbb{Z}[I]=\sum_{\sigma\in I}\mathbb{Z}\sigma$ のことも考えられる。実際は次の保型因子に対応する2析のweight (k,v) を考える:

$$j_{k,v}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, z\right)=\prod_{\sigma\in I}\left(\det(\gamma^\sigma)^{v_\sigma-1}\right)(c^\sigma z_\sigma+d^\sigma)^{k_\sigma}$$

ここで $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(F)$ で (複素)上半面 H について $z=(z_\sigma)_{\sigma\in I}\in H^I$ である。
Γ が $GL_2^+(\mathcal{O})$ の合同部分群であれば $f\in S_{k,v}(\Gamma)$ は次の不変性をみたす H^I 上の正則関数である:

$$f(\gamma(z))=f(z)\,j_{k,v}(\gamma,z)\qquad \gamma\in\Gamma,$$ + 尖点条件

ここで行列式が totally positive な $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ は
$(z_\sigma)\mapsto\left(\frac{a^\sigma z_\sigma+b^\sigma}{c^\sigma z_\sigma+d^\sigma}\right)_\sigma$ で H^I に作用する。
とくに F の単数 $\varepsilon\in\Gamma\cap F^\times$ は H^I に trivial に作用する。
これより $f(z)=f(\varepsilon(z))=f(z)\,j_{k,v}(\varepsilon,z)$ で $f(z)\neq0$ であるためには

$$j_{k,v}(\varepsilon,z)=\prod_\sigma(\varepsilon^\sigma)^{k_\sigma+2v_\sigma-2}=\varepsilon^{k+2v-2t}=1$$

でなければならぬ。ここで $t=\sum_\sigma\sigma$ である。このことから実際考えられる weight は

$$\mathcal{W}=\{(k,v)\in\mathbb{Z}[I]\times\mathbb{Z}[I]\mid k+2v\in\mathbb{Z}\cdot t\}$$

のえたけである。かんたんに $\mathrm{rank}\,\mathcal{W}=d+1$ がわかり これが実際 h の変数の数を与える。

Hecke 作用素を考えるには adele 化した modular form を考えなければならない。$\mathcal{O}_q$ で $\mathcal{O}$ の q-進完備化とするとき F の adele 環 $F_\mathbb{A}$ は

$$F_\mathbb{A}=F+\overbrace{\prod_q\mathcal{O}_q}^{\hat{\mathcal{O}}}\times\prod_{\sigma\in I}\mathbb{R}\subset\prod_q F_q\times\prod_{\sigma\in I}\mathbb{R}=X$$

である。ここで F の元は X に $(a\cdots a,(a^\sigma)_{\sigma\in I})$ として対角に埋め込まれている。とくに $F_\mathbb{A}=F_f\times\underbrace{\prod_{\sigma\in I}\mathbb{R}}_{F_\infty}$ である。さて $GL_2(F_f)$ の部分群を

$$\begin{cases}U_0(p^r)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\hat{\mathcal{O}})\;\middle|\; c\equiv0 \bmod p^r\right\},\\ U_1(p^r)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U_0(p^r)\;\middle|\; a\equiv d\equiv1 \bmod p^r\right\}.\end{cases}$$

とおくとき $GL_2(F_\mathbb{A})$ 上の modular form とは 左から $GL_2(F)$-不変 ($GL_2(F_\mathbb{A})$ 上の関数で)

対して 右から $U(p^r)$-不変なものである. すなわち $f: GL_2(F_A) \to \mathbb{C}$

で $\alpha \in GL_2(F)$ $u=(u_f,u_\infty)\in U(p^r)\times \underbrace{\prod_\sigma \mathbb{R}^\times SO(2,\mathbb{R})}_{C}$

について (1.2) $f(\alpha x u) = f(x)\, j_{k,v}(u_\infty, z_0)^{-1}$ $(z_0=(\sqrt{-1},\dots,\sqrt{-1}))$

をみたす. $S_{k,v}(U(p^r))$ の元は これに加えて 正則性条件と 尖点条件 をみたすが これは 技術的なので 触れずにおく.

$$GL_2^+(F_\infty)/C \cong H^I \qquad g \longmapsto g(z_0)$$

だから $f\in S_{k,v}(U(p^r))$ は

本質的に $\underbrace{GL_2(F)\backslash GL_2(F_f)/U(p^r)}_{\text{有限集合}} \times H^I$ 上の関数である

ここで $GL_2(F)\backslash GL_2(F_f)/U(p^r)$ の代表系を $\{x_i\}_i$ とすると

$\Gamma_i = x_i U(p^r) x_i^{-1}\cap GL_2^+(F)$ について

$$\boxed{S_{k,v}(U(p^r)) \cong \bigoplus_i S_{k,v}(\Gamma_i)}$$

$$f \longmapsto \hat f(z) = f\left(x_i\begin{pmatrix} y & x\\ 0&1\end{pmatrix}\right) y^{v-t} \qquad z=x+iy.$$

である. さて $y\in GL_2(F_f)$ について $UyU=\coprod_i y_i U$ $(U=U(p^r))$ と分解して

$f|T(y)(x)=\sum_i f(xy_i)$ とおけば

$T(y)\in \mathrm{End}(S_{k,v}(U(p^r)))$ である. とくに $T\left(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ を $T(p)$ とかく.

ここで Hecke algebra $h_{k,v}(p^r;\mathbb{Z})$ は $\mathrm{End}(S_{k,v}(U(p^r)))$ の subalgebra で $\mathbb{Z}$ 上 $T(y)$ $\left(y\in M_2(\hat{O})\cap GL_2(F_f),\ y\equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod p^r\right)$ unit

と $p^{-v}T(p)$ で生成されるものである. 次の事実が知られている.

(i) $h_{k,v}(p^r;\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$ 上階数有限かつ可換である ($T(p)$の固有値は p^vで割れ

(ii) $T: U_0(p^r)/U(p^r) \to h_{k,v}(p^r;\mathbb{Z})$ は 群の character である.

$$y \longmapsto T(y)$$

定義より $U_0(p^r)/U(p^r)\cong (O/p^rO)^\times \times (O/p^rO)^\times$ で

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\longmapsto (a,\ d)$$

対角写像で $O^\times$ を $U_0(p^r)/U(p^r)$ の部分群の上へ移すことが出来る.

このとき $\varepsilon\in O^\times$ なら $T(\varepsilon)=1$ である.

(iii) $r > s$ なる $h_{k,v}(p^r; \mathbb{Z}) \to h_{k,v}(p^s; \mathbb{Z})$ なる algebra の準同型で $T(y)$ を $T(y)$ に移すものがある.

(ii) より $h_{k,v}(p^r; \mathbb{Z})$ は 群環 $\mathbb{Z}[((\mathcal{O}/p^r\mathcal{O})^\times)^2/\mathcal{O}^\times]$ 上の algebra である. そこで $h_{k,v}(p^r; \mathbb{Z}_p) = h_{k,v}(p^r; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ とおき (iii) の map で 射影的極限を取れば 結果は (k, v) と独立で

$$h = \varprojlim_r h_{k,v}(p^r; \mathbb{Z}_p)$$

が Hecke algebra の定義である. h は自然に

$$A = \varprojlim_r \mathbb{Z}_p[((\mathcal{O}/p^r\mathcal{O})^\times)^2/\mathcal{O}^\times]$$

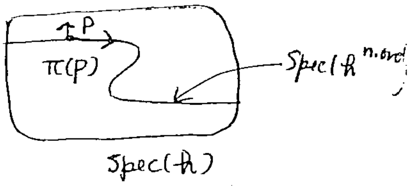
上の algebra であるが A が自然に $\mathbb{Z}_p[[X_1, \cdots, X_s]]$ なる algebra を含むことを見るのは容易である. 最後に h の ideal $\mathfrak{a}$ が nearly ordinary ということを $p^{-v}T(p) \in (h/\mathfrak{a})^\times$ で定義する. このとき

$$h^{n.ord} = h \Big/ \bigcap_{\mathfrak{a}:n.ord} \mathfrak{a}$$

として定義される

Theorem. もし $\lambda : h^{n.ord} \to A$ が algebra の準同型なら $\pi(\lambda)$ は nearly ordinary である.

このことから $h_0 \twoheadrightarrow h^{n.ord}$ の全射性が出る. これを幾何的に見れば 右図で P を $\mathrm{Spec}(h^{n.ord})$ 上で動かせば nearly ordinarity を保ち $\mathrm{Spec}(h^{n.ord})$ の法線方向に動かせば nearly ordinarity をこわすのではないかと思はれている.



$F = \mathbb{Q}$ のときは Weight 12 の Ramanujan の Δ-関数があり これの $T(p)$ に関する固有値が $11 \leqq p < 19000$ かつ $p \neq 2411$ ならば $\mathbb{Z}_p^\times$ に入ることが 前田芳孝氏の計算で知られており このとき $h^{n.ord} \neq 0$ である. $F/\mathbb{Q}$ が可解拡大なら 土井-長沼-Langlands の base change の理論で $h^{n.ord}_{/F} \to h^{n.ord}_{/\mathbb{Q}}$ なる全射準同型が作れるので 同じ条件下で $h^{n.ord} \neq 0$ である. $F/\mathbb{Q}$ が non-solvable 拡大のとき $h^{n.ord} \neq 0$ なる例は知られていない.

直交群の量子化

筑波大学数学系　竹内光弘

$n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ の成分で生成された，体 k 上の free algebra $k\langle X\rangle$ を考え，これに

$$\Delta x_{ij} = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \otimes x_{sj}, \quad \varepsilon x_{ij} = \delta_{ij}$$

により bialgebra の構造を入れる．

$n^2 \times n^2$ 行列 $X^{(2)}$ を $(x_{ik} x_{jl})_{(ij)(kl)}$ とする．一般に，k 係数 $n^2 \times n^2$ 行列 T に対し relation

$$(R_T) \qquad X^{(2)} T = T X^{(2)}$$

は $k\langle X\rangle$ の quotient bialgebra $k\langle X\rangle/(R_T)$ を定める．たとえば

$$T = \sum_{i,j} E_{(ij)(ji)}$$

に対しては，$k\langle X\rangle/(R_T) = k[\{x_{ij}\}]$（多項式環）であり，これに $d = \det X$ の逆元 d^{-1} を添加することにより，$GL(n)$ のホップ代数がえられる．同じ T ともう一つてきとうな $n^2 \times n^2$ 行列 E（k 係数）をとり，$k\langle X\rangle/(R_T, R_E)$ を同様にホップ化したものから $O(n)$, $Sp(n)$ のホップ代数がえられることも分る．このことに着目して T（と E）を"量子化"したものから同様のプロセスを経て，$GL(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$ などを"量子化"することを考える．

<u>A型</u>　$q \neq 0 \in k$ をとる．

$$T_q^A = q\sum_i E_{(ii)(ii)} + \sum_{i\neq j} E_{(ij)(ji)} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{(ji)(ji)}$$

に対し $M_q^A(n) = k\langle X\rangle/(R_{T_q^A})$ とおく. ある central group-like $d_q^A \in M_q^A(n)$ （A型 q-行列式）が存在して, $M_q^A(n)[(d_q^A)^{-1}]$ は ホップ代数になる. これが $GL_q^A(n)$ （A型の量子化）を定める.

<u>B型</u> $q^{\frac{1}{2}} \neq 0 \in k$ をとる. $n = 2m+1$ とし, $1 \leq i \leq n$ に対し

$i' = n+1-i$, $\bar{i} = i + \frac{1}{2}\ (i < m+1),\ i\ (i = m+1),\ i - \frac{1}{2}\ (i > m+1)$

とおく.

$$T_q^B = q\sum_{i\neq i'} E_{(ii)(ii)} + \sum_{i\neq j, j'} E_{(ij)(ji)} + (q-q^{-1})\sum_{\substack{i<j \\ i\neq j'}} E_{(ji)(ji)} + \sum_{i'\leq k} a_{ik} E_{(ii')(kk')}$$

$$\left(\text{ここで}\quad a_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k = m+1 \\ q^{-1} & i \neq i' = k \\ (q-q^{-1})(\delta_{ik} - q^{\bar{i}-\bar{k}}) & i' < k \end{cases} \right)$$

とおくと $E_q^B = \frac{1}{q^2-1}(T_q - q)(T_q + q^{-1})$ は rk 1 の行列になる.

$M_q^B(n) = k\langle X\rangle/(R_{T_q^B}, R_{E_q^B})$ とおく.

<u>Thm</u> $\exists\, r \in M_q^B(n)$ central group-like s.t. $X\tilde{X} = \tilde{X}X = rE$.

ここで $$\tilde{X} = (q^{\bar{j}-\bar{i}} x_{j'i'}).$$

そして $M_q^B(n)[r^{-1}]$ はホップ代数になる.

quotient Hopf alg. $M_q^B(n)/(r-1)$ のあらわす量子群を $O_q(n)$ とおき,

これを直交群 $O(n)$ の量子化と考える．($q=1$ のときは $O(n)$ に一致する)．

一方で $GL_q^A(n)$ は，T_q^A の固有空間 ($q, -q^{-1}$ に対応し2つある) の定める2次代数から，<u>end</u> をとることによっても構成できる．
T_q^B は3つの固有空間 ($q, -q^{-1}, q^{1-n}$) をもつので，q と q^{1-n} の固有空間をまとめて2つにすれば，同様のプロセスで $GL(n)$ の B型量子化 $GL_q^B(n)$ がえられる．(ただし q-行列式の centrality は $n=3,5$ のときのみ分る．一般に OK と思われる)．$O_q(n)$ は $GL_q^B(n)$ の部分量子群である．
同様に，C型，D型の T_q^C，T_q^D からそれぞれ $Sp(n)$，$O(n)$ (ともに $n=2m$) の量子化 $Sp_q(n)$，$O_q(n)$ がえられ，これらはそれぞれ $GL_q^C(n)$，$GL_q^D(n)$ の部分量子群である．

小平消滅定理と群作用　　1988. 9. 27

服部晶夫（東大・理）

なんらかの意味で"曲率が正"という状況と，"コンパクトな連続群の作用が存在する"という状況との間には，漠然とした類似がある。

例えば，コンパクトなスピン多様体 M に対して次の定理が成りたつ。

定理(Lichnerowicz)　到る所スカラー曲率が正となるリーマン計量が存在すれば，M の $\hat{A}$-種数 $\hat{A}(M)$ は零である。

定理(Atiyah-Hirzebruch)　M が自明でない S^1 の作用を許容すれば，$\hat{A}(M)=0$ である。

しかも，この場合，次の定理は両者の間の関連を示唆している。

定理（Lawson-Yau）　M が非アーベルなコンパクト連結リー群の作用を許容すれば，M は到る所スカラー曲率が正となるリーマン計量を許容する。

上のような類似に対する状況証拠は他にも指摘することができる。一例として，ここでは小平消滅定理をとりあげてみたい。

複素幾何学では，Riemann-Roch 定理と小平消滅定理が二つの強力な道具であることは論をまたない。群作用の立場からみると，Riemann-Roch は Atiyah-Singer の G 指数定理という対応物をもつ。しかし，小平消滅定理にはそのような対応物はない。定理の前提に"複素線束の正値性"という概念があり，これを一般化することは不可能であろう。

定理（小平）　M をコンパクト複素多様体，ξ を"正値"複素線束とする。そのとき，

$$H^q(M;\Omega^n(\xi))=0 \qquad q>0$$

が成りたつ。ここで $n=\dim M$.

一般に，群 G が M と複素ベクトル束 V に作用しているとき，G は $H^q(M;\Omega^n(V))$ にも作用し，Euler 指標

$$\chi(M;\Omega^n(V)) = \sum(-1)^q H^q(M;\Omega^n(V))$$

は群の指標環 $R(G)$ の元（virtual character）に成る。今考えている場合には，小平消滅定理により，

$$\chi(M;\Omega^n(\xi)) = H^0(M;\Omega^n(\xi))$$

は単なる virtual character でなく，真の表現（honest character）である。

一方，Atiyah-Singer により $\chi(M;\Omega^n(\xi))$ は M 上のある楕円複体の指数として把えられる。したがって，ξ の正値性が意味をもつ場合には，小平消滅定理の類似を定式化することができる。

非常に限られた場合ではあるが，上のような定式化を予想として提出し，いくつかの場合にその予想が正しいことを示すのが，この話の目的である。

Fractional Dimension and Homoclinic Bifurcations

J.Palis — I.M.P.A. , Brasil

One of the most important concept in Dynamics is that of homoclinic orbits. If they are transversal, then by Birkhoff(1935), they must be accumulated by periodic orbits and by Smale(1965), they are part of a hyperbolic set. Poincaré, who introduced the concept late last century, expressed his amazement about the richness, in terms of dynamics, of such phenomenon.

By 1975, I started examining, with Newhouse, the creation and unfolding of homoclinic tangencies(new homoclinic orbits), and in more recent results with Takens(Annals of Math. 1987) we introduced the notion of fractional dimensions in this context.

THEOREM. *(Palis–Takens) Let f_μ be a 1–parameter family of surface diffeomorphisms such for $\mu = 0$ we have a homoclinic tangency x associated to a basic hyperbolic set Λ, and suppose the tangency is quadratic and unfolds generically. Let $\mathcal{U}_\mu$ be a neighborhood of the orbit of x and Λ and let*

$$H_\delta = \{\mu \in [-\delta, \delta];\text{ the maximal invariant set for } f_\mu \text{ in } \mathcal{U}_\mu \text{ is hyperbolic}\}.$$

Then if $HD^s(\Lambda) + HD^u(\Lambda) < 1$, then $\lim_{\delta\to 0} \dfrac{m(H_\delta)}{\delta} = 1$.

Here m denotes Lebesgue measure and $HD^s(\Lambda)$, $HD^u(\Lambda)$ the Hausdorff dimensions of the stable, unstable foliations of Λ.

THEOREM. *(Palis–Yoccoz, in preparation) Same as previous theorem but now $HD^s(\Lambda) + HD^u(\Lambda) > 1$. Then, for most families f_μ, $\liminf_{\delta\to 0} \dfrac{m(H_\delta)}{\delta} < 1$!*

Thus, much of the dynamics of f_μ near Λ and the orbit of x, for μ small, is determined by the Hausdorff dimension of Λ.

Questions inspired by the above theorems:

1) Is limsup smaller than one in the second theorem, and for most families f_μ ?
2) For affine Cantor sets A and B in the line, is it true that $A - B$ either has measure zero or contains intervals ?
3) Same for regular Cantor sets.

— October 11, 1988 —

自由ホモトピー類集合の初等的性質

63.10.26　菅原正博（広島大理）

位相空間 X, Y に対して，X から Y への連続写像の自由ホモトピー類の集合を $[X, Y]$ とかく。

定理　$f: X \to Y$ を連続写像とし，$N \geq 1$ とするとき，次の条件は互に同値となる。

(1) 任意の $x \in X$ に対して，準同形写像（$n=0$ のときは単なる写像）

$$f_x : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$

は $n < N$ のとき全単射で，$n = N$ のとき全射。

(2) 任意の CW-複体 K に対して写像

$$f_* : [K, X] \to [K, Y]$$

は $\dim K < N$ のとき全単射で，$n = N$ のとき全射。

(3) $K = *$ または S^n $(n \geq 1)$ に対して (2) が成立ち，$K = \vee_{\lambda \in \Lambda} S^N_\lambda$ ($S^N_\lambda \cong S^N$, Λ は任意の集合) に対して f_* が全射。

基点に関するホモトピー類集合については，K を有限CW複体として条件の同値がいえるが，自由ホモトピー類の場合には，K を有限CW複体に制限しては対応する条件の同値がいえない。反例が Eilenberg-Mac Lane 複体を使って構成できる。

（鈴木治夫 記）

1988年10月26日

Brauer対応とGlauberman対応

帝塚山大学
永尾汎

§1 Glauberman対応

群Aが群Gに作用しているとき

$$C_G(A)=\{g\in G \mid g^\alpha=g\ (\forall\alpha\in A)\}$$

とおく。

(以下群はすべて有限群とする。)

このときAはGの($\mathbb{C}$上の)既約指標の集合$\mathrm{Irr}(G)$に作用する；$\chi^\alpha(g):=\chi(g^{\alpha^{-1}})$ ($\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\alpha\in A$)。

A-不変な既約指標の全体を$\mathrm{Irr}_A(G)$と表す。

このときGlaubermanは次のことを示した。

定理1 (Glauberman: Can. J. Math. 20 (1968))

$(|A|,|G|)=1$ かつ A が solvable ならば、

自然な全単射

$$\pi=\pi(G,A):\mathrm{Irr}_A(G)\longrightarrow \mathrm{Irr}(C_G(A))$$

が一意的に定まる。

上の定理でAがnon-solvableと仮定すると、Feit-Thompsonの定理から$|A|$はeven, したがって$|G|$はoddとなる。この場合Isaacsは次を示した。

定理2 (Isaacs)

$(|A|,|G|)=1$, かつ$|G|$がoddのとき、全単射

$$\pi(G,A):\mathrm{Irr}_A(G)\longrightarrow \mathrm{Irr}(C_G(A))$$

が一意的に定まる。

上の二定理で重複する場合，すなわち$(|A|,|G|)=1$でAがsolvableかつ$|G|$がoddのとき，2つの対応は一致することをWolfが示して，$(|A|,|G|)=1$の場合，$\mathrm{Irr}_A(G)$と$\mathrm{Irr}(C_G(A))$の関係は完全に明らかになった。

定理1でAがcyclicまたはp-群のとき，対応πは次の

ようになっている。

(1) $A=\langle\sigma\rangle$ のとき：$\tilde{G}=G\rtimes A$（半直積）とすれば $Irr_A(G)\ni\chi$ は $\tilde{G}$ の既約指標 $\tilde{\chi}$ に拡張される。このとき $Irr(C_G(A))\ni\zeta$ と $\varepsilon=\pm1$ が定まって

$$\tilde{\chi}(c\sigma)=\varepsilon\zeta(c)\qquad(\forall c\in C_G(A))$$

となり，$\chi^\pi=\zeta$ となる。

(2) A が p-群のとき：$Irr_A(G)\ni\chi$ に対し $\chi^\pi=\zeta\in Irr(C_G(A))$ は $\chi|_{C_G(A)}$ の既約成分のうち 重複度 $(\chi,\zeta)_{C_G(A)}=(\chi,\zeta^G)_G$ が p と素な唯一の成分である。

§2 $(|A|,|G|)=1$ と仮定しないときの拡張

(1) $A=\langle\sigma\rangle$ のとき（松山：Jap. J. Math. 9 (1983)）

$\pi: Irr_A(G)\longrightarrow Irr(C_G(A))$（全単射）

があって，$Irr_A(G)\ni\chi$ の $\tilde{G}$ への拡張を $\tilde{\chi}$ とするとき

$$\tilde{\chi}(c\sigma)=\lambda\chi^\pi(c)\qquad(\forall c\in C_G(A)),\quad\lambda\neq0$$

となるとき π を Glauberman 対応とよぶ。このとき

定理3（松山）Glauberman 対応が存在するため必要十分な条件は $\tilde{G}$ における G-coset $G\sigma$ について次が成立することである：$G\sigma=\bigcup_{g\in G}(C_G(\sigma)\sigma)^g$。

(2) A が p-群のとき：このとき Glauberman の対応は Brauer の第1主定理から導かれることを Alperin が指摘した。この考えをもとにして次の結果が得られる。

定理4（永尾(1982)）A が p-群のとき，$\tilde{G}=G\rtimes A$，$Irr(\tilde{G})^0$ は p-defect 0 の既約指標の全体，そのうち A-不変なものの全体を $Irr_A(G)^0$ とかく。また $\tilde{G}$ における G の complements の $\tilde{G}$-共役類の完全代表系を $\mathcal{T}=\{A_1,\cdots,A_r\}$ とするとき，全単射

$$\pi: Irr_A(G)^0\longrightarrow\bigcup_{i=1}^r Irr(C_G(A_i))^0=\mathfrak{I}$$

が存在して，$Irr_A(G)^0\ni\chi$，$\mathfrak{I}\ni\zeta$ に対して

$$\zeta=\chi^\pi\iff(\zeta^G,\chi)_G\not\equiv0\pmod p$$

が成り立つ。

Cayley-Hamilton の定理と Amitsur-Levitzki の恒等式　('88 11/2)

阿賀岡　芳夫（広島大学・総合科学部）

§1．標題にある Cayley-Hamilton の定理を知らぬ人はいないだろうから，まず Amitsur-Levitzki の恒等式について説明しておく．$A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ を $2n$ 個の (n,n)-行列とする．このとき次の式が常に成り立ち，これを Amitsur-Levitzki の恒等式という．（cf. [2]．以下，これを AL の恒等式と略記する．）

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots\cdot A_{\sigma(2n)} = 0$$

ここに，$\mathfrak{S}_{2n}$ は $2n$ 次の対称群で，例えば $n = 1$ ならばこの式は

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0$$

となり，スカラー積の可換性を示す式になる．原論文を調べたわけではないが，Cayley, Hamilton 2人の存命期間からして Cayley-Hamilton の定理は19世紀に見つけられたものに違いない。一方，AL の恒等式が論文として発表されたのはなんと20世紀も半ば1950年のことである．近年これら2つの恒等式を基にいろいろな方向の研究が成されているようであるが，本稿ではこれらを自然にテンソル空間の写像に拡張したものについて簡単に解説し，さらに今後の問題点について述べることにする．

§2．結果を述べる前に，本題から話がずれるようだが恒等式発見の道筋を順にたどり，まずテンソル空間の既約分解の話から入ってゆこう．V を R^n または C^n とし，また V^* をその双対空間とする．すると $V \otimes V^* = Hom(V,V)$ には自然に $GL(V)$ が作用しており，よく知られているようにこの作用によって $V \otimes V^*$ は2つの既約な不変部分空間の和にわかれる．

$$V \otimes V^* = \{ A \in V \otimes V^* \mid \mathrm{Tr}\, A = 0 \} \oplus \langle I \rangle \qquad \text{-------} \quad (1)$$

さらに，次数を上げて $S^p(V \otimes V^*)$（$V \otimes V^*$ の p 階の対称積）の既約分解について同様に考えてみる．つまり，$V \otimes V^*$ 上の p 次同次多項式の空間の $GL(V)$ の作用による既約分解を求めてみよう．具体的な既約分解ではなく，$S^p(V \otimes V^*)$ の指標についてなら，最近いろいろな人達の研究がある (cf. [3], [7], [8] etc)．一般には n の値により指標は変化するが，p に対して n が十分に大きければ結果は stable になり，そのときの指標を表す公式等が知られている．が，ここでは一歩踏み込んで，指標だけではなく具体的な既約分解を求めることについて考えてみる．一般の p に対してこれを実行するのは難しいが，$p = 2$ のときについては次

のようになる．まず，写像 $A_1, \cdots, A_p : V \longrightarrow V$ に対し

$$\begin{cases} A_1 \circ \cdots\cdots \circ A_p : S^p V \longrightarrow S^p V \\ A_1 \wedge \cdots\cdots \wedge A_p : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p V \end{cases}$$

を

$$\begin{cases} (A_1 \circ \cdots\cdots \circ A_p)(v_1 \circ \cdots\cdots \circ v_p) = \dfrac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} A_1 v_{\sigma(1)} \circ \cdots\cdots \circ A_p v_{\sigma(p)} \\ (A_1 \wedge \cdots\cdots \wedge A_p)(v_1 \wedge \cdots\cdots \wedge v_p) = \dfrac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^{\sigma} A_1 v_{\sigma(1)} \wedge \cdots\cdots \wedge A_p v_{\sigma(p)} \end{cases}$$

で定める．ここに $\circ$ ，$\wedge$ はそれぞれ対称積・交代積をあらわす．ただし，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$A_{\sigma(1)} \circ \cdots\cdots \circ A_{\sigma(p)} = A_1 \circ \cdots\cdots \circ A_p$$
$$A_{\sigma(1)} \wedge \cdots\cdots \wedge A_{\sigma(p)} = A_1 \wedge \cdots\cdots \wedge A_p$$

となることに注意しておく．すると，まず $S^2(V \otimes V^*)$ は次の形に分解される．

$$S^2(V \otimes V^*) = S^2 V \otimes S^2 V^* \oplus \wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^*$$

またこの２つの成分は，$A \in V \otimes V^*$ に対してそれぞれ

$$\begin{cases} A \circ A : S^2 V \longrightarrow S^2 V \\ A \wedge A : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 V \end{cases}$$

で与えられることがわかる．つまり，$A \circ A$, $A \wedge A$ を成分表示したときに現れる A の２次式が，上の２つの不変部分空間を成している．これをさらに既約分解するため，先に指標を求めておく．その結果を書くと

$$S^2 V \otimes S^2 V^* : \begin{cases} S_{20^{n-2}-2} + S_{10^{n-2}-1} + S_{0^n} & n \geqq 2 \\ S_0 & n = 1 \end{cases}$$

$$\wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^* : \begin{cases} S_{110^{n-4}-1-1} + S_{10^{n-2}-1} + S_{0^n} & n \geqq 4 \\ S_{10-1} + S_{000} & n = 3 \\ S_{00} & n = 2 \end{cases}$$

ただし，S_λ は分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots\cdot, \lambda_n)$ に対応する Schur 関数で，これ１つで $GL(V)$ の１つの既約成分を表している．例えば先程の分解（1）における２つの既約成分はそれぞれ $S_{10^{n-2}-1}$, S_{0^n} に相当する．特に，S_{0^n} は１次元の不変部分空間，つまり不変式にあたる．上の結果より，$S^2(V \otimes V^*)$ は $n \geqq 4$ のとき stable になり全部で６個の既約成分にわかれることがわかる．また，$n =$ 3, 2, 1 のときはそれぞれ５個，４個，１個の既約成分の和になる．

さてここで具体的に $S^2(V\otimes V^*)$ を既約分解しよう．途中の手順は省略して最終的な結果だけを書くと，

命題１

$A \in V\otimes V^*$ として，$S^2(V\otimes V^*)$ の既約成分は次で与えられる（$n \geqq 4$ ）．

$$S^2V\otimes S^2V^* \ : \ \begin{cases} A\circ A - \dfrac{2}{n+2}(A^2 + \mathrm{Tr}\, A\cdot A)\circ I + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}(\mathrm{Tr}\, A^2 + (\mathrm{Tr}\, A)^2)\cdot I\circ I \\ A^2 + \mathrm{Tr}\, A\cdot A - \dfrac{1}{n}(\mathrm{Tr}\, A^2 + (\mathrm{Tr}\, A)^2)\cdot I \\ \mathrm{Tr}\, A^2 + (\mathrm{Tr}\, A)^2 \end{cases}$$

$$\wedge^2V\otimes\wedge^2V^* \ : \ \begin{cases} A\wedge A + \dfrac{2}{n-2}(A^2 - \mathrm{Tr}\, A\cdot A)\wedge I - \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}(\mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2)\cdot I\wedge I \\ A^2 - \mathrm{Tr}\, A\cdot A - \dfrac{1}{n}(\mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2)\cdot I \\ \mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2 \end{cases}$$

（先に述べた指標の順に既約成分が書いてある．）

さて，これでめでたく $S^2(V\otimes V^*)$ の既約分解が得られたのであるが，ここで特に $n = 3$ のときについて考えてみる．既にみたように，$n = 3$ のときは全部で５個の成分の和にわかれており，指標でいうならば $S_{110^{n-4}-1-1}$，上の命題１でいうならば $\wedge^2V\otimes\wedge^2V^*$ の中の最初の成分が現れてこない．ではこの成分はどこにいってしまったかというと，本当に消えてしまうのである．つまり A が (3,3)-行列ならば不思議なことに

$$A\wedge A + 2(A^2 - \mathrm{Tr}\, A\cdot A)\wedge I - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, A^2 - (\mathrm{Tr}\, A)^2)\cdot I\wedge I \ = \ 0 \ : \ \wedge^2V \longrightarrow \wedge^2V$$

という恒等式が成り立つのである．このように指標の消えてしまう所に，それに代わって恒等式が出現するという現象は $S^2(V\otimes V^*)$ に限らず，様々な所で起こっている．上の恒等式についても，これをさらに次のような形に一般化することができる．まず $A \in V\otimes V^*$ に対して $f_i(A) \in \boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{C}$ を

$$\det(\lambda I-A) \ = \ \sum_{i=0}^{n} f_i(A)\,\lambda^{n-i}$$

で定める．（ $f_0(A) = 1$, $f_1(A) = -\mathrm{Tr}\, A, \cdots, f_n(A) = (-1)^n\det A$ 等．）すると

定理２

$1 \leqq p \leqq n$ として $r = n+1-p$ とおく．このとき

$$\sum_{a_1+\cdots+a_p=r} A^{a_1}\wedge\cdots\wedge A^{a_p} + f_1(A)\sum_{a_1+\cdots+a_p=r-1} A^{a_1}\wedge\cdots\wedge A^{a_p}$$

$$+ \cdots\cdot + f_{r-1}(A)\sum_{a_1+\cdots+a_p=1} A^{a_1}\wedge\cdots\wedge A^{a_p} + f_r(A)\cdot I\wedge\cdots\wedge I = 0$$

$$: \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p V$$

という恒等式が成立する．（a_i は非負整数．$A^0 = I$ とする．）

ここで，$p = 1$ とおけば，$r = n$ なので上の式は

$$A^n + f_1(A)A^{n-1} + \cdots\cdot + f_{n-1}(A)A + f_n(A)I = 0 \qquad \text{-------} \ (2)$$

となり，これはまさしく Cayley-Hamilton の定理に他ならない．またここで，$p = n$ とおけば $r = 1$ となり，上の式を変形すると最終的に

$$A\wedge I\wedge\cdots\cdot\wedge I = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,A\cdot I\wedge\cdots\cdot\wedge I : \wedge^n V \longrightarrow \wedge^n V \qquad \text{-------} \ (3)$$

という恒等式が得られる．さらに $n = 3,\ p = 2$ としたものが，先に得た恒等式に一致することもすぐにわかる．（$f_2(A) = 1/2\cdot((\mathrm{Tr}\,A)^2 - \mathrm{Tr}\,A^2)$ に注意．）

このことにより，この一般的な恒等式は Cayley-Hamilton の定理を Grassmann 代数の endomorphism に拡張したものであるといえる．証明は略すが，詳細については [1] を見られたい。ただし，この定理は一般の標数 0 の体においても同様に成り立つものと思われるのだが，残念なことに今のところ，体が R または C のときの証明しかわかっていない．

§３．この恒等式の応用として，AL の恒等式の一般化の話に移ろう．実は初めに述べた AL の恒等式は Cayley-Hamilton の定理を使って簡単に証明することができる．つまり上の恒等式 (2) の A に適当な行列を代入しある操作を施せば AL の恒等式が得られるのである．（教養の線型代数の演習問題にふさわしい？詳しくは [6] を参照．）同様の発想の下に，定理２を使うと次のテンソル空間の恒等式が得られる．

定理３

$A_1, \cdots\cdot, A_{2n}$ を (n,n)-行列とする．このとき，

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma}\,(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)})\circ\cdots\cdot\circ(A_{\sigma(2n-1)}A_{\sigma(2n)}) = 0$$

$$: S^n V \longrightarrow S^n V$$

が成り立つ．

この式を $n-1$ 回 contract すると丁度初めの AL の恒等式になる．その意味でこれは AL を一般化したものといってよい．証明には上で述べた恒等式 (3) を使う．詳細については [1] を参照．（また，清原氏によるグラフ理論を使った証明もある [4]．）

実は行列の恒等式に関しては J. P. Razmyslov, C. Procesi による次の基本的な定理が知られている．

定理４

Tr を係数に持つような行列の恒等式は，すべて Cayley-Hamilton の定理から得られる．

（証明及び正確な statement については [6], [5] を参照．）すると自然にこれのテンソル版としての次の予想が考えられる．

予想

行列のときと同様に，テンソル空間の恒等式はすべて先に述べた Grassmann 代数における Cayley-Hamilton の定理（定理２）から導ける．

残念ながら，今のところこの予想の一般的な証明はわかっていない．しかし，テンソル空間におけるいろいろな恒等式について，現在知られているものについてはすべて定理２からある方法で得られることがわかっており，この予想の裏付を与えている．（例えば (2,2)-行列 A_1, A_2, A_3 について

$$\mathfrak{S}[A_1, A_2] \circ A_3 - \mathfrak{S}[A_1, A_2] A_3 \circ I + \mathrm{Tr}\,[A_1, A_2] A_3 \cdot I \circ I = 0 : S^2V \longrightarrow S^2V$$

という式が成り立つが，これも定理２より導くことができる．）誰か上の予想を一般的に証明できませんか．できたら是非筆者にご一報下さい．

参考文献

[1] Y. Agaoka, On Cayley-Hamilton's theorem and Amitsur-Levitzki's identity, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987), 82-85.

[2] A. S. Amitsur and J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 449-463.

[3] P. Hanlon, On the decomposition of the tensor algebra of the classical Lie algebras, Adv. in Math. 56 (1985), 238-282.

[4] K. Kiyohara, 私信 (1986).

[5] C. Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 19 (1976), 306–381.

[6] Ju. P. Razmyslov, Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero, Math. USSR Izv. 8 (1974), 727–760.

[7] R. P. Stanley, The stable behavior of some characters of $SL(n,C)$, Linear & Multilinear Alg. 16 (1984), 3–27.

[8] J. R. Stembridge, First layer formulas for characters of $SL(n,C)$, Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 319–350.

Level set representation for the Gibbs states of Ising models.

神大 理 樋口保成

$\mathbb{Z}^d$: d-dimensional square lattice

$\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ を直積位相を入れて考える.

$\mathcal{B}(\Omega)$: Ω の open sets から生成された σ-algebra

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma\{\omega(x) ; x \in \Lambda\}$ とかく.

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < +\infty$, $\omega \in \Omega$ given のとき

(1) $$H_\Lambda^\omega(\omega') := -\sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \omega'(x)\omega'(y) - \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \in \partial\Lambda \\ |x-y|=1}} \omega'(x)\omega(y) - h\sum_{x \in \Lambda} \omega'(x)$$

とおく. h は外部磁場と呼ばれる real parameter.

Definition : 温度 T (>0), 外部磁場 h のときの Ising model の Gibbs 分布 P は次の性質をみたす $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上の確率測度である.

(2) $\forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < +\infty$, $\forall A \in \mathcal{F}_\Lambda$ に対して

$$P[A \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in A \\ \omega'(x) = \omega(x) \\ \forall x \in \Lambda^c}} Z_\Lambda(\omega)^{-1} \exp\left[-\beta H_\Lambda^\omega(\omega')\right]$$

$$Z_\Lambda(\omega) = \sum_{\substack{\omega' : \omega'(x) = \omega(x) \\ \forall x \in \Lambda^c}} \exp\left[-\beta H_\Lambda^\omega(\omega')\right]$$

$\beta = \frac{1}{kT}$, k : Boltzmann 定数

(2) が成り立つ時, 単に P は (β, h)-Gibbs 分布と呼ぶ.

Fact: $\exists \beta_c = \beta_c(d)$ s.t. $\beta < \beta_c$ ならば (β, h)−Gibbs分布は唯一つ定まる。これを $P_{\beta,h}$ とかく。このとき $P_{\beta,h}$ は h について weak convergence の位相で連続である。

Fact: $f: \Omega \to \mathbb{R}^1$ が有限個の座標にしかよらない ω についての increasing な関数のとき

$$\mu_{\beta,h}(f) = \int_\Omega f(\omega) \mu_{\beta,h}(d\omega)$$

は h について単調増加

Theorem: ある $\underbrace{\text{random field}}_{\text{real valued}}$ $X_\beta = \{X_\beta(x) ; x \in \mathbb{Z}^d\}$ が存在して任意の $h \in \mathbb{R}^1$ と任意の有限集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対して

$$\mathrm{Prob.}\{X_\beta(x) \leq h \text{ for } \forall x \in \Lambda\} = P_{\beta,h}[\omega \in \Omega ; \omega(x) = 1 \ \forall x \in \Lambda]$$

が成立。ただし $\beta < \beta_c$ とする。

Corollary: $\beta < \beta_c$ のとき percolation 確率:

$$\theta(\beta, h) = P_{\beta,h}[|C_0^+(\omega)| = \infty]$$

は h の高々1つの値を除いて h について連続。但し $\omega \in \Omega$ に対し $C_0^+(\omega)$ は $\{x \in \mathbb{Z}^d ; \omega(x) = 1\}$ の原点を含む連結成分とする。

($h_c(\beta) = \inf\{h \in \mathbb{R}^1 ; \theta(\beta,h) > 0\}$ とおくと $h \neq h_c(\beta)$ で $\theta(\beta,h)$ は連続)

abelian defect group をもつ p-block について

熊本大学 教養部 渡辺アツミ

有限群の modular 表現において，defect group が abelian である p-block の場合，Brauer の height conjecture と Alperin-Mackey の予想から，p-block とその Brauer correspondent の通常既約指標の個数は等しいことが予想されることになる。又最近の Broué : C.R.A.S., 307 (1988) にも予想されているように，p-block とその Brauer cor. との間に，block algebra の中心が同型である，Cartan 行列の単因子が一致する等の関係がありそうに思える。これらのことは defect group が cyclic である p-block の場合は Dade : Ann. Math., 84 (1966) と Linckelmann : C.R.A.S., 306 (1988) により，inertia index が 1 の p-block の場合は Broué-Puig : Invent. Math., 56 (1980) により正しい。以上のことに関連して次の結果を得た。

G を有限群，$(K, \mathcal{O}, k)$ を $\mathcal{O}$ が 1 の $|G|$ 乗根を含む p-modular 系とする。

定理　B を defect group D が abelian である p-block，b を $C_G(D)$ における B の root とする。又 $T(b)$ を b の $N_G(D)$ における inertia group とし，さらに $D_1 = C_D(T(b))$，$B_1 = b^{C_G(D_1)}$ とおく。このとき B と B_1 の間に次の関係が成立する。

(i) B と B_1 の通常既約指標の個数 $k(B)$ と $k(B_1)$ 及び modular 既約指標の個数 $l(B)$ と $l(B_1)$ はそれぞれ等しい。

(ii) B と B_1 の lower defect group は重複度もこめて一致する。とくに B の lower defect group は（G-共役を無視して）D_1 を含む。又 B と B_1 の Cartan 行列の単因子は重複度もこめて一致する。

(iii) E, E_1 をそれぞれ B, B_1 に対応する $\mathcal{O}G$, $\mathcal{O}C_G(D_1)$ の block idempotent とする。$Z(kG\bar{E})$ と $Z(kC_G(D_1)\bar{E}_1)$ は

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Z(kG\bar{E}) & \longrightarrow & Z(kC_G(D_1)\bar{E}_1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & z & \longmapsto & Br_{D_1}(z)\bar{E}_1 \end{array}$$

により同型である。

(i) の証明には Broué-Puig : J. Alg., 63 (1980) における一般指標を, (ii) には G の共役類の全体 $Cl(G)$ の block 分割に関する local theory を用いる。(iii) は $Z(kG\bar{E})$ の基底として $Cl(G)$ の block 分割から得られるものを選び, ϕ が 1対1 の写像であることを示す。

系　定理の記号の下に $[T(b), D]$ が cyclic であるならば

$$l(B) = e, \quad k(B) = |D_1|\left(e + \frac{|[T(b), D]| - 1}{e}\right),$$

但し $e = |T(b) : C_G(D)|$。

注意. B が principal p-block の場合は B と B_1 は同型である。また G が p-可解群の場合, $\mathcal{O}GE$ と $\mathcal{O}C_G(D_1)E_1$ は森田同値である。

北大理学部数学教室談話会 講演要旨　　(1988年12月14日)

Lévy's stochastic infinitesimal equations, revisited.

愛知教育大学　　野田明男

§1. Itô過程からLévyの確率変分方程式へ

確率過程 $X(t)$, $t_0<t<t_1$ $(-\infty\le t_0<t_1\le\infty)$, に対し、伊藤(1942年)から始まる理論における根本の仮定は、現時点 t から $dt>0$ だけ進む間の X の変量 $\delta X(t)=X(t+dt)-X(t)$ が正規分布 $N(m(t)dt,\ \sigma^2(t)dt)$ に従う、つまり、$N(0,1)$-確率変数 ξ を用いて、

$$(1)\qquad \delta X(t) = m(t)\,dt + \sigma(t)\sqrt{dt}\ \xi$$

と表すことにある。ここで、過去の σ-field を $\mathcal{F}_t:=\sigma\{X(u);\ t_0<u\le t\}$ と記すと、$m(t)$, $\sigma(t)$ はいづれも $\mathcal{F}_t$-可測で、ξ は $\mathcal{F}_t$ と独立；微少区間 $(t,t+dt)$ において、Itô過程 X が新たに獲得する random element が $\xi=\xi_t$ に他ならず。これは又 標準Brown運動 $B(t)$ を用いて、

$$(2)\qquad \sqrt{dt}\ \xi = dB(t) = \dot{B}(t)\,dt$$

と解釈できる。

我々は平均0、連続な共分散をもつGauss過程 $X(t)$, $X(t_0)=0$, に話を限定する。(1)における $\sigma(t)>0$ は non-random となり、$m(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ は次の形をとる：

$$(3)\qquad m(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,u)\,dX(u)\ 。$$

$m(t)$の別形として、核 $g(t,\cdot)$ が絶対連続の場合、$g(t,u)=-h(t)-\int_u^t c(t,v)\,dv$ と書くと、

$$(3)' \qquad m(t) = -b(t)X(t) - \int_{t_0}^{t} c(t,u)X(u)\,du$$

を得る。$c \equiv 0$ のとき Markov 型；c が十分小さいときは、Markov 型からの perturbation とみなして (3)' の方を好む。

ある種の Gauss 過程に対して、(3) 又は (3)' の研究が 樋田, 岡部, 三好等によってなされた。

今日の話の目的は、(1)の形では捕捉できないさまざまなタイプの Gauss 過程があるということ；そのような多様性に応じるために (1) よりも広い範囲を cover できる Lévy の確率変分方程式を採用する必要があろう。

Lévy は 変分 $\delta X(t)$ を次の形に書く（全集 IV 巻参照）：

$$(4) \qquad \delta X(t) = \mu_t(dt) + \sigma_t(dt)\,\xi,$$

$$\mu_t(dt) = E[\,\delta X(t) \mid \mathcal{F}_t\,], \quad \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t) - \mu_t(dt))^2]\ .$$

前と同じく、ξ は過去の $\mathcal{F}_t$ と独立な $N(0,1)$-確率変数で、X の innovation を示す。

§2. 分類

まず Gauss 過程 $X(t)$ に次の前提条件を設ける：

(A-1) $X(t)$ は purely non-deterministic, i.e., $\mathcal{F}_{t_0+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t_0+\varepsilon} = \{\phi, \Omega\}$;

(A-2) $X(t)$ は標準表現 $X(t) = \int_{t_0}^{t} F(t,u)\,dB(u) = \int_{t_0}^{t} F(t,u)\,\xi_u\sqrt{du}$ をもつ。

Lévy の確率変分方程式 (4) の観点から、$X(t)$ のクラスを 4つの型に分類することを提案したい：

(I) $E[(\delta X(t))^2] = a(t)\,dt$; (II) $E[(\delta X(t))^2] = a(t)\,(dt)^\alpha$ $(0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1)$;
(III) $X'(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ が存在する (これはもちろん $E[(\delta X(t))^2] = E[(X'(t))^2]\,(dt)^2$ を導く);
(IV) その他。

(1) が成立するとき (これを Lévy は normal form と呼ぶ)、X は (I) に属し、$a(t) = \sigma^2(t)$ となる。(II) の代表例は $a(t) = \text{const.}$ となる fractional Brown 運動。(III) においては、$X(t)$ から $X'(t)$ に移行して $\delta X'(t)$ を次に研究する。$X'(t)$ が Ito 過程なら、元の $X(t)$ は 2次の Ito 過程と呼ばる (cf. 成田)。Gauss 過程としての (III) の代表例は、奇数次元パラメータをもつ Brown 運動から導かれる $M(t)$-過程で、狭義 N 重 Markov 過程, i.e., 微分作用素 $L = \frac{1}{v_0(t)}\frac{d}{dt}\frac{1}{v_1(t)}\cdot\frac{d}{dt}\cdots\cdots\frac{d}{dt}\frac{1}{v_N(t)}$ に対し $LX(t) = \dot{B}(t)$ を満たす。

我々はここで、(I) のクラスに着目し、さらにそれを細分して (1) の小さな一般化を具体例に沿って論じたい。normal form (1) をもつものは (I−a)。次の (I−b) は、$\delta X(t)$ を無理に (1) の形に書くと、$m(t)\notin L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ となるもの; しかし、$m(t)$ は generalized process として、あるいは飛田の意味の generalized Brownian functional として正当化できる場合を指し、(I−a) と同じく $a(t) = \sigma^2(t)$ をもつ。

(I−c) のクラスは、もはや $a(t) = \sigma^2(t)$ $(\forall t)$ が成立せず、$\mu_t(dt)$ の部分に $s(t)\,\delta X(t^*)$ ($t\to t^*$ の写像は、(t_0,t_1) 上の単射で $t_0<t^*<t$ となる) の形の項が生じる場合; 式に書くと、

$$(5)\qquad \delta X(t) = dt\int_{t_0}^{t} g(t,u)\,dX(u) + s(t)\,\delta X(t^*) + \sigma(t)\,dB(t)\,.$$

このとき $a(t) = s(t)^2 + \sigma(t)^2$ となる。過去の時点における変分 $\delta X(t^*)$ が二箇所以上 ($t_1^*>t_2^*>\cdots$ 等) において現われる様な例も考えられるが、ここでは深入りしない。

(I) の中で、その他の可能性は一括して (I−d) に分類しておく。

§3. 定常増分をもつ周期的な Gauss 過程

(I) の中の subclass にそれぞれ入る簡単な例として、定常増分をもつ周期過程

$X(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, を若干とり上げて述べたい。

そのような $X(t)$ は次の表現式をもつ $\varphi(t)$ によって identify される：

$$(6) \qquad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos nt), \quad a_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty .$$

X の共分散は、$E[X(s)X(t)] = \{\varphi(s) + \varphi(t) - \varphi(|s-t|)\}/2$ で与えられる。

<u>例1.</u> reflection positivity (cf. Klein-Landau).

$$(7) \qquad \varphi(t) = c_0 \frac{t(2\pi - t)}{2\pi} + \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda(2\pi - t)})}{1-e^{-2\pi\lambda}} \, d\sigma(\lambda)$$

の形に、$c_0 \geq 0$ と $(0,\infty)$ 上の測度 σ $\left(\int_0^{\infty} 1 \wedge \lambda \, d\sigma(\lambda) < \infty\right)$ によって書けるクラスから始める。第一項の $\varphi_0(t) := t(2\pi - t)/2\pi$ に対応するのは pinned Brown 運動 $X_0(t)$ に他ならず、

$$(1)_0 \qquad \delta X_0(t) = -\frac{X_0(t)}{2\pi - t} \, dt + dB(t)$$

と書ける Markov 過程。第二項の被積分関数 $\varphi_\lambda(t) := \dfrac{(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda \hat{t}})}{1-e^{-2\pi\lambda}}$ $(2\pi - t =: \hat{t})$ に対応して次の normal form をもつ double Markov 過程を得る：

$$(1)_\lambda \qquad \delta X_\lambda(t) = -dt \int_0^t \frac{\{sh(\lambda\hat{t}) + \lambda t\} - \lambda u\{ch(\lambda\hat{t}) - 1\}}{2\{ch(\lambda t) - 1\}/\lambda + t\, sh(\lambda\hat{t})} \, dX_\lambda(u) + dB(t).$$

reflection positive な定常過程に対する岡部の一連の研究と似た状況が、周期的な我々の場合にも観察できる； i) $\int_1^{\infty} \lambda^2 d\sigma(\lambda) < \infty$ なら (I-a)； ii) $\int_1^{\infty} \lambda \, d\sigma(\lambda) < \infty$ なら (I-a) か (I-b) に属する。 iii) $\int_1^{\infty} \lambda \, d\sigma(\lambda) = \infty$ になるともはや (I) のクラスからはずれる。

例2. 多次元パラメータの Lévy の Brown 運動.

定曲率空間上の Lévy の Brown 運動を $B(x)$, $x \in R^2$ (又は S^2, H^2) とする。つまり, $B(x)-B(y)$ の分散が geodesic な距離 $d(x,y)$ に一致する。中心 0, 半径 ρ の円周を S_ρ として,

$$X(t) = B(x(t)), \quad x(t) \text{ は偏角 } t \in [0, 2\pi) \text{ をもつ } S_\rho \text{ 上の点},$$

と定義すると、対応する $\varphi(t)$ は次式で与えられる:

$$(8) \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 2\rho \sin(t/2) & (R^2 \text{ の場合}), \\ \begin{cases} \cos^{-1}(\cos^2\rho + \sin^2\rho \cos t) & (0<\rho<\pi/2) \\ t \wedge (2\pi - t) & (\rho = \pi/2) \end{cases} & (S^2 \text{ の場合}), \\ \mathrm{ch}^{-1}((\mathrm{ch}\rho)^2 - (\mathrm{sh}\rho)^2 \cos t) & (H^2 \text{ の場合}). \end{cases}$$

S^1 上の Lévy の Brown 運動 $\varphi_1(t) := t \wedge (2\pi - t)$ のみ、他と異なり、$t=\pi$ で $\varphi'(t)$ が不連続となる。これは、$\varphi_1(t)$ は (I-c) に分類され、他は通常の (I-a) に入ることを意味する。

例3. 奇偶で異なるスペクトル a_n をもつ $X(t)$.

(5) 式の形に書ける過程として、pinned Brown 運動 $\varphi_0(t)$ と S^1 上の Lévy の Brown 運動 $\varphi_1(t)$ の一次結合 ($p, q \geq 0$, $p+q=1$, $p \neq q$)

$$(9) \qquad \varphi(t) = p\varphi_1(t) + \frac{q}{2}\varphi_0(2t) = \frac{4}{\pi}\Big[\sum_{n:\text{奇数}} \frac{p}{n^2} + \sum_{n:\text{偶数}} \frac{q}{n^2}\Big](1-\cos nt)$$

をとり上げよう。$t^* = t - \pi$ ($\pi < t < 2\pi$) と定める。このとき次式が示される:

$$(10) \qquad \delta X(t) = \begin{cases} -dt\, \dfrac{X(t)}{\pi/q - t} + dB(t) & (0<t<\pi), \\ -dt\, \dfrac{X(t) + (q-p)(X(\pi) - X(t^*))}{2\pi - t} + (q-p)\delta X(t^*) + 2\sqrt{pq}\, dB(t) & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$$

くわしい証明、紙数の都合で書けなかった諸結果及び文献の列挙は、他日を待ちたい。

最後に、完成度の低いこの研究結果を話す機会を与えて頂いた岡部教授に感謝する。Lévyの確率変分方程式のもつ重要性は標準表現の理論と合わせて、飛田先生が説いてやまないものである事も付記したい。

Summary of the talk given at HOKKAIDO UNIVERSITY on December 14, 1988

Alexander Eydeland

Two approaches to solving stationary problems in fluid dynamics and plasma physics are presented. The general form of these problems is $Lu = \Lambda(u)$, where L is a linear operator (differential or integral) and $\Lambda(u)$ is a certain (nonlinear) function called profile function. In the first approach the profile function $\Lambda(u)$ is given in the form $\Lambda(u) = \lambda F(u)$ where $f(u)$ is an a priori prescribed function and λ is an unknown parameter. The problems of this sort typically arise in stationary problems of vortex dynamics (Rossby waves, vortex rings, vortex streets, etc.), in differential geometry (Wente surfaces of constant mean curvature), and in many other applications. The method of solving this problem consists of first writing the problem in the variational form (minimization or maximization of a certain functional subject to some constraints, typically the number of constraints in this approach is low). The main difficulties one encounters in devising algorithms for solving the above variational problem is that the functionals are typically nonlinear, nonconvex, the constraint sets are also nonconvex and the solution may not be unique. In this talk a general method is suggested which enables one to constuct iteratively sequences of approximations which converge to a solution globally, i.e. from any initial guess. In addition to global convergence this method can be efficiently implemented: a general step is solving a linear elliptic problem and a low dimensional convex optimization problem. In the second approach discussed in the talk the profile function is not prescribed. It is rather determined implicitely by a solution of a minimization problem subject to infinitely many constraints, each constraint being a conserved quantity for the corresponding evolution equation. In the plasma equilibrium problems, for example, the constraints have the form $\int f(u)\,dx$, where $f(s)$ is an arbitrary function. In this talk a basis for this set of constraints is suggeste which allows one to rewrite the problem in a particularly convenient form and to develop a globally convergent procedure for solving a large class of problems. The convergence properties as well as questions related to the implementation of this procedure are discussed.

Morrey空間におけるポテンシャル評価

宮川 鉄朗 (広大・理)

n次元空間$\mathbb{R}^n$上のRadon測度μがすべての球$B(z,r)$に対して

$$|\mu|(B(z,r)) \leqq C r^{n(1-1/p)} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

をみたすとき、$\mu \in \mathcal{M}^p$と記し、$\mathcal{M}^p$をMorrey空間と呼ぶ(ことにする。)

次の事実は容易にわかる.

(I) (i) $\mathcal{M}^p$は、ノルム

$$\|\mu\|_p = \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-n(1-1/p)} |\mu|(B(z,r))$$

に関してBanach空間.

$M^p = \mathcal{M}^p \cap L^1_{loc}$はその閉部分空間.

(ii) $\mathcal{M}^1 = \{\text{finite measures}\}$, $M^1 = L^1$.

$\mathcal{M}^\infty = M^\infty = L^\infty$.

(II) (i) $\mu \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R}^{n-1}) \Rightarrow \mu \otimes dx^n \in \mathcal{M}^{\frac{np}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $L^p \subset L^p_w \subset M^p \quad (1 < p < \infty)$

(注)

$$f \in L^p_w \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sup_{\alpha>0} \alpha |\{|f|>\alpha\}|^{1/p} < \infty$$

($|\ \ |$: Lebesgue測度)

空間 $\mathfrak{M}^p$ 上で定義されたRieszポテンシャルについて、L^p の場合と形の上では同じような評価式が得られるということを報告する。以下

$$\Lambda = (-\Delta)^{1/2} \qquad \text{とおく。}$$

(III) $\mu \in \mathfrak{M}^p,\ 0<\alpha<n/p \Rightarrow \Lambda^{-\alpha}\mu \in M^q\ (1/q = 1/p - \alpha/n)$

$$\|\Lambda^{-\alpha}\mu\|_q \leqq C\|\mu\|_p.$$

(IV) $f \in M^p,\ \Lambda^\alpha f \in \mathfrak{M}^p,\ \alpha > n/p \Rightarrow f \in L^\infty$

$$\|f\|_\infty \leqq C\|f\|_p^{1-n/\alpha p}\ \|\Lambda^\alpha f\|_p^{n/\alpha p}.$$

$f \in L^1_{loc}$, に対し、$\bar{f}_r(z) = |B(z,r)|^{-1}\int_{B(z,r)} f\,dy.$

$$[f]_{BMO} = \sup_{\substack{z\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-n}\int_{B(z,r)} |f - \bar{f}_r(z)|\,dx \qquad \text{とおくとき}$$

(V) $[f]_{BMO} \leqq C\|\Lambda^\alpha f\|_p \qquad (\alpha = n/p)$

(VI) $[f]_{C^{0,\beta}} \leqq C\|\Lambda^\alpha f\|_p.\ (\alpha > n/p,\ \beta = \alpha - n/p < 1)$

Remarks (i) $\mathfrak{M}^p$ を用いることによって、$\mathbb{R}^3$ 上の Navier-Stokes 方程式の自己相似解の存在が示される。
(Giga-Miyakawa：北大プレプリント No. ?)

(ii) 特異積分作用素の M^p 有界性についてはよくわからない。

(iii) $\{\mathfrak{M}^p\}$ または $\{M^p\}$ が、補間空間の族になっているかどうか不明である。

Geometry of monopoles

筑波大学・数学　伊藤光弘

講演内容は次のプレプリントから：

Yang-Mills-Higgs fields and harmonicity of limit maps

MITSUHIRO ITOH AND HIROKI MANABE

Consider a connection A and a Higgs field Φ on the trivial $SU(2)$ bundle over $\mathbb{R}^3$, the Euclidean 3-space. A configuration (A, Φ) is called a Yang-Mills-Higgs field if it is a critical point of the action integral $\mathcal{Y}(A, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \{|F_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2\} d^3x$ ($F_A = d\ A + [A, A]$ and $\nabla_A \Phi = d\ \Phi + [A, \Phi]$ denote the curvature of A and the covariant derivative of Φ, respectively).

Yang-Mills -Higgs field satisfies the Euler-Lagrange equations $d_A * F + [\Phi, *\nabla_A \Phi] = 0, d_A(*\nabla_A \Phi) = 0$.

The infinity condition on Higgs fields Φ; $|\Phi|(x) \to 1(|x| \to \infty)$ should be posed in order to avoid the trivial case. Then, for each (A, Φ) the degree of the normalized Higgs field at the infinity 2-sphere $\Phi/|\Phi|: S^2_\infty \to S^2 \subset su(2)$ defines $k \in \mathbb{Z}$, called the charge.

A configuration (A, Φ) with finite $\mathcal{Y}(A, \Phi)$ satisfying Bogomolnyi equations, $\nabla_A \Phi = \pm * F_A$, yields a Yang-Mills-Higgs field. We call such a Yang-Mills-Higgs field a magnetic monopole.

Yang-Mills-Higgs fields correspond to 4-dimensional Yang-Mills connections and magnetic monopoles to (anti-)instantons.

Like the moduli space of instantons, the moduli space of charge k monopoles is variously considered. It turns out that the moduli space M_k is a complete hyperkähler manifold([2]). The twistor formalism was applied by Hitchin and monopoles were transferred into holomorphic structures on a certain complex vector bundle over the space $G(\mathbb{R}^3)$ of all oriented lines in $\mathbb{R}^3$ and it was further shown that monopoles are interpreted as solutions to Nahm's equations([5],[6]).By using these, Donaldson proved that M_k is in a one-to-one correspondence to a complex manifold $\mathcal{R}_k$ of all holomorphic maps $f: \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1, f(\infty) = 0$, of degree k([3]).

This observation is considered as presentation of a correspondence between the two different variational objects; Yang-Mills-Higgs fields and harmonic maps, because every holomorphic map is harmonic. A Harmonic map $f: S^2 \to X$ is critical for the energy functional $\mathcal{E}(f) = \int_{S^2} |df|^2 d\sigma$ ([4]).

In this paper we obtain the following phenomenon which gives a more direct representation of Yang-Mills-Higgs fields into harmonic maps by using the limiting of Higgs fields at infinity.

THEOREM 1. *Let $[(A, \Phi)]$ be a gauge equivalence class of $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs field of $\mathcal{Y}(A, \Phi) < \infty$ with the asymptotical condition $\lim_{R\to\infty} \sup_{|x|\le R} ||\Phi|(x) - 1| = 0$. If the representative (A, Φ) of $[(A, \Phi)]$ in radial gauge satisfies $\lim_{R\to\infty} < R^2 A(Rx), \Phi(Rx) >= 0$ for all $x \in S^2$, then the limit map Φ_∞ of S^2 into the unit 2-sphere in $su(2)$, $\Phi_\infty(x) = \lim_{R\to\infty} \Phi(Rx), x \in S^2$, is a degree k harmonic map(k is the charge of (A, Φ)).*

$SU(2)$ Yang-Mills-Higgs field solutions of charge 1 are obtained in an explicit way as BPS monopoles ; $A(x) = (1/\sinh\, r - 1/r)\ (\partial/\partial\, r \times e) \cdot dx, \Phi(x) = \mp(1/\tanh\, r - 1/r)(\partial/\partial\, r \cdot e), r = r(x)$([7],[8]). In this BPS monopole case the limit map $\Phi_\infty: S^2 \to S^2$ becomes the identity map so that it is automatically holomorphic and hence harmonic.

In Theorem 1 we are able to replace the group $SU(2)$ by an arbitrary compact simple group G(with Lie algebra g).

Let (A, Φ) be a G-Yang-Mills-Higgs field of finite action $\mathcal{Y}(A, \Phi)$ with asymptotical condition $\sup_{|x| \leq R} ||\Phi|(x) - 1| \to 0 (R \to \infty)$. Assume the image of the limit map $\Phi_\infty : S^2 \to S^N$ ($N = \dim g - 1$) lies in some orbit $\alpha \subset g$ through $X \in S^N$([1],[8]). The orbit α of the adjoint action is written as G/K for the isotropy subgroup K at X and carries a homogenous Kähler space structure imbedded in g with the minus Killing form.

THEOREM 2. *The limit map* $\Phi_\infty : S^2 \to G/K$, *representing the orbit* α, *is a harmonic map, provided that* $[[A(Rx), [A(Rx), \Phi(Rx)]], \Phi(Rx)] = o(\frac{1}{R^2})(R \to \infty)$ *for a representative* (A, Φ) *in radial gauge of the gauge equivalence class.*

A map Ψ being harmonic from S^2 into a submanifold M of the Euclidean space is characterized by that the Laplacian $\Delta\Psi$ of Ψ is normal to M at any $\Psi(x)$, $x \in S^2$. The above theorems are derived by making use of this fact.

We have moreover similar argument linking magnetic monopoles and holomorphic maps which corresponds just to Donaldson's correspondence.

THEOREM 3. *Let* $[(A, \Phi)]$ *be a gauge equivalence class of magnetic monopole with gauge group* G *of finite action. Assume the limit map* Φ_∞ *lies in an orbit* α. *If some representative* (A, Φ) *of* $[(A, \Phi)]$ *satisfies asymptotical condition* $[A(Rx), \Phi(Rx)] = o(\frac{1}{R})(R \to \infty)$, *then the map* Φ_∞ *into a homogeneous Kähler space representing the orbit* α *is holomorphic.*

The detailed discussion on these theorems will be given in forthcoming papers.

References

[1] M. Atiyah, *Instantons in two and four dimensions,* Commun. Math. Phys. **93** (1984), 437-451.

[2] M. Atiyah, N.Hitchin, "The geometry and dynamics of magnetic monopoles," Princeton University Press, Princeton, 1988.

[3] S.K.Donaldson, *Nahm's equations and the classification of monopoles,* Commun. Math. Phys. **96** (1984), 387-407.

[4] J.Eells, J.C.Wood, *Restrictions on harmonic maps of surfaces,* Topology **15** (1976), 263-266.

[5] N. Hitchin, *Monopoles and geodesics,* Commun.Math.Phys. **83** (1982), 579-602.

[6] N. Hitchin, *On the construction of monopoles,* Commun. Math. Phys. **89** (1983), 145-190.

[7] M. Itoh, I.Mogi, "Differential geometry and gauge theory," Kyoritsu publ., Tokyo, 1986.

[8] A. Jaffe, C.Taubes, "Vortices and monopoles," Birkhäuser, Boston, 1980.

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, 305 JAPAN

談話会講演要旨

葉層構造のコホモロジーと熱方程式

九大・理　西川青季

$\mathcal{F}$ を閉多様体 M 上の葉層構造とし，$L \subset TM$ を $\mathcal{F}$ の接束とする．M の de Rham 複体 Ω_M の部分複体

$$\Omega_B = \Omega_B(\mathcal{F}) \equiv \{ \omega \in \Omega_M \mid i(X)\omega = 0,\ \theta(X)\omega = 0 \text{ for } {}^\forall X \in \Gamma L \}$$

$$d_B \equiv d \mid \Omega_B : \Omega_B^{\cdot} \to \Omega_B^{\cdot+1}$$

から，$\mathcal{F}$ の basic cohomology

$$H_B^{\cdot} = H_B^{\cdot}(\mathcal{F}) \equiv H(\Omega_B^{\cdot}, d_B)$$

が定義される．また，$\omega \in \Omega_B^r$ を $\mathcal{F}$ の basic r-form という．

$\mathcal{F}$ をとくに Riemann 葉層構造とし，M 上の bundle-like 計量 g_M を用いて，Ω_B^r 上の basic Laplacian Δ_B を

$$\Delta_B = \delta_B d_B + d_B \delta_B : \Omega_B^r \to \Omega_B^r$$

と定義する．ここに，$\delta_B : \Omega_B^{\cdot} \to \Omega_B^{\cdot-1}$ は d_B の formal adjoint である．また，各 leaf の平均曲率ベクトルから自然に $\kappa \in \Omega_M^1$ が定義される．

このとき，次が証明できる．

定理．$\kappa \in \Omega_B^1(\mathcal{F})$ ならば，basic 熱作用素 $\partial/\partial t + \Delta_B : \Omega_B^r \to \Omega_B^r$ の基本解 $e_B^r(x, y, t)$ が basic 2重 (r, r) 形式（各変数について C^∞ 級）として一意的に存在する．

証明には，$\kappa \in \Omega_B^1$ のとき，$\Delta_B : \Omega_B^r \to \Omega_B^r$ を de Rham 複体上の強楕円型作用素 $\tilde{\Delta} : \Omega_M^r \to \Omega_M^r$ へ自然に拡張できることが本質的に用いられる．

この定理により，例えば $\alpha_0 \in \Omega_B^r$ に対して次の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\alpha(x,t) = -\Delta_B \alpha(x,t) \\ \lim\limits_{t\downarrow 0} \alpha(x,t) = \alpha_0(x) \end{cases}$$

の解が

$$[P_B(t)\alpha_0](x) = \alpha(x,t) = \int_M e_B^r(x,y,t)\wedge *\alpha_0(y)$$

としてえられることがわかる．さらに

$$H_B\alpha_0 = \lim_{t\uparrow\infty} P_B(t)\alpha_0$$

$$G_B\alpha_0 = \int_0^\infty P_B(t)(\alpha_0 - H_B\alpha_0)\,dt$$

と定義することにより， basic r-form に対する de Rham-Hodge 分解

$$\alpha_0 = H_B\alpha_0 + \Delta_B G_B\alpha_0, \qquad H_B\alpha_0 \in \operatorname{Ker}\Delta_B$$

がえられる．

References

[1] A. N. Milgram - P. C. Rosenbloom, Harmonic forms and heat conduction I, Proc. Nat. Acad. Sc., 37 (1951), 180-184.

[2] S. Nishikawa - M. Ramachandran - Ph. Tondeur, The heat equation for Riemannian foliations, preprint.