高次微分の応用

飯高茂 学習院大学　理学部

0. ここではいささか旧聞に属することであるが, 対称微分と微分不変式について述べる.
目的は, 微分 1 形式を微分 $n-$ 形式のように, 積極的に用いて幾何をすることにある.
微分 $n-$ 形式は必然的に m 重形式を考えることになるが, これは, いってみれば, 対称テンソル積であり, これだけで完結する. しかし, 微分 1 形式を多重に扱うと, 話が複雑に混乱してきて, 計算が難しい. そこで計算機でも使おうということになる. なお, この話は大分以前に森川寿先生に教えて頂いたことに多くを依存しているので, 特に記して感謝申し上げる.

§1.
K/k を関数体の拡大とする. 標数は 0 で k は代数的閉体とする.
微分の概念は古く, 微分学の発生の時に遡る. 微分の微分は 0 とおくのが普通であるが, 微分の微分は代数的に独立な元であるとすると, 対称微分の概念が生まれる. たとえば

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy.$$

$$d^2 f(x,y) = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2 + f_x d^2x + f_y d^2y.$$

これを続けて書くのは根気がいる話であるが, 原理的には簡単なことであり計算機に安心して任すことができる. 例えば, 高級言語 Prolog を用いると鮮やかにプログラムすることが出来る. これは後にふれる.

対称微分の定義は簡単であり, それを具体的に書き下すのも単純である.
K/k の超越次数を n とし 1 つの超越基底を $(x_1, \ldots, x_n)$ とすると次のようになる.
$SF = K[dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, d^2x_1, \ldots\ldots, d^2x_n, \ldots, d^r x_1, \ldots]$
SF の商体を QSF とかく. この元を高次 (対称) 微分形式という.

K の元から見上げれば QSF の元は別世界のようなものであるが, 四則演算以外に d の演算ができるというだけのことである.
K 上の多項式の類似として, $d-$ 多項式を考えることが出来る.
K 上の超越的な元 $y_1, y_2, \ldots, y_r$ のあるとき, これらを K に付加した拡大体 L をとる. その超越基底を $(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ とすると, L/k の SF の元は微分

多項式(略して $d-$ 多項式)と見なされる. そして L/k の QSF はの元は微分有理式(略して $d-$ 有理式)となる.
SF の元は
$\phi = \Sigma_I a_I (dx)^I, I = [I_1, \ldots, I_n], (dx)^I = (dx_1)^{I_1} \ldots (dx_n)^{I_n}$,
とかかれる. そこで $n = 1$ のときを考える. $x_1 = x$ として
$I = [a_1, a_2, \ldots, a_s], (dx)^I = (dx)^{a_1}(d^2x)^{a_2} \ldots (d^s x)^{a_s}$
とおいたのである. $I = [a_1, a_2, \ldots, a_s]$ は Prolog でいうところの整数リストである.
$w(I) = a_1 + 2a_2 + \cdots + sa_s$ を I の weight といい,
$\deg(I) = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$ を I の次数 (degree) という.
また, a_i が 0 でない i の最大数を I の length という. これは, Prolog でのリストの長さと異なる.
リスト同士に,順序をつける. まづ length で順序を考え, length が等しいとき,右から見て辞書式順序を入れる.
例

$$[0,3] < [0,0,1], \ [3,0,3] < [0,1,3]$$

これらの weight はそれぞれ, 6,3,12,11 である.
与えれた weight m をもつリストをかきあげることは m の加法的分割を与えることに他ならない. 後で Prolog による簡単な与え方を説明する.
2 重リスト $I = [I_1, \ldots, I_n]$ の weight と次数は普通のリスト I_j のそれらの和とする.
一般に, weight が等しいリストを指数にもつ項の和の形にかけるとき,斉重形式という.

§2.

基本となる補題は,微分すれば 0 になる QSF の元は定数という至極当然のものであり,証明も自明である.
補題 f を高次微分形式とする.
$df = 0$ なら $f \in k$.
証明は後にまわす.
$f = \frac{f_1}{f_2}$ とすると, $df = \frac{(f_2 df_1 - f_1 df_2)}{(df_2)^2}$ なのでこの分子を一般に捉えなおし,
Wronskian を定義する.
$f_1, f_2, \ldots, f_m$ を QSF の元とし, $(i,j)-$ 成分 $(1 \leq i, j \leq m)$ を $d^{i-1}f_j$ とする行列を考えこれを, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の *Wronski* 行列と言う. また,その行列式を $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ とかき,これを $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の Wronskian という.
行列式は,外積で自然に構成される.
$V = QSF^m$(m 個の直和) とし,これらの底を $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_m$ とし, V の元 $F =$

$f_1\mathrm{e}_1 + f_2\mathrm{e}_2 + \cdots + f_m\mathrm{e}_m$ についてその外積
$G_s(F) = F \wedge dF \wedge \ldots \wedge d^{s-1}F$ を考える.
もし, $s = m$ なら $G_s(F)$ の係数が $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ である.
さて $d(gF) = dgF + gdF$ であり,
$gF \wedge d(gF) = g^2F \wedge dF$ などからわかるように $G_s(gF) = g^sG_s(F)$ である.
これから, $W(gf_1, gf_2, \ldots, gf_m) = g^mW(f_1, f_2, \ldots, f_m)$
がわかる. また, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ にたいして k 係数の 1 次変換 A をすれば, その Wronskian には A の行列式がかけられる. これを簡単に $W(Af) = \det(A)W(f)$ と書き表す.
さらに $f_1 = 1$ のときには,1 つサイズが下がる. すなわち,
$W(1, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}) = W(df_1, df_2, \ldots, df_{m-1})$.

補題の証明
$W(\phi, \psi) = 0$ とし $\phi = \Sigma_I a_I(dx)^I, \psi = \Sigma_J b_J(dx)^J$
とおく. 便宜上, $n = 1$ とする. $\phi = \Sigma a_I(dx)^I$ の 0 でない係数をもつ項の最高のリスト I を ϕ の最高順位といい, $h(\phi)$ とかく.
$I = h(\phi), J = h(\psi)$ とするとき, $I < J$ なら $h(W(\phi, \psi))) = h(W((dx)^I, (dx)^J)))$ であることがわかる.
実際に $W(a(dx)^I, b(dx)^J) = a^2W((dx)^I, b/a(dx)^J)$
だから $a = 1$ としてよい. リスト I, J で共通の成分があればそれを取り出し, I と J の同一番目の成分はどちらかが 0, にしておく. そこで
$I = [i_1, \ldots, i_s], i_s \neq 0, J = [j_1, \ldots, j_t], j_t \neq 0$, とおけば, $I < J$ の仮定にによリ $s < t$.
$W((dx)^I, b(dx)^J)$ の最高の項は $b(dx)^I(dx)^{J0}$. ここに $J0 = [j_1, \ldots, j_t - 1, 1]$
そこで, $I = J$ とする.

$$W((dx)^I, b(dx)^J) = (dx)^{2I}db.$$

ここに, $2I = [2i_1, \ldots, 2i_s]$ とした.
それゆえ, $W(\phi, \psi) = 0$ を仮定すると, $h(\phi) = h(\psi)$ であり, その係数は定数倍になる. それを c として, $\phi_1 = \phi - c\psi$ とおくと,
$\phi_1 \neq 0$ ならば $h(\phi_1) < h(\phi)$. よって, $W(\phi_1, \psi) \neq 0$.
しかし,

$$W(\phi_1, \psi) = W(\phi - c\psi, \psi) = W(\phi, \psi) - cW(\psi, \psi) = 0.$$

ゆえに$\phi = c\psi$

§3.

これから次の結果が直ちに従う.

命題 QSF の元 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ が与えられたとき,

$W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$ となる必要十分条件は $f_1, f_2, \ldots, f_m$ が k 上 1 次従属なることである.

証明 m についての帰納法.

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ が k 上に 1 次従属ならば , $W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$ はあきらかだから, 逆を示す. すなわち , $W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$ とするとき , $f_1, f_2, \ldots, f_m$ が k 上 1 次従属になることをいう.

$m = 1$ の場合は補題で済んでいるから $m > 1$ とする. $m - 1$ の場合を仮定しよう.

$f_1 = 0$ なら, 従属は明らか. そこで $f_1 \neq 0$ とし , $g_i = \frac{f_{i+1}}{f_1}$ とおくと,

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = f_1^m W(1, g_1, \ldots, g_{m-1}) =$$

$$W(dg_1, \ldots, dg_{m-1})$$

から

$$W(dg_1, \ldots, dg_{m-1}) = 0.$$

ゆえに帰納法の仮定により,

$dg_1, \ldots, dg_{m-1}$ は 1 次従属 . よって, すべては 0 でない定数 $c_2, \ldots, c_m$ があり ,

$c_2 dg_1 + \cdots + c_m dg_{m-1} = 0$. ゆえに

$d(c_2 g_1 + \cdots + c_m g_{m-1}) = 0$. 補題によって,

$c_2 g_1 + \cdots + c_m g_{m-1}$ は定数だから , $-c_1$ とおく.

すると,

$c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m = 0$. 証明終わり

これは通常の場合, すなわち , 1 次元で関数の場合によくしられた $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の Wronskian による従属性の判定法の自然な一般化である.

さて , $W(f_1, f_2, \ldots, f_m) \neq 0$ となる $f_1, f_2, \ldots, f_m$ を固定して考える.

$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, Y) = 0$ となる式を Y の方程式とみれば, これは Y が $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の 1 次結合となるとき満たされる. そこで Y を独立な元とみて,

$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, Y)$ を Y についいて展開する. これらの係数を W_j とおいて, 次の式をえる.

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, Y) =$$

$$W_0(f_1, f_2, \ldots, f_m) d^m Y + W_1(f_1, f_2, \ldots, f_m) d^{m-1} Y + \cdots + W_m(f_1, f_2, \ldots, f_m) Y.$$

定義から

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = W_0(f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

$$W_m(f_1, f_2, \ldots, f_m) = (-1)^m W(df_1, df_2, \ldots, df_m).$$

さらに重要なことは,

$$dW(f_1, f_2, \ldots, f_m) = -W_1(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

が成立することである.

$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, Y) = 0$ となる式を Y の方程式とすると Y の解が $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の一次結合である. そこで, 首項をはらい,

$$A_i(f_1, f_2, \ldots, f_m) = W_i(f_1, f_2, \ldots, f_m)/W(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

とおくと, 次の命題をえる.
命題 (根と係数の関係)
$f_1, f_2, \ldots, f_m$ と $g_1, \ldots, g_m$ があたえられたとき

$$A_i(f_1, f_2, \ldots, f_m) = A_i(g_1, \ldots, g_m), (i = 1, 2, \ldots, m)$$

が成立するとき , $g_1, \ldots, g_m$ は $GL_n(k)$ で $f_1, f_2, \ldots, f_m$ を移したものになる.
したがって , $A_i(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を GL 不変式という.
これに加え , $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ もいれると, これは行列式も不変にするから , これらは SL 不変式になる . だから,
命題 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ と $g_1, \ldots, g_m$ があたえられたとき

$$W_i(f_1, f_2, \ldots, f_m) = W_i(g_1, \ldots, g_m)(i = 0, 2, \ldots, m)$$

が成立するとき , $g_1, \ldots, g_m$ は $\mathrm{SL}_n(k)$ で $f_1, f_2, \ldots, f_m$ を移したものになる.
ここで , $dW_0 = -W_1$ だから, わざと 1 をとばしたのである.

SL 以外の代数群の例として直交行列群を考えてみよう.
例えば正則行列 J を固定し $O(J) = \{C; C'JC = J\}$ とおく.
ここで, C' は C の転置行列とした. そこで, $<>$ を通常の内積とし , $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)'$ とおいて ,

$$H_j(f) = < f, Jd^j f >$$

とすると，C が $O(J)$ の元なら
$H_j(Cf) = H_j(f)$ となる．また　$dH_0(f) = 2H_1(f)$ である．
さて，$A_1, \ldots, A_m$ の他に $H_0(f), \ldots, H_{m-1}(f)$ も不変になるとしよう．すなわち

$$A_i(f) = A_i(g), (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$H_j(f) = H_j(g), (j = 0, 2, \ldots, m-1)$$

とする．
$g = Cf$ とするとき，

$$< C'J'Cf, d^j f > = < f, d^j f > (j = 0, 2, \ldots, m-1).$$

そこで，$h = C'J'Cf - f$ とおけば $< h, d^j f > = 0$ だから，これらを $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ について考えると，その係数行列式 $= W(f) \neq 0$ によって，$h = 0$ をえる．したがって，$A_i(f), H_j(f)$ らが $O(J)$ 不変式になる．

§4.
もっと興味のあるのは，PGL 不変式である．
$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, Y)$ を Y についての m 次方程式のようなものとみなす．そこで，首項の次の項を消すこと (一般の平方完成) の類似をしてみよう．方程式の場合には $y + \alpha$ であったが，ここでは，関数倍を考える．Y に ρz をいれてみよう．

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m, \rho z) = \rho^{m+1} W(f_1/\rho, \ldots, f_m/\rho, z)$$

であり，ここでの W の首項を計算する．

$$W(f_1/\rho, \ldots, f_m/\rho) = W(f_1, f_2, \ldots, f_m)/\rho^m.$$

したがって，QSF の代数的閉包から $W(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ の m 乗根をとり，これを ρ とおく．
$W(f_1/\rho, \ldots, f_m/\rho, z)$ の係数を $B_0, B_1, \ldots, B_m$ とおく．すると，$B_0 = 1$ であり，その 微分である B_1 は 0 になる．
$B_2, \ldots, B_m$ を PGL 不変式という．
さて，
命題 $B_2, \ldots, B_m$ は QSF の元になる．
証明 1 の原始 m 乗根を ζ とするとき，$\mathrm{Gal}(QSF(\rho)/QSF)$ は m 次巡回群でその生成元 σ は ρ を $\zeta\rho$ に移す．さて，$\sigma B_2 = B_2$ などをみればよい．

$$\sigma(d^m z + B_2 d^{m-2} z + \cdots + B_m z) = \sigma W(f_1/\rho, \ldots, f_m/\rho, z) =$$

$$W(f_1/(\zeta\rho),\dots,f_m/(\zeta\rho),z)=W(f_1/\rho,\dots,f_m/\rho,\zeta z)/\zeta=$$
$$d^m z+B_2 d^{m-2}z+\cdots+B_m z.$$

つぎのことは明白である.
命題 $f_1,f_2,\dots,f_m$ と $g_1,\dots,g_m$ があたえられたとき
$B_2,\dots,B_m$ が等しければ，QSF の元 ω および ,$\mathrm{GL}_n(k)$ の元 A があり ,$f=\omega Ag$ とかける.

最も簡単な場合を考えよう. すなわち，$m=2$ とする.
$B_2(f_1,f_2)$ を計算するのであるが，$f=\frac{f_2}{f_1}$ とし
$B(f)=f_1^2B_2(f_1,f_2)$ を計算する. すなわち,
$B(f)=B_2(1,f)$ である.
$w=W(1,f)=df$ であり，$\rho=\sqrt{w}$ とおく. さらに,

$$B(f)=W_2(\frac{1}{\rho},\frac{f}{\rho})=W(d\frac{1}{\rho},d\frac{f}{\rho})=W(1,\frac{1}{\rho},\frac{f}{\rho})=W(\rho,1,f)/\rho^{\frac{3}{2}}=$$
$$W(df,d\rho)/\rho^{\frac{3}{2}}=W(df,\frac{d^2f}{2\rho})/\rho^{\frac{3}{2}}=W(df^{3/2},d^2f)/\rho^{\frac{3}{2}}=\frac{dfd^3f-3(d^2f)^2/2}{2(df)^2)}$$

$$B(f)=\frac{dfd^3f-3(d^2f)^2/2}{2(df)^2)}$$

命題 f,g が 定数 a,b,c,d の 1 次分数式 $\frac{ag+b}{cg+d}$ とかける必要十分条件は $B(f)=B(g)$ である.
f が 1 変数 z の関数であれば, 通常の Schwartz 微分の式 $S_z(f)$ を用いて，$B(f)=S_z(f)(dz)^2+B(z)$
とかける. これから，Schwartz 微分の合成公式がでる. また，Schwartz 微分 $S_z(f)=0$ なら，f は 定数 a,b,c,d の一次分数式 $\frac{az+b}{cz+d}$ であることがわかる. これらは,19 世紀にわかったことの書き換えである. そこで,2 変数 z,w のときに $B(f)$ を計算してみよう. これがすでに面倒で計算機の助けを借りることになる.

2 変数の $B(f)$ の展開

$$(2f_z^2dzd^3z-3f_z^2(d^2z)^2+2f_zf_{zzz}^3(dz)^4+6f_zf_{zzw}(dz)^3dw+$$

$$6f_z f_{zww}(dz)^2(dw)^2 - 6f_z f_{zz}^2(dz)^2 d^2z + 6f_z f_{zz}(dz)^2 d^2z +$$

$$6f_z f_{zw}(dz)^2 d^2w + 2f_z f_w dz d^3w + 2f_z f_{www} dz(dw)^3 - 10f_z f_{zw} dz dw d^2z +$$

$$6f_z f_{ww} dz dw d^2w + 2f_z f_w dw d^3z - 6f_z f_w d^2z d^2w - 6f_z f_{ww}^2 d^2z(dw)^2$$

$$-3f_{zz}^4(dz)^4 + 2f_w f_{zzz}^3(dz)^3 dw - 12f_{zz}^2 f_{zw}(dz)^3 dw + 6f_w f_{zzw}(dz)^2(dw)^2$$

$$-6f_w f_{zz}^2(dz)^2 d^2w - 6f_{zz}^2 f_{ww}^2(dz)^2(dw)^2 - 12f_{zw}^2(dz)^2(dw)^2 +$$

$$6f_w f_{zww} dz(dw)^3 + 6f_w f_{zz} dz d^2z dw - 6f_w f_{zw} dz d^2w dw -$$

$$12f_{zw} f_{ww}^2 dz(dw)^3 + 2f_w^2 dw d^3w - 3f_w^2(d^2w)^2 + 2f_w f_{www}(dw)^4 +$$

$$2f_w f_{zw} d^2z(dw)^2 - 6f_w f_{ww}^2(dw)^2 d^2w + 6f_w f_{ww}(dw)^2 d^2w - 3f_{ww}^4(dw)^4)/$$

$$(4(f_z^2(dz)^2 + 2f_z f_w dz dw + f_w^2(dw)^2))$$

もちろんこんな計算をしても，無益なだけである.

§5.

さて，Leibniz の微分の法則によれば

$$\frac{d^m(zw)}{m!} = \frac{\Sigma_{m=p+q} d^p z d^q w}{p!q!}$$

である. そこで, 森川先生に従い, 無限級数

$$exp(z) = \Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{d^m z}{m!}$$

を考えると,

$$exp(z \pm w) = exp(z) \pm exp(w),$$

$$exp(z \times w) = exp(z) \times exp(w)$$

がでる．とくに

$$1 = exp(z \times 1/z) = exp(z) \times exp(1/z)$$

したがって

$$exp(1/z) = 1/exp(z)$$

であり, 右辺の計算から $d^m(1/z)$ がもとめられることになる.

$$\frac{1}{exp(z)} = \frac{1}{z}(1 + \Sigma_{m=1} \frac{d^m z}{m!z})^{-1} =$$

$$\frac{1}{z}(\Sigma_{s=0}(-1)^s(\Sigma_{m=1} \frac{d^m z}{m!z})^s = \Sigma_{s=0} \frac{(-1)^s(\Sigma_{m=1} \frac{d^m z}{m!})^s}{z^{s+1}}.$$

$$\frac{1}{s!}(\Sigma_{m=1}^{\infty} d^m z)^s = \Sigma_{(k_1,\ldots,k_r,s=k_1+\cdots+k_r)} \frac{1}{k_1!\ldots k_r!}(dz)^{k_1}\ldots(d^r z)^{k_r}.$$

そこで, 整数リスト $K = [k_1, \ldots, k_r]$ にたいして

$$K! = k_1!\ldots k_r!,\ !^K = (2!)^{k_2}\ldots(r!)^{k_r}$$

とおく.

$$\frac{1}{exp(z)} = \Sigma_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{z^{s+1}}(\Sigma_{(K,s=\mathrm{deg}K)} \frac{s!}{!^K K!}(dz)^K)$$

一方 $1/z$ を z の関数として s 回微分した導関数を $(1/z)^{(s)}$ とすれば

$$\frac{(-1)^s}{z^{s+1}} = (1/z)^{(s)}.$$

そこで, 両辺を比較して

$$d^m \frac{1}{z} = \Sigma_{(m=w(K), s=\deg K)} \frac{m!(1/z)^{(s)}}{!^K K!} dz^K.$$

さらに，2 変数についても

$$exp(\frac{1}{zw}) = \frac{1}{exp(z)exp(w)}$$

$$\Sigma_{s=0,t=0}^{\infty}(\Sigma_{(s=\deg K, t=\deg L)} \frac{(-1)^{s+t}}{z^{s+1} w^{t+1}} \frac{s!t!}{!^K K!!^L L!} (dz)^K (dw)^L)$$

などがごく機械的にできるわけである. ところで, 一般に

$$d^m f = \Sigma_{(m=w(K), s=\deg K)} (coefficients)(f)^{(s)} (dz)^K$$

とかけることは, 自明なことであり，$f = \frac{1}{z}$ の場合が分かれば自動的に係数がもとまる.

こうして, 合成関数の微分公式を, 対称微分式に書いたものができる.

$$d^m f = \Sigma_{(m=w(K), s=\deg K)} \frac{m! f^{(s)}}{!^K K!} (dz)^K.$$

2 変数であれば,

$$d^m f = \Sigma_{(m=p+q)} \frac{m!}{p!q!} \Sigma_{(p=w(K), q=w(L), s=\deg K, t=\deg L)} \frac{f^{(s,t)}}{!^K K! \, !^L L!} (dz)^K (dw)^L$$

これらの式から， 偏微分係数相互の関係もただちに出る.

§6.

これまで, 見てきたように対称微分では, 長さが確定できない添え字の順序集合が大切である. そのようなものを計算機で扱うには, リストを用いる．リスト処理の言語としては Lisp または Prolog がある.

以下では　Prolog　の　Program の例を示す.

```
/**一般的**/
append(L=[]+L).
append([A|L]=[A|M]+N) :- append(L=M+N).
member(A,[A|L]).
member(A,[_|L]) :- member(A,L).
/** for0(最小 =< 最大,K)**/
for0(I =< J,I) :- I =< J.
for0(I =< J,K):- I =< J,I1 is I+1,for0(I1 =< J,K).

/**リストの重み**/
weight([],1).
weight(L,W) :- weight(L,1,W).
weight([M],S,W) :- W is M*S.
weight([M|L],S,W) :- S1 is S+1,weight(L,S1,W1),W is M*S+W1.

w_list(0,[0]).
w_list(N,L) :- N>0,weight_list(N,L,1).
weight_list(N,[M],T) :-  M is N//T , N =:= M*T.
weight_list(N,[A|List],T) :- T1 is T+1,for0( 0 =< N,A),
N1 is N-A*T,
N1 >=T1,N1>0,
weight_list(N1,List,T1).
/** 使い方は  ?-  w_list(5, L).
などとするのでありこれから，重さ 5 のリストのが自然にできる. **/

/**二個リストによる整数の分割**/
d_list(N,L,M) :-
for0(0 =< N,I),J is N - I,
w_list(I,L),w_list(J,M).
d_list(N,I,L,J,M) :-
for0(0 =< N,I),J is N - I,
w_list(I,L),w_list(J,M).
```

```
/********* 演算子宣言    ************/
:- op(700,xfx,isd).
-1 isd f(1) :- !.
F isd f(N) :- number(N),N1 is N-1,F1 isd f(N1),
F is (-F1)*N,asserta((F isd f(N) :- !)).

shift([A|L],0,[A1|L],1) :- A>0,A1 is A-1,!.
shift([A1,A2|L],1,[A11,A21|L],A11) :- A2>0,A11 is A1+1,A21 is A2-1,!.
shift([A|L],R,[A|L1],X) :- R>1,R1 is R-1,!,shift(L,R1,L1,X).

fac(0,1) :- !.
fac(1,1) :- !.
fac(N,F) :- N1 is N-1,fac(N1,F1),F is N*F1,
asserta((fac(N,F) :- !)).

fac2(0,1) :- !.
fac2(1,1) :- !.
fac2(N,F) :- N1 is N-2,fac2(N1,F1),F is N*F1,
asserta((fac2(N,F) :- !)).
/***   1/z の高階微分  ***/
1 isd i([0]) :- !.
-1 isd i([1]) :- !.
-1 isd i([0,1]) :- !.
P isd i(L) :- append(L=L0+[0]),!,P isd i(L0).
M1 isd i([M]) :- number(M),M1 isd f(M), !.
M2 isd i([M,1]) :- number(M),M0 is M+1,M1 isd f(M0),
M2 is M1*M0* (M0+1)/2,!.

sum([A],A) :- !.
sum([A|L],S) :- sum(L,S1), S is S1+A.

P isd i(L) :- length(L,R), R1 is R-1,
sum(L,S),
Fx0 isd f(S),
Fx is -abs(Fx0),
abolish(w/1),
```

```
asserta(w(0)),
for0(0=<R1,I),
shift(L,I,Li,X0),
ifthenelse(I==0,X=Fx,X=X0),
retract(w(P0)),
Pi isd i(Li),PP is X*Pi + P0,
asserta(w(PP)),
fail.

P isd i(L) :-  retract(w(P)),asserta((P isd i(L) :- !)).
/***  合成 ***/
1 isd der([0]) :- !.
1 isd der([1]) :- !.
1 isd der([0,1]):- !.
P isd der(L) :- append(L=L0+[0]),P isd der(L0),!.
1 isd der([M]) :- number(M),!.
M1 isd der([M,1]) :- M1 is (M+1) * (M+2)/2,!.
P isd der(L) :- length(L,R), R1 is R-1,
abolish(w/1),
asserta(w(0)),
for0(0=<R1,I),
shift(L,I,Li,X),
retract(w(P0)),
Pi isd der(Li),PP is X*Pi + P0,
asserta(w(PP)),
fail.

P isd der(L) :- retract(w(P)),!,asserta((P isd der(L) :- !)).
/*  合成の高階微分 */
diff(N) :- w_list(N,L),P isd der(L),
write(P),write('*'),write(L),
nl,fail.

/*  逆の高階微分 */
inv(N) :- w_list(N,L), P isd i(L),write(P),write('*'),write(L),nl,fail.
/*  商の高階微分 */
```

```
'f/g'(N) :- for0(0 =< N,M),M1 is N-M,
w_list(M,L),
 P1 isd i(L),comb_a(N,M,P2),P is P1*P2,
write(P),write('*'),write(([M1]*L)),nl,
fail.
'f/g'(N).
d_diff(N) :- d_list(N,L1,L2),
weight(L1,W1),weight(L2,W2),
P1 isd der(L1), P2 isd der(L2),
comb_a(N,W1,Q1),K is P1*P2*Q1,
write(K * L1 * L2),nl,
fail.
d_diff(N).
comb_a(N,0,1) :- !.
comb_a(N,1,N) :- !.
comb_a(N,P,Q) :- P1 is P-1,N1 is N-1,!,comb_a(N1,P1,Q1),
Q is N/P*Q1,asserta( (comb_a(N,P,Q):- !) ).
```

§7.

ここではなにかと役たつ (例えば試験問題にだすとき) 出力結果をならべておく. ここでの係数は, 前の節で求めた公式を使うと簡単であるが, ここでは帰納的にすべてを計算している.

2 変数の d^3f の展開 始めの数は係数, 次の I は $(dz)^I$ に対応して, 次の J は $(dw)^J$ の J である. たとえば $[1,1][1]$ は dzd^2zdw などと読む.

$$1*[0]*[3]+1*[0]*[0,0,1]+3.0*[0]*[1,1]+$$

$$3*[1]*[2]+3*[1]*[0,1]+3.0*[2]*[1]+$$

$$3.0*[0,1]*[1]+1.0*[3]*[0]+1.0*[0,0,1]*[0]+$$

$$3.0*[1,1]*[0]$$

2 変数の d^4f の展開

$$1*[0]*[4]+3.0*[0]*[0,2]+1*[0]*[0,0,0,1]+$$

$$4.0*[0]*[1,0,1]+6.0*[0]*[2,1]+4*[1]*[3]+$$

$$4 * [1] * [0,0,1] + 12.0 * [1] * [1,1] + 6.0 * [2] * [2]+$$
$$6.0 * [2] * [0,1] + 6.0 * [0,1] * [2] + 6.0 * [0,1] * [0,1]+$$
$$4.0 * [3] * [1] + 4.0 * [0,0,1] * [1] + 12.0 * [1,1] * [1]+$$
$$1.0 * [4] * [0] + 3.0 * [0,2] * [0] + 1.0 * [0,0,0,1] * [0]+$$
$$4.0 * [1,0,1] * [0] + 6.0 * [2,1] * [0]$$

2変数の $d^5 f$ の展開

$$1 * [0] * [5] + 1 * [0] * [0,0,0,0,1] + 10.0 * [0] * [0,1,1]+$$
$$15.0 * [0] * [1,2] + 5.0 * [0] * [1,0,0,1] + 10.0 * [0] * [2,0,1]+$$
$$10.0 * [0] * [3,1] + 5 * [1] * [4] + 15.0 * [1] * [0,2]+$$
$$5 * [1] * [0,0,0,1] + 20.0 * [1] * [1,0,1] + 30.0 * [1] * [2,1]+$$
$$10.0 * [2] * [3] + 10.0 * [2] * [0,0,1] + 30.0 * [2] * [1,1]+$$
$$10.0 * [0,1] * [3] + 10.0 * [0,1] * [0,0,1] + 30.0 * [0,1] * [1,1]+$$
$$10.0 * [3] * [2] + 10.0 * [3] * [0,1] + 10.0 * [0,0,1] * [2]+$$
$$10.0 * [0,0,1] * [0,1] + 30.0 * [1,1] * [2] + 30.0 * [1,1] * [0,1]+$$
$$5.0 * [4] * [1] + 15.0 * [0,2] * [1] + 5.0 * [0,0,0,1] * [1]+$$
$$20.0 * [1,0,1] * [1] + 30.0 * [2,1] * [1] + 1.0 * [5] * [0]+$$
$$1.0 * [0,0,0,0,1] * [0] + 10.0 * [0,1,1] * [0] + 15.0 * [1,2] * [0]+$$
$$5.0 * [1,0,0,1] * [0] + 10.0 * [2,0,1] * [0] + 10.0 * [3,1] * [0]+$$

$d^5(f/g)$ の展開

$$1 * [5] * [0] - 5 * [4] * [1] + 20.0 * [3] * [2] - 10.0 * [3] * [0,1]$$
$$-60.0 * [2] * [3] - 10.0 * [2] * [0,0,1] + 60.0 * [2] * [1,1] + 120.0 * [1] * [4]+$$
$$30.0 * [1] * [0,2] - 5.0 * [1] * [0,0,0,1] + 40.0 * [1] * [1,0,1]$$
$$-180.0 * [1] * [2,1] - 120.0 * [0] * [5] - 1.0 * [0] * [0,0,0,0,1]+$$
$$20.0 * [0] * [0,1,1] - 108.0 * [0] * [1,2] + 10.0 * [0] * [1,0,0,1]$$

$$-84.0 * [0] * [2, 0, 1] + 240.0 * [0] * [3, 1]$$

参考文献
Ｐｒｏｌｏｇで作る数学の世界　飯高茂　１９９０年　朝倉書店

［注意書き］

今回は，LaTeX で原稿を清書しましたが，案外面倒でしたので，一太郎でまず通常のように気軽に文書を作り，それを自動的に LaTeX の文書に直すためのプログラムを作りました．このために，気安く LaTeX の文書が作成できました．
前と後に空白で区切られた英数文字列は自動的に数式とみなす，という大胆?な思想で作っています．自動変換した後は LaTeX の文法に従い微調整するのです．すなわち，日本語の数学文書にしか使えません．希望者には差しあげます．