Abelian Garnier系について

熊本大学理, 数学　梅村　浩 (Hiroshi Umemura)

次の2つのことがよく知られている.

(1) Jacobi自身による, 超楕円曲線のJacobi多様体の構成. 即ち, $C: y^2=f(x)$ を超楕円曲線とする。 $f(x)$ の次数を $2k-1$ 次とすれば, その genus g は $k-1$ に等しい。 このとき

$$J^g(C) - \Theta \simeq \{ U, V, W \mid f - V^2 = UW,\ U, W \text{ は monic で } \deg V \le k-2,\ \deg U = k-1,\ \deg W = k \}$$

が成立する (MumfordのTata講義 [1] 参照). ここで, $y^2=f(x)$ は $\det\left(\begin{bmatrix} V & U \\ W & -V \end{bmatrix} - yI_2\right) = 0$ と書けることに注意する。 この応用として, C. Neumann の力学系

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = -a_i x_i + x_i\left(\sum_k (a_k x_k^2 - y_k^2)\right) \end{cases} \qquad (1 \le i \le n)$$

(ここで, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 1$, $\cdot = \frac{d}{dt}$ とする) の超楕円曲線のJacobi多様体による積分がある(*). この力学系はいわゆる, 代数的に

(*) a_i は定数

完全積分可能である。

(2) Painlevé 方程式，例えば $y''=6y^2+x$ は Hamilton 系であることが知られている(*) $H=\frac{1}{2}y^2-2w^3-xy$ とすれば，

$dy/dx=\partial H/\partial w$, $dw/dx=-\partial H/\partial y$ より $\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2+x$.

さらに，この退化として，$y''=6y^2$ があり，これは楕円関数で積分できる。 これら (1), (2) の一般化を行う。

———— ∘ ———— ∘ ————

線型微分方程式

$$(1)\quad \frac{dy_k}{dx}=\sum_{h=1}^{m} y_h \sum_{i=1}^{n+2}\frac{A^i_{hk}}{x-t_i} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

を考える，但し $t_{n+1}=0$, $t_{n+2}=1$ と仮定する。

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y'=ya$$

と書いてもよい。ここで，$a=\left(\sum_{i=1}^{n+2}\frac{A^i_{hk}}{x-t_i}\right)$ は $m\times m$ 正方行列であり，y は(1)の m 個の独立解のつくる $m\times m$ 行列である。

A^i_{hk} を $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の関数とし，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ を動かしたとき(1)のモノドロミー群が $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に関係しない条件をもとめる。即ちモノドロミー保存変形を考察する。

x は $\mathbb{C}$ の座標であるが，$\mathbb{C}$ の閉曲線に沿っての解析接続を S であらわす。即ち $Sy=Ay$ 従って $|A|\neq 0$, $\frac{\partial A}{\partial x}=0$.

つまり，我々のもとめる条件は，任意の閉曲線について，$\partial A/\partial t=0$ なる解 y の存在する条件に他ならない。

(*) Painlevé 方程式は線型常微分方程式のモノドロミー保存変形を記述している。

$t_0 = x$ と置く。さらに $y^{-1}\dfrac{\partial y}{\partial t_i} = \beta_i$ と置く。特に $\beta_0 = a$ である。

(3) $$\left(\frac{\partial Sy}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial Ay}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial A}{\partial t_i}\right)y + A\frac{\partial y}{\partial t_i} = Ay\beta_i,$$

(4) $$S\left(\frac{\partial y}{\partial t_i}\right) = S(y\beta_i) = SySβ_i = AyS\beta_i.$$

S は x に関しての解析接続であるので、

$$\frac{\partial(Sy)}{\partial t_i} = S\left(\frac{\partial y}{\partial t_i}\right) \qquad (i \geqq 1).$$

(3) (4) より、$Ay\beta_i = AyS\beta_i \quad (i \geqq 1)$. $|A|, \ |y| \neq 0$ であるので、$\beta_i = S\beta_i \quad i \geqq 1$ となる。(*)

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = y\beta_i \qquad (0 \leq i \leq m)$$

の積分可能条件より、即ち $\partial^2 y/\partial t_i \partial t_j = \partial^2 y/\partial t_j \partial t_i$ $0 \leqq i, j \leq n$ より、

$$y\beta_j\beta_i + y\frac{\partial \beta_i}{\partial t_j} = y\beta_i\beta_j + y\frac{\partial \beta_j}{\partial t_i}$$

を得る。

(5) $$\frac{\partial \beta_i}{\partial t_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial t_i} = \beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i.$$

(*) つまり β_i は $\mathbb{C}$ 上一価である。又逆に上の計算から、β_i が $\mathbb{C}$ 上一価であれば、$\dfrac{\partial A}{\partial t_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$ となる。

このとき，β_iの型は限定されてしまう。

補題 (6) $\beta_i = -\dfrac{A^i}{x-t_i} + \gamma_i \quad (1 \leq i \leq n)$ が成立する。ここで，γ_iはxの関数ではない ($\partial\gamma_i/\partial x = 0$)。

(i.e. $\partial C/\partial x = 0$)

さて C をxについて定数である正則 $m\times m$ 行列とすると，$y = YC$ と置くと，

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = YCaC^{-1}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t_i} = YC_i$$

ここで，$C_i = C\beta_i C^{-1} - \dfrac{\partial C}{\partial t_i} C^{-1}$ となる。つまり，γ_i は $C\gamma_i C^{-1} - (\partial C/\partial t_i) C^{-1}$ にかわる。

従って，もし微分方程式

(7) $\quad \partial C/\partial t_i = C\gamma_i \quad (1 \leq i \leq n)$

が解けるならば，$\gamma_i = 0$ と仮定できる。

(7)は実際に解を持つことを示す。実際，(6)を(5)に代入すると，$\partial\gamma_i/\partial t_j - \partial\gamma_j/\partial t_i = \gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i$

となり，(7)は完全積分可能となる。

以上より，我々の求める条件は (5)と同値となり，さらに $\beta_i = -A^i/(x-t_i)$ と仮定してよい。(5)より，

$$(8) \quad -\frac{1}{x-t_i}\frac{\partial A^i}{\partial t_j} + \frac{1}{x-t_j}\frac{\partial A^j}{\partial t_i} = \frac{A^iA^j - A^jA^i}{(x-t_i)(x-t_j)}$$

$$(1 \leq i, j \leq n)$$

(19) $$\frac{\partial \beta_i}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t_i} = \beta_i a - a \beta_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

を得る。条件(18), (19)がモノドロミーが $t_1, t_2, \dots, t_n$ に依らない必要十分条件である。

(18), (19)より計算により次の結果を得る。

<u>命題</u>(Schlesinger). <u>微分方程式(1)のモノドロミーが</u> $t_1, t_2, \dots, t_n$ <u>に依らない必要十分条件は</u>, A^i <u>が次の微分方程式を満すことである</u>[*]:

$$(A_t) \begin{cases} \dfrac{\partial A^i}{\partial t_j} = \dfrac{[A^i, A^j]}{t_j - t_i} & (i \neq j, \ 1 \leqq i, j \leqq n), \\[2ex] \dfrac{\partial A^i}{\partial t_i} = \left[A^i, \displaystyle\sum_{l \neq i} \frac{A^l}{t_i - t_l}\right] & (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

微分方程式系 (A_t) は Painlevé 方程式を一般化するような, 難しい超越関数を一般には定義している。今回, 我々が興味を持つのは, その退化である。

即ち, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2} \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数とする。$t_i = \alpha_i + \varepsilon \bar{t}_i$, $A^i = \varepsilon^{-1} \bar{A}^i$ とおいて, $\varepsilon \to 0$ とすると,

---

(*) $A^i = (A^i_{hk})_{1 \leqq h, k \leqq m}$ は m 次正方行列である。

$$
(\bar{A}_\alpha)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{t}_i} = \dfrac{[\bar{A}^i, \bar{A}^j]}{\alpha_j - \alpha_i}, \\[2ex]
\dfrac{\partial \bar{A}^i}{\partial t_i} = \left[\bar{A}^i, \displaystyle\sum_{l \neq i} \frac{\bar{A}^l}{\alpha_i - \alpha_l}\right].
\end{cases}
$$

を得る．記号を簡単にする為に，$\bar{A}^j$, $\bar{t}_i$ を再び A^j, t_i と置くと，

$$
(A_\alpha)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial A^j}{\partial t_i} = \dfrac{[A^i, A^j]}{\alpha_j - \alpha_i}, \\[2ex]
\dfrac{\partial A^i}{\partial t_i} = \left[A^i, \displaystyle\sum_{l \neq i} \frac{A^l}{\alpha_i - \alpha_l}\right]
\end{cases}
$$

となる。

(A_t) は通常 Schlesinger 系と呼ばれている。(A_α) は Garnier によって初めて導入された。Garnier 系と言う言葉は別の意味に既に使用されているので，(A_α) を Abelian Garnier 系と呼ぼう。

さて，$\alpha_{n+1} = 0$，$\alpha_{n+2} = 1$ と仮定する。$\mathbb{C}$ の affine 変換により，この様に仮定しても構わない。

$$
\prod_{i=1}^{n+2} (x - \alpha_i) = x(x-1) \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = \varphi(x)
$$

と置く，さらに $b(x) = \varphi(x) a(x)$ とする。$b(x)$ は m 正方行列であって，その成分 $b_{kl}(x)$ は高々 $n+1$ 次の多項式で

ある．

補題　次の条件は同値である．

(1) A^i は (A_α) を満す．

(2) $\partial B/\partial t_i = [A^i, B]/(x-\alpha_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ が成立する．

基本定理(Garnier)．　$f(x,y) = |yI_m - B(x)|$ と置く．A^i が (A_α) を満せば，$f(x,y)$ の係数は $t_1, t_2, \cdots, t_m$ の定数である．言い換えれば，$f(x,y)$ の係数は (A_α) の第1積分である(*)．

証明　上の補題を使って計算すればよい．

基本定理は，我々はモノドロミー保存変形から出発したがスペクトル保存変形を得たことを示している．

さて次に，Spectral 曲線について説明する。

$S_d = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg f \leq d \}$ とおく。$f(y,x) = y^m + s_1(x) y^{m-1} + \cdots + s_m(x) \in \mathbb{C}[y,x]$，$\deg s_i(x) \leq ik$ を考える(ここで k は非負整数である)。平面曲線 $f(y,x) = 0$ 又はそのモ

(*) 2変数の多項式 $f(x,y)$ の係数のことを意味する。

デルを Spectral 曲線という。 $A(x) \in M_m(S_{n+1})$ とすれば固有多項式 $|yI_m - A(x)| = 0$ は Spectral 曲線となる。序文に書いた超楕円曲線は Spectral 曲線である。以下 $f(y,x)=0$ の $A^2 \subset \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n-1))$ における閉包は既約，非特異とする（$k=n+1$）. $k=n+1$ として上の曲線 $C: f(y,x)=0$ の genus を計算しよう。

$\pi : F_{n+1} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n-1)) \to \mathbb{P}^1$ を projection とする。π の section D_∞ で $\pi_*(D_\infty) = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n-1)$ となるものが存在する。 $D_\infty^2 = -(n+1)$, $l = \pi^{-1}\infty$ ($\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) とおけば，$(D_\infty . l) = 1$, $(l, l) = 0$.

$C = m(D_\infty + (n+1)l)$ と linearly equivalent であることが示せる。さらに，$K_{F_{n+1}} = -2D_\infty - (n+3)l$ であるので，adjunction 公式によって，

$$(K + C,\ C) = 2g - 2$$

即ち $g = \dfrac{m(m-1)(n+1)}{2} - m + 1$.

<u>定理</u>（[B]）. $C: p(y,x) = 0$ を <u>spectral 曲線とする</u>[*]。
$M_p = \{ A \in M_m(S_{n+1}) \mid \det(yI_m - A(x)) = p(y,x) \}$ <u>とおく</u>。
$PGL_m(\mathbb{C})$ <u>は</u> M_p <u>に自由かつ固有に作用し</u>，

$$J^{g-1}(C) - \Theta \simeq M_p / PGL_r(\mathbb{C}).$$

(*) $p(y,x) = y^m + s_1(x)y^{m-1} + \cdots + s_m(x)$, $s_i(x) \in S_{i(n+1)}$.

ここで, $J^{g-1}(C)$ は C上の次数$g-1$の直線束Lの同型類全体, Θ はその内 $H^0(L)\neq 0$ となるL全体を表わす.

証明のスケッチ　C上の直線束Lを与えることは, 階数mの$\mathbb{P}^1$上のベクトル束π_*L および $\pi_*\mathcal{O}_C$-moduleの構造をその上に与えることと同値である($\pi: F_{n+1}\to\mathbb{P}^1$ のCへの制限も $\pi: C\to\mathbb{P}^1$ で表わした). $E=\pi_*L$ 上に $\pi_*\mathcal{O}_C$-module の構造を与えることは, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-algebra 準同型 $\pi_*\mathcal{O}_C\to \mathrm{End}\,E$ を与えることと同値, これは又 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-linear map : $u: E\to E(n+1)$ であって, $P(u,x)=0$を満すものを与えるのと同値. $L\in J^{g-1}(C)-\Theta$ とすれば, $H^0(L)=H^1(L)=0$ つまり $\pi_*L\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$. 又逆に, $\pi_*L\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$ ならば, $L\in J^{g-1}(C)-\Theta$. 従って $v:\pi_*L\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$ を固定すれば $v^{-1}uv: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)^m$. 故に,

$$\{L\in J^{g-1}(C)-\Theta + \text{同型 } v:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m \xrightarrow{\sim}\pi_*L\}$$
$$\simeq\{A(x)\in M_p\}.$$

定義より上の補題の条件(2)は M_f 上に可換なflowを定義する. さらに, A^i を MA^iM^{-1} $(1\le i\le n)$ で置き換えても ($M\in PGL_m(\mathbb{C})$) このflowは不変である, したがって

$M_f/PGL_m(\mathbb{C}) \simeq J^{g-1}(C) - \Theta$ 上の可換な flow を定義する．従って，abelian Garnier 系は $J(C) - \Theta$ 上の運動を記述する．

定理([B]). Abelian Garnier 系の定義する $J(C) - \Theta$ 上の flow は線型である．

さて，Abelian Garnier 系が代数的に完全積分可能な Hamiltonian 系であろうと予想していたが，Beauville は最近このことを証明した．以下に，このことを説明する。

大域的な構成を考える．$V_m(n+1)$ を spectral 多項式 $P = y^m + s_1(x)y^{m-1} + \cdots + s_m(x)$，$s_i(x) \in S_{i(n+1)}$ 全体とする．$V_m(n+1)$ を affine 空間 $S_{n+1} \times S_{2(n+1)} \times \cdots \times S_{m(n+1)} \simeq A^{n+2} \times A^{2(n+1)+1} \times \cdots \times A^{m(n+1)+1}$ と同一視する

$h : M_m(S_{n+1}) \to V_m(n+1)$ を $h(A(x)) = \det(yI_m - A(x))$ により定義する，$PGL_m(\mathbb{C})$ は $M_m(S_{n+1})$ に共役により作用する．$Q_m(n+1) = M_m(n+1)/PGL_m(\mathbb{C})$ とおく．

命題([B]). $\bar{h} : Q_m(n+1) \to V_m(n+1)$ は smooth であり，$P \in V_m(n+1)$ に対して，fibre $\bar{h}^{-1}(P)$ は $J^{g-1}(C_p) - \Theta$ と同型である．ここで，$C_p : P(y,x) = 0$ である．

Beauville は Kirillov-Kostant の方法により，次のことを示した．

定理[B]. $\mathcal{H}$: $Q_m(n+1) \to V_m(n+1)$ は代数的に完全積分可能な Hamilton 系である．

ただし，$Q_m(n+1)$ 上に Poisson 構造が定義されるが，それは階数が極大でなく，つまり Symplectic 構造ではない。しかし　　　symplectic 構造の族となっている（[B], (5.5) Théorème P229）．

参考文献

[B] A. Beauville ; Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables, Acta Math., 164 (1990), 211-235.