On Elliptic Threefolds

東大・数理　中山 昇

§0. 3次元複素多様体は elliptic fibration を持つ時、elliptic threefold と呼ばれる。elliptic fibration とは normal complex analytic space の間の proper morphism で general fiber が elliptic curve となるものである。elliptic threefold は曲面論において elliptic surface がそうであった様に、3次元多様体論でも重要な class である。elliptic surface と比べて elliptic threefold が研究しずらい点は、fibration が flat とは限らない、base surface が nonsingular とは限らない、fibration が locally projective とは限らない等いくつかある。しかし、最近の3次元極小モデル理論 (analytic space の間の projective morphism に対する minimal model theory + flip theorem + flop theorem etc.) [N1][Mr][Ka] により少し見通しが明るくなった。

§1. standard elliptic fibration.

与えられた elliptic threefold に対し、base surface を適当に blow-up すれば、fibration を flat にすることができる。すると、fiber が1次元であることから、これが locally projective morphism になることがわかる。

定義。 $f: Y \longrightarrow T$ を normal surface T 上の elliptic fibration とする。f が以下の条件をみたすとき、f を standard elliptic fibration と呼ぶ：

(1) Y は高々 terminal sing. しかもたない。

(2) Y は高々 $\mathbb{Q}$-factorial singularity しかもたない。

(3) f は locally projective morphism

(4) f のすべての fiber は1次元

(5) ある effective $\mathbb{Q}$-divisor Δ が T 上にあって

(a) (T, Δ) は log-terminal

(b) $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_T + \Delta)$

すると次の定理を得る。

定理 1　$\pi: X \longrightarrow S$ を surface S 上の locally projective elliptic fibration とする。このときある standard elliptic fibration $f: Y \longrightarrow T$ が存在して、以下の条件をみたす。

1) bimeromorphic morphism $\mu: T \longrightarrow S$ が存在する

2) π と $\mu \circ f$ は S 上 bimeromorphically equivalent

3) K_Y は $\mu \circ f$-semi-ample

証明のあらすじ。 π は locally projective なので、S の各点 P に対しある近傍 U をとれば $\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ は projective morphism

となる。$N^1(\pi^{-1}(U)/U;p)$ についての minimal model program [N1] を実行すると、(flip存在定理[Mr]により実行可能)、relative minimal model $Z_U \longrightarrow U$ ができる。この minimal model は flop の差を除いて unique に定まるが flop があらわれるような base surface の点 p は discrete である。従って この Z_U たちをはりあわせることができ、locally projective な minimal model $Z \longrightarrow S$ ができる。この段階では K_Z は relatively nef というだけで relatively numerically trivial になっていない。しかし base point free theorem により K_Z は relatively semi-ample になるので、ある $\mu: T \longrightarrow S$ bimeromorphic morphism と、$h: Z \longrightarrow T$ があって合成 $Z \to T \to S$ が元の morphism, K_Z は h-numerically trivial にできる。すると [N2] によって T上に effective $\mathbb{Q}$-divisor Δ が存在し (T, Δ) log-terminal, $K_Z \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_T+\Delta)$ とできる。次に $h: Z \longrightarrow T$ のある fiber が2次元 component E をふくんでいる場合を考える。この時 Z上に effective divisor D をとって $D+kE$ ($k>0$) が T上の effective Cartier divisor の引きもどしになるようにできる。ここで log terminal pair $(Z, \varepsilon D)$ $(0<\varepsilon\ll 1)$ の $N^1(Z/T, \mu^{-1}(p))$ ($p = \mu \cdot h(E)$) における log-minimal model program を実行する。K_Z が relatively trivial なので flip にあたるところは flop の存在[Ka]によりうまく機能する。もしも $-E$ が h-nef でなければ、$K_Z+\varepsilon D$ についての log-extremal ray が存在し、そのcontraction morphism がある。ここで E はその contraction ではつぶれない。divisorial contraction

やflopをくりかえすといつか $-E'$ は T 上nefになる。ここで E' は E のproper transform. すると再びbase point free theoremにより，$-E'$ は T 上semi-ample. 従ってあるbimeromorphic morphism $\mu_1 : T_1 \to T$ とmorphism $V_1 \to T_1$（ただし V_1 はcontractionやflopで最後に得られたvariety）が存在し E' は T_1 上のdivisorのpullbackになる。V_1 は高々canonical singularityしか持っていないので，てきとうにcrepantなpartial resolution $Z_1 \to V_1$ を取ることができる。この $Z_1 \to T_1$ についてfiberの次元が1かどうかcheckする．もしそうでなければ今の操作をくりかえす。Z と Z_1 はflopでつながり $N^1(Z/T; \mu^{-1}(p)) = N^1(Z_1/T; \mu^{-1}(p))$ なのでこの操作はいつかはおわる。従ってすべてのfiberが1次元となるような $Z \to T$ がとれる。ここで Z の $\mathbb{Q}$-factorialization $Y \to Z$ をとる（[Ka]）。今が $Y \to T$ の各fiberも1次元なのでこの $Y \to T$ は再びlocally projectiveとなり、これが求めるstandard modelとなる。

§2. Compact elliptic Kähler threefold

定理2. X をcompact Kähler 3-foldでelliptic fibration $f : X \to S$ を持つとする。すると X はuni-ruledであるか，そうでなければgood minimal modelを持つ。

ここで X が uniruled とは ある compact surface Y があって dominant meromorphic mapping $Y\times\mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ が存在することである。good minimal model V とは V が高々 terminal sing. のみしか持たない analytic variety で K_V が semi-ample なものである。定理の証明には Torsion free theorem for higher direct images of dualizing sheaves, Abundance theorem on surfaces, a lemma on uniruledness が必要となる。

定理 (Torsion free theorem) $\pi : X \longrightarrow V$ を complex manifold X から complex analytic variety V への elliptic fibration, $f : V \longrightarrow W$ を complex analytic variety W への surjective な projective morphism, A を f-ample invertible sheaf on V とする。この時 以下が成立する。

1) $R^i\pi_*\omega_X$ $(i\geq 0)$ は torsion free sheaves. もしも V が nonsingular で、π が V 上の normal crossing divisor の外側で smooth ならば、$R^i\pi_*(\omega_{X/V})$ は π が定める variation of Hodge structure の canonical extension から決まる locally free sheaf と同型になる。

2) $R^pf_*(R^i\pi_*\omega_X\otimes A) = 0$ for $p>0$, $i\geq 0$.

この定理は [Ko] [Mw] [S] 等により π が projective morphism の場合には証明されていた (ただし elliptic fibration である必要はない)。elliptic fibration の場合、flattening をとれば locally projective morphism となることと、canonical bundle formula によって、projective case の結果と

vanishing theorem [N1] によって示される。次の locally projectivity をいうための criterion は minimal model program がうまく機能するために必要である。

命題3。$\pi : X \longrightarrow V$ を complex manifold X から complex analytic variety V への proper surjective morphism で、ある点 $p \in V$ に対して $(R^2\pi_*\mathcal{O}_X)_p = 0$ となっているとする。このとき π が p 上で projective morphism になっていることと、p にある近傍 U があって $\pi^{-1}(U)$ が Kähler metric をもつことが同値。

証明は V が1点の時と同様に relative な Kähler cone が $(R^2\pi_*\mathbb{R}_X)_p$ の open cone であることを示すことによってできる。

系4。$f : Y \longrightarrow S$ が complex Kähler manifold Y から complex manifold S への elliptic fibration で、S 上の normal crossing divisor の外側で smooth なものとする。このとき f は locally projective morphism である。

また Torsion free theorem に $\mathbb{Q}$-divisor の vanishing theorem 等を合わせることにより次の定理も得る。

定理5。$f : X \longrightarrow Y$ を elliptic fibration, $g : Y \longrightarrow Z$ を projective morphism, X, Y, Z は normal complex variety とする。以下の2条件を仮定すると、$R^2(g \circ f)_*\mathcal{O}_X = 0$ である：

(1) $(X, 0)$ は log-terminal

(2) Y上にある g-ample な $\mathbb{Q}$-divisor L があって $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*L$

Abundance theorem for surfaces とは次の結果である。

定理6. T を class $\mathcal{C}$ に属する (compact Kähler manifold と bimeromorphically equivalent) normal compact complex surface、Δ を T上の effective な $\mathbb{Q}$-divisor で (T, Δ) は log-terminal であるとする。もしも T 上の任意の irreducible curve C に対して $(K_T+\Delta)\cdot C \geq 0$ ならば $K_T+\Delta$ は semi-ample。

Tが Moishezon の時は [F] によって示されているし、その時の方が難しい。algebraic dimension $a(T)$ が1以下の時は、big な divisor が存在しないので、簡単に証明できる。uniruledness をいう時には次の補題を使う。

補題7. $f: X \longrightarrow M$ を complex manifolds の間の proper surjective morphism で、general fiber は $\mathbb{P}^1$ と同型とする。X上に相異なる prime divisors D_1, D_2 があり、さらに D_1 上に Cartier divisor D_3 があって

(1) D_1, D_2 は共に M を bimeromorphical に dominate している

(2) $\mathcal{O}_{D_1}(D_1) \cong \mathcal{O}_{D_1}(D_3)$

ならば fは projection $M \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow M$ と bimeromorphically equivalent.

定理2の証明のあらすじ: algebraic dimension $a(X)=3$ の時は

Xはprojectiveなので[Mr]により定理2は示されている。従って$a(X) \leqq 2$としてよい。てきとうにX, Sをblow-upしておけばSもcomplex manifoldでS上のnormal crossing divisorの外側でfはsmoothとできる。すると系4により、fはlocally projective morphismとなる。従って定理1によりfとbimeromorphically equivalentなstandard elliptic fibration $h: Y \to T$が存在し、$K_Y \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_T + \Delta_T)$とかける。もしも$K_T + \Delta_T$が$T$上の任意のirreducible curve Cに対して$(K_T+\Delta_T)\cdot C \geqq 0$となっていれば、定理6により、$K_T + \Delta_T$はsemi-ample 従って$K_Y$もsemi-ampleとなり$Y$はgood minimal modelとなる。もしT上にirreducible curve Cがあり$(K_T+\Delta_T)\cdot C < 0$かつ$C^2 < 0$となっていると$C$のcontraction $T \xrightarrow{\delta} T'$を考えることができる。このとき$-(K_T + \Delta_T)$は$\delta$-ampleである。命題3、定理5より、$Y \to T'$（合成）はlocally projective morphismとbimeromorphically equivalentになる。よって定理1の様に$Y \to T'$からminimal elliptic fibrationを作ることができるが、今十分大きな$m > 0$に対して$\delta_* \mathcal{O}_T(m(K_T + \Delta_T)) \cong \mathcal{O}_{T'}(m(K_{T'} + \Delta_{T'}))$（ただし$\Delta_{T'} = \delta_* \Delta_T$）がなりたつので、$T'$上のminimal model $h' : Y' \to T'$について$K_{Y'} \sim_{\mathbb{Q}} h'^*(K_{T'} + \Delta_{T'})$がなりたつ。もしも$(K_{T'} + \Delta_{T'})\cdot C' \geqslant 0$が任意の$T'$上のirreducible curve C'についてなりたてば、定理6により$K_{T'} + \Delta_{T'}$はsemi-ample. よってY'がgood minimal modelとなる。従って$(K_T+\Delta_T)C < 0$かつ$C^2 < 0$なるcurveがある限りcontractして、$Y \xrightarrow{h} T$をmodel changeしていける。よって最終的に$h: Y \to T$は次の条件をみたすとしてよい。

1) h は standard elliptic fibration で, $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_T + \Delta_T)$

2) $(K_T+\Delta_T)\cdot C < 0$ となる irreducible curve C が T 上にある。

3) $(K_T+\Delta_T)\cdot C < 0$ かつ $C^2 < 0$ となる irreducible curve C はない。

ここでもし $a(T) < 2$ とすると, 命題3（Vが1点のcase）により $p_g(T) \neq 0$. よって $K_T + \Delta_T$ と $\mathbb{Q}$-linearly equivalent な effective $\mathbb{Q}$-divisor がある。よって 2)をみたす C は常に $C^2 < 0$ でないといけない。従って $a(T) = 2$。T は projective と仮定できる。2)により $K_T+\Delta_T$ についての extremal ray の contraction $\sigma : T \longrightarrow Z$ ができる。すると $-(K_T+\Delta_T)$ が σ-ample なので, 命題3, 定理5により合成 $Y \longrightarrow Z$ は locally projective morphism と bimeromorphically equivalent。もし Z が1点だとすると, $a(Y) = a(X) = 3$ で仮定に反する。よって Z は smooth curve。F を $Y \to Z$ の general fiber とすると, $-K_F$ は semi-ample で $K_F^2 = 0$ である。もしも $q(F) = 0$ ならば, $R^1(\sigma \circ h)_* \mathcal{O}_Y = 0$ であり, $H^2(\mathcal{O}_Y) = 0$ となる。すると命題3（Vが1点のcase）により $a(Y) = 3$ となって矛盾。ゆえに F は elliptic curve E 上の $\mathbb{P}^1$-bundle である。$Y \longrightarrow Z$ の minimal model program を考えれば Z 上の meromorphic mapping $\zeta : Y \dashrightarrow N$ で

1) N は normal non-projective surface

2) $N \longrightarrow Z$ は elliptic fibration

3) general fiber F 上で ζ は $F \longrightarrow E$ を induce する

という性質をもつものができる。

ここで H_1, H_2 を T の general ample divisors とし $D_1\ D_2$ をその Y への pullback とする。D_1, D_2 は N を dominate している。よって補題7により てきとうに finite covering $N' \to N$ をとれば Y が $N' \times \mathbb{P}^1$ で dominate されるようにできる。ゆえに X は uniruled である。□

証明の詳細は [N3] を参照。

参考文献

[F] T. Fujita, Fractionally logarithmic canonical rings of algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 30 (1983), 685–695.

[Ka] Y. Kawamata, Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical sing...., Ann. Math. 127 (1988), 93–163

[Ko] J. Kollár, Higher direct images of dualizing sheaves I, II, Annals of Math., 123 (1986) 11–42, ibid. 124 (1986), 171–202.

[Mr] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models..., J. AMS. 1 (1988), 117–253.

[Mw] A. Moriwaki, Torsion freeness of higher direct images.., Math. Ann. 276 (1987), 385–398

[N1] N. Nakayama, The lower semi-continuity of the plurigenera... Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987) 551–590

[N2] —, On Weierstrass Models, in Algebraic Geom. and Commutative Alg. in honor of M. Nagata (1987) 405–431

[N3] —, Local structure of an elliptic fibration, preprint Univ. Tokyo (1991)

[S] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 24 (1988), 849–995.