数値的小平次元

中山　昇
京都大学数理解析研究所
E-mail: nakayama@kurims.kyoto-u.ac.jp

1. D 次元と数値的 D 次元

この話では代数多様体はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする．非特異な射影的代数多様体 X の因子 (divisor) D に対する D 次元 $\kappa(D) = \kappa(D, X)$ が飯高によって導入され X の小平次元が $\kappa(X) := \kappa(K_X, X)$ と標準因子 K_X によって定義された．定義の仕方により D が $\mathbb{Q}$ 因子や $\mathbb{R}$ 因子でも D 次元が定義できる．特異点のある多様体でもその上の因子 D が $\mathbb{Q}$-Cartier または $\mathbb{R}$-Cartier ならば，適当な特異点解消によって引き戻しを考えることによってその D 次元が定義できる．しかし D_1 と D_2 が数値的同値，つまり第一 Chern 類 $c_1(D_1), c_1(D_2)$ が $H^2(X, \mathbb{R})$ の中で等しいとき，でも二つの κ は異なることがある．

一方 D が nef のとき，すなわち任意の既約曲線 C との交点数 $D \cdot C \geq 0$ なるとき，には数値的 D 次元 $\nu(D) := \nu(D, X)$ が定義される．これは D^k が $H^{2k}(X, \mathbb{R})$ の中でゼロでないという性質を持つ非負整数 k の最大値である．また因子は前と同様 $\mathbb{R}$ 因子でもよいし，特異点のある多様体上の $\mathbb{R}$-Cartier 因子でもよい．この量は D の第一 Chern 類のみに依存する．因子 D が nef のとき $\kappa(D) = \dim X$ と $\nu(D) = \dim X$ は同値条件である．一般に $\kappa(D) = \dim X$ のとき D を big と言う．また $\kappa(D) = \nu(D)$ となる nef な因子 D を abundant と言うがこのとき D は適当な双有理射で引き戻すと $\kappa(D)$ 次元の代数多様体の big な因子の引き戻しと $\mathbb{Q}$ 線型同値になる [Ka2]．射影的代数多様体 X が terminal 特異点しかもたず，標準因子 K_X が nef の時，それを極小モデルと言う．極小モデルの標準因子 K_X は semi-ample である，というのが abundance 予想である．川又 [Ka2] はこの K_X が abundant ならば semi-ample であることを示した．

今回の話はこの数値的 D 次元を nef 因子だけでなく全ての $\mathbb{R}$ 因子（特異点のあるときは $\mathbb{R}$-Cartier 因子）に対して定義をしてその性質を調べることである．詳しい結果は [N] を参照されたい．

2. 擬正因子 (PSEUDO-EFFECTIVE DIVISOR)

非特異射影的代数多様体 X 上の $\mathbb{R}$ 因子の第一 Chern 類全体は $H^2(X,\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間 $N^1(X)$ をなす. これは Néron-Severi 群 $\mathrm{NS}(X)$ に対する$\mathrm{NS}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ と同型である. この中で正 $\mathbb{R}$ 因子 (effective $\mathbb{R}$-divisor), すなわち既約分解したときの各係数が非負となる $\mathbb{R}$ 因子, の第一 Chern 類全体は凸錐体をなす. この錐体の閉包を $\mathrm{PE}(X)$, その内部 $\mathrm{Int}\,\mathrm{PE}(X)$ を $\mathrm{Big}(X)$ と書く. 第一 Chern 類 $c_1(D)$ が $\mathrm{PE}(X)$ に含まれるとき, $\mathbb{R}$ 因子 D を 擬正 (pseudo-effective) と呼び, $\mathrm{Big}(X)$ に含まれるとき, big と呼ぶ. $\mathbb{R}$ 因子 D が big であることと $\dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner)$ が m の函数として $m^{\dim X}$ の order であることは同値である. ただしここで $\llcorner D \lrcorner$ は D の切り下げを表わす. また ample 因子の第一 Chern 類の正の実数による線型結合全体は凸錐体 $\mathrm{Amp}(X)$ を生成するが, この閉包を $\mathrm{Nef}(X)$ と書く. その内部 $\mathrm{Int}\,\mathrm{Nef}(X)$ は $\mathrm{Amp}(X)$ である. $c_1(D)\in\mathrm{Nef}(X)$ となる $\mathbb{R}$ 因子 D を nef と呼び, $c_1(D)\in\mathrm{Amp}(X)$ のとき ample と呼ぶ. これは D が $\mathbb{Q}$ 因子のときの通常の nef および ample の定義と一致する. 数値的 D 次元 $\nu(D)$ は nef cone $\mathrm{Nef}(X)$ から $\{0,1,\dots,\dim X\}$ への凸函数である. $\mathbb{R}$ 因子 D が擬正であることは任意の ample $\mathbb{R}$ 因子 A に対して $D+A$ が big であることと同値である. 擬正 $\mathbb{R}$ 因子 D と X 上の一点 x に対して以下の様に実数 $\sigma_x(D)$ を定義する.

- D が big のとき,

$$\sigma_x(D) := \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{mult}_x\,\mathrm{Bs}\,|\llcorner tD \lrcorner|.$$

- D が単に擬正のとき, ample 因子 A をひとつ選んで

$$\sigma_x(D) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sigma_x(D+\varepsilon A).$$

この定義が A の取り方にも依らず, また D が big のときにも共に一致していることがわかる. また $\sigma_x(D)$ は D の第一 Chern 類のみに依存する量である.

定理 1. 非特異射影的代数多様体 X には以下の性質を持つ ample 因子 A が存在する: 任意の擬正 $\mathbb{R}$ 因子 D と $\sigma_x(D)=0$ かつ $x\notin\mathrm{Supp}\langle D\rangle$ なる点 x と任意の正の実数 m に対して

$$x\notin \mathrm{Bs}\,|\ulcorner mD \urcorner + A| \cup \mathrm{Bs}\,|\llcorner mD \lrcorner + A|.$$

ただし $\ulcorner D \urcorner := -\llcorner -D \lrcorner$ は D の切り上げ, $\langle D\rangle := D - \llcorner D \lrcorner$ は分数部分である.

略証. $\rho_y\colon Z \to X$ を点 y でのブローアップ, E_y を例外因子とし実数 $0 < \alpha < 1$ をひとつ固定する. このとき

$$\rho_y^*((1-\alpha)A - K_X - \langle mD \rangle) - (\dim X)E_y$$

が全ての点 y, 全ての正の実数 m について ample となる ample 因子 A が存在する. 条件 $\sigma_x(D) = 0$ より任意の正の実数 m に対して

$$\mathrm{mult}_x \Delta < 1$$

を満たす, $mD + \alpha A$ と数値的同値な正 $\mathbb{R}$ 因子 Δ が存在する. ここで (X, Δ) および $(X, \Delta + \langle -mD \rangle)$ は x において log-terminal である. $L_1 := \ulcorner mD \urcorner + A$, $L_2 := \llcorner mD \lrcorner + A$ とおくと

$$\rho_x^*(L_1 - (K_X + \Delta + \langle -mD \rangle)) - (\dim X)E_x \sim_{\mathrm{num}} \rho_x^*((1-\alpha)A - K_X) - (\dim X)E_x$$

$$\rho_x^*(L_2 - (K_X + \Delta)) - (\dim X)E_x \sim_{\mathrm{num}} \rho_x^*((1-\alpha)A - K_X - \langle mD \rangle) - (\dim X)E_x$$

が成り立つ. ただし $\sim_{\mathrm{num}}$ は数値的同値を表わす. したがって次の命題に帰着された. □

命題 2. 非特異射影的代数多様体 X と正 $\mathbb{R}$ 因子 Δ の対 (X, Δ) が 点 x で log-terminal であると仮定する. また $\rho_x\colon Z \to X$ と E_x を前述のとおりとする. もし Cartier 因子 L について $\rho_x^*(L - (K_X + \Delta)) - (\dim X)E_x$ が ample ならば $x \notin \mathrm{Bs}\,|L|$ である.

この命題は川又–Viehweg 消滅定理によって証明される. 以後 $\sigma_x(D) = 0$ のとき, D は x で nef である, と言う. これは x を通る任意の曲線と D との交点数が非負というより強い条件である. D が x で nef であることは任意の ample $\mathbb{R}$ 因子 A に対して $D + A$ が x で ample であることに他ならない.

系 3. (1) $\mathbb{R}$ 因子 D が擬正であることとある ample 因子 A に対して $H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A) \neq 0$ が任意の自然数 m について成り立つことは同値.

(2) 擬正 $\mathbb{R}$ 因子 D に対して $\Sigma(D)$ を $\sigma_x(D) > 0$ なる点 x の全体とする. すると $\Sigma(D)$ は代数的閉集合の加算和であり, もし $x \in \Sigma(D)$ ならば x を通る既約曲線 C で $C \subset \Sigma(D)$ なるものが存在する.

任意の真の代数的既約閉集合 W に対して

$$\sigma_W(D) := \inf_{x \in W} \sigma_x(D)$$

と定義する. $\Sigma(D)$ の既約成分は $\sigma_W(D) > 0$ となる W からなる. そのうち余次元 1 のもの $\{W_i\}$ は有限個しかなく因子として互いに数値的に一次独立である. そこで正 $\mathbb{R}$ 因子

$$N(D) := \sum_{W_i} \sigma_{W_i}(D) W_i$$

を考える. $P(D) := D - N(D)$ とおいて $D = P(D) + N(D)$ を D の σ 分解と呼ぶ. 任意の点 x に対して $\sigma_x(D) = \sigma_x(P(D)) + \mathrm{mult}_x N(D)$ が成り立つ. もし $P(D)$ が nef ならばこの σ 分解を Zariski 分解と呼ぶが, 任意の双有理射 $f\colon Y \to X$ で引き戻しても $P(f^*(D))$ が nef にならない例がある [N, 5.2]. 次の命題は命題 **2** と同様の議論で証明できる.

命題 4. 非特異射影的代数多様体 X と正 $\mathbb{R}$ 因子 Δ の対 (X, Δ) は非特異既約曲線 C に沿って log-terminal であり $C \not\subset \mathrm{Supp}\,\Delta$ と仮定する. $\rho_C\colon Z \to X$ を C を中心としたブローアップ, E_C を例外因子とおく. もし Cartier 因子 L について $\rho_C^*(L - (K_X + \Delta)) - (\dim X - 1)E_C$ が ample ならば, 準同型

$$H^0(X, L) \to H^0(C, L_{|C})$$

は全射である.

そして定理 **1** と同様の証明によって以下の結果を得る.

定理 5. 擬正 $\mathbb{R}$ 因子 D が数値的にゼロでなく, $N(D) = 0$ とする. このときある ample 因子 A に対して $\dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A)$ は少なくとも m の order をもつ.

ゆえに擬正 $\mathbb{R}$ 因子 D に対して以下の 3 条件は同値である.

(1) D と $N(D)$ は数値的同値.

(2) 任意の ample 因子について $\dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A)$ は m について有界.

(3) 任意の ample 因子について $\lim_{m\to\infty} m^{-1} \dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A) = 0$.

非特異射影的代数多様体 X とその上の $\mathbb{R}$ 因子 D および ample 因子 A に対して $\sigma(D; A)$ を $\liminf_{m\to\infty} m^{-k} \dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A) > 0$ なる最大の非負整数 k, ただし $H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A)$ がすべての $m > 0$ についてゼロの場合には $-\infty$ と定義する. また数値的 D 次元 $\kappa_{\mathrm{num}}(D) = \kappa_{\mathrm{num}}(D, X)$ を $\sup\{\sigma(D; A) \mid A \text{ ample}\}$ と定義する[1]. 系 **3** より $\kappa_{\mathrm{num}}(D) \geq 0$ と D が擬正因子であることは同値である. また定理 **5** より $\kappa_{\mathrm{num}}(D) = 0$ と, D と $N(D)$ が数値的同値であることは同値である. その他 κ_{num} は以下の性質を持つ.

[1] [N] では κ_σ としている. もう一つ κ_ν という別の定義がある.

(1) $D-D'$ が擬正ならば $\kappa_{\mathrm{num}}(D) \geq \kappa_{\mathrm{num}}(D')$. 特に $\kappa_{\mathrm{num}}(D)$ は D の第一 Chern 類のみに依存する.

(2) $\kappa(D) \leq \kappa_{\mathrm{num}}(D)$.

(3) D が nef ならば $\kappa_{\mathrm{num}}(D) = \nu(D)$.

(4) $\kappa_{\mathrm{num}}(D) = \dim X$ と D が big であることは同値.

(5) (Covering Lemma) 非特異射影的代数多様体からの全射 $f\colon Y \to X$ と f-例外因子 E に対して $\kappa_{\mathrm{num}}(f^*D+E) = \kappa_{\mathrm{num}}(D)$.

(6) (Easy addition) 代数的ファイバー空間 $\pi\colon X \to S$ について

$$\kappa_{\mathrm{num}}(D,X) \leq \kappa_{\mathrm{num}}(D_s, X_s) + \dim S.$$

ただし $s \in S$ は非常に一般の点で $X_s = \pi^{-1}(s)$, D_s は D の X_s への制限を表わす.

また非特異射影的代数多様体 X に対する $\kappa_{\mathrm{num}}(X) := \kappa_{\mathrm{num}}(K_X)$ は双有理不変量である. この $\kappa_{\mathrm{num}}(X)$ を X の数値的小平次元と呼ぶ. もし X が極小モデル V を持つならば $\kappa_{\mathrm{num}}(X) = \nu(V)$ である.

3. Weakly positivity と ω-sheaf

因子が点 x で nef という概念は Viehweg によって導入された次の weakly positive という概念と本質的に同じである.

定義 6. 非特異射影的代数多様体 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ が以下の条件を満たすとき点 x で weakly positive であると言う: ひとつの ample 因子 A と任意の自然数 a に対して, 自然数 b を適当に選べば層 $\widehat{S}^{ab}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(bA)$ の大域切断が x での stalk を生成する. ただし $\widehat{S}^{b}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の b 次の対称 tensor 積の double dual を表わす.

実際 $\mathcal{F}$ が点 x で weakly positive であることを対応する tautological 因子の条件で述べることができる. 簡単のため今 $\mathcal{F}$ が locally free と仮定して $p\colon \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X$ を projective bundle, H を tautological 因子とする. このとき以下の 2 条件は同値である.

(1) $\mathcal{F}$ は点 x で weakly positive.

(2) H は pseudo-effective でありかつ $\Sigma(H) \cap p^{-1}(x) = \emptyset$.

この同値性は $\mathcal{F}$ が locally free でないときにも少し複雑な形ではあるが表わすことができる. また命題 **2**, **4** の論法により次が成り立つ.

命題 7. 連接層 $\mathcal{F}$ が x で weakly positive かつ locally free ならば以下の性質を満たす ample 因子 A が存在する: 任意の m に対して$\widehat{S}^m(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(A)$ の大域切断が x での stalk を生成する.

ここで注意したいことは証明上この A は $\mathcal{F}$ の階数に依存することである. ところが, たとえば dualizing sheaf の順像 $\mathcal{F} = f_*\omega_Y$ について考えると, もし $f\colon Y \to X$ が非特異射影的代数多様体 Y からの全射であれば, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(A)$ が大域切断で生成されるという性質を持つ ample 因子 A は X のみに依存してとることができる. それは Kollár [Ko] の結果からわかる. それを言い換える意味で次の ω-sheaf を定義する.

定義 8. ある非特異射影的代数多様体 Y からの全射 $f\colon Y \to X$ によって得られる順像 $f_*\omega_Y$ の直和因子となる連接層を ω-sheaf と呼ぶ.

Kollár [Ko] の結果より次の命題が証明できる.

命題 9. $g\colon X \to Z$ を射影的代数多様体の間の全射とし, $\mathcal{F}$ を X の上の ω-sheaf とする. このとき次が成り立つ.

(1) $R^i g_*\mathcal{F}$ は ω-sheaf.

(2) 導来圏 $D(\mathcal{O}_Z)$ において $Rg_*\mathcal{F} \sim_{\mathrm{qis}} \bigoplus R^i g_*\mathcal{F}[-i]$.

(3) X 上の ample 因子 A と $p > 0$ に対して $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(A)) = 0$.

ただし $\sim_{\mathrm{qis}}$ は quasi-isomorphism を表わす.

注意 10 ([N, A.4]). 正規な多様体 X 上のある ω-sheaf が点 x で locally free なとき, x の analytic な近傍 $\mathcal{U}$ 上ある正 $\mathbb{Q}$ 因子 Δ が存在して $(\mathcal{U}, \Delta)$ は log-terminal となる. 特に (X, x) は有理特異点または非特異である.

定義 11. 正規射影的代数多様体 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ の double dual $\mathcal{F}^\wedge$ が同じ階数の ω-sheaf を部分層に持つとき, $\mathcal{F}$ を $\hat{\omega}$-sheaf と呼ぶ.

非特異射影的代数多様体の間の全射 $f\colon Y \to X$ に対して順像 $f_*\omega_{Y/X}$ はある条件のもとでは numerically semi-positive な locally free sheaf であることが川又 [Ka1] で示され, その条件がなくても, ある Zariski 開集合上 weakly positive であることが Viehweg [V] で示されている. したがって非特異射影的代数多様体 X 上の $\hat{\omega}$-sheaf $\mathcal{F}$ について $\mathcal{F} \otimes \omega_X^{-1}$ は, ある Zariski 開集合上で weakly positive である. Viehweg [V] はさらに任意の自然数 m について層 $f_*(\omega_{Y/X}^{\otimes m})$ が, ある Zariski 開集合上で weakly positive であることを cyclic covering を利用して証明した. 同じテクニックで以下の命題 **12** と定理 **13** を証明できる.

命題 12. 非特異射影的代数多様体 X 上の $\mathbb{R}$ 因子 D が nef かつ abundant でありその分数部分 $\langle D\rangle$ の support が正規交差因子のとき, $\omega_X(\ulcorner D\urcorner) = \mathcal{O}_X(K_X + \ulcorner D\urcorner)$ は ω-sheaf である.

定理 13. 非特異射影的代数多様体の間の全射 $f\colon Y \to X$ と Y の nef かつ abundant な $\mathbb{R}$ 因子 D でその support が正規交差であるものを考える. このとき任意の自然数 k に対して

$$\mathcal{F}_k := \omega_X \otimes f_*(\omega_{Y/X}^{\otimes k}(\ulcorner D\urcorner))$$

は $\hat{\omega}$-sheaf である. 特に k に依存しない ample 因子 A で層 $\mathcal{O}(A) \otimes \mathcal{F}_k^\wedge$ の大域切断が一般の点での stalk を生成するものがある.

これより $\kappa_{\mathrm{num}}(X)$ の addition が導かれる.

定理 14. 非特異射影的代数多様体の間のファイバー空間 $f\colon Y \to X$ の非常に一般のファイバーを F とする. 任意の X 上の因子 L に対し

$$\kappa_{\mathrm{num}}(K_{Y/X} + f^*L) \geq \kappa_{\mathrm{num}}(K_F) + \kappa_{\mathrm{num}}(L)$$

が成り立つ. とくに $\kappa_{\mathrm{num}}(Y) \geq \kappa_{\mathrm{num}}(F) + \kappa_{\mathrm{num}}(X)$.

略証. D を Y の十分に ample な因子, H を X の十分 ample な因子とする. 適当な flattening の議論と定理 **13** により generic injection

$$\mathcal{O}_X^{\oplus r_k} \to \mathcal{O}_X(H) \otimes f_*\omega_{Y/X}^{\otimes k}(D)$$

が存在すると仮定できる. ただし r_k は $f_*\omega_{Y/X}^{\otimes k}(D)$ の階数. これに $\mathcal{O}_X(kL+H)$ を tensor することによって不等式

$$\dim H^0(Y, k(K_{Y/X} + f^*L) + D + 2f^*H) \geq r_k \dim H^0(X, kL + H)$$

を得る. κ_{num} の定義から定理の不等式が導かれる. □

ゆえに飯高予想は一般化された abundance 予想 $\kappa_{\mathrm{num}}(Y) = \kappa(Y)$ から導かれる. 飯高予想の精密化である Viehweg 予想については一般ファイバー F が極小モデルを持ち K_F が abundant という条件のもとで成立することが川又 [Ka3] で示されている. ここで F が極小モデルを持つという条件をはずせるのかはまだわからない.

数値的小平次元 $\kappa_{\text{num}}(X)$ の addition の応用として次の abundance 予想の部分的解答を得る. これは X が極小モデルのときには別の議論で川又 [Ka3] によって得られている.

定理 15. $\kappa_{\text{num}}(X) = 0$ ならば $\kappa(X) = 0$.

略証. $\kappa(X) \geq 0$ を言えばいい. 不正則数 $q(X) = 0$ のときは, $P(K_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0$ なので $\kappa(X) \geq 0$. $q(X) > 0$ のとき, Albanese 写像 $\alpha\colon X \to \operatorname{Alb} X$ を考え $X \to W \to \operatorname{Alb} X$ を Stein 分解とする. ここで addition

$$0 = \kappa_{\text{num}}(X) \geq \kappa_{\text{num}}(X_w) + \kappa_{\text{num}}(W) \geq 0$$

より $\kappa_{\text{num}}(W) = \kappa(W) = 0$. よって $W = \operatorname{Alb} X$. さて α は Albanese 写像なので, 以下の 2 条件を満たす自然数 m と数値的に自明な $\operatorname{Alb} X$ 上の Cartier 因子 L がある:

(1) $mN(K_X)$ は Cartier 因子.

(2) $mN(K_X) - mK_X \sim \alpha^*(mL)$.

特に $\kappa(X_w) = 0$ である. X を適当なブローアップで取り替えれば以下の二つの性質を満たすことができる.

(1) α はある非特異射影的代数多様体 Y からの双有理射 $Y \to \operatorname{Alb} X$ を経由する.

(2) ここで誘導された射 $f\colon X \to Y$ は Y のある正規交差因子の外側で smooth.

ところで $\kappa(X_y) = 0$ なので, すべての自然数 m について

$$(f_*\omega_{X/Y}^{\otimes mk})^\wedge \simeq \mathcal{O}_Y(mD)$$

となる自然数 k と Y の 因子 D がある. ここで flattening の議論を使うことにより $\kappa_{\text{num}}(X) = 0$ から $\kappa_{\text{num}}(D) = 0$ が導かれる. 森 [M, 5.13] により Y をブローアップで取り替えれば support が正規交差な正 $\mathbb{Q}$ 因子 N で, $P := (1/k)D - N$ が nef かつ $\llcorner N \lrcorner = 0$ なるものがある. すると P は数値的に自明. 森 [M, 5.13] より非特異射影的代数多様体 Y' からの有限 Galois covering $Y' \to Y$ と非特異射影的代数多様体 X' からの全射 $f'\colon X' \to Y'$ で f' が Y' のある正規交差因子の外側で smooth でありかつ P の Y' への引き戻しが $f'_*\omega_{X'/Y'}$ と線型同値になるものがある. とくにこの invertible sheaf $f'_*\omega_{X'/Y'}$ は数値的に自明. Hodge metric の議論および Deligne [D, 4.2.8(iii)(b)] によりこの層のあるベキは自明になる. ゆえに $P \sim_{\mathbb{Q}} 0$ であり無限個の自然数 m について $H^0(Y, (f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m})^\wedge) \neq 0$. 再び flattening の議論により $\kappa(X) \geq 0$ を得る. □

次の系が成り立つ.

系 16. $\kappa(X) \geq 0$ のとき, 以下の 2 条件は同値.

(1) $\kappa(X) = \kappa_{\mathrm{num}}(X)$.

(2) 飯高ファイバー空間 $X \cdots \rightarrow S$ の一般ファイバー F について $\kappa_{\mathrm{num}}(F) = 0$.

3 次元以下の代数多様体については極小モデル理論がうまく機能し, abundance 予想も成り立つ [Ka4] ので, 4 次元以上の代数多様体 X についても $\kappa(X) \geq \dim X - 3$ ならば $\kappa_{\mathrm{num}}(X) = \kappa(X)$ である.

References

[D] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, Publ. Math. IHES. **40** (1972), 5–57.

[Ka1] Y. Kawamata, Characterization of abelian varieties, Compo. Math. **43** (1981), 253–276.

[Ka2] ———, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties, Invent. Math., **79** (1985), 567–588

[Ka3] ———, Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces, J. Reine Angew. Math. **363** (1985), 1–46.

[Ka4] ———, Abundance theorem for minimal threefolds, Invent. Math. **108** (1992), 229–246.

[Ko] J. Kollár, Higher direct images of dualizing sheaves I, II, Ann. of Math., **123** (1986), 11–42, ibid. **124** (1986), 171–202.

[M] S. Mori, Classification of higher dimensional varieties, in *Algebraic Geometry Bowdoin 1985*, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), 269–331.

[N] N. Nakayama, Zariski-decomposition and abundance, preprint 1997, RIMS-1142.

[V] E. Viehweg, Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fiber spaces, in *Algebraic Varieties and Analytic Varieties*, Advanced Studies in Pure Math. **1**, Kinokuniya and North-Holland, 1983, pp. 329–353.