楕円曲面に対する局所トレリの定理

京大理　斉藤政彦

Xを2次元コンパクト複素多様体とする。Xの正則2形式による"周期"がXのモヂュライをどれだけ記述するかを考える。(トレリの問題)。K-3曲面，複素トーラス，一般型 ($c_1(X)^2 = p_g(X) = 1$) の時は，くわしい研究がなされている。本稿では，楕円曲面に対する周期写像の局所的単射性(局所トレリの定理)について述べたいと思う。又，小平曲面のモヂュライ空間と大域的な周期写像の性質を，若干述べてみる。(§5)

1. Infinitesimal period map.

以下，問題を定式化し，主定理を述べるために Infinitesimal period map を定義する。

Xをn次元コンパクト複素多様体とする。(必らずしも，ケーラーとは仮定しない。) Ω^p_X をXの正則p形式の切断の芽のなす層，$\Theta_X (= \Omega^{1\vee}_X)$ を tangent sheaf とする。Contraction map $\Theta_X \otimes \Omega^n_X \longrightarrow \Omega^{n-1}_X$ より，線型写像，$H^1(X, \Theta_X) \otimes H^0(X, \Omega^n_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega^{n-1}_X)$ をえる。

これより自然に，次の線型写像 δ が得られる。

$$\delta : H^1(X, \Theta_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^0(X, \Omega^n_X), H^1(X, \Omega^{n-1}_X)).$$

又，その双対写像は Serre duality より

$$\mu = (\delta)^* : H^0(X, \Omega^n_X) \otimes H^{n-1}(X, \Omega^1_X) \longrightarrow H^{n-1}(X, \Omega^n_X \otimes \Omega^1_X).$$

によって与えられる。

<u>定義 1.1</u>　δ を X の Infinitesimal period map と呼ぶ。

我々の考える問題は次の問題である。

<u>問題 (Infinitesimal Torelli problem)</u>

「どのような X について，δ は単射か決定せよ。」

さて現在まで知られている肯定的な結果を，$n=2$ の時に（筆者の知る限り）述べてみよう。

(1) $\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$ すなわち．X : K-3，複素トーラス，小平曲面(§5)

(2) $\mathbb{P}^2$ や $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の Cyclic covering

(3) $\mathbb{P}^3$ の超曲面

又否定的な結果を述べる。

(1)′ $p_g(X) = 0$ かつ $\dim H^1(X, \Theta_X) > 0$ の曲面．

(2′ multiple fibre をもつ楕円曲面．

(3)′　$B^1(X)$ が奇数かつ 5 以上の楕円曲面

(4)′　$p_g(X) = c_1(X)^2 = 1$ なるある種の general type.

さて我々は，一般の楕円曲面で，$p_g(X) \geqq 1$，multiple fibre をもたないものについて問題を考え，次の定理をえた。

<u>主定理</u>　$\varphi : X \longrightarrow C$ を，曲線 C 上の楕円曲面で，次をみたすとする。

① X は第 1 種例外曲線を含まない

② X は multiple fibre をもたない.

③ $p_g(X) \geqq 1$

$J(X)$ で $\varphi : X \longrightarrow C$ の函数不変量（1）を表わす。

δ は次の時，単射である。

(A)　$J(X) \not\equiv$ const.

(B)　$J(X) \equiv$ const. $(\neq 0, 1)$，$C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

(C)　$J(X) \equiv$ const. $(\neq 0, 1)$ かつ $\chi(X, \mathcal{O}_X) \geqq 3$.

(注). $J(X) \not\equiv$ const. なる条件は generic である。$J(X) \not\equiv$ const. $C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の時，K. Kii（7）によって証明されている。又最近 K. Chakiris（6）は，section を持つ $\mathbb{P}^1$ 上の $p_g(X) \geqq 2$ なる，楕円曲面に対して Weak Global Torelli theorem を証明した。

2. 周期写像の復習.

この§では, Infinitesimal period map δ と, 周期写像の関係を復習しよう. 簡単のため, X は曲面とする.

<u>命題 2.1</u>　X : ケーラーとは限らない曲面とする. 又 Q で, $H^2(X, \mathbb{C})$ 上の cup 積を表わす. X の 2nd-cohomology $H^2(X, \mathbb{C})$ は Hodge 構造をもつ. すなわち,

$$H^2(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(X), \quad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

ただし, $H^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega^p_X)$.

又 Q に関して $H^{2,0}(X)^{\perp} = H^{1,1}(X) \oplus H^{2,0}(X)$ が成り立つ. (小平 (3))

$f : \mathcal{X} \longrightarrow S$ を曲面の smooth family とする. この f に対する「Hodge 構造の変形」とは, $(\mathbb{H}^2, \{\mathbb{F}^p\}, \nabla, S)$ という組で次を満すもの.

(1) $\mathbb{H}^2$: S 上の flat $\mathbb{C}$ vector bundle associated with $R^2 f_* \mathbb{C}_{\mathcal{X}}$.

(2) ∇ : flat connection on $\mathbb{H}^2$.

(3) $0 = \mathbb{F}^3 \subset \mathbb{F}^2 \subset \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}^0 = \mathbb{H}^2$ は hol. subbundle による filtration.

(4) $\forall s \in S$　$\mathbb{F}^2_s = H^{2,0}(X_s)$, $\mathbb{F}^1_s = H^{2,0}(X_s) \oplus H^{1,1}(X_s)$.

(5) $\nabla : \mathcal{O}(\mathbb{F}^p) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{F}^{p-1}) \otimes \Omega^1_S$.

$\mathbb{H}^2$ 上には各 fibre ごとに cup 積をもち, 命題 2.1 より, Hodge 構造は $\mathbb{F}^2$ によって定まる. さてこの意味で周期写像

とは，次のように定義される。$s_0 \in S$ を1つ固定し，Sを十分小さく取りかえて，自明化

$$\alpha : \mathbb{H}^2 = \bigcup_{s \in S} H^2(X_s, \mathbb{C}) \longrightarrow S \times H^2(X_{s_0}, \mathbb{C}) .$$
$$\alpha = \bigcup_s \alpha_s$$

を1つとる。$p_g(X_{s_0}) = k$ とし，

$$D = \{ (V \hookrightarrow H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})) \in Gr(k, H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})),\ Q(V, V) = 0 \}$$

と定める。

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & S & \longrightarrow & D \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & s & \longmapsto & (\alpha_s(H^{2,0}(X_s)) \hookrightarrow H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})) \end{array}$$

は正則写像であり，これが本来の周期写像である。

基本的なのは，Griffiths，(4) による次の可換図式である。

$$\begin{array}{ccc} T_{s_0}(S) & \xrightarrow{d\Phi_{s_0}} & T_{\Phi(s_0)}(S) \\ \Big\downarrow \rho : \text{Kodaira-Spencer map} & & \Big\uparrow \\ H^1(X_{s_0}, \Theta_{s_0}) & \xrightarrow[\delta]{} & \mathrm{Hom}(H^0(X, \Omega^2_X), H^1(X, \Omega^1_X)) \end{array} .$$

さて X を曲面とし，$(W, 0)$ をその Kuranishi space，$f : \mathcal{X} \to W$ を Kuranishi family（$f^{-1}(0) = X$）とする。さて一般に W は smooth ではないが，簡単のために smooth と仮定する。$\Phi : W \longrightarrow D$ を上の周期写像とする。Kodaira-Spencer map ρ_0 は単射

だから，次が言える。

$$d\Phi_0 : 単射 \Longleftrightarrow \delta : 単射.$$

$d\Phi_0$ の単射性より，モジュライの座標が局所的に，周期によって，得られる事がわかる。この $d\Phi_0$ の単射性は，Kuranishi space が smooth という仮定のもとで，δ の単射性に帰着される。さらに δ の dual は

$$(*) : \mu : H^0(X, \Omega^2_X) \otimes H^1(X, \Omega^1_X) \longrightarrow H^1(X. \Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)$$

であり，この map はある意味で調べやすい。

3. 主定理の証明

$\varphi : X \longrightarrow C$ を主定理の仮定を満す楕円曲面とする。我々は，(*) における μ の全射性を言う。

さて Leray spectral sequence は，C が曲線であるから E_2-term で退化し，次の exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow H^1(C, \varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow H^1(X. \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(C, \varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)) \longrightarrow H^1(X. \Omega^1_X \otimes \Omega^2_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)) \longrightarrow 0$$

又

$$H^0(C, \varphi_*(\Omega^2_X)) \cong H^0(X. \Omega^2_X).$$

cup 積 μ (*) は，Leray spectral と両立するから，我々は，μ は次のように分解することができる。

$$\mu_1 : H^0(C, \varphi_* \Omega^2_X) \otimes H^1(C, \varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow H^1(C, \varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X))$$

$$\mu_2 : H^0(C, \varphi_* \Omega^2_X) \otimes H^0(C, R^1\varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X))$$

よって μ の全射性は, μ_1 と μ_2 の全射性に帰着される. さて, 少し, 楕円曲面論を復習しよう.

<u>命題 3.1</u>　$\varphi : X \to C$ を主定理の①, ②を満す楕円曲面とする。次が成り立つ.

(i) $\varphi_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C$　(ii) $R^1\varphi_* \mathcal{O}_X$ は C 上 invertible.

($R^1\varphi_* \mathcal{O}_X = f$ と書く)　(iii) $\deg f = -\chi(\mathcal{O}_X)$

(iv) $\Omega^2_X \cong \varphi^*(\Omega^1_C \otimes f^\vee)$.

証明は, (2).　を見よ.

さて, 次の命題が, 本質的である.

<u>命題 3.2</u>　$\varphi : X \longrightarrow C$ を上と同じとする。

(I)　$J(X) \not\equiv \text{const.}$ ならば次が成り立つ。

(a)　$\varphi_* \Omega^1_X \cong \Omega^1_C$

(b)　$R^1\varphi_* \Omega^1_X \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{T}_2$　($\mathcal{T}_2$ は torsion sheaf)

(II)　$J(X) \equiv \text{const.}$ ($\neq 0, 1$) とする。次は exact。

$$0 \longrightarrow \Omega^1_C \longrightarrow \varphi_* \Omega^1_X \longrightarrow f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1_C \otimes f^\vee \longrightarrow R^1\varphi_* \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{T}_1 \longrightarrow 0$$

$\mathcal{T}_1$ は torsion sheaf.

証明は割愛する。（cf. (8) ）

さて，命題 3.2 より．主定理がどのように得られるか述べよう。

(A) の時．命題 3.1 (iv)，命題 3.2 より．μ_1, μ_2 は．次で与えられる．

$$\mu_1 : H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^1(C, \Omega^1_C) \longrightarrow H^1(C, \Omega^1_C \otimes \Omega^1_C \otimes f^\vee)$$

$$\mu_2 : H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^0(C, \Omega^1_C) \longrightarrow H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \oplus H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee \otimes T_2)$$

$C \cong \mathbb{P}^1$, $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee = 0$ の時をのぞき，$H^1(C, \Omega^1_C \otimes \Omega^1_C \otimes f^\vee) = 0$．

(∵ 他の時は $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee > 0$)．しかるに．のぞいた場合は．X が K-3 で明らか。

又 μ_2 は明らかに全射．

(B)(C) の時．Projection formula と命題 3.2 より μ_1 と μ_2 を分解する．

しかるに，μ_1 は明らかに全射になる。又．μ_2 の分解において．

$$\mu_2' : H^0(C, \Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^0(C, \Omega^1_C \otimes f^\vee) \longrightarrow H^0(C, (\Omega^1_C \otimes f^\vee)^{\otimes 2})$$

の全射性のみが問題．Mumford の定理より．$\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee = 2g-2+\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2g+1$ ならば μ_2' は全射．よって (C) をえる。

(B) の時は $C \cong \mathbb{P}^1$ より $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee \geq 0$ なので，μ_2' は全射．

（証明終り）

4. 結果をまとめておく。ここに書いてない結果は (8) を参照。

$\varphi : X \to C$ を minimal elliptic surface で multiple fibre をもたないとする。 $N = \chi(\Theta_X) = 1 - q(X) + p_g(X) \geqq 0$ とおく

δ : Infinitesimal period map (定義1.1)

X : not injective. O : injective

(I) $N \geqq 1$.

(a) $g(C) = 0$.

N	$p_g(X)$	$J(X)$	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	δ	X
1	0		10	X	rational
2	1		20	O	K-3
$\geqq 3$	$N-1$	not const.	$11N - 3$	O	
		const. $\neq 0, 1$.	$11N - 3$	O	
		$=0, 1$.	?	?	

(b) $g(C) \geqq 1$.

N	$p_g(X)$	$J(X)$	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	δ
1 or 2	$N+g-1$	not const.	$11N + 3g - 3$	O
		const.	?	(?)*
$\geqq 3$	$N+g-1$	not const.	$11N + 3g-3$	O
		const. $\neq 0, 1$.	$11N + 4g-3$	O
		$= 0, 1$.	?	?

(II) $N = 0$, $p_g(X) = g(C)$

$g(C)$	$B^1(X)$	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	C	δ	X
0	2	4		X	elliptic ruled
	1	4		X	Hopf
1	4	4		O	complex torus
	3	2		O	Kodaira
$\geqq 2$	$2g+2$	$4g-2$	$g(C) = 2$ or non-hyperelliptic	O	
			$g(C) > 2$ and hyperelliptic	X	
	$2g+1$	$4g-2$		X	

5 小平曲面に対する Global Torelli Problem.

この§では、小平曲面に対して、モヂュライ空間の構成と周期写像について述べる。

定義 5.1 　X を曲面とする。$\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$ かつ、$B^1(X)=3$ なる時、X を小平曲面と言う。

小平曲面に対しては、次の定理が基本的である。

定理 5.2 X を Kodaira 曲面とする。$\mathbb{C}^2$ の座標を (z_1, z_2) とする時、X は次の元で生成された群 Γ による商空間として構成される。

$$g_1 : (z_1, z_2) \longrightarrow \left(z_1,\ z_2 + \frac{\omega + \sqrt{-1}}{k}\right)$$

$$g_2 : (z_1, z_2) \longrightarrow \left(z_1,\ z_2 + \frac{\omega + \sqrt{-1}}{k}\tau\right)$$

$$g_3 : (z_1, z_2) \longrightarrow (z_1 + 1,\ z_2 + \bar{z}_1)$$

$$g_4 : (z_1, z_2) \longrightarrow (z_1 + \omega,\ z_2 - \sqrt{-1}\,\bar{z}_1)$$

ここで、k は正整数、$\tau, \omega \in H = \{ \zeta \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}\,\zeta \}$ である。　(小平 (3)).

定義 5.3 　$\Gamma(\tau, \omega, k)$ を上の g_1, g_2, g_3, g_4 で生成された、$\mathbb{C}^2$ のアファイン変換群とする。$X_{(\tau,\omega,k)} = \mathbb{C}^2/\Gamma(\tau,\omega,k)$. を type (τ, ω, k) の小平曲面と言う。又、k を小平曲面 $X_{(\tau,\omega,k)}$ の次数と言う。

小平曲面のモヂュライ空間については次がわかる。

定理5.4　kを正整数とする。次数kの小平曲面のモヂュライ空間を$\mathcal{K}$とする。

$$\mathcal{K} \cong H \times H \Big/ \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times SL(2,\mathbb{Z}).$$

$$H = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}\, z > 0 \}.$$

さて小平曲面Xの2nd cohomologyのfree part $H^2_{\mathbb{Z}} = H^2(X,\mathbb{Z})_{free}$はrank 4で、Hodge構造は、次で与えられる。

$$H^2_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H^0(X,\Omega^2_X) \oplus H^1(X,\Omega^1_X) \oplus H^2(X,\mathcal{O}_X).$$

又、cup積Pは、次のようなintersection matrixで表わされる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$SO(P, H^2_{\mathbb{Z}}) = \{ a \in SL(H^2_{\mathbb{Z}}) \mid {}^t a P a = P \}$とおく。

$SO(P, H^2_{\mathbb{Z}}) \cong SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$.

$$D = \left\{ (V \hookrightarrow H^2_{\mathbb{C}}) \in Gr(1, H^2_{\mathbb{C}}) \,;\, \begin{array}{l} {}^t V P V = 0 \\ {}^t V P \overline{V} > 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ [\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3 ; \lambda_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \,;\, \begin{array}{r} \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1\overline{\lambda_4} + \lambda_2\overline{\lambda_3} + \lambda_3\overline{\lambda_2} - \lambda_4\overline{\lambda_1} > 0 \end{array} \right\}$$

は、小平曲面の2nd-cohomologyの偏極Hodge構造の分類空間（周期領域）。

$\Gamma = \bigcup_{(\tau,\omega)\in H\times H} \Gamma(\tau,\omega,k)$ は自然に $\mathbb{C}^2\times H\times H$ に作用し、

$\pi : \mathbb{C}^2\times H\times H/\Gamma \longrightarrow H\times H$ は、次数 k の小平曲面の smooth family

で、すべての次数 k の小平曲面を fibre に含む。周期写像

$\Phi : H\times H \longrightarrow D$ が次のように与えられる。

$\Phi : (\tau,\omega) \longmapsto [1;\tau;\omega;\tau\omega]$ 。D には $SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$

が、$H\times H$ には $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ が act しているが、Φ は、同型

$SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ に関して同変的な同型

である事がわかる。すなわち、$\overline{\Phi} : H\times H/SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$

一方、小平曲面のモジュライ空間から $D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ への

周期写像 $\widetilde{\Phi} : H\times H/\begin{pmatrix}1&\mathbb{Z}\\0&1\end{pmatrix}\times SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ また、

$\overline{\Phi}$ を factor する。大域的なトレリの問題とは、$\widetilde{\Phi}$ が単射かを問うものである。以上をまとめると、次の定理をえる。

<u>定理 5.5</u>　小平曲面に対しては、周期写像 $\widetilde{\Phi}$ は、無限の写像度をもつ。すなわち、大域的トレリの定理はなりたたない。

(注)　小平曲面に対しては　局所トレリは成り立つ。

参考文献

1. Kodaira. K., "On compact analytic surfaces I", Ann. of Math., 77 (1960), 111-152.

2. ------------ , "On compact analytic surafces II, III", Ann. of Math., 77 (1963), 563-626, 78 (1963), 1-40.

3. ------------ , "On the structure of compact complex analytic surfaces, I", Amer. J. Math., 86 (1964), 751-798.

4. Griffiths. P., "Periods of integrals on algebraic manifolds I, II", Amer. J. Math., 90 (1968), 586-626, 805-865.

5. ------------ , "Periods of integrals on algebraic manifolds III", Publ. Math. I. H. E. S., 38 (1970), 125-180.

6. Chakiris . K . A Torelli theorem for simply connected elliptic surface with a section and $p_g \geqq 2$. Bulltein of the Amer. Math. Soc. Vol 7 July 1982. 227 ~ 232

7. KiY ; K.I. The local Torelli theorem for varieties with divisible canonical class, Izv. Akad. Nauk 42 (1978) English transl. (1978) No 1.

8. Saito Ma . On the Infinitesimal Torelli ploblem of elliptic surfaces. (to appear). J. Math. Kyoto Univ.