1

Remarks on theta series

瀬山 敦　　清水 敦

Z を degree n の Siegel 上半空間 H_n の元とし、x は $\mathbb{C}^n$ の元，k', k'' はともに $\mathbb{R}^n$ の元とする時、$\binom{k'}{k''}$ を theta characteristic とする theta series $\vartheta\begin{bmatrix}k'\\k''\end{bmatrix}(z|x)$ は次の様に定義される。

$$\vartheta\begin{bmatrix}k'\\k''\end{bmatrix} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\,{}^t(n+k')z(n+k') + {}^t(n+k')(x+k'')\right)$$

ただし、$\mathbf{e}(z)$ は $\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ をあらわす ($z\in\mathbb{C}$)。このとき、次が成りたつ。

Proposition. $\vartheta\begin{bmatrix}k'\\k''\end{bmatrix}(z|0)$ が，z の関数として恒等的に 0 ならば、$2k'\equiv 2k''\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ $2\,{}^tk'k''\not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

この事実は、$k', k''\in\mathbb{Q}^n$ のときは既に知られている。*) $k', k''\in\mathbb{R}^n$ のときの証明は 最初瀬山が transformation formula を使って行ったが、あとで清水が 初等的な方法で証明したので、さ

こではそれを紹介する。

$k'=\begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$ $k''=\begin{pmatrix} k_1'' \\ \vdots \\ k_n'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し、$k_m^{*\prime}=\begin{pmatrix} k_1' \\ \vdots \\ k_m' \end{pmatrix}$

$k_m^{*\prime\prime}=\begin{pmatrix} k_1'' \\ \vdots \\ k_m'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $x_m^*=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$, $k_*^{m\prime}=\begin{pmatrix} k_{m+1}' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix}$ $k_*^{m\prime\prime}=\begin{pmatrix} k_{m+1}'' \\ \vdots \\ k_n'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$

$x_*^m=\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-m}$ とおく。$(1 \leq m < n)$

Lemma 1　任意の $z_m^* \in H_m$, $z_*^m \in H_{n-m}$ に対し、

$$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix} z_m^* & 0 \\ 0 & z_*^m \end{pmatrix} \middle| x\right) = \vartheta\begin{bmatrix} k_m^{*\prime} \\ k_m^{*\prime\prime} \end{bmatrix}(z_m^* | x_m^*)\,\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{m\prime} \\ k_*^{m\prime\prime} \end{bmatrix}(z_*^m | x_*^m)$$

$(1 \leq m < n)$。

Lemma 2.　任意の $u \in GL(n, \mathbb{Z})$ に対し

$$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}(z|x) = \vartheta\begin{bmatrix} u^{-1}k' \\ {}^t u\, k'' \end{bmatrix}({}^t u z u \,|\, {}^t u x)。$$

従って特に、$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}(z|0)$ が恒等的に 0 なら、$\vartheta\begin{bmatrix} u^{-1}k' \\ {}^t u\, k'' \end{bmatrix}(z|0)$ も恒等的に 0 である。

この2つの lemma は定義から簡単にでる。さ

て Proposition の証明はこの 2 つの lemma を使って帰納法で行なう。

$n=1$ のとき、$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}(z|0) = \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z|zk'+k'')\,\mathbf{e}(\frac{1}{2}k'zk'+k'k'')$ であるが、$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z|x)$ の x の函数としての零点は $\{ az+b \mid a\equiv\frac{1}{2},\ b\equiv\frac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}) \}$ しかないから、上の左辺が任意の z に対して 0 になるためには、$k'\equiv k''\equiv\frac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ でなくてはならない。よって $n=1$ の時は正しい。

$n=2$ のとき、lemma 1 から、任意の $z_1, z_2 \in H_1$ に対し、

$$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}\Big|\,0\right) = \vartheta\begin{bmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{bmatrix}(z_1|0)\,\vartheta\begin{bmatrix} k_2' \\ k_2'' \end{bmatrix}(z_2|0)$$

であるから、$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}(z|0)$ が恒等的に 0 であれば、$k_1'\equiv k_1''\equiv\frac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ または、$k_2'\equiv k_2''\equiv\frac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ がなりたつことが、$n=1$ の時の証明からわかる。$k_1'\equiv k_1''\equiv\frac{1}{2}$ としてよい。

一方 $u=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、lemma 2 から、$\vartheta\begin{bmatrix} u^{-1}k' \\ {}^t u\, k'' \end{bmatrix}(z|0)$ が恒等的に 0 である。従って上と同様にして、$k_1'-k_2'\equiv 2k_1''+k_2''\equiv\frac{1}{2}$ または、$-k_1'+2k_2'\equiv k_1''+k_2''\equiv\frac{1}{2}\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ がなりたつ。従って 上とあ

わせて　$k_2' \equiv 0$, $k_2'' \equiv \frac{1}{2}$　又は　$2k_2' \equiv 0$, $k_2'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$
いずれにしても、結果はなりたつ。

$n > 2$ の時、帰納法で証明を完結する。
$\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ k'' \end{bmatrix}(z|0)$ が恒等的に0であるとせよ。

I) ある i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ に対して、$2k_i' \not\equiv 0$ 又は $2k_i'' \not\equiv 0$ 又は $2k_i k_i'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ となる場合。i は1としてよい。lemma 1 から任意の $z_1^* \in H_1$, $z_*^1 \in H_{n-1}$ に対し

$$\vartheta\begin{bmatrix} k_1^{*\prime} \\ k_1^{*\prime\prime} \end{bmatrix}(z_1^*|0)\,\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{1\prime} \\ k_*^{1\prime\prime} \end{bmatrix}(z_*^1|0) = 0$$

ところが、$\vartheta\begin{bmatrix} k_1^{*\prime} \\ k_1^{*\prime\prime} \end{bmatrix}(z_1^*|0) = \vartheta\begin{bmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{bmatrix}(z_1^*|0)$ は恒等的には0でないから、$\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{1\prime} \\ k_*^{1\prime\prime} \end{bmatrix}(z_*^1|0)$ が恒等的に0でなくてはならない。よって帰納法の仮定から、
$2k_*^{1\prime} \equiv 2k_*^{1\prime\prime} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^{n-1}}$　$2\,{}^tk_*^{1\prime}k_*^{1\prime\prime} \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$。すると $k_j' \equiv k_j'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ なる j $(2 \leqslant j \leqslant n)$ がある。(さもないと $2\,{}^tk_*^{1\prime}k_*^{1\prime\prime} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ となってしまう。) j は2としてよい。再び lemma 1 から、

$$\vartheta\begin{bmatrix} k_2^{*\prime} \\ k_2^{*\prime\prime} \end{bmatrix}(z_2^*|0)\,\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{2\prime} \\ k_*^{2\prime\prime} \end{bmatrix}(z_*^2|0) = 0$$

が任意の $z_2^* \in H_2$, $z_*^2 \in H_{n-2}$ に対してなりたつ。ところが、$2\,{}^t k_*^{2\prime} k_*^{2\prime\prime} \equiv 2\,{}^t k_*^{1\prime} k_*^{1\prime\prime} - \frac{1}{2} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ であるから $\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{2\prime} \\ k_*^{2\prime\prime}\end{bmatrix}(z_*^2|0)$ は恒等的には 0 でない。従って、$\vartheta\begin{bmatrix} k_2^{*\prime} \\ k_2^{*\prime\prime}\end{bmatrix}(z_2^*|0)$ は恒等的に 0 ゆえ、$2k_1' \equiv 2k_1'' \equiv 0$ かつ $2k_1'k_1'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$。従って、$2k' \equiv 2k'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ、$2\,{}^t k' k'' = 2k_1'k_1'' + 2\,{}^t k_*^{1\prime} k_*^{1\prime\prime} \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$。よってこの場合は正しい。

II) I でないとき、すなわち任意の i に対し $k_i' \equiv k_i'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ のとき。このとき n は奇数でなくてはならない。n が偶数とすると、

$$\vartheta\begin{bmatrix} k_2^{*\prime} \\ k_2^{*\prime\prime}\end{bmatrix}(z_2^*|0)\,\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{2} \\ k_*^{2\prime\prime}\end{bmatrix}(z_*^2|0) = 0 \quad \text{for any } z_2^* \in H_2 \;\; z_*^2 \in H_{n-2}$$

であるが、帰納法の仮定から $\vartheta\begin{bmatrix} k_2^{*\prime} \\ k_2^{*\prime\prime}\end{bmatrix}(z_2^*|0)$ も $\vartheta\begin{bmatrix} k_*^{2\prime} \\ k_*^{2\prime\prime}\end{bmatrix}(z_*^2|0)$ も恒等的には 0 でない。これは矛盾である。従って n は奇数であり、このとき明らかに、$2k' \equiv 2k'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ $2\,{}^t k' k'' \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

（証明終）

*) See Igusa. J: Theta function Die Grundlehren der Math. Wiss. bd 194. Springer-Verlag, Berlin (1972) p.174 Theorem I