1

Kummer多様体の定義方程式について

日大理工　　佐々木隆二

§0　主たる結果

kを標数が2と異なる代数閉体とする。Kをk上のAbel多様体XのKummer多様体、即ち、*inverse morphism* $\iota: X \longrightarrow X$による、$X$の商多様体とし、$M$を$K$上の*ample invertible sheaf*とする。一次系$\Gamma(K, M^a)$　(aは正整数)によって定義される写像

$$\Phi_{M^a} : K \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(K, M^a))$$

に対し、次が云える。

定理A　$a \geq 2$ならば、像$\Phi_{M^a}(K)$は*projectively normal*である。もし自然な写像$\Gamma(K, M) \otimes \Gamma(K, M) \longrightarrow \Gamma(K, M^2)$が全射ならば、$\Phi_M(K)$もそうである。

さて、$S^n\Gamma(K, M^a)$を$\Gamma(K, M^a)$のn次対称積とし、$I_n^{(a)} = \mathrm{Ker}[\, S^n\Gamma(K, M^a) \longrightarrow \Gamma(K, M^{an})$とおく。このとき、$I_n^{(a)}$の各元$F$は$\mathbb{P}(\Gamma(K, M^a))$の$n$次超曲面$V(F)$を定める。

定理 B　以上の記号の下で、

$$\Phi_{M^2}(K) = \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} V(F),$$

$$\Phi_{M^a}(K) = \bigcap_{F \in I_2^{(a)}} V(F) \qquad (a \geq 3).$$

§1　Abel 多様体の定義方程式

X を代数閉体 k 上定義された Abel 多様体、L を X 上の ample invertible sheaf とする。定義方程式について、最近の画期的な結果は、次に述べる Mumford の定理であるが、その為に定義をしよう。

定義　射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ が ideal 論的に、超曲面 $H_1, \cdots, H_m$ の交わりであるとは、次を満す事である。

i)　$X = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$　(集合論的)

ii) X の各点 x に対し、x の affine 近傍 $U \subset \mathbb{P}^n$ で、$X \cap U \subset U$ の ideal が $H_1, \cdots, H_m$ の affine equations $f_1, \cdots, f_m$ によって生成されるものがある。

定理（Mumford [5]） $a \geq 4$ のとき、一次系 $\Gamma(X, L^a)$ によって定義される写像 $\Phi_{L^a}: X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L^a))$ による像 $\Phi_{L^a}(X)$ は ideal 論的に 2 次曲面の交わりである。

この Mumford の結果を巧に使い、関口は次を証明した（[8], [9]）。

定理（関口） $\Phi_{L^3}(X)$ は ideal 論的に、3 次曲面の交わりである。

次に問題になるのは、$I_n^{(a)} = \mathrm{Ker}(S^n\Gamma(X, L^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^{an}))$ の生成元を系統的に、書きあげる事である。それらについては、Riemann 以来、多くの人達の結果があるが、ここでは最近の結果 Mumford [4], [5], Koizumi [3] をあげておくだけにする。

§2　定理 A の証明

X を代数閉体 k ($\mathrm{ch}\, k \neq 2$) 上の Abel 多様体、$\iota: X \longrightarrow X$ を inverse morphism とし、M を X の Kummer 多様体 K_X 上の ample invertible sheaf とする。$L = \pi^* M$ とおく、ただし $\pi: X \longrightarrow K_X$ は自然な写像。ι

は自然に $\Gamma(X, L^a)$ (a：正整数) の自己同型 $[-1]$ を誘導する。引き戻し $\pi^* : \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^a)$ の像 $\Gamma(X, L^a)_+$ は $\{f \in \Gamma(X, L^a) \mid [-1]f = f\}$ になる。

さて、定理Aは、次の定理A′の直接の結果である。

定理A′ 以上の記号の下で、$a \geqslant 2$ に対し、自然な写像

$$\Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(K_X, M^{a+1})$$

は全射である。

証明、次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^* \otimes \pi^*"', "\wr"] & \Gamma(K_X, M^{a+1}) \arrow[d, "\wr"', "\pi^*"] \\
\Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a)_+ \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \Gamma(X, L^{a+1})_+ \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\Gamma(X, L) \otimes \Gamma(X, L^a) \arrow[r] & \Gamma(X, L^{a+1})
\end{tikzcd}$$

図中、中段の矢印が全射なることを云うのであるが、それには、次の(*)が云えれば良い。

(*) $\varphi_a : \Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^{a+1})$ は全射 ($a \geqslant 2$)。

実際、(*)を仮定すれば、任意の $f \in \Gamma(X, L^{a+1})_+$ は $\varphi_a(\sum_i g_i \otimes h_i) = f$ ($g_i \in \Gamma(X, L)_+$, $h_i \in \Gamma(X, L^a)$) なる形

に表わされる。$f \in \Gamma(X, L^{a+1})_+$ 故 $\varphi_a(\sum g_i \otimes [-1]h_i) = f$，
従って　$f = \varphi_a(\sum g_i \otimes \frac{h_i + [-1]h_i}{2})$　。

さて(*)を示す為に、次の Lemma を証明する。

Lemma　$f : X \longrightarrow Y$ を Abel 多様体の isogeny. M を Y 上の ample invertible sheaf とし、$L = f^*M$ とおく。すると自然な写像

$$\tau : \Gamma(X, L^2)^{\mathrm{Ker} f} \otimes \Gamma(X, L^n) \longrightarrow \Gamma(X, L^{n+2})$$

は、$n \geq 3$ のとき全射である，但し $f^*(\Gamma(Y, M^2)) = \Gamma(X, L^2)^{\mathrm{Ker} f}$ とおく。

Lemma の証明．L^{n+2} の Theta 群を $\mathcal{G}(L^{n+2})$ とする（Theta 群の定義等については、[6]，[7] を参照されたい)。τ の像を W とすれば、次の事が云えれば良い（cf [9])。

$$(\#)\left\{\begin{array}{l}\text{剰余体が } k \text{ なる、任意の } k\text{-局所環 } (R, \mathfrak{m}) \\ \text{と、} \mathcal{G}(L^{n+2}) \text{ の任意 } R\text{-valued point } \lambda \text{ とに対し、} \\ \qquad U_\lambda[f^*(\Gamma(Y, M^{n+2})) \otimes R] \subset W \otimes R\text{。}\end{array}\right.$$

ここで、U は $\mathcal{G}(L^{n+2})$ の $\Gamma(X, L^{n+2})$ への自然な作用である。
$K(L^{n+2}) = \mathrm{Ker}\, \phi_{L^{n+2}}$ とおく、但し $\phi_{L^{n+2}} : X \longrightarrow \hat{X}$ は $x \longmapsto T_x^* L^{n+2} \otimes L^{-(n+2)}$ で定義される、X からその dual $\hat{X}$ への homomorphism。$j : \mathcal{G}(L^{n+2}) \longrightarrow K(L^{n+2})$ は自

然な準同型とし、$j(\lambda)=u$ とおく。このとき次の可換図を得る。

$$(A)\quad \begin{array}{ccc} \Gamma(X_S,(L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X,L^{n+2})\otimes R & \xrightarrow{T_u^*} & \Gamma(X_S, T_u^*(L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X_S,(L_S)^{n+2}) \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y,M^{n+2})\otimes R & \xrightarrow[T^*_{f(u)}]{} & \Gamma(Y_S, T^*_{f(u)}(M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}) \end{array}$$

ここで P_Y は $Y\times\hat{Y}$ 上の Poincaré invertible sheaf. $\gamma=\phi_{M^{n+2}}(f(u))$ $P_{Y,\gamma}$ は P_Y の $Y\times \mathrm{Spec}\,R \xrightarrow{1_Y\times\gamma} Y\times\hat{Y}$ による制限、$S=\mathrm{Spec}\,R$, $X_S=X\times S$ 等々。一方、次の可換図もえる。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Y_S,(M_S)^2)\otimes\Gamma(Y_S,(M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma}) & \longrightarrow & \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(Y,M^2)\otimes\Gamma(Y,M^n\otimes P_{Y,\bar\gamma}) & \longrightarrow & \Gamma(Y,M^{n+2}\otimes P_{Y,\bar\gamma}) \end{array}$$

ここで縦の矢印は、reduction modulo $\mathfrak{m}$ で、$\bar\gamma$ は合成写像 $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,R \xrightarrow{\gamma} Y$。下段の矢印は全射 (cf [7]) 故、中山の補題から上段の矢印も全射なることがわかる。また $f^*((M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma})\simeq(L_S)^n$ 故、次図も可換である。

$$(B)\quad \begin{array}{ccc} [\Gamma(X,L^2)^{\mathrm{Ker}\,f}\otimes R]\otimes[\Gamma(X,L^n)\otimes R] & \longrightarrow & \Gamma(X,L^{n+2})\otimes R \\ f^*\otimes f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \Gamma(Y_S,(M_S)^2)\otimes\Gamma(Y_S,(M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma}) & \twoheadrightarrow & \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}) \end{array}$$

図(A),(B)の可換性より(#)が云える。これで Lemma の証明が終る。

定理の証明の続き。次の条件を満す isogeny $f: X \longrightarrow Y$ と、Y の Kummer 多様体 K_Y 上の ample invertible sheaf M' とが存在する。

条件 (i) $K((\pi')^* M') = Y_2 = \{y \in Y \mid 2y = 0\}$

(ii) $(f')^* M' \simeq M$ 。

但し、$\pi': Y \longrightarrow K_Y$ は自然な写像で、$f': K_X \longrightarrow K_Y$ は次の図を可換にするもの：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\
K_X \arrow[r, "f'"'] & K_Y
\end{tikzcd}$$
。

従って、次の可換図を得る。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, L) & \Gamma(Y, (\pi')^* M') \arrow[l, "f^*"'] \\
\Gamma(X, L)_+ \arrow[u, phantom, "\cup"] & \Gamma(Y, (\pi')^* M')_+ \arrow[u, phantom, "\parallel\ \text{(i)より}"] \\
\Gamma(K_X, M) \arrow[u, "\pi^*", "\wr"'] & \Gamma(K_Y, M') \arrow[l, "(f')^*"] \arrow[u, "\wr", "(\pi')^*"']
\end{tikzcd}$$
。

この図式より、$\Gamma(X, L)_+ \supset f^*(\Gamma(Y, (\pi')^* M'))$ を得る。さらに、$K((\pi')^* M') = Y_2$ に注意すれば、$(\pi')^* M' \simeq (L')^2$ なる形となる、L' は Y 上の ample invertible sheaf である。従って Lemma より (*) をえる。これで定理 A′ の証明が終る。

§3 定理 B の証明。

定理の後半も前半と同様に示される故、前半のみ証明する。§0 の記号を使用する。$K(\pi^*M) \supset X_2 = \{x \in X \mid 2x = 0\}$ 故、$\pi^*M \simeq L^2$ なる形に表わされる、ただし $\pi : X \to K_X = K$ は自然な写像、L は X 上の ample symmetric（即ち $\iota^*L \simeq L$）invertible sheaf。このとき isomorphism $\varphi : L \longrightarrow \iota^*L$ で $\varphi^{\otimes 2} : L^2 \longrightarrow \iota^*L^2$ が自然な isomorphism になるものがある。$\varphi^{\otimes b}$（b：正整数）$: L^b \longrightarrow \iota^*L^b \simeq L^b$ が誘導する $\Gamma(X, L^b)$ の automorphism を $[-1]$ と書く。$\Gamma(X, L^b)_+ = \{f \in \Gamma(X, L^b) \mid [-1]f = f\}$ とおくと、自然な単射 $\pi^* : \Gamma(K, M^b) \longrightarrow \Gamma(X, L^{2b})$ により、$\Gamma(K, M^b)$ と $\Gamma(X, L^{2b})_+$ とが同一視される。$\mathbb{P}(\Gamma(K, M^2)) = \mathbb{P}(\Gamma(X, L^4)_+)$ の各点は、$\Gamma(X, L^4)_+$ 上の non-trivial linear form l で表わされる。さてその様な l が与えられ、この l に対応する $\mathbb{P}(\Gamma(X, L^4)_+)$ の点 $[l]$ が、

$$[l] \in \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} V(F)$$

を満すとする。このことは次と同値：

$\exists\ \ell^{(3)} : \Gamma(X, L^{12})_+ \longrightarrow k$ linear form s.t.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 3} \arrow[rr] \arrow[dr, "\ell^{\otimes 3}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma(X, L^{12})_+ \arrow[dl, "\ell^{(3)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Lemma $\exists$ linear form $n : \Gamma(X, L^6)_+ \longrightarrow k$ s.t.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^6)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "n^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^{12})_+ \arrow[dl, "\ell^{(3)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Lemma の証明。 $[\ell] \in \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} \nabla(F)$ 故 $[\ell] \in \bigcap_{F \in I_2^{(2)}} \nabla(F)$。
従って linear form $\ell^{(2)} : \Gamma(X, L^8)_+ \longrightarrow k$ で、図

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "\ell^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^8)_+ \arrow[dl, "\ell^{(2)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

が可換となるものがある。従って linear form $m : \Gamma(X, L^2)_+ \longrightarrow k$ で、次図を可換にするものがある。

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^2)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "m^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^4)_+ \arrow[dl, "\ell"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

すると、任意の $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \Gamma(X, L^2)_+$ と $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \Gamma(X, L^4)_+$ とに対し、

$$\ell^{(3)}((a_1 \cdot a_2) \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot c_2) \cdot (d_1 \cdot d_2))$$

$$= \ell^{(3)}((a_1 \cdot b_1) \cdot a_2 \cdot b_2) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot d_1) \cdot c_2 \cdot d_2)$$

$$= \ell(a_1\cdot b_1)\cdot \ell(a_2)\cdot \ell(b_2)\cdot \ell(c_1\cdot d_1)\cdot \ell(c_2)\cdot \ell(d_2)$$

$$= m(a_1)\cdot m(b_1)\cdot \ell(a_2)\cdot \ell(b_2)\cdot m(c_1)\, m(d_1)\cdot \ell(c_2)\cdot \ell(d_2)$$

$$= \ell^{(3)}((a_1\cdot a_2)\cdot(c_1\cdot c_2))\cdot \ell^{(3)}((b_1\cdot b_2)\cdot(d_1\cdot d_2))$$

となる。一方定理A'により、$\Gamma(X, L^2)_+ \otimes \Gamma(X, L^4)_+ \longrightarrow \Gamma(X, L^6)_+$ は全射となる故、上式は、任意の a, b, c, $d \in \Gamma(X, L^6)_+$ に対し、

$$\ell^{(3)}(a\cdot b)\cdot \ell^{(3)}(c\cdot d) = \ell^{(3)}(a\cdot c)\cdot \ell^{(3)}(b\cdot d)$$

と云い変えられる。この事から linear form n の存在がわかる。

さて定理の証明を続けよう。$\Gamma(X, L^3)_- = \{f \in \Gamma(X, L^3) \mid (-1)f = -f\}$ とおくと、

$$\Gamma(X, L^3) = \Gamma(X, L^3)_+ \oplus \Gamma(X, L^3)_-$$

となる。上記 Lemma の証明と同様にして、linear forms $p : \Gamma(X, L^3)_+ \longrightarrow k$ と $q : \Gamma(X, L^3)_- \longrightarrow k$ で次図を可換にするものがあることを知る:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^3)_+^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[dr, "p^{\otimes 2}"'] & \Gamma(X, L^6)_+ \arrow[d, "n"] & \Gamma(X, L^3)_-^{\otimes 2} \arrow[l] \arrow[dl, "q^{\otimes 2}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

。

さらに、$\Gamma(X, L^3)_+^{\otimes 2} + \Gamma(X, L^3)_-^{\otimes 2} \longrightarrow \Gamma(X, L^6)_+$ が全射で n は non-trivial 故、$p \oplus q : \Gamma(X, L^3) \longrightarrow k$ も nontrivialとなることがわかる。この $p\oplus g$ は次を満す：

(C) 任意の $F\in \mathrm{Ker}(\Gamma(X,L^3)^{\otimes 3}\longrightarrow \Gamma(X,L^9))$ にまずし

$$(p\oplus g)^{\otimes 3}(F)=0.$$

従って、関口の定理（§1）により、X の点 x で $\Phi_{L^3}(x)\in \mathbb{P}(\Gamma(X,L^3))$ に対応する linear form が $p\oplus g$ となるものがある。このとき、

$$\Phi_{M^2}(\pi(x))\in \mathbb{P}(\Gamma(K,M^2))=\mathbb{P}(\Gamma(X,L^4)_+)$$

に対応する linear form が与えられた ℓ になることが解り、定理の証明を終る。

§4　例。

この節では、基礎体を $\mathbb{C}$ とする。g 次の Siegel 上半空间 H_g の点 z と、列 vector $x\in\mathbb{C}^g$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}^g$ とに対し、いわゆる theta series は

$$\theta\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}(z|x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\mathbf{e}\left(\tfrac{1}{2}{}^t(k_1+m)z(k_1+m)+(k_1+m)(x+k_2)\right)$$

によって定義される。但し $\mathbf{e}(*)=e^{2\pi i *}$。$X=\mathbb{C}^g/(z,1_g)\mathbb{Z}^{2g}$, $\Theta_a=\bigoplus_{p\in\frac{1}{a}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}\theta\begin{bmatrix}p\\0\end{bmatrix}(az|ax)\cdot\mathbb{C}$, $\Theta_a^+=\{\theta\in\Theta_a\mid\theta:\text{even}\}$

とする。さて linear system Θ_4^+ によって定義される写像を考える：

$$\Phi_{\Theta_4^+} : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Theta_4^+)$$
$$x \longmapsto (\cdots : \theta[{}^p_q](z|2x) : \cdots)_{({}^p_q)\text{は even}}$$

ここで、$({}^p_q) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ で ${}^tp \cdot q \equiv 0 \mod 2$ (i.e. $({}^p_q)$: even) の全体を考えると

$$\Theta_4^+ = \bigoplus_{({}^p_q):\text{even}} \theta[{}^p_q](z|2x)\cdot\mathbb{C}$$

となることに注意する。このとき $g=2$ ならば $\Phi_{\Theta_4^+}(X)$ の定義 ideal は、2次の斉次部分 I_2 で生成されることがわかり、I_2 の生成元も explicit に書きあげることができる (Göpel, Wirtinger)。

また

$$\Theta_2 \otimes \Theta_2 \longrightarrow \Theta_4^+$$

が全射になる為の必要十分条件は

$$\theta[{}^p_q](z|0) \neq 0 \qquad (\forall ({}^p_q) : \text{even})$$

で与えられ (Mumford)、このことは、$g=2$ のときは X が楕円曲線の積とはならないことであり、$g=3$ のときは、X が non-hyperelliptic curve の Jacobian 多様体となることである。最後に $g=2$ のとき

$$\Phi_{\Theta_2} : X = \mathbb{C}^2/(z, 1_2)\mathbb{Z}^4 \longrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\Theta_2)$$

による像 $\Phi_{\Theta_2}(X)$ の定義方程式を述べる (cf Baker[1]).

$p=\binom{0}{\frac12}$, $q=\binom{\frac12}{0}$, $p+q=\binom{\frac12}{\frac12}$ とすると

$$\Theta_2 = \left\langle \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\left(\tfrac12 z\middle|x\right),\ \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\p\end{smallmatrix}\right]\left(\tfrac12 z\middle|x\right),\ \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\q\end{smallmatrix}\right]\left(\tfrac12 z\middle|x\right),\ \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\p+q\end{smallmatrix}\right]\left(\tfrac12 z\middle|x\right)\right\rangle_{\mathbb{C}}$$

これら basis に対応して $\mathbb{P}^3$ の座標を X_0, X_p, X_q, X_{p+q} とおくと、X が楕円曲線の積にならないとき方程式は、次の様になる。

$$X_0^4 + X_p^4 + X_q^4 + X_{p+q}^4 + A\, X_0 X_p X_q X_{p+q}$$
$$+ B(X_0^2 X_p^2 + X_q^2 X_{p+q}^2) + C(X_0^2 X_q^2 + X_p^2 X_{p+q}^2) + D(X_0^2 X_{p+q}^2 + X_p^2 X_q^2) = 0$$

但し
$$A = \frac{1}{\theta_0\cdot\theta_p\cdot\theta_q\cdot\theta_{p+q}}\Bigg\{-(\theta_0^4+\theta_p^4+\theta_q^4+\theta_{p+q}^4)$$
$$+\frac{\theta_0^2\theta_p^2+\theta_q^2\theta_{p+q}^2}{\theta_0^2\theta_p^2-\theta_q^2\theta_{p+q}^2}(\theta_0^4+\theta_p^4-\theta_q^4-\theta_{p+q}^4)$$
$$+\frac{\theta_0^2\theta_q^2+\theta_p^2\theta_{p+q}^2}{\theta_0^2\theta_q^2-\theta_p^2\theta_{p+q}^2}(\theta_0^4-\theta_p^4+\theta_q^4-\theta_{p+q}^4)$$
$$+\frac{\theta_0^2\theta_{p+q}^2+\theta_p^2\theta_q^2}{\theta_0^2\theta_{p+q}^2-\theta_p^2\theta_q^2}(\theta_0^4-\theta_p^4-\theta_q^4+\theta_{p+q}^4)\Bigg\},$$

$$-B = \frac{\theta_0^4+\theta_p^4-\theta_q^4-\theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_p^2-\theta_q^2\theta_{p+q}^2}, \qquad -C = \frac{\theta_0^4-\theta_p^4+\theta_q^4-\theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_q^2-\theta_p^2\theta_{p+q}^2}$$

$$-D = \frac{\theta_0^4-\theta_p^4-\theta_q^4+\theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_{p+q}^2-\theta_p^2\theta_q^2}, \qquad \theta_r = \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\r\end{smallmatrix}\right]\left(\tfrac12 z\middle|0\right).$$

この方程式は、$z=\begin{pmatrix} z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}\in H_2$ となるときは、

$$(X_0X_{p+q}-X_pX_q)^2=0$$

となることが容易に解る。 $X = \mathbb{C}^2 / \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, 1_2\right)\mathbb{Z}^4 = E_1 \times E_2$ ($E_i = \mathbb{C}/(z_i, 1)\mathbb{Z}^2$) を Φ_{Θ_2} によって $\mathbb{P}^3$ に埋めこむとその像 $\Phi_{\Theta_2}(E_1 \times E_2)$ は $X_0 X_{p+q} - X_p X_q = 0$ によって定義された2次曲面となり、$E_1 \times E_2$ の Kummer 多様体ではない。

参考文献

[1] H. F. Baker, Abelian Functions, Cambridge, 1897.

[2] S. Koizumi, Theta relations and projective normality of abelian varieties, Amer. J. Math., 98(3), 865-889 (1976).

[3] ———, The equations defining abelian varieties and modular functions, Math. Ann. [redacted] 242 (2), 127-145 (1979).

[4] D. Mumford, On the equations defining abelian varieties I, Invent. Math., 1, 287-354 (1966).

[5] ———, Varieties defined by quadratic equations, Questioni sulle varieta algebriche, Corsi dal C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[6] ———, Abelian varieties, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, London and New York, 1970.

[7] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties II, J. Math. Soc. Japan 29(4), 709-727 (1977).

[8] ——————, On the cubics defining abelian varieties, Ibid., 30(4), 703-721 (1978).

[9] ——————, On the normal generation by a line bundle on an abelian variety, Proc. Japan Acad., 54, Ser. A, 185-188 (1978).

[10] W. Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig 1895.