２００１年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by T. Suwa and T. Yamanouchi

Series #72. June, 2002

２００１年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次

２００１年度　談話会・特別講演一覧

1. ４月１７日（火）＊村　田　　全　氏（立教大）　連続性の種々相：数学的、自然科学的連続、不連続から哲学的連続・不連続への通路
2. ５月２４日（木）＊松　下　大　介　氏（北海道大）　正則シンプレクティック多様体とラグランジアンファイブレーション
3. ５月２４日（木）＊中　村　　玄　氏（北海道大）　Discretization of the Dirichlet to Neumann map for the inverse boundary value problems（境界値逆問題におけるディリクレ・ノイマン写像の離散化）
4. ６月２５日（月）＊藤　田　安　啓　氏（富山大）　A linear PDE approach to Bellman equation of ergodic control with periodic stucture
5. ６月２６日（火）＊金　川　秀　也　氏（金沢大）　Strong Approximation of Reflecting Brownian Motion
6. ７月　９日（月）　竹　崎　正　道　氏（University of California Los Angeles）　The History of Operator Algebras, in Japan and in the World
7. ７月　９日（月）＊片　山　良　一　氏（大阪教育大）　G-Kernel on AFD III_1 factor
8. ７月１７日（火）＊古　田　幹　雄　氏（東京大）　同変 e 不変量とその応用
9. ７月１７日（火）＊新　井　朝　雄　氏（北海道大）　無限次元解析と整数論
10. ７月２３日（月）＊Ya-xiang Yuan 氏（Chinese Academy of Sciences）　On the convergence of a new Levenberg-Marquardt Method
11. ７月２３日（月）＊Boling Guo 氏（Institute of Applied Physics and Computational science）　Long time behavior for generalized Ginzburg-Landau equations
12. ８月　８日（水）＊Piotr Rybka 氏（Warsaw University）　Quasi-static evolution of 3-D crystals grown from supersaturated vapor
13. ９月　４日（火）＊Siegfried Böcherer 氏（University of mannheim）　On critical values of L-functions（L 関数の臨界値について）
14. ９月　６日（木）　丹　田　　聡　氏（北海道大）　トポロジカル物質：リング、メビウス、８の字結晶
15. ９月１４日（金）　Andreas Nillsson 氏（東京大）　A characterization of Riesz transforms on $\mathbf{T}^2$ and $\mathbf{Z}^2$
16. ９月１８日（火）＊渕　野　　昌　氏（中部大）　関数の連続性について— Blumberg の定理とその拡張
17. ９月２０日（木）＊越　膳　孝　方　氏（ホンダ技術研究所）　学習と数理モデリングについて
18. ９月２７日（木）＊山　岸　潤　也　氏（北海道大）　RNA スプライシングの非確率的な制御と、その性質を説明するための数理モデル
19. １０月２２日（月）＊高　橋　泰　嗣　氏（岡山県立大）　Norm Inequalities and Geometry of Banach Spaces
20. １０月２４日（水）＊立　澤　一　哉氏（北海道大）　Lieb-Thirring 不等式の一般化について
21. １０月２９日（月）＊Reinhard Farwig 氏（Darmstadt University of Technology）　Navier-Stokes Equation,Analytic Semigroups and Maximal Regularity
22. １１月　５日（月）＊石　橋　輝　雄　氏（北海道大）　２次元生体膜での酵素反応は拡散律速であるか：実験値からの数理的解析の可能性

23. １１月２７日（火）＊小　川　卓　克　氏（九州大）　Sharp Sobolev inequality of logarithmic type and an application to the harmonic heat flow

24. １１月２９日（木）＊姚関 氏、田中 勲 氏（北海道大）　蛋白質構造解析の自動化に向けて

25. １１月３０日（金）＊Marek Fila 氏（Comenius University）　Universal bounds for global solutions of semilinear parabolic equations

26. １２月　７日（金）＊伊　藤　敏　和　氏（龍谷大）　On a transversality between a codimension one holomorphic foliation and a sphere of dimension $2n-1$ in $\mathbf{C}^n$

27. １２月２０日（木）＊河　東　泰　之　氏（東京大）　作用素環と場の量子論

28. １２月２０日（木）＊小　野　　薫　氏（北海道大）　２次元孤立特異点のリンクの symplectic filling について

「連続性の種々相」要旨

村田　全

これは2001年4月に数学教室で行った講義の標題だが，文学部哲学教室での一連の講義と併せて「連続性の問題 第1稿」として発表した（『北大論理』参照）．

目次：序説；**第１章** 連続論の歴史的諸相（未完）；**第２章** 連続運動と数学的連続性；**第３章** 物理学的連続をめぐって；**第４章** 生物的離散性；**第５章** カントの『純粋理性批判』；**第6章**「今」からの脱出とその展開；**第７章** 連続性の形而上学（未完），

ここでは，理学部での報告であることを考慮して数学的連続に関する第２章，私の哲学的立場を示す意味での第６章に重点を置いて，要旨を紹介する．

実は，今日の日本の数学には物理学との関連が不足しているが，歴史的考察と哲学的考察はそれ以上に乏しい．これらは日本の数学が次に飛躍するために重要な要素である．日本の精神風土は，数学を生んだ西欧の精神風土と違うだけに，日本にそれと或る程度異質な数学思想が将来生まれても不思議ではない．私はその事が簡単にできるとは思っていないし，国粋思想に支えられたような奇妙な「日本的数学」などは見たくもないが，優れた意味での思想性は，日本の数学ないし日本文化の将来の発展に役立つと考えている．私の試論がその先駆になるなどと思い上がったことは考えていないが，もし若い人がこれを踏み台にして，独自の道を拓かれる刺激になるならば，それに過ぎる幸いはない．

連続性の否定は不連続性だが，連続性とは不連続性の否定と言ってもよい．しかし改めて不連続とは何かと問えば，連続の観念なしに答えることは難しい．一方，連続が連続なりと分かるのは，連続を区切る目印，つまり連続の中の不連続あってのことである．そこでもう一度「連続とは何か」と問い直せば，それは自分の動作の感覚や意識など，自分が初めから内的にもっている何者かによって分かるのであり，言葉あるいは概念のみによってそれ以上の説明をすることは至難であると思う．

「連続」とは何かの問いは人間の（強く言えば，私の）生の実感にまで到らねばおかない．自己の運動感覚，自己なるものの同一性ないし連続性の意識，自分の中を流れる時と自分を包む拡がりの連続性，更には哲学で言う「実体」の恒常的持続性など，これらこそ連続性の源であり，ひいては連続性の否定としての不連続性の源でもあろう．今，自分の中を流れる時と自分を包む拡がりと言ったが，時間，空間，その区別も，自他の区別も，茫漠たる連続的な世界に付与した一つの不連続な目印に過ぎず，実体に対立する「属性」も，実体の恒常的持続性に対する個別的特殊性として，不連続性の一形態と呼んでもよいかもしれない．

いずれにしても，連続・不連続の問題はゼノンの逆理から，微分積分学の形成，『モナドロジー』などに見るライプニッツの哲学的連続律(lex continuitatis)，カントの哲学，果ては現代の集合論に到るまで，本来的に極めて哲学的な問題である．私はこの問題の或る限られた局面について語るが，問題意識の対象領域はもっと広い．

第2章では数学的連続性としてデデキントの無理数論を取り上げる．数学的連続性から始めるのは，数学が人間の内的な精神と外的な自然との中間に位置する学問であるのと，その理論が論理的に明快な連続論であり，自然科学の道具あるいは言葉として自然界における連続性を論ずる重要な手懸かりになるからである．

しかしその検討の結果，集合概念を用いるこの数学的連続論は，連続運動の舞台を与えるだけで，連続運動そのものは記述していないことが分かる．運動の記述は，変数記号の採用と「任意」なる言葉の利用（卓抜な方法）によって行われるが，変数を任意の位置に「動かす」のは頭の中のイメージである．それ以上の運動記述が不能なのは，言語の意味がふらついては困るという，言語に要求される基本的性質に由来することである．実際，実数論が与えるのは．運動の空間的軌跡として描かれた連続であり，しかも言語も論理も連続的変化をするものではないから，時間的変化を伴う事柄も空間化して捉える事は避けがたい．以上，勿論，実数論の卓越性は十分承知の上の話である．

なお，デデキント自身は連続直線の心像と彼の理論の間の乖離を十分意識している（『連続と無理数』第２節参照）．

私はこうした次第で，数学的連続性が何処に存在するか，人間の中か外かという問いに対して，人間の思考の世界の中と答える方向に傾く．

第3章では，連続運動や連続変化が言葉による表現の問題を超えて，人間の外界に実在するかを問う．ところが物理学は数学的に表現され，数学の連続性は自然の理想像を与える半面，現代的量子物理は勿論，古典物理学においても，客観的世界の中に連続的現象が実在するとは思われず，むしろそれを疑わせる例が多い．このことを実例に則して述べる．

第4章では人間の内的感覚や脳の働きに目を移し，それが連続運動や変化を認識する能力があるかを問う．ところがここでは，視覚，聴覚を始め，脳の働きの不連続性，離散性が目に付き，そう考えるのが今日の学界の大勢であるらしい．

即ち連続運動を説明するものは，人間の外界にも，内的な感覚や脳の働きにも求められないようで，連続性の存在は，もっと内奥の主観的活動に認められるように見える．その活動の原動力は何か．このような疑問に導かれて，私は「連続」が人間の外部にも内部の生理的機能の中にも実在するのでなく，認識の主体たる心の働きの中にあるのではないかと思うようになった．

第5章でカントの『純粋理性批判』に触れたのはこの為だが，そこには多くの学ぶべき点と共に，直ちに受け入れるわけには行かぬ点もある．その詳細は略すが，彼は人間の認識能力の中に感性（感覚器官による受容能力）と悟性（概念による思考能力）を分かち，それで外界を認識しようと考える．しかしそれは外界の「物自体」の認識には届かないし，そもそも感性，悟性の受け取るのは（ありうべき）物自体のばらばらな知見でしかないから，それらを統一する「統覚」という能力を要請する．これは感性でも悟性でもなく，それらに対して「超越論的(transzendental)」な機能だとし，これが万人に共通な「超越論的自意識」のもつ「超越論的機能」であることを要請して，そこから数学や自然科学について万人に共通の真理が認識される条件であることを導くのである．こう言ってしまえば，何ほどのこともないかに見えるが，その間の分析は極めて緻密で，特に，個々独立な人間が共通の普遍的真理を掴み得るために，人間の理性はどんな条件を満たさねばならないかを問う，いわゆるコペルニクス的転回の姿勢は明確である．

なお，彼において連続の観念は，時空の連続性(Kontinuitat)，実体の持続性(Beharrlichkeit)などと表されるが，連続性そのものの吟味はない．私が彼に学ぶのは，数学や自然学の真理性を保証しようとして，人間の理性の中にその根拠を問おうとした姿勢である．

第6章は，私の哲学の出発点の提示である．私は「永遠の今」または「今」と呼ばれる混沌，ベルグソンの「純粋持続」に似たところから出発する．そして「今」に潜在する能力として，「「今」を区切ると共にそれをつなぐ能力」の契機（しばらく「原記憶」，「原分別」と呼ぶ）と，「それら一切を意識あるいは表現しようとする客観化の能力」の契機（「原類推」，「原表現」）とを前提として認める．

言うまでもなく，この混沌から理論的な世界への移行は極めてむずかしい．それは，このような区別の成立が「今」から脱出する途端に「今」を殺し，「今」でなくしてしまうからである．この間の移行は或る意味でこの試みの核心だが，これは禅の悟りや荘子の思想に似た飛躍的な議論を含むので，理論的考察に馴染まず，概念的な言葉では表現しにくい．しかも一切の知的活動は「今」からの脱出後でないと始まらない．

私は，我々の連続感が「今」に潜む能力，特に「原記憶」から来ると見る．そして「今」については言語を超えた飛躍的議論を避けがたいということを以て，我々が連続運動を言葉で表現できないことの最奥の根拠にしようとしている．これは誰もが考えそうなことで，大山鳴動鼠一匹のような結論かもしれないが，私としては精一杯の結論で，カントが「超越論的(transzendental)」と名付けた一連の議論にも，ライプニッツの『モナドロジー』に潜在する連続律にも，類似の精神が働いているように思う．

第７章は未完だが，そこでの基本的問題は第一に「今」からの脱出をどう説くかの問題，第二に現代数学の問題を念頭に置いたカントのカテゴリー論の見直しの試み，やや具体的言えば，カントのように感性と悟性を截然と切り離すのでなく，その間にニュアンスの差を認め，タイプ理論的あるいは階層理論的な考えを入れつつ，両者を回り階段状に繋ごうとする試みである．勿論，至難な問題で，次回までに予告できるのは，問題の難しさの所在を示すこと位である．

付言：　実は以上の試論と並んで，「数学的連続の経験的基礎付け」と言うべきものについて改めて吟味したい気持ちもある．即ち，根元的な連続感覚あるいは連続意識を支えるには，哲学的な思弁によるよりも，数学や物理学が実際にこのように有効に応用されているという「経験的事実」を取るのも，十分の理があるとする考え方である．というよりも，これは現代の多くの数学者，物理学者に共通する常識的で，おそらく健全な考え方である．この種の経験論的角度からは真理の絶対的な基礎づけまでは得られないが，私はカントと違って，数学的真理一般の完全な普遍妥当性に特にこだわっていないので，これは深く考えるべき要件である．しかし私はここで述べた試みにも捨てがたいところがある上，それはこの経験論的試論のためにも多少の意味ありと予感している．しかしこの考えを展開するには改めて多くの準備が必要なので，今回はそれに正面からは触れない．

第１回数学教室談話会

正則シンプレクティック多様体とラグランジアン ファイブレーション

講演者：松下　大介 (北海道大学)

代数曲線はその種数によって分類されることは良く知られているが、その性質は大きく種数０、１、２以上と分類することが出来る。前世紀にはこの見方を高次元代数多様体に拡張することが試みられ、そこでは種数の代わりに第一 Chern 類の正負によって多様体を分類することが提唱された。ここで種数１の代数曲線である楕円曲線の高次元版は第一 Chern 類が０の多様体である。このクラスの多様体に対しては Bogomolov による分解定理があり、任意の第一 Chern 類が０の代数多様体 (実際にはケーラー多様体でも良いのだが) は適当な不分岐被覆を取れば、複素トーラス、正則シンプレクティック多様体及びカラビヤウ多様体の直積に分解することが知られている。正則シンプレクティック多様体の例をあげるならば $K3$ 曲面がその代表例である。著名な３人の数学者の名前の頭文字から名づけられたこの代数曲面はその名に違わず、豊富な数学的内容を持つことが前世紀半ばから示されてきた。ひるがえって４次元以上の正則シンプレクティック多様体は具体例の少なさもあって９０年代後半までほとんど研究されてこなかった。講演では正則シンプレクティック多様体の中でもっとも原始的な存在である既約シンプレクティック多様体について、それが持ちうるファイバー構造について言及するとともに、この多様体が $K3$ 曲面の良い一般化と見なせることを紹介したい。

第１回数学教室談話会

Discretization of the Dirichlet to Neumann map for the inverse boundary value problems
(境界値逆問題におけるディリクレ・ノイマン写像の離散化)

講演者：中村　玄 (北海道大学)

材料特性の非破壊検査や各種の物理探査は、物体表面における観測データより未知物質係数を同定（即ち決定）する逆問題である。より詳細には、２階の線形偏微分方程式の境界値問題の解をもちいて記述される静的或いは定常状態における観測であれば、Dirichlet データとその共役境界データである Neumann データの有限個の組を観測データとして、それから２階の線形偏微分方程式の未知係数を同定する問題である。（以下この様な問題を境界値逆問題と呼ぶ。）この観測データとして、可能な全ての組を考えたのが、Dirichlet-Neumann 写像である。様々な境界値逆問題において Dirichlet-Neumann 写像が観測データとして使われ、逆問題の数学理論が豊かに整備されて来た。Dirichlet-Neumann 写像は、逆問題の数学的構造を明らかにする上で役には立つものの観測データとしては、現実には実現不可能な観測回数が無限回の観測データである。そこで Dirichlet-Neumann 写像を適当な有限回の観測に置き換えて（即ち離散化して）、方程式の未知係数を近似的に同定する一般原理が求められる。この講演では、Schrodinger 方程式の potential 同定の境界値逆問題を例にとり、この一般原理を紹介したい。

A linear PDE approach to Bellman equation of ergodic control with periodic structure

藤田　安啓（富山大・理）

June 22, 2001

この講演では, 周期構造を持つ Bellman 方程式（**非線型**偏微分方程式）

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha\,\Delta\phi(x) + \min_{|\gamma|\le 1}\left[\,\gamma\cdot D\phi(x) + |\gamma|^2\,\right] + h(x) = \lambda, \\ \phi \in W^{2,p^*}(\Omega) \text{ is periodic}, \end{cases}$$

を考える．ここで，$\Omega =]0,1[^d$, また $\alpha > 0$ および $p^* > d$ は与えられた定数であり，h は $h \in L^{p^*}(\Omega)$ なる $\mathbb{R}^d$ 上の周期関数である（周期はすべての成分について 1 としておく）．見つけるべき解は, 組 $(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times W^{2,p^*}(\Omega)$ である．Bellman 方程式 (*) は，エルゴード制御問題に付随して出てくるもので，Bensoussan はその著書の中で，方程式 (*) を含むクラスの Bellman 方程式の解の構成を行った ([1, Theorem II-6.1])．彼の方法は，まず方程式 (*) に ϵ 摂動を付けた**非線型**偏微分方程式を解き，その解の $\epsilon\downarrow 0$ のときの極限が (*) の解になることを示すというものであった．

この講演の目的は，Bellman 方程式 (*) の解を**線形**偏微分方程式によるアプローチにより構成することである．

References

[1] A. Bensoussan. Perturbation Methods in Optimal Control, John Wiley and Sons, Paris. 1988.

Strong Approximation of Reflecting Brownian Motion

S.Kanagawa (Kanazawa University)

One of important problems in stochastic analysis is to consider stochastic differential equations with boudary conditions on multi-dimensional domains (so-called Skorohod SDE). There are two approaches to define approximate solutions of such stochastic differential equations. Tanaka (1979), and Saisho (1987) constructed Skorohod equations using the projection π on the boundary. Roughly speaking, the reflecting path $x(t)$ is defined for given function $w(t)$ by the following manner: Define a step function $w_n(t)$ by discretization of $w(t)$ and construct the reflecting step function $x_n(t)$ for $w_n(t)$ as follows. For a domain D, if $x_n(t_0) \in \overline{D}$ and $y_n(s) \equiv x_n(t_0) + w_n(s) - w_n(t_0) \in \overline{D}$, $t_0 \leq s \leq t$ for some t_0 and t, put $x_n(s) = y_n(s)$, $t_0 \leq s \leq t$. On the other hand, if $y_n(s) \in \overline{D}$, $t_0 \leq s < t$ and $y_n(t) \notin \overline{D}$, put $x_n(t) = \pi(y_n(t))$. We can show x_n tends to x uniformly in t. For non-convex domains, this projection can be defined in r_0 neighbourhood of the domain for some finite constant r_0. This type of approximation is often called *projection scheme.*

A second one is the *penalty method* type, that is, we approximate Skorohod equations by equations with coefficients of gradient type. For the purpose of obtaining numerical data by computer simulation of Skorohod SDE's we need discretized approximate solutions of them. We focus our attention on reflecting Brownian motion on multi-dimensional domains and give a new penalty method type approximation. Our scheme is separated into two steps: we first approximate reflecting Brownian motions by usual Brownian motions with a drift term whose coefficients are gradient type (penalty method) in pathwise sence and secodly we approximate the Brownian motion with such drift term by Euler-Maruyama scheme. Here we don't need to assume boundedness and convexity of domains. We make use of a slite modification of the result in Kanagawa (1988) to obtain the rate of convergence.

The following figures represent a path of the reflecting Brownian motion X_m^n starting at $(0,2) \in \boldsymbol{R}^2$ with $m = 640,000, n = 4,000,000$ on time interval $[0, 0.25]$ (Fig.1) and the distribution of $X_m^n(t)$ with $X_m^n(0) = (0,2), m = 640,000, n = 4,000,000$ and sampling number $= 60$ at $t = 0.05$ (Fig.2), $t = 0.25$ (Fig.3) and $t = 0.625$ (Fig.4).

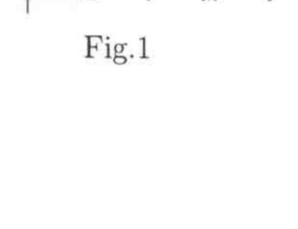

Fig.1

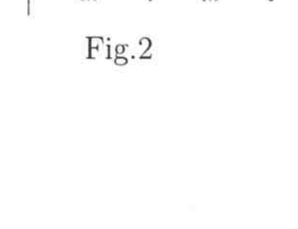

Fig.2

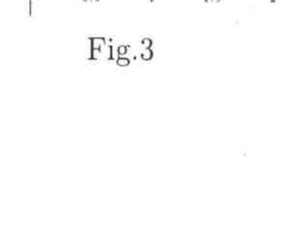

Fig.3

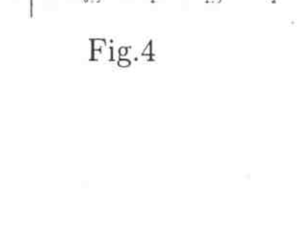

Fig.4

G-kernel on AFD III_1 factor

片山　良一 (大阪教育大学 数理科学)

この研究課題は竹崎正道氏との共同研究の一部です．

G を離散群，$\mathcal{M}$ を因子環とする．このとき，$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathcal{M}) := \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\mathrm{Int}(\mathcal{M})$ への準同型 α を G-kernel (G の外部作用とも言う) と言う．また $\alpha_g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ を $g \in G$ に対する α の $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ への section とする．　α, β を G-kernel とするとき，α と β が外部同値であるとは，

$$\theta\alpha_g\theta^{-1} \equiv \beta_g, \quad g \in G, \quad \mathrm{mod}\ (\mathrm{Int}(\mathcal{M}))$$

となる $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ が存在することを言う．

α を G-kernel とするとき，

$$u(g,h) \in \mathcal{U}(\mathcal{M}) :\ \alpha_g\alpha_h = \mathrm{Ad}u(g,h)\alpha_{gh}$$

となるユニタリー $u(g,h)$ が存在する．このとき，結合法則 $\alpha_g(\alpha_h\alpha_k) = (\alpha_g\alpha_h)\alpha_k$ を考えれば，

$$\alpha_g(u(h,k))u(g,hk) = c_\alpha(g,h,k)u(g,h)u(gh,k)$$

となる 3-コサイクル $c_\alpha(g,h,k) \in \mathrm{Z}^3(G,\mathbb{T})$ が得られる．このとき，$u(g,h) \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ の選び方に，スカラー倍の自由度がある．これは，$\mathrm{B}^3(G,\mathbb{T})$ の元となるので，G-kernel に対して，3-コホモロジークラス

$$[c_\alpha(g,h,k)] \in \mathrm{Z}^3(G,\mathbb{T})/\mathrm{B}^3(G,\mathbb{T}) \equiv \mathrm{H}^3(G,\mathbb{T})$$

が一意的に決まる．

φ を $\mathcal{M}$ 上の dominant weight とし，モジュラー自己同型群による接合積を $\widetilde{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{M} \rtimes_\varphi \mathbb{R}$ とする．これを $\mathcal{M}$ の core と言う．自己同型 α_g は，標準的に core $\widetilde{\mathcal{M}}$ の自己同型 $\widetilde{\alpha_g}$ に一意的に拡張できる．core $\widetilde{\mathcal{M}}$ 上では拡張されたモジュラー自己同型は内部自己同型になる．特に $\mathcal{M}$ が超有限因子環（AFD）$\mathcal{R}$ のときは，$\mathcal{R}$ のモジュラー自己同型と，core $\widetilde{\mathcal{R}}$ 上で内部自己同型になる $\mathcal{R}$ の自己同型は一致する．

すると，次のような Q-kernel が考えられる．

$$N := \widetilde{\alpha}^{-1}(\mathrm{Int}(\widetilde{\mathcal{M}}))$$

$$\widetilde{\alpha} : Q \longmapsto \mathrm{Out}(\widetilde{\mathcal{M}}) := \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{M}})/\mathrm{Int}(\widetilde{\mathcal{M}})$$

また，$\widetilde{\mathcal{M}}$ は dual 作用 $\{\theta_t :\ t \in \mathbb{R}\}$ が存在するので，これを同時に考えるために，次のような単射的 $\widetilde{Q}$-kernel を扱う．

$$\widetilde{Q} := Q \times \mathbb{R}$$

$$\widetilde{\alpha} := \widetilde{\alpha} \times \theta : \widetilde{Q} \longmapsto \mathrm{Out}(\widetilde{\mathcal{M}})$$

($\widetilde{\alpha}$ と同じ記号を用いて表す)

$\widetilde{\mathcal{M}}$ の中心を $\mathcal{C}$ とすると，先ほどと同様にして，$\widetilde{Q}$-kernel に対して，3-コサイクル $\delta(\widetilde{\alpha}) = [c_{\widetilde{\alpha}}] \in \mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathcal{C})$ が決まる．

ここで，$\mathcal{M}$ を III_1 型超有限因子環 $\mathcal{R}$ とすると，$\mathcal{C} = \mathbb{T}$ となる．このとき

$$\mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathbb{T}) \simeq \mathrm{H}^3(Q, \mathbb{T}) \times \mathrm{H}^2(Q, \mathbb{R})$$

となる．一方，作用の場合と同様にして， G-kernel α に対するモジュラー不変量 $\nu_\alpha \in \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{R})$ が得られる．

G-kernel α に対して，次のような不変量が得られる．

$$(c_{\widetilde{\alpha}}, \nu_\alpha) \in \mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathbb{T}) * \mathrm{Hom}_G(N.\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}^3(Q, \mathbb{T}) \times \mathrm{Hom}_G(N.\mathbb{R})$$

もし，群 G が従順な加算離散群，$\mathcal{R}$ が III_1 型超有限因子環のとき，この不変量が外部同値の完全不変量であることを，下記のよな手順で示す．

まず最初に，AFD II_1 型超有限因子環上のモデル $\widetilde{Q}$-kernel を構成する．

Proposition 1. [Model $\widetilde{Q}$-kernel on AFD II]
For 3-cocycle $[\widetilde{c}(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{r})] = [c(p,q,r)e^{it\nu(n(q,r))}] \in \mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathbb{T})$, *there is* $\widetilde{Q}$*-kernel* $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}$ *on* AFD *factor* $\mathcal{R}_0$ *of type* II_1 *such that*

$$\delta(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}) = \widetilde{c} \quad in\ \mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathbb{T}).$$

Moreover

$$\widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}_{\widetilde{p}} \widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}_{\widetilde{q}} = \mathrm{Ad}\bar{v}(p,q) \widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}_{\widetilde{p}\widetilde{q}}$$
$$c(p,q,r)e^{it\nu(n(q,r))} = \widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}_{\widetilde{p}}(\bar{v}(q,r))\bar{v}(p,qr)\{\bar{v}(p,q)\bar{v}(pq,r)\}^*$$

In the case of AFD *factor* $\mathcal{R}_{0,1}$ *of type* II_∞, *the* $\widetilde{Q}$*-kernel* $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}$ *on* AFD *factor* $\mathcal{R}_{0,1}$ *can be taken to satisfy* $\tau \widetilde{\alpha}^{\widetilde{c}}_t = e^{-t}\tau$.

次に，Proposition 1 と dual 作用を利用して，与えられた不変量を持つ AFD III_1 型超有限因子環上のモデル $\widetilde{Q}$-kernel を構成する．

Proposition 2. [Model G-kernel on AFD III_1] *For* $(\widetilde{c}, \nu) \in \mathrm{H}^3(\widetilde{Q}, \mathbb{T}) * \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{R})$, *there exists a model* G*-kernel* $\alpha^{\widetilde{c},\nu}$, *on* AFD *factor* $\mathcal{R}$ *of type* III_1 *such that*

1) $\nu(\alpha^{\widetilde{c},\nu}) = \nu \quad in \quad \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{R})$;

2) $\delta(\alpha^{\widetilde{c},\nu}) = \widetilde{c} \quad in \quad \mathrm{H}^3(\widetilde{Q},\mathbb{T})$;
3) *for any homomorphism* $b : Q \longmapsto \mathbb{R}$, *there is* $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ *such that*

$$\rho\alpha_g^{\widetilde{c},\nu}\rho^{-1} \equiv \sigma^{\omega}_{b(\pi(g))}\alpha_g^{\widetilde{c},\nu} \qquad for \quad g \in G$$

where ω *is some weight on* $\mathcal{R}$ *and* $\equiv$ *means* $\mathrm{mod}(\mathrm{Int}(\mathcal{R}))$.

Brauer の方法を用いて証明するので，与えられた G-kernel から単位元にあたる G-kernel を分離する定理を準備する．

Theorem 3. [Model action splitting] *Let* α *be an injective* G*-kernel on* AFD *factor* $\mathcal{R}$ *of* III_1 *and we set* $\beta_p = \alpha_{s(p)}, \quad p \in Q = G/N$. *Then there exist* $a_p \in \mathcal{U}(\mathcal{R})$ *and* φ *dominant weight on* $\mathcal{R}$ *such that*

1) $\varphi \mathrm{Ad} a_p \circ \beta_p = \varphi$
2) β_p *admits a factorization:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(a_p)\widetilde{\beta}_p =& \widetilde{\alpha}_p^1 \otimes \alpha_p^{(0)} \otimes id \\ \theta_s =& \theta_s^1 \otimes id \otimes \theta_s^{(0)} \\ \widetilde{\mathcal{M}} \simeq& \widetilde{\mathcal{R}}_1 \otimes \mathcal{R}_0^1 \otimes \mathcal{R}_0^2 \end{aligned}$$

where $\widetilde{\alpha}_p^1$ *is a* Q*-kernel on* AFD *factor* $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ *of* II_∞, $\alpha_p^{(0)}$ *is a free action of* Q *on* AFD *factor* $\mathcal{R}_0^1$ *of* II_1 *and* $\theta_s^{(0)}$ *is an almost periodic free product type action on* AFD *factor* $\mathcal{R}_0^2$ *of* II_1.

与えられた不変量の逆元を持つモデル G-kernel とモデル G-kernel とのテンソル積の G-kernel が，単位元になることを示す．

Lemma 4. *Let* $\bar{\alpha}_{\bar{p}}^{\widetilde{c}}$ *and* $\bar{\alpha}_{\bar{p}}^{\widetilde{c}^{-1}}$ *be model* $\widetilde{Q}$*-kernels on* AFD *factor of type* II_1 *associated the invariants* $\widetilde{c}, \widetilde{c}^{-1}$ *considered as above. Then we have*

$$\bar{\alpha}_{\bar{p}}^{\widetilde{c}} \otimes \bar{\alpha}_{\bar{p}}^{\widetilde{c}^{-1}} \sim \theta_t^{(0)} \otimes \alpha_p^{(0)}$$

where $\theta^{(0)}$ *is almost periodic pruduct type action of* $\mathbb{R}$ *on* $\mathcal{R}_0$ *with* $(\mathcal{R}_0^1)^{\theta^{(0)}}{}' \cap \mathcal{R}_0^1 = \mathbb{C}$ *and* $\Gamma(\alpha^{(0)}) = \mathbb{R}$ *and* $\alpha_p^{(0)}$ *is a free action of* Q *on* $\mathcal{R}_0$ *and the symbol* $\sim$ *means outer conjugate.*

最後に A. Connes が用いた， Brauer の方法で，次の定理を示す．

Theorem 5. *Let* α *be a injective* G*-kernel on* AFD *factor* $\mathcal{R}$ *of type* III_1 *with its invariant* $(\widetilde{c},\nu) \in \mathrm{H}^3(\widetilde{Q},\mathbb{T}) * \mathrm{Hom}_G(N,\mathbb{R})$. *Then we have*

1) *this invariant is complete invariant up to outer conjugacy,*
2) *for each invariant* $(\widetilde{c},\nu)$, *there is a model injective* G*-kernel* $\alpha^{(\widetilde{c},\nu)}$ *such that*

$$\delta(\alpha^{(\widetilde{c},\nu)}) = (\widetilde{c},\nu) \qquad in \quad \mathrm{H}^3(\widetilde{Q},\mathbb{T}) * \mathrm{Hom}_G(N,\mathbb{R}).$$

最後に，これと関連して論文を挙げておく．

References

[B] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate text in mathematics 87, Springer-Verlag New York Inc (1982).

[Cnn1] A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. **4ème Sèrie, 6** (1973), 133-252.

[Cnn2] A. Connes, *Almost periodic states and factors of type* III_1, J. Funct. Anal., **16** (1974), 415-445.

[Cnn3] A. Connes, *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type* II_1, Acta Math. Szeged, **39** (1977), 39-66.

[Cnn4] A. Connes, *Outer conjugacy of automorphisms of factors*, Symposia Mathematica, **20**, 149-159.

[Cnn5] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math., **104** (1976), 73-115..

[Cnn6] A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **4éme Série, 8,** (1975), 383-419.

[Cnn7] A. Connes, *Outer conjugacy of automorphisms of factors*, Symposia Mathematica, **20**, 149-159.

[CT] A. Connes and M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type* III, Tôhoku Math. J., **29** (1977), 473-575.

[FT] A.J. Falcone and M. Takesaki, *Operator valued weights without structure theory*, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 323–341.

[J1] V.F.R. Jones, *Actions of finite groups on the hyperfinite type* II *factor*, Amer. Math. Soc. Memoire, **237** (1980).

[JT] V.F.R. Jones and M. Takesaki, *Actions of compact abelian groups on semifinite injective factors*, Acta Math., **153** (1984), 213-258.

[KtST] Y. Katayama, C.E. Sutherland and M. Takesaki, *The characteristic square of a factor and the cocycle conjugacy of discrete amenable group actions on factors*, Invent. Math., **132** (1998), 331-380.

[KwST] Y. Kawahigashi, C.E. Sutherland and M. Takesaki, *The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions*, Acta Math., **169** (1992), 105-130.

[Ocn] A. Ocneanu, *Actions of discrete amenable groups on factors*, Lecture Notes in Math. No. **1138,** (1985), Springer, Berlin,.

[ST1] C.E. Sutherland and M. Takesaki, *Actions of discrete amenable groups and groupoids on von Neumann algebras*, Publ Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 1087-1120.

[ST2] C.E. Sutherland and M. Takesaki, *Actions of Discrete amenable groups on injective factors of type* III_λ, $\lambda \neq 1$, Pacific J. Math. **137** (1989), 405-444.

[ST3] C.E. Sutherland and M. Takesaki, *Right inverse of the module of approximately finite dimensional factors of type* III *and approximately finite ergodic principal measured groupoids. Operator algebras and their applications,* II, Fields Institute Comm. **20** (1998), 149-159.

第2回数学教室談話会

同変 e 不変量とその応用

講演者：古田幹雄氏 (東京大学)

亀谷幸生氏との共同研究として得られた，ある種の同変写像の非存在について述べたい．その命題そのものよりも，証明のアイディアと，トポロジーへの応用に重点をおいて説明する．

（1）証明について．安定ホモトピー群から Q/Z への写像として戸田，Adams によって e 不変量と呼ばれる古典的な不変量が定義されている．これは Dirac 作用素の指数を primary invariant とするなら，ある種の secondary invariant として捉えることができる．この不変量の family version あるいは equivariant version が証明に使われる．

（2）応用について．4次元多様体上の Seiberg-Witten 方程式を同変写像と見なすことにより，4次元トポロジーに応用することができる．たとえば次が示される：「2個の K3 と T^4 との連結和は，$S^2 \times S^2$ と何かの連結和の形には書けない.」

無限次元解析と整数論

新井朝雄
北海道大学大学院理学研究科数学教室

平成13年6月12日

概要

無限次元解析学の基礎となる空間のひとつの範疇であるフォック空間（ボソンフォック空間，フェルミオンフォック空間，ボソン－フェルミオンフォック空間）における諸対象（第2量子化作用素，生成・消滅作用素，無限次元 Dirac 作用素，分配関数，相関関数等）と整数論における基本的対象（リーマンのゼータ関数，メービウス関数，リューヴィル関数等）との間に存する興味ある関係について解説する．

文献

A. Arai, Infinite-dimensional analysis and analytic number theory, Acta Appl. Math. **63**(2000), 41–78.

On the Convergence of a New Levenberg-Marquardt Method *

Ya-xiang Yuan
State Key Laboratory of Scientific/Engineering Computing,
Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing,
The Academy of Mathematics and Systems Sciences,
Chinese Academy of Sciences, P.O.Box 2719, Beijing, 100080, P.R.China,
E-mail: yyx@lsec.cc.ac.cn

Abstract

We propose a new way to choose the parameter in the Levenberg-Marquardt method for solving nonlinear equations $F(x) = 0$, where $F(x) : R^n \to R^m$ is continuously differentiable and $F'(x)$ is Lipschitz continuous. The sequence generated by the new method converges to the solution quadratically, if $||F(x)||_2$ provides a local error bound for the system of nonlinear equations. Numerical results show that the method performs well for singular problems.

---

*Supported by Chinese National Science Foundation grant 19731010 and the Knowledge Innovation Program of CAS., joint work with student J.Y. Fan

Long time behavior for generalized Ginzburg-Landau equations

Boling GUO
(Institute of applied physics and computational science)

Abstract

The existence of global solution for the initial BVP of the following complex Ginzburg-Landau equation (of derivative type) is studied. This equation arises as a model equation of fluid phenomena, material science and etc.

$$u_t = \gamma u + (1+\nu i)\Delta u - (1+\mu i)|u|^{2\sigma}u + \lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + (\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2$$
$$(t > 0, \quad x \in \Omega),$$
$$u(t,x) = 0 \quad (t > 0,\, x \in \partial\Omega)$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in \Omega)$$

Under the following assumptions on σ, μ, ν

(A1) (i)$\sigma > 2$ or (ii)$\sigma = 2, |\lambda_1|, |\lambda_2|$ are suitably small

$$\text{(A2)} \quad -1 - \nu\mu < \sqrt{2\sigma+1}|\nu - \mu|/\sigma$$

it is proved that the unique solution exists and it eventually approaches a certain prescribed compact set. From the Dynamical system point of view, it turns out that there is a compact Global attracter. The device in the proof is to use the weighted Sobolev space.

QUASI-STATIC EVOLUTION OF 3-D CRYSTALS GROWN FROM SUPERSATURATED VAPOR

P. Rybka
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Warsaw University
ul. Banacha 2, 07-097 Warsaw, Poland

Abstract. Gonda and Gomi (T.Gonda, H.Gomi, *Ann. Glaciology*, **6** (1985), 222–224) have grown large elongated ice crystals from supersaturated vapor. Theoretically this problem may be recast in a framework similar to that used by Seeger (A.Seeger, *Philos. Mag.*, ser. 7, **44**, no 348, (1953) 1–13) for studies of planar crystals. The resulting set of equations is of Stefan type. We also include the Gibbs-Thomson relation on the crystal surface. In order to make this system tractable mathematically we assume that the Wulff crystal is a fixed cylinder. Subsequently we study a weak form of our system. We show local in time existence of solutions assuming that the initial shape is an *arbitrary* cylinder. We comment on properties of weak solutions.

On critical values of L-functions

(by Siegfried Böcherer, september 5, 2001)

Most of the results reported here were obtained in collaboration with various people (C.G.Schmidt, A.Panciskin, B.Heim)
We start from the well-known Siegel type Eisenstein series of degree n

$$E^n(Z,\psi,s) := \sum_{C,D} \psi(detC)det(CZ+D)^{-k} \mid det(CZ+D) \mid^{-2s} det(Y)^s$$

where ψ is a Dirichlet character mod N; this type of series was studied by many people from various points of view. We mention two important properties:
A) At $s = 0$ and at $s = \frac{n+1}{2} - k$ the Eisenstein series defines a holomorphic modular form with known Fourier expansion (this is true at least for $k > n+1$).

$$\sum_T a_n(T,\psi)e^{2\pi i tr(TZ)}$$

B) As a function of s, the Eisenstein series has a meromorphic continuation to the complex plane; by means of restriction to certain subdomains and integration against cusp forms on such a subdomain, one can obtain integral representations of certain automorphic L-functions.
Basically three cases of such integral representations are known at present, all use some sort of diagonal embeddings of (products of) Siegel upper half spaces into higher-dimensional upper half spaces

$\mathbf{H}_n \times \mathbf{H}_n \hookrightarrow \mathbf{H}_{2n}$	(standard L-function for $Sp(n)$)	P-S/R and myself
$\mathbf{H} \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{H}_3$	(triple L-function)	Garrett, P-S/R
$\mathbf{H}_2 \times \mathbf{H}_2 \times \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{H}_5$	(L-function for $GSp_2 \otimes GL_2$)	B.Heim

(Here P-S/R stands for Piatetski-Shapiro/Rallis)
In all three cases, by considering the value at $s = 0$ one gets immediately an algebraicity statement for the largest critical value of the L-function and then also for the other critical values (at least in the case of equal weights).
The main point of my talk was to indicate, how one can also get congruences for the critical values, more precisely how one gets the p-adic interpolation from our detailed knowledge of the Fourier coefficients of the Eisenstein series.
I give a precise statement for the first case (see the paper by C.G. Schmidt

and myself in Ann.Institute Fourier 50(2000):

Theorem: *Assume that F is a Siegel cusp form of degree n (Hecke eigenform) and assume that it satisfies an ordinarity condition for the prime p. Then there is a p-adic measure $d\mu$ on $\mathbf{Z}_p^x$ such that for each primitive character χ of conductor $p^{m(\chi)}$ with $m(\chi) \geq 1$ (and satisfying some parity condition) we have*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^x} \chi d\mu = ...\alpha^{-4m(\chi)} \frac{L(F, k-n, \chi)}{\pi^c < F, F >}$$

Here ... denotes some elementary factors, c is some natural number, α is an eigenvalue of the $U(p)$-operator (a p-adic unit by the assumption of ordinarity) and $L(F, s, \chi)$ denotes the standard -L-function attached to F, twisted by χ.

Rephrased in some more elementary fashion, this means that *there are many p-power congruences among the $\frac{L(F,k-n,\chi)}{\pi^c<F,F>}$, when χ varies over Dirichlet characters of p-power conductors.*
Similar statements also hold for the other critical values and the measures arising in this way are connected with each other.

The main point in the *proof* is to modify the Eisenstein series in a nice way to insert the Dirichlet characters χ in the integral representation. This is done by a new kind of twist "outside the diagonal". The congruences then follow from similar ones of the Fourier coefficients of the Eisenstein series, provided that we take care (by the well known method of "traces") of the fact that the level of the Eisenstein series will be growing with the conductor of the characters.
This kind of procedure works also for the triple-L-function (joint work with A.Panciskin, almost finished) and seems also to hold for the L-function for $GSp_2 \times GL(2)$ (this last case is work in progress).

Siegfried Böcherer
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
68131 Mannheim
Germany
boech@siegel.math.uni-mannheim.de

関数の連続性について — Blumberg の定理とその拡張

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)
(中部大学 理学教室, fuchino@isc.chubu.ac.jp)

いたるところで連続でない関数の例は簡単に作れる．たとえば，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，

$$f(r)=\begin{cases}0 & r\in\mathbb{Q}\text{ のとき}\\ 1 & r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\text{ のとき}\end{cases}$$

とすれば，f は $\mathbb{R}$ のすべての点で連続ではない．しかし，f の $\mathbb{Q}$ への制限 $f\restriction\mathbb{Q}$ は定数関数となるから，特に連続であるし，f の $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ への制限 $f\restriction(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ についても同様である．より一般的には，次の定理が知られている：

定理 1 (H. Blumberg [2]) すべての関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{R}$ の稠密な部分集合 X で，f の X への制限 $f\restriction X$ が連続になるようなものが存在する．

$\mathbb{R}$ は可分だから，上の定理の X は可算集合である可能性がある．実際，連続体仮説が成り立つときには，上の定理でのような X が非可算ではありえないような $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が構成できる：

定理 2 (W. Sierpiński, A. Zygmund [10]) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で，すべての連続体濃度の $C\subseteq\mathbb{R}$ に対し，f の C への制限 $f\restriction C$ 連続でないようなものが存在する．

系 3 連続体仮説を仮定すると，関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で，すべての非可算な $U\subseteq\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction U$ が連続でないようなものが存在する．

系 3 の命題は，連続体仮説の否定のもとでも成り立つ可能性がある：

定理 4 (S. Shelah [8]) $V[G]$ を任意の集合論のモデル V に *Cohen* 実数を連続体個付加して得られるモデルとする．$V[G]$ で，次が成り立つ：関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で，すべての非可算な $U\subseteq\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction U$ が連続でないようなものが存在する．

上の 系 3 や定理 4 は，連続体仮説の仮定のもとで，あるいは．集合論のモデルによっては，Blumberg の定理が，この方向ですでに最良のものとなっていることを示している．したがって，定理 1 を拡張する試みるとき，次の 2 つのタイプの方針が考えられる: 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が適当な関数のクラスに属しているとき，定理 1 の X により強い性質を要求できることを示す．2. 集合論のモデルで，定理 1 より強い定理が成り立つものを構成する（つまり 定理 1 より強い定理の集合論との無矛盾性を示す）．

1. の方向では様々な古典的な結果が知られているが，そのうちのいくつかを次に示す：

命題 5 (1)　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を *Baire* 関数とする（つまり，すべての開集合の f による逆像は *Baire* の性質を持つものとする）．このとき，補集合が第 *1* 類の集合となるような G_δ 集合 $P\subseteq\mathbb{R}$ で，$f\restriction P$ が連続になるようなものが存在する．

(2)　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が（$\mathbb{R}^2$ の部分集合として）*analytic* なら，完全部分集合 $D\subseteq\mathbb{R}$ で $f\restriction D$ が連続な単調関数となるようなものが存在する．

(3)　連続体仮説の否定を仮定する．$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が Σ^1_2 なら，完全部分集合 $D\subseteq\mathbb{R}$ で，$f\restriction D$ が連続な単調関数となるようなものが存在する．

"projective", "Σ^1_2" 等の記述集合論からの用語については，[7] を参照されたい．

命題 5 (3) の命題は，集合論の公理のみからは導くことはできない：$V=L$ が成り立つときには，系 3 での f は Σ^1_2 になるようにとれるからである．

次の定理は 2. の方向で知られているものの中で一番強いものの一つである：

定理 6 (a)　(S. Shelah [8]) ZFC が無矛盾なら，ZFC に "すべての関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，第 *2* 類の集合 $D\subseteq\mathbb{R}$ が存在する" を付加しても無矛盾である．

(b)　(S. Shelah [9]) ZFC が無矛盾なら，ZFC に "すべての関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，ゼロ集合でない $D\subseteq\mathbb{R}$ が存在する" を付加しても無矛盾である．

次の Shelah と筆者の共著の仕事は，上の定理の状況を実数値可測基数の文脈に "平行移動" したものである：

定理 7 (a)　(S.F. and Shelah [6]) ZFC + "可測基数が存在する" が無矛盾なら，ZFC + "$2^{\aleph_0}$ は *Baire type cardinal*（実数値可測基数の *categorical dual*）" + "すべての関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，第 *2* 類の集合 $D\subseteq\mathbb{R}$ が存在する" も無矛盾である．

(b)　(S.F. and S. Shelah, still something between a conjecture and a theorem) ZFC + "可測基数が存在する" が無矛盾なら，ZFC + "$2^{\aleph_0}$ は 実数値可測基数" + "すべての関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，*non measure zero* な $D\subseteq\mathbb{R}$ が存在する" も無矛盾である．

Baire type cardinal や 実数値可測基数の標準的なモデルでは，定理 4 での命題が成り立つので，上の定理の証明で得られるこれらの基数のモデルは（関数の連続性という解析的な性質に関して）標準的なものとは著しく異なるものになっている．これは D. Fremlin の問題「Baire type cardinal や 実数値可測基数のモデルで，数学的な命題に関して標準的なモデルと異なることが示せるようなものが存在するか？」に一つの肯定的な答を与えるものとなっている．

Blumberg の定理に関連して，次のような基数不変量を考えることができる：

$$\begin{aligned}\mathtt{conti}=\min\{\kappa: f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{で，どんな}\ \kappa\text{-dense な}\ D\subseteq\mathbb{R}\ \text{に対しても}\\ f\restriction D\ \text{が連続とならないようなものが存在する}\}\end{aligned}$$

ただし，$X\subseteq\mathbb{R}$ が κ-dense とは，どんな $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ に対しても $X\cap[a,b]$ が濃度 κ を持つことである．定理 1 と定理 2 により，$\omega_1\le\mathtt{conti}\le 2^{\aleph_0}$ である．

定理 8 (S. Baldwin [1]) $\mathtt{p} \leq \mathtt{conti}$.

conti や，その様々な変形については，まだ面白そうな問題が多く残っているように思われる．

References

[1] S. Baldwin, Martin's Axiom implies a stronger version of Blumberg's theorem, Real Analysis Exchange, Vol. 16 (1990-1991), 67–73.

[2] H. Blumberg, *New properties of all real functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 24 (1922), 113–128.

[3] K. Ciesielski, *Set Theoretic Real Analysis*, J. Appl. Anal. 3(2) (1997), 143–190.

[4] Q. Feng, *Homogeneity for open partitions of pairs of reals*, Trans. Amer. Math. Soc. 339, No.2 (1993), 659–684.

[5] S. Fuchino, S. Shelah, *Models of real-valued measurability*, preprint.

[6] S. Fuchino, S. Shelah, *Models of real-valued measurability II*, in preparation.

[7] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer Verlag (1994/1997).
［A. Kanamori 著，渕野 昌 訳： 巨大基数の集合論，シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998), I – VI, 1–554. ］

[8] S. Shelah, Possibly every real function is continuous on a non–meagre set, Publications de L'Institute Mathématique - Beograd, Nouvelle Série(1995).

[9] A. Rosłanowski and S. Shelah, Measured Creatures.

[10] W. Sierpiński, A. Zygmund, *Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu*, Fund. Math. 4 (1923), 316–318.

「学習と数理モデリングについて」

越膳　孝方

ホンダ技術研究所　和光基礎研究センター

本講演（講義）では、人工知能によって定義される学習、及びヒト脳などによって代表される生物学的学習システムと数理的モデリングについての関係について述べる。過去、数年にわたる神経回路網の研究は、ヒト脳における情報処理機能の解明を目的として構築された、人工知能型ニューラルネットワークなどの数理的学習モデルによって正当化されてきたが、それを実環境下での障害物回避などのロボット認知問題へ適用した場合についての問題を概観する。その一方で、生物学的実在により忠実な、ヤリイカ巨大軸策などの神経細胞膜の電気的興奮現象のダイナミクスを数理モデル化した、スパイキングニューロンのＨＨ微分方程式の大局的分岐構造、また脳をマクロ的な視点で一つの学習制御システムとして捉えた場合に、それ自体の計算論モデルの構築に伴う、情報の選択、及び古い部位と新しい部位との統合原理（意識のメカニズム）について、視覚脳と行動抑制や感情制御に大きく関わると考えられる前頭連合野を例にとり、どのように数理モデル化されるべきかについて述べる。

****

北海道大学大学院農学研究科応用分子昆虫学分野
山岸潤也

****

このセミナーは、分子生物学におけるセントラルドグマ（DNA→RNA→protein）の一過程であるスプライシングについて、その制御機構の本質を数理科学的手法を用いて解析していくことを目的にしています。
くわしくは以下のような構成になります。

① スプライシングについて

DNA に存在する遺伝子がタンパク質として発現するまでには、DNA の塩基配列情報が一度 RNA に転写され、続いて、その RNA の塩基配列情報からタンパク質が合成されることが知られています（セントラルドグマ）。
さらに詳しく見ると、DNA にはタンパク質をコードする領域（エキソン）とタンパク質をコードしない領域（イントロン）が混在して存在しており、まずエキソン、イントロンを含めたDNA の塩基配列がそのまま転写され（pre-mRNA）、次に pre-mRNA からイントロンが切り出されエキソン同士が繋ぎ合わされて、エキソンのみの成熟した RNA（mRNA）ができます。これをスプライシングといいます。

② スプライシングの制御にかかわる問題点

イントロンの数は遺伝子によって異なりますが（平均 8.8 個）、40 個以上に及ぶものも知られています。ここで仮に 20 個のイントロンをもつ遺伝子があったとして、これらのイントロンすべてが切り出されないと正しい mRNA は生成しません。ここで仮に正しい mRNA ができる精度を 90%とすると、20 箇所のイントロンを取り除くそれぞれのスプライシング反応で要求される精度は、99.47%と、とても高いものになります（逆に、それぞれのスプライシング反応で要求される精度を低く見積もると、正しい mRNA ができる確率は細胞が維持できるとは到底思えないような低さになってしまう）。100%に及ばない酵素反応がどのように組織されれば 100%に近い精度を達成することができるのか？

③ スプライシング制御機構の（分子生物学的な）モデル

スプライシングのケミカル（エステル転移反応）は U1snRNP～U6snRNP と呼ばれる RNA とタンパク質の複合体が触媒します（試験管内では、これらを加えるだけでスプライシングが起きる場合があります）。

次に、スプライスサイト（スプライシングが起こる場所）の特異性を決定する因子群があります。これらのうち代表的なものはRNA結合能とsnRNP結合能を持ち、このような因子がもっとも安定に複合体を形成する配列でスプライシングが起こると考えられています。

④　数理的アプローチを組み合わせた問題解決の方針について

分子生物学的なモデルでは説明することができないスプライシングの高い精度を可能にする機構を明らかにすることを目的に、現象を抽象化あるいは単純化したモデルを構築し（これが最も重要な点だと考えています）、その数理解析からモデルの従うべき条件あるいは構造を明らかにする。次に、そこで示唆されたことが実際に細胞内で起こっていることを分子生物学的に証明する。という手順をとりたいと考えています。

Norm Inequalities and Geometry of Banach Spaces

Yasuji Takahashi
Okayama Prefectural University

In this talk, we consider some generalizations of Clarkson type inequalities in the general Banach space setting, and investigate several geometrical properties of Banach spaces such as p-uniform smoothness, q-uniform convexity, type p, cotype q and uniform non-squareness in terms of these norm inequalities.

1. p-uniformly smooth and q-uniformly convex spaces

A Banach space X is called *q-uniformly convex* ($2 \le q < \infty$) if there is $C > 0$ such that $\delta_X(\varepsilon) \ge C\varepsilon^q$ for all $\varepsilon > 0$. X is called *p-uniformly smooth* ($1 < p \le 2$) if there is $K > 0$ such that $\rho_X(\tau) \le K\tau^p$ for all $\tau > 0$. X is *uniformly convex* if $\delta_X(\varepsilon) > 0$ for all $\varepsilon > 0$, *uniformly smooth* if $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$ as $\tau \to 0$, and *uniformly non-square* if $\delta_X(\varepsilon) > 0$ for some $\varepsilon > 0$. ($\delta_X(\varepsilon)$ resp. $\rho_X(\tau)$ is the modulus of convexity, resp., smoothness of X.)

2. Clarkson's inequalities Let $1 < p \le 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Then for $X = L_p$ or L_q the following inequalities hold:

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{\|x+y\|^q + \|x-y\|^q}{2}\right)^{1/q} \le (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \qquad \forall x,\, y \in X,$$

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{1/p} \ge (\|x\|^q + \|y\|^q)^{1/q} \qquad \forall x,\, y \in X.$$

It is easy to see that (1) and (2) are equivalent in the general Banach space setting. We call (1) the Clarkson inequality. Note that (1) holds in X if and only if it holds in X^* (dual of X) , and if and only if it holds in any Lebesgue-Bochner space $L_r(X)$ with $p \le r \le q$ (cf.[7]).

3. p-uniform smoothness and q-uniform convexity inequalities

$$\text{(3)} \qquad \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} \le \|x\|^p + \|Ky\|^p \quad (K \ge 1) \qquad \text{if } 1 < p \le 2,$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\|x+y\|^q + \|x-y\|^q}{2} \ge \|x\|^q + \|Cy\|^q \quad (0 < C \le 1) \qquad \text{if } 2 \le q < \infty.$$

It is known that X is p-uniformly smooth, resp., q-uniformly convex if and only if (3), resp., (4) holds in X (cf.[1], [2]).

4. Type p and cotype q inequalities Let $1 < p \le 2$ and $1/p + 1/q = 1$.

$$\text{(5)} \qquad \left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|^q\right)^{1/q} \le M\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p} \qquad \forall x_1, \cdots, x_n \in X,$$

$$\text{(6)} \qquad \left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{nq}\theta_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} \ge \frac{1}{M}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{1/q} \qquad \forall x_1, \cdots, x_n \in X.$$

X is called of type p, resp., cotype q if there is $M > 0$ suct that (5), resp., (6) holds in X. It is known that if (5) holds in X, then (6) holds in X^* (cf.[5]), but in general the converse is not true. It is also known that if X is p-uniformly smooth, resp., q-uniformly convex, then it is of type p, resp., of cotype q, but in general the converse is not true.

5. Theorem (p-uniform smoothness) Let $1 < p \leq 2$ and $1 \leq s < \infty$. The following are equivalent.

(i) X is p-uniformly smooth.

(ii) There exists $K \geq 1$ such that

$$\left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s} \leq (\|x\|^p + \|Ky\|^p)^{1/p} \quad \forall x,\, y \in X. \tag{7}$$

If $p \leq s < \infty$, in addition:

(iii) There exists $K \geq 1$ such that

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|^s\right)^{1/s} \leq \left(\|x_1\|^p + \sum_{j=2}^{n}\|Kx_j\|^p\right)^{1/p} \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in X. \tag{8}$$

Note that if (7) holds in X with $K \geq 1$, then (8) holds in X with the same constant $K \geq 1$. In particular, we obtain that if the Clarkson inequality (1) holds in X, then (5) holds in X with $M = 1$, that is, X is of type p with type p constant 1 (cf.[4]).

6. Theorem (q-uniform convexity) Let $2 \leq q < \infty$ and $1 < t \leq \infty$. The following are equivalent.

(i) X is q-uniformly convex.

(ii) There exists $0 < C \leq 1$ such that

$$\left(\frac{\|x+y\|^t + \|x-y\|^t}{2}\right)^{1/t} \geq (\|x\|^q + \|Cy\|^q)^{1/q} \quad \forall x,\, y \in X. \tag{9}$$

If $1 < t \leq q$, in addition:

(iii) There exists $0 < C \leq 1$ such that

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|^t\right)^{1/t} \geq \left(\|x_1\|^q + \sum_{j=2}^{n}\|Cx_j\|^q\right)^{1/q} \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in X. \tag{10}$$

Note that if (9) holds in X with $0 < C \leq 1$, then (10) holds in X with the same constant $0 < C \leq 1$. In particular, we obtain that if the Clarkson inequality (2) holds in X, then (6) holds in X with $M = 1$, that is, X is of cotype q with cotype q constant 1 (cf.[4]).

7. Theorem (duality) Let $1 \leq p \leq 2$, $1 < s < \infty$ and $1/p + 1/q = 1/s + 1/t = 1$. Let $1 \leq K < \infty$. Then

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|^s\right)^{1/s} \leq \left(\|x_1\|^p + \sum_{j=2}^{n}\|Kx_j\|^p\right)^{1/p} \quad \text{for } X \tag{8}$$

implies

$$(10^*) \qquad \left(\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j^*\right\|^t\right)^{1/t} \geq \left(\|x_1^*\|^q + \sum_{j=2}^{n}\|K^{-1}x_j^*\|^q\right)^{1/q} \quad \text{for } X^*.$$

If $p \leq s < \infty$ the converse is true.

8. Remarks

(i) It is shown that if the Clarkson inequality (1) holds in X, then the generalized Clarkson inquality and the random Clarkson inequality hold in X (cf.[3]).

(ii) Uniformly non-square Banach spaces are characterized by Clarkson type inequalities (cf.[6]).

(iii) Let $1 < p \leq 2$ and $p \leq r \leq s < \infty$. Then it is shown that the inequality (7) holds in X if and only if it holds in any Lebesgue-Bochner space $L_r(X)$.

References

[1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.

[2] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry 2nd Ed., 1985.

[3] M. Kato, L. E. Persson and Y. Takahashi, Clarkson type inequalities and their relations to the concepts of type and cotype, Collect. Math. **51** (2000), 327-346.

[4] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr. **186** (1997), 187–196.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, 1979.

[6] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J. **9** (1998), 155-169.

[7] Y. Takahashi and M. Kato, Clarkson and Random Clarkson inequalities for $L_r(X)$, Math. Nachr. **188** (1997), 341–348.

Lieb-Thirring 不等式の一般化について

立澤 一哉 (北大理学部)

Lieb-Thirring の不等式とは、シュレディンガー作用素の負の固有値のモーメント和を評価するための不等式で、1976年に Lieb と Thirring により証明された。この Lieb-Thirring の不等式から有限個の正規直交系に関する Sobolev-Lieb-Thirring の不等式が示され、これを用いることにより物質の安定性の問題 (stability of matter) や非線形方程式のアトラクターの次元の評価などが研究されてきた。

一方 1995 年に Egorov と Kondrat'ev は、Lieb-Thirring の不等式のある一般化を証明した。本講演では、この Lieb-Thirring の不等式あるいは Egorov-Kondrat'ev の不等式をさらに一般化した結果を説明する。この結果の証明には、1985 年に Meyer により発見されたウェーブレットによる重み付き関数空間の特徴付けや、1970 年以降に発展してきた実解析の知識、すなわち Hardy-Littlewood の極大関数に関する重み付き不等式や A_p-weight の理論などが用いられる。

Navier–Stokes Equations, Analytic Semigroups and Maximal Regularity

Reinhard Farwig
Darmstadt University of Technology
farwig@mathematik.tu-darmstadt.de

Global weak solutions of the instationary Navier-Stokes equations pose a (famous) open problem on uniqueness and regularity in $\mathbb{R}^3$. For bounded and exterior domains $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ it is known by *Leray's structure theorem* that the set of possibly singular points in time has a vanishing Haudorff measure $\mathcal{H}^{1/2}$. The essential tools in the proof of Leray's theorem are the so-called *strong energy inequality* and – in unbounded domains – the *maximal regularity* estimate of the Stokes operator $A = -P\Delta$, i.e.,

$$\|u_t\|_{L^p(0,T;X)} + \|Au\|_{L^p(0,T;X)} \leq c\|f\|_{L^p(0,T;X)}$$

for solutions u of the instationary Stokes equation $u_t + Au = f$, $u(0) = 0$ in $X = L^q_\sigma(\Omega)$. The maximal regularity is known for $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, bounded and exterior domains and can e.g. be proved when the imaginary powers A^{is}, $s \in \mathbb{R}$, of the Stokes operator are bounded operators in $L(X)$.

In this talk we consider the problem of the *Stokes resolvent* $\lambda u + Au = f \in X$ and of maximal regularity in an infinite tube $\Omega = \Sigma \times \mathbb{R}$ with constant cross section Σ. Using a partial Fourier transform w.r.t. x_n the resolvent problem is transformed into an *ADN*-elliptic system with parameters λ and the Fourier variable $\zeta \in \mathbb{R}$. This system yields a linear solution operator $M_\lambda(\zeta)$ on the space $L^r(\Sigma)$, $1 < r < \infty$, with a uniform estimate

$$\|M_\lambda(\zeta)\| + \|\zeta \frac{\partial M_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta}\| \leq c.$$

Since $M_\lambda(\zeta)$ is operator-valued, the application of standard multiplier theorems is not straightforward. Therefore we refer to recent results on multiplier techniques, on R-bounded operator families and to improved resolvent estimates of $(R_{\lambda\zeta})$ in weighted L^r-spaces with arbitrary weights of Muckenhoupt type.

石橋　輝雄
北海道大学医学部分子生化学講座

これまでの一般的な酵素反応論は酵素(E)、基質(S)共に水溶性である場合の一定容量の溶液中での反応に適用されるものであり、溶液中ではEとSの分子運動が自由であることから、ESの形成は極めて迅速であり、全体の反応速度はES形成後の反応産物(P)の生成の段階が律速段階であるとする基本概念である。

しかし、リン脂質を主構成分とする生体膜中では、溶液中の3次元の反応とは異なり、E、Sの分子運動は2次元となり、かつE、S共に分子の運動は膜の流動性に依存して著しく拘束されることから、水溶液中とは異なり、ES形成の段階が全体の速度に大きく影響する、拡散律速反応であることが予測される。

本セミナーでは水溶液中の3次元と膜中での2次元の反応で、酵素反応の様式や効率にどの様な違いが生ずるか、またE、Sの膜中での拡散速度からその出会いの確立を求め、反応速度を理論的に予測し得るか否かについて問題を提起したい。

SHARP SOBOLEV INEQUALITY OF LOGARITHMIC TYPE AND AN APPLICATION TO THE HARMONIC HEAT FLOW

小川卓克（九州大学 大学院 数理学研究院）

1. Abstract

対数型の Sobolev の不等式は $\mathbb{R}^n$ 上の $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に埋め込める臨界の Sobolev 空間においてはじめに観察され偏微分方程式の可解性や正則性の問題に対して応用されてきた。

Proposition 1.1 (Brezis-Gallouet[3], Brezis-Wainger[4]). $1 \le p \le \infty$、s を $s > n/p$ を満たす実数とする。$f \in W^{n/p,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|f\|_\infty \le C\left(1 + \|f\|_{W^{n/p,p}} (\log(e + \|f\|_{W^{s,q}}))^{1-1/p}\right),$$

が成り立つ。

Brezis-Gallouet（及び Brezis-Wainger）は はじめこの不等式を $n = 2$ のときに示し、非線形 Schrödinger 方程式の初期値境界値問題の解の大域的可解性に応用した。(他にも 2 次元 Navier-Stokes 方程式などへの応用が知られている。また Engler, Ozawa らによる考察も与えられている。）さて一方 特異積分作用素は L^∞ において有界ではない。このことから例えば 非圧縮性の流体の流速ベクトル $u(t,x)$ を渦度 $w(t,x)$ から評価する際に その L^∞ norm の制御に困難を生じる。このことを 上記の対数型 Sobolev 不等式によって回避して、3 次元 Euler 方程式の爆発条件を与えたのが Beale-Kato-Majda であった。最近、Kozono-Taniuchi によって、この不等式は 有界平均振動函数の空間 (BMO) に拡張され、流体方程式の Ohyama-Serrin-Giga 型の正則性条件の拡張に応用された。本講演においては、こうした 対数型の Sobolev 臨界不等式を Besov 空間あるいは Lizorkin-Triebel 空間への拡張を考える。こうすることにより、Kozono-Taniuchi によって得られた対数型の不等式の次数より sharp なものが得られる。この不等式を用いて、球面への調和写像流方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u(\nabla u, \nabla u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^m, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & \end{cases} \tag{1.1}$$

に対する、BMO における大域的な正則性条件を、Navier-Stokes 方程式や Euler 方程式の Ohyama-Serrin-Giga 型の正則性条件に対応する形で示す。

References

[1] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math.Phys. , **94** (1984), 61-66.

[2] Beirão da Veiga, H., *A new regularity class for the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^n$. Chin. Ann. Math., **16B**, (1995), 407-412.

[3] Brezis, H., Gallouet, T., *Nonlinear Schrödinger equations* , Nonlinear Anal. T.M.A. , **4** (1980), 677-681.

[4] Brezis, H., Wainger, S., *A note on limiting cases of Sobolev embedding and convolution inequalities.*, Comm. Partial Differential Equations , **5** (1980), 773-789.

[5] Chen, Y-M., Struwe, M., *Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps*, Math. Z., **201** (1989), 83-103.

[6] Coifman.R.,Lions P.L., Meyer Y., Semmes,S., *Compensated compactness and Hardy spaces* , J.Math. Pures Appl., **77** (1993) 247-286.

[7] Eells, J., Sampson, J.H., *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **86** (1964), 109-160.

[8] Engler, H., *An alternative proof of the Brezis-Wainger inequality*, Comm. Partial Differential equations. , **14** no. 4 (1989), 541-544.

[9] Ferrari, A. B., *On the blow-up of solutions of 3-D Euler equations in a bounded domain*, Comm. Math. Phys. , **155** (1993), 277-294.

[10] Giga,Y., *Solutions for semilinear Parabolic equations in* L^p *and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system* J. Differential Equations **61** (1986) 186-212

[11] Hayashi, N., von Wahl, W., *On the global strong solutions of coupled Klein-Gordon -Schrödinger equations.* , J. Math. Soc. Japan , **39** (1987), 489-497.

[12] Kozono, H., Ogawa, T. Two-dimensional Navier-Stokes flow in unbounded domains, Math. Annalen **297** (1993), 1-32.

[13] Kozono, H., Ogawa, T.,Taniuchi, Y., *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*, preprint.

[14] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations*, Math. Z., to appear.

[15] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Limitting case of the Sobolev inequality in* BMO *with application to the Euler equations*, Comm. Math. Phys. to appear.

[16] Ohyama, T., *Interior regularity of weak solutions of the time-dependent Navier-Stokes equation*, Proc. Japan Acad., **36** (1960), 273-277.

[17] Ogawa,T., *Sharp Sobolev inequality of logarithmic type and the limiting regularity condition to the harmonic heat flow* preprint.

[18] Ogawa, T.,Taniuchi, Y., *The limiting uniqueness criterion by vorticity to Navier-Stokes in BMO and Besov spaces*, preprint.

[19] Ogawa, T.,Taniuchi, Y., *Remarks on uniqueness and blow-up criterion to the Euler equations in the generalized Besov spaces*, J. Korean Math. Soc. **37** (2000), no. 6, 1007-1020.

[20] Ozawa, T., *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal., **127** (1995), 259-269.

[21] Ponce, G., *Remarks on a paper by J.T..Beale, T. Kato and A. Majda*, Comm. Math. Phys. , **98** (1985), 349-353.

[22] Serrin,J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch.Rat.Mech. Anal., **9** (1962), 187-185.

[23] Shirota, T., Yanagisawa, T., *A continuation principle for the 3-D Euler equations for incompressible fluids in a bounded domain*, Proc. Japan Acad., **69** Ser. A (1993) 77-82.

[24] Taniuchi, Y. *On blow-up criteria of smooth solutions to the 3-D Euler equations in a bounded domain*, preprint, Shinshu Univ. 2000

[25] Triebel, H., *Theory of Function Spaces II* , Birkhäuser, 1983

[26] Yudovich, V. I., *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Math. Research Letters. , **2** (1995), 27-38.

姚閔（やおみん），田中勲

北海道大学理学研究科
生物科学専攻　生体高分子解析学

ポストゲノム科学研究の一環として，構造ゲノム科学と呼ばれるプロジェクトが国際協調的に推し進められようとしている．構造ゲノム科学は，遺伝子産物である蛋白質の立体構造を網羅的に決定し，その後の機能ゲノム科学に続けることで，生命現象を総合的に理解しようとする．構造ゲノム科学プロジェクトを推進するためには，ハイスループットな立体構造解析技術の開発が不可欠である．遺伝子工学，放射光の発達により，蛋白質構造解析の現在の律速段階は，計算機による構造構築，構造精密化にある．本講演では，蛋白質構造解析を自動化するには現在何が必要とされているかを紹介する．

UNIVERSAL BOUNDS FOR GLOBAL SOLUTIONS OF SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Marek FILA

Bratislava, Slovakia

Consider the problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

here $p > 1$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ and Ω is a smoothly bounded domain in $\mathbb{R}^N$.

It was shown in [3] that if Ω is convex, $u_0 \geq 0$ and $p < (N+2)/N$ then every global solution is bounded by a constant which depends on u_0 in a complicated way. Slightly later, Cazenave and Lions ([1]) derived an a priori bound for global solutions if $(3N-4)p < 3N+8$. An a priori estimate for positive global solutions was established by Giga ([2]) when $(N-2)p < N+2$. Recently, Quittner ([4]) has shown that an a priori bound holds for all global solutions provided $(N-2)p < N+2$. The a priori bounds in [1], [2] and [4] depend on $\sup_\Omega |u_0|$.

Our main aim is to establish the following a priori bound for global solutions which is **universal**, that is, **independent of** u_0.

Theorem. *Assume* $p > 1$, $(N-1)p < N+1$ *and let* $\tau > 0$. *There exists a constant* $C(\Omega, p, \tau) > 0$, *independent of* u, *such that for all nonnegative global solutions* u *it holds that* $\sup_\Omega u(t,\cdot) \leq C(\Omega, p, \tau)$ *for* $t \geq \tau$.

This is a joint work with Ph. Souplet and F. B. Weissler.

References

1. T. Cazenave and P. L. Lions, *Solutions globales d'equations de la chaleur semilinéaires*, Commun. Partial Differ. Equations **9** (1984), 955–978.
2. Y. Giga, *A bound for global solutions of semi-linear heat equations*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 415–421.
3. W. M. Ni, P. E. Sacks and J. Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasi-linear equations of parabolic type*, J. Differ. Equations **54** (1984), 97–120.
4. P. Quittner, *A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem*, Acta Math. Univ. Comenianae **68** (1999), 195–203.

M. Fila, Institute of Applied Mathematics, Comenius University, 842 48 Bratislava, Slovakia
E-mail address: fila@fmph.uniba.sk

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

On a transversality between a codimension one holomorphic foliation and a sphere of dimension $2n-1$ in $\mathbb{C}^n$

龍谷大学　伊藤敏和

$\mathbb{C}^n$, $n \geqq 3$, 上の正則1-形式 $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)dz_j$ が積分可能条件 $\omega \wedge d\omega = 0$ をみたすと, ω によって余次元1正則葉層構造 $\mathcal{F}(\omega)$ が定義される。この講演では次の予想をどのようにしてみつけたか, そして今どこまで解けているかを話し, さらに, ここから派生してくるいくつかの問題についても話す。

<u>予想</u>　$\mathcal{F}(\omega)$ が $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}(0:1)$ に横断的でない。

得られた結果は次のとうり:

(1) $\mathbb{C}^n$, $n \geqq 3$, 上の積分可能な homogeneous polynomial 1-形式 ω に対しては予想は肯定的に解ける。

(2) $\mathbb{C}^{2n+1}$, $n \geqq 1$, 上の積分可能正則1-形式に対しては予想は肯定的に解ける。

部分的な結果は次のようなものである。

(1) $\mathbb{C}^{2n}$, $n \geqq 2$, 上の積分可能正則1-形式 ω に対して, $T(\mathcal{F}(\omega))$ の任意の正則ベクトル場は $S^{2n-1}(0:1)$ に横断的でない。

(2) $\mathbb{C}^4 \supset S^7(0:1)$, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}(\omega)) \cap S^7(0:1) = \phi$

$\Rightarrow$ $T(\mathcal{F}(\omega))$ は $S^7(0:1)$ の近傍で実解析的に自明である。

作用素環と場の量子論

河東泰之 (東大・数理)
e-mail: `yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp`

2001年12月

場の量子論に対する作用素環的アプローチについての最近の発展について概観する．文献については，非常に多岐に渡るので，次の最新の preprint の引用文献表を見ていただきたい．

Y. Kawahigashi and R. Longo, *Classification of Local Conformal Nets. Case* $c < 1$, preprint 2002, math-ph/0201015.

作用素環的な場の量子論はもちろん物理学的な研究動機があるわけだが，ここではその表現論をどうとらえるか，という点にしぼって解説する．量子群の表現論を初めとして，近年多くの分野で新しい表現のカテゴリーが研究されている．数学的な定義としては，modular tensor category と呼ばれるものが興味深いが，そこでは何か (compact) 群の表現のようなものがあって，テンソル積，既約分解，次元などの概念が定義されている．ここで次元は整数と限らない値を取る．これが作用素環論の枠組みでどのように調べられるかを説明したい．

作用素環とは，Hilbert 空間の有界線型作用素たちのなす環である．まず，群の表現のもっとも直接的な類似は，作用素環の (別の Hilbert 空間への) 表現であろう．しかし，場の量子論に関連して現れる，III 型 factor と呼ばれる作用素環では，すべての表現が unitary 同値であるので，表現論を考えても役に立たない．そこで，作用素環の族を考えるのである．S^1 上の空でも稠密でもない連結開集合 I を区間と呼ぶことにし，各 I ごとに，固定された Hilbert 空間上の作用素環 $M(I)$ が対応していて，$I \mapsto M(I)$ という対応がある公理を満たしているものを考えるのである．これらは，I でパラメトライズされた作用素環の族と考えられる．この $\{M(I)\}_I$ の表現を考えよう．

最初に問題になるのは，テンソル積の定義である．群の表現のテンソル積は容易だが，環のときはどうしたらいいのかよくわからない．(今考えている環は，Hopf 環ではない．) しかし，表現 π が一つ与えられたとき，区間 I

を固定すると，上の unitary 表現の一意性によって，$x \in M(I)$ については，$\pi(x) = x$ としてよいことがわかる．このとき，$\{M(I)\}_I$ の公理の一つから，I の補集合の内部 I' については，$x \in M(I')$ のとき，$|pi(x) \in M(I')$ であることが従う．これによって，$M(I')$ の自己準同型がえられる．この自己準同型が表現論に必要な情報をすべて保っているのであって,「テンソル積」はこの自己準同型の合成として定義される．次元は，自己準同型の値域の Jones index を用いて定義される．

このような表現の category を考えることによって，3次元多様体の位相不変量を与えるための十分条件が作用素環的に与えられたり，induction-restriction machinery の類似が作用素環的に研究できたりするのである．この話題は，A-D-E Dynkin 図形や，量子群，共形場の理論，modular invariant との関連や，3次元の位相的量子場の理論などと関連して近年大いに発展している．

2次元孤立特異点のリンクの symplectic fillng について

北大・理　小野　薫

名古屋大学の太田啓史氏との共同研究の紹介です。

孤立特異点の link は、複素構造から定まる自然な接触構造を持ちます。これは、CR 構造のうち、位相幾何学的な部分のみを取り出したものです。この話では、複素曲面の孤立特異点としておとなしいクラスのものである、単純特異点、単純楕円特異点に話を限ります。(その後、巡回商特異点の場合の考察を Lisca がしています。)

単純特異点は、$SU(2)$ の有限部分群による、$\mathbf{C}^2$ の商空間に原点の像として現れます。これを $\mathbf{C}^3$ の曲面の孤立特異点としても実現することもできます。この特異点の極小特異点解消は、Milnor fiber と微分同相になるという Brieskorn の仕事があります。極小特異点解消も Milnor fiber も、link の極小 symplectic filling を与えます。

symplectic filling というのは、与えられた接触多様体を、 symplectic の意味で凸な境界にもつ symplectic 多様体のことです。(多変数関数論での擬凸性の類似です。)

そこで、単純特異点の link の極小 symplectic filling の微分同相類の一意性を示すことで、 Brieskorn の結果への 1 つの見方を与えることができるのではないかと考えました。勿論、 Brieskorn の仕事から広がる豊かな数学からすると、わずかな部分を見ているだけなのですが。

アイデアは次の通りです。

極小 symplectic filling X と、特異点の link を凹な境界にもつ別の symplectic 多様体 Z と張り合わせて、境界の無い compact symplectic 4 次元多様体 M を作り、これが、複素射影平面の blow-up に symplectic 同型であることを示します。(blow-up した空間の symplectic 構造は一意的ではないことに注意) そして、Z の M への入りかたの微分同相類の一意性を示すと、X は M から Z を除いたものなので、その微分同相類の一意性がでます。このアイデアを実行するためには、X の第一 Chern 類が $\mathbf{Q}$ 上消えていることと、うまい Z を見つけること、M が複素射影平面の blow-up となるための十分条件を見つけることが必要です。

第一の点は、以前の太田さんとの仕事、それに続く神田さんの仕事で証明されました。

第二の点については、斎藤恭司さんの論文にあるものを拝借しました。

第三の点は、上とは別に以前太田さんと調べていました。

次に単純楕円特異点についてですが、これは、極小特異点解消が、楕円曲線一本使ってできる場合です。このとき、その楕円曲線の自己交点数 $-k < 0$ として、k を次数と呼ぶことにします。

我々の得た結果は次の通りです。

次数 k が 10 以上であれば、link の極小 symplectic filling は、極小特異点解消と微分同相になる。次数 k が 9 以下であれば、link の極小 symplectic filling は、極小特異点解消か、ある smoothing (完全交差特異点であれば、Milnor fiber) に微分同相になる。

ここで、$k = 8$ であれば、 smoothing の微分同相類は 2 つ、k が 9 以下で 8 でなければ、smoothing の微分同相類は一意である。

アイデアは、単純特異点の時とほぼ同じですが、この場合 M は、複素射影平面の blow-up か楕円曲線上の線織面 (の blow-up) となります。また、Z の M への入りかたを決定する為に、複素射影平面や線織面の blow-up の中の自己交点数の大きい曲線についての Hartshorn の定理の symplectic 版を示す必要があります。