Semi-stable sheaves の有界性について.

京大理

丸山正樹

Semi-stable (又は, stable) sheaves の moduli の構成に関して, 残っている問題で最も重要なものは Semi-stable sheaves の有界性であろう。この小論ではこの問題を説明し, どこまで解決しているかを述べる。

Y を代数的閉体 k 上の非特異, 射影的代数多様体, $\mathcal{O}_Y(1)$ をその上の ample 可逆層とする.

<u>定義 1</u>. Y 上の連接層 E が stable (又は, semi-stable) であるとは, 次の (i), (ii) が成立する時に言う。

(i) E は torsion free ($\neq 0$),

(ii) 任意の連接部分層 F ($\neq 0, \subsetneqq E$) について,

$$\chi(F(m))/r(F) = P_F(m) < P_E(m) = \chi(E(m))/r(E), \ \forall m \gg 0,$$

$$(\text{又は}, \ \leqq \ )$$

ここで, Y 上の連接層 G について, $\chi(G(m)) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, G \otimes \mathcal{O}_X(m))$, $r(G) =$ Y の generic point での G の rank.

S を universally Japanese (= pseudo-geometric) ring Λ 上有限生成な scheme とする。 $f : X \longrightarrow S$ が smooth, projective, geometrically integral な morphism, $\mathcal{O}_X(1)$ が f-ample な可逆層とする。 (Sch/S) を locally noetherian S-schemes の category とする。 numerical polynomial $H(x)$ と, $T \in (Sch/S)$ について,

$$\Sigma^H_{X/S}(T) = \{E \mid T\text{-flat な } X \times_S T \text{ 上の連接層で, } T \text{ の任意の geometric point } t \text{ について, } E_t = E \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \text{ は } \mathcal{O}_{X_t}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(t) \text{ に関して stable かつ } \chi(E_t(m)) = H(m)\}/\sim$$

$$\overline{\Sigma}^H_{X/S}(T) = \{E \mid \text{上の条件の内 stable を semi-stable に変えたもの}\}/\sim.$$

ここで, $E_1 \sim E_2 \Leftrightarrow {}^{\exists}L$; T 上の可逆層 s.t. $E_1 \cong E_2 \otimes_{\mathcal{O}_T} L$.

明らかに, $\Sigma^H_{X/S}$, $\overline{\Sigma}^H_{X/S}$ は (Sch/S) から $(Sets)$ への contravariant functor になる。

<u>定理 1.</u> $\Sigma^H_{X/S}$ は (S 上) locally of finite type かつ separated な coarse moduli $M_{X/S}(H)$ をもつ。 $M_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\Leftrightarrow$ $M_{X/S}(H)$: quasi-projective $/S$.

次に, 射影多様体 Y 上の semi-stable sheaf E を考える。

<u>命題 1.</u> E を Y 上の semi-stable sheaf とする。

(i) E には次の性質 (a), (b) を持つ filtration $0=E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_\alpha = E$ が入る; (a) $P_{E_i/E_{i-1}}(m) = P_E(m)$, $1 \leq i \leq \alpha$, (b) 各 E_i/E_{i-1} は stable.

(ii) (i) の性質 (a), (b) を持つ filtration $0=E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_\beta = E$ がもう1つあったとすると、$\alpha=\beta$ で $(1, 2, \cdots, \alpha)$ の置換 σ が存在して、$E'_i/E'_{i-1} \cong E_{\sigma(i)}/E_{\sigma(i)-1}$.

上の命題により、$gr(E) = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} E_i/E_{i-1}$ は(同型を除いて)一意的に決まる。

<u>定義 2.</u> semi-stable sheaves E_1 と E_2 が S-equivalent $\Leftrightarrow gr(E_1) \cong gr(E_2)$. これを $E_1 \underset{S}{\sim} E_2$ で表わす。

<u>注意.</u> E_1 と E_2 のうち一方が stable ならば、

$$E_1 \underset{S}{\sim} E_2 \Leftrightarrow E_1 \cong E_2.$$

<u>定理 2.</u> 次の性質を持つ S-scheme $\overline{M}_{X/S}(H)$ が存在する。

(i) $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 locally of finite type かつ separated.

(ii) functor の射 $\varphi : \overline{\Sigma}^H_{X/S} \longrightarrow h_{\overline{M}_{X/S}(H)} = \mathrm{Hom}_S(*, \overline{M}_{X/S}(H))$ があって、S-scheme N について、functor の射 ψ:

$\overline{\Sigma}^H_{X/S} \to h_N$ があれば，射 $\eta: \overline{M}_{X/S}(H) \to N$ で，$h(\eta)\varphi = \psi$ となるものが一意的に存在する。

(iii) S の任意の geometric point s について，$\varphi(k(s)): \overline{\Sigma}^H_{X/S}(\mathrm{Spec}(k(s))) \to \overline{M}_{X/S}(k(s))$ は surjective で，$\varphi(k(s))(E_1) = \varphi(k(s))(E_2) \Leftrightarrow E_1 \underset{S}{\approx} E_2$.

(iv) 自然な射 $M_{X/S}(H) \to \overline{M}_{X/S}(H)$ は open immersion.

(v) $\overline{M}_{X/S}(H)$ は specialization で閉じている。しかも，$\overline{M}_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\Leftrightarrow$ $\overline{M}_{X/S}(H)$; projective $/S$.

さて，問題は上の (v) に関してで，

<u>問題</u> $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 projective か？ すなわち，$\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上有限生成か？

この問題を追求するために 2, 3 の概念を導入しよう

<u>定義 3</u> $f: X \to S$ を noetherian scheme の間の projective morphism とする。K_1, K_2 を体として，S の K_i-valued point が与えられたとする。X_{K_i} 上の連接層 E_i について，E_1 と E_2 が equivalent ($E_1 \approx E_2$) $\Leftrightarrow$ 体 K と S 上の injection $K_i \subset K$ が与えられて，$E_1 \otimes_{K_1} K \cong E_2 \otimes_{K_2} K$ (X_K 上の層として)。$f: X \to S$ の fibres 上の連接層

の equivalence classes のある集合を，"a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S" と言う。

定義 4. $f: X \to S$ を定義 3 と同じとする。

$\mathcal{F}$: a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S.

この時，$\mathcal{F}$ が有界 (bounded, limitée) $\Longleftrightarrow$ $^{\exists}T$; S-scheme of finite type, $^{\exists}F$: coherent sheaf on $X \times_S T$ s.t. $\mathcal{F} \subseteq \{F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \mid t \in T\}/\approx$.

注意 "flatening stratification" を使えば，上の定義で「F が T-flat」と仮定してよいことがわかる。

前にもどって，$f: X \to S$ が smooth, projective, geometrically integral, S が Λ 上有限生成とする。$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H) = \{E \mid E$ は X の geometric fibre/S 上の semi-stable sheaf で，$\chi(E(m)) = H(m)\}/\approx$ とおく。$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ が有界とすると，T と F がある。F は T-flat としておく。ところで，T の開集合 T_0 が存在して，任意の代数閉体 k について，$T_0(k) = \{t \in T(k) \mid F_t = F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ は semi-stable$\}$ となる。T を T_0 で，F を $F|_{X \times_S T_0}$ でおきかえてよい。すると，$F \in \overline{\Sigma}^H_{X/S}(T)$. 定理 2 の (ii) により，$^{\exists}g : T \longrightarrow \overline{M}_{X/S}(H)$，(iii) により g は surjective. T は quasi-compact だから，$\overline{M}_{X/S}(H)$ も quasi-compact. 従って，(V) により，

$\overline{M}_{X/S}(H)$ は projective/S. 故に,我々の問題は次の問題に帰着した(実は同値)。

<u>問題</u>　$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ は有界か?

<u>注意</u>　$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ の定義の semi-stable という条件を,例えば indecomposable 置きかえると,有界でなくなる。我々の問題は自明ではない。

上の問題を考えるのには,(semi-)stable よりも次に定義する μ-(semi-)stable の方が扱いやすい。

Y, $\mathcal{O}_Y(1)$ を定義1と同じとし,E を Y 上の torsion free ($\neq 0$) な連接層とする。$d(E, \mathcal{O}_Y(1))$ を E の first Chern class $c_1(E)$ の $\mathcal{O}_Y(1)$ に関しての degree とし,

$$\mu(E) = d(E, \mathcal{O}_Y(1))/r(E)$$

と定義する。

<u>定義5</u>　Y 上の連接層 E が μ-stable (又は, μ-semi-stable) であるとは,次の条件を満足するときに言う。

(i)　E は torsion free ($\neq 0$),

(ii)　任意の連接部分層 F ($\neq 0$, $\subsetneqq E$) について,

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{又は, } \mu(F) \leqq \mu(E)).$$

Eが semi-stable ならば μ-stable なので，$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H) \subseteqq \mathfrak{S}''_{X/S}(H) = \{E \mid E$ は X の geometric fibre/S 上の μ-semi-stable sheaf で，$\chi(E(m)) = H(m)\}/\approx$. 従って，$\mathfrak{S}''_{X/S}(H)$ の有界性が言えれば充分である。

以下，Λ は noether 環，S は noetherian Λ-scheme とする。$f: X \to S$ は，smooth, projective, geometrically integral とし，f-ample な可逆層 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定する。

$f: X \to S$ の geometric fibre X_s 上の連接層 E について，整数 $a_0(E), \cdots, a_n(E)$ が存在して，

$$\chi(E(m)) = \sum_i \dim H^i(X_s, E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X(m)) = \sum_{i=0}^{n} a_i(E) \binom{m+n-i}{n-i}。$$

E について，次の条件を考える。

(1) E は $\mathcal{O}_{X_s}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ について μ-semi-stable。

(2) $a_0(E) = rd$, $a_1(E) = a_1$, $a_i(E) \geq a_i$ $(2 \leq i \leq n)$, ここで，d は X_s の $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ に関しての次数。

(3) E は Serre の条件 (S_2) を満足する。

(4) $a_0(E) = rd$, $a_1(E) = a_1$, $a_2(E) \geq a_2$, ここで，d は (2) と同じ。

(5) 次数 n の numerical polynomial $H(x)$ について，$\chi(E(m)) = H(m)$ かつ，$r(E) = r$。

上の条件のいくつかを満足する E の family

を定義しよう.

$$\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \cdots, a_n) = \{E \mid E\text{は条件}(1),(2)\text{を充たす}\}/\approx$$

$$\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2) = \{E \mid E\text{は条件}(1),(3),(4)\text{を充たす}\}/\approx$$

$$\Sigma''_{X/S}(n, r, H) = \{E \mid E\text{は条件}(1),(5)\text{を充たす}\}/\approx$$

有界性について,例えば次の命題が考えられる。

$B_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時,すべての $\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \cdots, a_n)$ が有界。

$B'_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時,すべての $\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2)$ が有界。

$B''_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時,すべての $\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ が有界。

$\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ は(Λについての条件が少し違うが)前の $\mathfrak{S}''_{X/S}(H)$ と同じものだから,我々問題は $B''_{n,r}(\Lambda)$ が,すべての n, r, Λ について成立するか?ということになる。$B''_{n,r}(\Lambda)$ が成立する時,

「semi-stable sheaves の有界性が,次元 n,階数 r について,(Λ-scheme の category で)成立する。」

と言うことにする。

<u>命題 2</u>　$B_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$。　$B'_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$。

従って，semi-stable sheaves の有界性を示すには，$B'_{n,r}(\Lambda)$ を証明すれば良いことになる。大切なことは，次元についての帰納法を使う場合，$B''_{n,r}(\Lambda)$ を直接証明するよりも，$B'_{n,r}(\Lambda)$ を証明する方が容易に思われることである。

今までにわかっている結果をまとめると，

定理 3　(i)　$r=1,2$ の時，$B_{n,r}(\Lambda)$, $B'_{n,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n, Λ について成立する。

(ii)　$B_{2,r}(\Lambda)$, $B'_{2,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{2,r}(\Lambda)$ が，すべての r, Λ について成立する。

(iii)　$r=3,4$ かつ Λ が標数 0 の体の時，$B'_{n,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n について成立する。

この定理の証明は容易ではない。証明の途中で使われる結果で，それ自身興味のあるものを 2, 3 あげよう。

定理 4.　Y を代数的閉体上の非特異，射影的代数多様体，$\mathcal{O}_Y(1)$ を Y 上の very ample 可逆層とする。L を $|\mathcal{O}_Y(1)|$ の very ample 部分一次系とする。

Y上の($\mathcal{O}_Y(1)$に関して)μ-semi-stable sheaf Eについて、$r(E) < \dim Y$とする。この時、Lの空でない開集合U(E)が存在して、$\forall Z \in U(E)$, $E \otimes \mathcal{O}_Z$は$\mathcal{O}_Z(1) = \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Z$に関して$\mu$-semi-stable.

注意 上の定理で$r(E) < \dim Y$という条件は除けない。例えば、$\mathbb{P}_n$と普通の$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$をとったとき、接バンドル$T_{\mathbb{P}_n}$を考える。勝手な$\mathbb{P}^{n-1} \cong H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)|$について、完全列

$$0 \longrightarrow T_H \longrightarrow T_{\mathbb{P}_n}|_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(1) \longrightarrow 0$$

を得る。$c_1(T_H) = n \cdot H^2$, $c_1(T_{\mathbb{P}_n}|_H) = (n+1)H^2$. 故に、

$$\mu(T_H) = n/(n-1) > (n+1)/n = \mu(T_{\mathbb{P}_n}|_H)$$

となり、$T_{\mathbb{P}_n}|_H$はμ-semi-stableでない。

定理3の(i)は定理4の直接の系である。

Yを非特異、射影曲面とし、$\mathcal{O}_Y(1)$をvery ample可逆層、$L \subseteq |\mathcal{O}_Y(1)|$をvery ample部分一次系とする。EがY上のtorsion free, 階数2の連接層とする。Lの空でない開集合W(E)が存在して、W(E)の勝手な元Cについて、Cは非特異、$E|_C$はlocally freeとなる。さて、$C \in W(E)$について、

$$d(E,C) = \min\{d(E, \mathcal{O}_Y(1)) - 2\deg D \mid D: \text{line subbundle of } E|C\}$$

とおくと，$d(E,C)$ は整数である。

$$d(E) = \max\{d(E,C) \mid C \in W(E)\}$$

は有限であり，$W(E)$ の空でない開集合 $W'(E)$ があって，$d(E) = d(E,C)$，$\forall C \in W'(E)$.

定理5　Y，$\mathcal{O}_Y(1)$，L，E は上と同様とする。さらに，基礎体の標数は0とし，E は μ-semi-stable とする。この時，

$$d(E) \geq -C^2, \quad C \in L.$$

注意　上の定理で"標数0"という条件は除けない。例えば $Y = \mathbb{P}_2$，$\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$，$L = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|$，$E = T_{\mathbb{P}_2}^{(p^n)}$ (p=標数) とすれば，$d(E) = -p^n$ となる。

定理5の証明は，W. Barth が $\mathbb{P}_n$ 上の階数2の stable bundle を調べるのに使った方法 (Math. Ann. 226 (1977) 125-150) を真似ればよい。この定理は，この場合定理4の様なことは成立しないが，一般の C について，$E|C$ が μ-semi-stable からあまり離れないことを意味する。定理3の(iii)の $n=3$ の場合は，定理4，5を使って証明される。$n=4$

の場合は，定理5の高い階数の場合への，ちょっとした一般化から出る。

定理5の様なことが一般の階数で成立すれば，$B'_{n,r}(\Lambda)$が，Λが標数0の体という仮定の下で証明できると思われる。

最後に文献であるが，定理1，2に述べたmoduliについては次のものがある。

M. Maruyama: Stable vector bundles on an algebraic surface, Nagoya Math. J., 58, 1975.

D. Gieseker: On moduli of vector bundles on an algebraic surface, Ann. of Math., 106, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ., 17, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ., 18, 1978.

有界性について基本的なものは，

S. Kleiman: Les théorèm de finitude pour le foncteur de Picard, Sem de Géométrie Algébrique de Bois Marie, 1966/67, Expose XIII, Lect. Note in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.

この小論の詳しい内容は次の論文にある。

H. Maruyama: Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks, submitted to Nagoya Math. J..