p-adic unit ball について

栗原 章

Rを complete discrete valuation ring であってその剰余体が有限体$\mathbb{F}_q$であるものとする。Mumford [1] は複素上半平面$\mathfrak{H}=\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}(z)>0\}$の$R$上の類似物$X_I$を構成した(後で詳しく述べる)。更に Čerednik [2],[3] は$\mathfrak{H}$とX_Iの数論的関係を伊原理論の立場から明確にした。以下で我々の問題とすることとは一般に有界対称領域Dに対して、DのR上の類似物を構成しようと試みることである。結果としてDがℓ次元 unit ball $\{(z_1,\cdots,z_\ell)\in\mathbb{C}^\ell\,;\,|z_1|^2+\cdots+|z_\ell|^2<1\}$であるときは$D$の$R$上の満足すべき類似物$X_I$が構成できることを示す。そのためには道具として岩堀-松本, Bruhat-Tits によるRの商体K上の半単純代数群の理論と Mumford による Geometric Invariant Theory, Torus Embedding を用いる。

本文は筆者の得た結果であるが、それとは独立に Mustafin [5] は Mumford [1] が用いた join による

方法で我々のX_Iと同一と思われる物を構成している。(cf. also Drinfel'd [4])

1° $\mathfrak{h}=\{z\in\mathbb{C}; \mathrm{Im}(z)>0\}$ の R 上の類似物 X_I (Mumford [1])

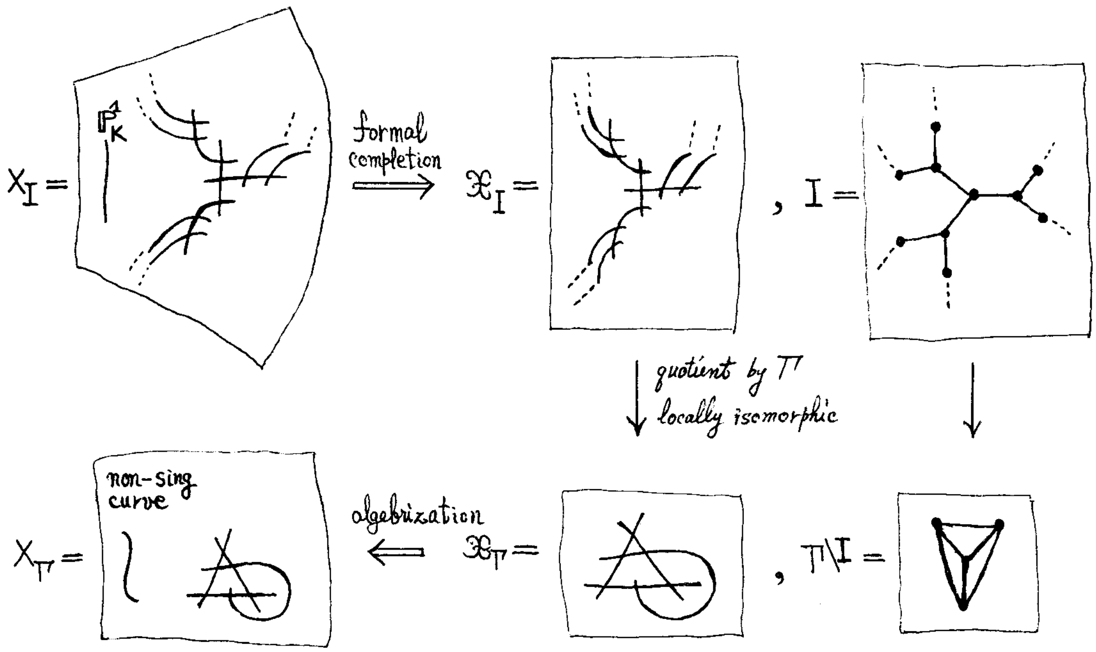
Mumford は我々の R より一般の係数環について構成しているが，我々の R に対しては記述が簡単になるので以下それを復習する。(図参照)

$\mathbb{P}^1_R=\mathrm{Proj}\,R[X,Y]$ を考える。$X^{(n)}$ $(n\geqq 0)$ を次の様に定義する。即ち，$X^{(0)}=\mathbb{P}^1_R$ であり，$X^{(n-1)}$ の special fibre $X^{(n-1)}_0$ の double point でない $\mathbb{F}_q$-valued points をすべて blow up したものを $X^{(n)}$ とする。$U^{(n)}=X^{(n)}-\{\text{double pt でない } \mathbb{F}_q\text{-valued pts}\}$ とおくと，$U^{(0)}\underset{\text{open}}{\subset}U^{(1)}\underset{\text{open}}{\subset}U^{(2)}\underset{\text{open}}{\subset}\cdots$ であり，これらをはり合わせて $X_I=\bigcup\limits_{n\geqq 0}U^{(n)}$ とおく。明らかに $X_{I,\eta}=\mathbb{P}^1_K$ (η= generic pt of Spec(R))，また $X_{I,0}$ の各成分は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ でありその $q+1$ 個の $\mathbb{F}_q$-valued points で他の成分と交わっている。群 $PGL_2(K)=\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K/K)$ の元は X_I の rational な automorphism をひきおこすが，実際それは X_I 上到る所定義され，従って $PGL_2(K)=\mathrm{Aut}(X_I/R)$ となる (R上の scheme の R上の自己同型群が K 上の代数群！)。次の様な無限個の simplices からなる1次元単体複体 I を考える。即ち (I の 0次元 simplex の集

合）＝（$X_{I,0}$ の成分の集合）とし，0次元 simplices v_1, v_2 ($v_1 \neq v_2$) がある (unique な) 1次元 simplex に含まれるのは対応する $X_{I,0}$ の成分 E_1, E_2 が交わるときとする。$PGL_2(K)$ は I に作用する。

さて torsion-free discrete subgroup $\Gamma \subset PGL_2(K)$ で $\Gamma\backslash PGL_2(K)$ が compact となるものを考える。そのとき以下の手順で R 上の curve X_Γ が構成される（その意味で X_I は $\mathfrak{H}$ の類似物なのである）。$\mathfrak{X}_I$ を X_I の special fibre $X_{I,0}$ に沿っての formal completion とする。然らば Γ の $\mathfrak{X}_I$ への作用は Zariski topology に関して不連続的であり R-formal scheme category で quotient $\mathfrak{X}_\Gamma = \Gamma\backslash\mathfrak{X}_I$ が存在する。$\mathfrak{X}_\Gamma$ は $Spf(R)$ 上 proper であり dualizing sheaf $\omega_{\mathfrak{X}_\Gamma/R}$ は $\mathfrak{X}_{\Gamma,0} = \mathfrak{X}_\Gamma \times Spec(\mathbb{F}_q)$ 上 ample である。従って GAGA により R 上の projective scheme X_Γ が唯一つ存在し $\mathfrak{X}_\Gamma$ は X_Γ の $X_{\Gamma,0}$ に沿った formal completion となる。$X_{\Gamma,\eta}$ は genus ≥ 2 の non-singular curve となる。一方，有限単体複体 $\Gamma\backslash I$ を考えると，$X_{\Gamma,0}$ の成分及びその交わり方は上記の如き意味で $\Gamma\backslash I$ で記述される。

$q=2$ で絵を書くと例えば次の様になる。



さて，以上の構成を一般化することを念頭に置いて torus embedding の立場から見直してみる。Iの simplex σ に対して $X^{imm}_\sigma = X_I -$ (σに含まれないIのverticesに対応するすべての成分)とおく。然らば $X_I = \bigcup_\sigma X^{imm}_\sigma = \bigcup_{\dim(\sigma)=1} X^{imm}_\sigma$.
一方，$PGL_2(K)$はIの1次元simplexの集合にtransitiveに作用する。$g\in PGL_2(K)$に対して$X^{imm}_{g\sigma}$はX^{imm}_σのcopyであるから，一つの1次元simplex σに対してX^{imm}_σを作ればよい。πをRの素元として，$\mathbb{P}^1_R = \mathrm{Proj}\, R[X,Y]$ の $\pi = Y = 0$ をcenterとするblown-up Bを考えると $B = \mathrm{Proj}\, R[\pi X^2, XY, Y^2]$ であるがBは次の様に言うことができる。$T = \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \subset SL_2$を考える。

$X^*(T)$, $X_*(T)$ を T の character 全体のなす加群, multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。 $\varepsilon \in X^*(T)$, $\lambda \in X_*(T)$ を $\varepsilon : \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \to t$, $\lambda : t \to \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix}$ とすれば $X^*(T) = \mathbb{Z}\varepsilon$, $X_*(T) = \mathbb{Z}\lambda$。 $X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は次のように affine Weyl chamber に分割されて1次元単体複体となる。

$X_*(T)_{\mathbb{R}} = ($  $)$

simplex $\sigma = [0, \frac{1}{2}\lambda]$ に対して torus embedding T_σ が定義されるが今の場合 $T_\sigma = \mathrm{Spec}\, R[t, \pi t^{-2}]$ である。 T は SL_2 の自然な $\mathbb{P}^1$ への作用により $\mathbb{P}^1$ に作用する。そのとき $B = T \backslash (T_\sigma \times_R \mathbb{P}^1_R)^{ss}$ である。但し semi stability は $\mathcal{O}_{T_\sigma} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ に関して考えるものとする。これで blowing-up を使わないで torus embedding を用いて X_I が構成されたことになる。我々はこの立場で一般的な構成をすることになる。

<u>Remark</u> D を既約有界対称領域とし Y をその compact dual とする。そのとき, 複素単純 Lie 群 G とその maximal parabolic subgroup があって $Y = G/P$ と書ける。 D が l 次元 unit ball なら $Y = \mathbb{P}^l(\mathbb{C}) = SL_{l+1}(\mathbb{C}) / \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$.
また一般に Y は projective で $\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$ である。

2° 一般的構成

data $(R, G, X, \mathcal{O}_X(1), \rho, \phi)$ から出発する。ここで R は前と同じ、G は R 上の split simple simply connected group scheme, X は R 上の projective かつ flat な integral scheme $\mathcal{O}_X(1)$ は X 上の ample sheaf, $\rho : G \times_R X \longrightarrow X$ は G の X への作用, $\phi : \rho^* \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} p_X^* \mathcal{O}_X(1)$ は G の $\mathcal{O}_X(1)$ への作用とする。但し $p_X : G \times_R X \longrightarrow X$ は projection。これらに対して次の如き $(X_I, \mathcal{O}_{X_I}(d), \rho_I, \phi_I)$ を構成する。

X_I は R 上の locally of finite type scheme で flat かつ $X_{I,\eta} = X_\eta$, $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ は X_I 上の invertible sheaf であって $\mathcal{O}_{X_I}(d)|X_{I,\eta} = \mathcal{O}_X(d)|X_\eta$ ここで d は構成の途中で unique に定まる正整数, ρ_I は抽象群 $G(K)$ の X_I への作用で $X_{I,\eta} = X_\eta$ 上では ρ から induce される $G(K)$ の X_η への作用と一致するもの, ϕ_I は $G(K)$ の $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ への作用であって $X_{I,\eta}$ 上では ϕ から induce される $G(K)$ の $\mathcal{O}_X(d)|X_\eta$ への作用と一致するものである。

$G = SL_2$, $X = \mathbb{P}_R^1$, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ のときは 1° のものと一致する。このときは $d = 2$ であって $\mathcal{O}_{X_I}(-2)$ は dualizing sheaf $\omega_{X_I/R}$ と $SL_2(K)$-equivariant に isomorphic である。

X_I の構成は Toroidal Embeddings I, pp202–209 がヒントとなっている。以下その要領を述べる。

T を G の maximal split torus とし，$X_*(T)$ を T の multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。$X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は affine Weyl chamber Λ の分割により単体複体となり，$G(K)$ の Bruhat–Tits building I の subcomplex と見なされる。$X_*(T)_{\mathbb{R}}$ の simplex σ を一つ fix する。然らば torus embedding $T_\eta \hookrightarrow T_\sigma$ が定義され，T は $T_\sigma \times_R X$ に自然に作用する。T は $\mathcal{O}_{T_\sigma} \otimes \mathcal{O}_X(1)$ にも作用し，この作用に関する $T_\sigma \times_R X$ の semi-stable pts [resp. stable pts] 全体のなす $T_\sigma \times_R X$ の open subscheme を $(T_\sigma \times_R X)^{ss}$ [resp. $(T_\sigma \times_R X)^s$] と書き $X_\sigma^{comp} = T \backslash (T_\sigma \times_R X)^{ss}$ [resp. $X_\sigma^{geom} = T \backslash (T_\sigma \times_R X)^s$] とおく。$X_\sigma^{comp}$ は R 上 projective であり $X_{\sigma,\eta}^{comp} = X_{\sigma,\eta}^{geom} = X_\eta$ である。適当な正整数 d に対して $\mathcal{O}_{T_\sigma} \otimes \mathcal{O}_X(d)$ は X_σ^{comp} に descent $\mathcal{O}_{X_\sigma^{comp}}(d)$ を持つ。

次に σ を一般に I の simplex とする。$G(K)$ は I に作用しているが，ある $g \in G(K)$ があって $g\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ となる。X_σ^{comp} 及び $\mathcal{O}_{X_\sigma^{comp}}(d)$ を $X_{g\sigma}^{comp}$, $\mathcal{O}_{X_{g\sigma}^{comp}}(d)$ の g でひねった copy とする。然らば X_σ^{comp}, $\mathcal{O}_{X_\sigma^{comp}}(d)$ は "well-defined" であることが分かる。

$G=SL_2$, $X=\mathbb{P}^1$ のときは $\dim(\sigma)=0$ なら $X_\sigma^{comp}\cong\mathbb{P}^1_R$, $\dim(\sigma)=1$ なら $X_\sigma^{comp}\cong \mathrm{Proj}\, R[\pi X^2, XY, Y^2]$ となることは前に述べた。

さて一般の data に戻って、我々の idea は I の simplex σ に対して X_σ^{comp} の open subscheme X_σ^{imm} を適当にとってそれらをはり合わせて $X_I=\bigcup_{\sigma\subset I} X_\sigma^{imm}$ を得ようというものであった。それは次のようにする。

まず次のことが分かる。一般に I の simplex σ に対して $H_\sigma=\{g\in G(K);\ g\sigma=\sigma\}$ とおく。

(1) simplex $\sigma\subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ 及び $h\in H_\sigma$ をとる。そのとき $\rho_\sigma(h)$: $T_\sigma\times_R X\longrightarrow T_\sigma\times_R X$ であって $(T_\sigma\times_R X)_\eta=T_\eta\times_K X_\eta$ で $(\tau,x)\longmapsto(\tau,\tau h\tau^{-1}\cdot x)$ となるものが唯一つ存在する。ρ_σ は H_σ の $T_\sigma\times_R X$ への作用を与える。$T(R)\subset H_\sigma$ である。

(2) N を T の normalizer とする。$N(K)$ の I への作用は $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ を不変にする。simplex $\sigma\subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ と $(n_1,n_2)\in T(K)\cdot N(R)$ (半直積) をとる。$n=n_1n_2\in N(K)$ とおく。そのとき、$\rho(n_1,n_2)$: $T_\sigma\times_R X\longrightarrow T_{n\sigma}\times_R X$ であって generic fibre で $(\tau,x)\longmapsto(n_2\tau n_2^{-1}n_1^{-1},\ n_2\cdot x)$ となるものが唯一つ存在する。

さて次の (a)〜(d) を満たす system $\{(T_\sigma\times_R X)^{aff};\ \sigma\subset X_*(T)_{\mathbb{R}}\}$ を考える。

(a) 各 $\sigma < X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について

$$T_\eta \underset{K}{\times} X_\eta \subset (T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}} \underset{\mathrm{open}}{\subset} (T_\sigma \underset{R}{\times} X)^s$$

(b) 各 $\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について, $(T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}}$ は T-invariant かつ $\rho_\sigma(T(R))$-invariant.

(c) 各 $\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ 及び $(n_1, n_2) \in T(K)\cdot N(R)$ について $n = n_1 n_2 \in N(K)$ とおくとき, $\rho(n_1, n_2)((T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}}) = (T_{n\sigma} \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}}$.

(d) 各 $\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ とその face τ について, $T_\tau \underset{\mathrm{open}}{\subset} T_\sigma$ であるが, $(T_\tau \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}} = (T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}} \cap (T_\tau \underset{R}{\times} X)$.

一方 (a)~(d) を満たす system の中で最大のものが唯一つ存在することが分かる。そこで,

(e) $\{(T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}} ; \sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}\}$ は (a)~(d) のもとで最大

とする。

(a), (b) により $\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について $X_\sigma^{\mathrm{aff}} = T \backslash (T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{\mathrm{aff}}$ とおくと X_σ^{aff} は universal geometric quotient であり $X_\sigma^{\mathrm{aff}} \underset{\mathrm{open}}{\subset} X_\sigma^{\mathrm{geom}}$ となる。H_σ の $T_\sigma \underset{R}{\times} X$ への作用は T の $T_\sigma \underset{R}{\times} X$ への作用と可換であり, 従って H_σ は $(T_\sigma \underset{R}{\times} X)^{ss}$ に作用しその作用は X_σ^{comp} に descent する。そこで $X_\sigma^{\mathrm{imm}} = \bigcap_{h \in H_\sigma} h \cdot X_\sigma^{\mathrm{aff}}$ とおくと $X_\sigma^{\mathrm{imm}} \underset{\mathrm{open}}{\subset} X_\sigma^{\mathrm{comp}}$ であり X_σ^{imm} は H_σ で不変である。

$\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ に対して X_σ^{imm} が定義されたが 一般の

$\sigma\subset I$ に対しては $g\in G(K)$ で $g\sigma\subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ となるものをとり X_σ^{imm} を g でひねった $X_{g\sigma}^{imm}$ の copy として定義する。然らば $\sigma\subset I$ について $X_{\sigma,\eta}^{imm}=X_\eta$ であり、σ が τ の face であれば自然に $X_\sigma^{imm}\underset{open}{\subset}X_\tau^{imm}$ となる。そこで $X_I=\bigcup_{\sigma\subset I}X_\sigma^{imm}$ を $\sigma\cap\tau=\phi$ なら $X_\sigma^{imm}\cap X_\tau^{imm}=X_\eta$, $\sigma\cap\tau\neq\phi$ なら $X_\sigma^{imm}\cap X_\tau^{imm}=X_{\sigma\cap\tau}^{imm}$ として定義する。X_σ^{comp} 上の invertible sheaf $\mathcal{O}_{X_\sigma^{comp}}(d)$ から X_I 上の invertible sheaf $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ が作られ $G(K)$ は X_I 及び $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ に自然に作用することが分かる。

$\mathfrak{X}_I$ 及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ を X_I 及び $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ の special fibre に沿った formal completion とする。然らば $G(K)$ は $\mathfrak{X}_I$ 及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ に作用する。いま torsion-free discrete subgroup $\Gamma\subset G(K)$ で $\Gamma\backslash G(K)$ が compact となるものを考えると Γ の $\mathfrak{X}_I$ への作用は Zariski topology に関して不連続的であり R-formal scheme category で quotient $\mathfrak{X}_\Gamma=\Gamma\backslash\mathfrak{X}_I$ がとれ また $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ は $\mathfrak{X}_\Gamma$ へ descent を持つ。即ち $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\Gamma}(d)=\Gamma\backslash\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$. $\mathfrak{X}_\Gamma$ は R 上 of finite type である。

<u>Remark</u> (i) $G=SL_2$, $X=\mathbb{P}^1$ の場合, $d=2$ であって, $\mathfrak{X}_\Gamma$ は Spf (R) 上 proper であり, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\Gamma}(-2)$ は $\mathfrak{X}_{\Gamma,0}=\mathfrak{X}_\Gamma\underset{R}{\times}\mathbb{F}_q$ 上で ample であった。従って algebrization が出来た。

(ii) 一般に $\mathfrak{X}_\pi$ は $\mathrm{Spf}(R)$ 上 proper とは限らない。例えば $G=SL_2$ とし G の m 次対称表現を考え、それにより $X=\mathbb{P}^m$ に作用させる。そのとき、$\mathfrak{X}_\pi$ が R 上 proper となるのは $m=\mathrm{odd}$ のときである。
$m\geqq 3$, $m=\mathrm{odd}$ のときに $\mathfrak{X}_\pi$ が algebrizable かどうかは知らない。

(iii) $G=SL_{l+1}$, $X=\mathbb{P}^l$ のときは後に述べる様に $d=l+1$ であって $\mathfrak{X}_\pi$ は R 上 proper であり $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\pi}(-(l+1))$ は $\mathfrak{X}_{\pi,0}$ 上 ample である。しかし、一般の G と $X=G/P$ (P は特に maximal parabolic subgroup) については $\mathfrak{X}_\pi$ は proper ではない様に思われる。しかし例えば $G=Sp_2$, $X=Sp_2/$[redacted] のときは $d=2$ であって $\mathfrak{X}_\pi$ は R 上 proper ではないが $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\pi}(-2)$ は $\mathfrak{X}_{\pi,0}$ 上 ample である。

3° p-adic unit ball

2° の data を $G=SL_{l+1}$, $X=\mathbb{P}^l_R$, $\mathcal{O}_X(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1)$ と特殊化する。作用は自然なものを考える。然らば $d=l+1$ であり $\mathfrak{X}_\pi$ は $\mathrm{Spf}(R)$ 上 proper であり $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\pi}(-(l+1))$ は $\mathfrak{X}_{\pi,0}$ 上 ample である。従って EGA III の GAGA により $\mathfrak{X}_\pi$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\pi}(-(l+1))$ は algebrize されて X_π, $\mathcal{O}_{X_\pi}(-(l+1))$ となる。X では $\mathcal{O}_X$(positive) が ample であったが X_π では $\mathcal{O}_{X_\pi}$(negative)

が ample となるところが興味深い。 X_Γ は R 上 locally a complete intersection であるが dualizing sheaf $\omega_{X_\Gamma/R}$ について $\omega_{X_\Gamma/R} \cong \mathcal{O}_{X_\Gamma}(-(l+1))$ である. $X_{\Gamma,\eta}$ は smooth であり, X_Γ は regular scheme である。 $X_{\Gamma,0}$ は l 次元有限単体複体 $\Gamma\backslash\mathcal{I}$ で記述される。即ち $X_{\Gamma,0}$ の成分 E と $\Gamma\backslash\mathcal{I}$ の vertex v は bijective であって, 成分 $E_1,\cdots,E_m$ と対応する vertices $v_1,\cdots,v_m$ について $E_1\cap\cdots\cap E_m\neq\phi \Leftrightarrow v_1,\cdots,v_m$ はある simplex に含まれる。
次の表示が出来る。

$$\begin{aligned} X_\Gamma &= \mathrm{Proj} \bigoplus_{\nu\geq 0} H^0(X_\Gamma, \mathcal{O}_{X_\Gamma}(-\nu(l+1))) \\ &= \mathrm{Proj} \bigoplus_{\nu\geq 0} H^0(\mathfrak{X}_\Gamma, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\Gamma}(-\nu(l+1))) \\ &= \mathrm{Proj} \bigoplus_{\nu\geq 0} \left[H^0(\mathfrak{X}_I, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(-\nu(l+1)))\right]^{\Gamma-\mathrm{inv}} \end{aligned}$$

従って rank 有限の R-free module $H^0(\mathfrak{X}_I, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(-\nu(l+1)))^{\Gamma-\mathrm{inv}}$ の元を保型形式と考えることが自然である。
筆者は次のことを証明しようとしている。μ を $SL_{l+1}(K)$ の invariant measure で open compact subgroup $SL_{l+1}(R)$ に対して $\mu(SL_{l+1}(R))=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^l)$ となるものとする。
$l=odd$ なら負の measure である。

(Conj.) $X_{\Gamma,\eta}$ は $\mathbb{P}^l$ と proportional であって その proportional constant は $\mu(\Gamma\backslash SL_{l+1}(K))$ である。

即ち $i_1,\cdots,i_k$ を positive integer で $i_1+\cdots+i_k=l$ なるものと

すれば Chern number の間に

$$c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}[X_{\Gamma,\eta}] = \mu(\Gamma\backslash SL_{\ell+1}(K))\cdot c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}[\mathbb{P}^\ell]$$

なる関係がある。

$\ell=1$ では容易。$\ell=2$ のときは Mumford; An algebraic surface with K ample, $(K^2)=9$, $p_g=q=0$, to appear, による。$\ell=3$ のときも同様の方法で計算することが出来る。

以下では (Conj) が成立つものとして話を進める。特に $\ell=1,2,3$ では正しい。然らば Hirzebruch と同様に

$$\operatorname{rank}_R H^0(\mathfrak{X}_I, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(-\nu(\ell+1)))^{\Gamma\text{-inv}} = \binom{(\ell+1)\nu-1}{\ell}(-1)^\ell \mu(\Gamma\backslash SL_{\ell+1}(K))$$

for $\nu\geqq 2$ when $\mathrm{ch}(K)=0$

for $\nu\gg 0$ when $\mathrm{ch}(K)\neq 0$

また Yau の結果により次の (i)〜(iii) は同値である。$\mathbb{C}$ 上の non-singular projective variety V に対して、$n=\dim(V)$ とすると、

(i) V の universal covering は unit ball である。

(ii) V の canonical class は ample で V と $\mathbb{P}^n$ は proportional である。

(iii) V の canonical class は ample で $c_1^{n-2}c_2[V] : c_1^n[V] = c_1^{n-2}c_2[\mathbb{P}^n] : c_1^n[\mathbb{P}^n]$.

従って $\mathrm{ch}(K)=0$ のとき $X_{\Gamma,\eta}$ を任意に $\mathbb{C}$ 上の variety に specialize すればそれを $\hat{X}_{\Gamma,\eta}$ と書くとき $\hat{X}_{\Gamma,\eta}$ の universal covering は ℓ 次元 unit ball となる。

References

[1] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compositio Math., 24 (1972), 129–174.

[2] I. V. Čerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of $PGL_2(k_w) \times E$, Mat. Sbor., 99 (141) (1976), 211–247.

[3] ————, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $PGL_2(k_w)$ with compact quotients, Mat. Sbor., 100 (142) (1976), 59–88.

[4] V. G. Drinfel'd, Coverings of p-adic symmetric regions, Funct. Anal. Appl., Vol. 10, No. 2 (1976), 107–115.

[5] G. A. Mustafin, Non-archimedian uniformizations, Mat. Sbor. 105 (147) (1978), 207–237.

以上