平面有理曲線のいくつかの問題について.

吉原久夫

§1. 序論

Cを2次元複素射影空間$\mathbb{P}^2$内のn次既約代数曲線で種数をgとし，infinite near singular pointsまでこめたすべての特異点の重複度を$e_1, \cdots, e_m$とすると，Plückerの公式

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} e_i(e_i-1)$$

がなりたつ．しかし逆に，上の公式を成立させる様な値を与えても曲線Cが存在するとは限らない．存在するかしないか簡単に分る場合もあるが，非常にdelicateなこともある．なおZariskiは[4]で，ある特別な場合に非存在を証明している．

ところで，近年飯高[2]によって，完備と限らない代数多様体の研究に重要な役割を果たす，対数的小平次元の理論が創始された．特

殊な場合であるが，$\mathbb{P}^2-C$ の対数的小平次元 $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)$ を求めることは基本的問題の一つである．ところがこれを求めることは最初に述べた難しさもからんできて，まだ完全には出来ていない．若林［3］によると次の事は分っている．

<u>定理</u>．次の (1), (2), (3) の各場合について $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)=2$ である．

(1) $g>0$ で $n\geqslant 4$．

(2) $g=0$ で C は少なくとも2つの特異点をもち，そのうち少なくとも1つは cusp でない．

(3) $g=0$ で少なくとも3つの cusp をもつ．

なお，$g=0$ で 2つの cusp をもつ時は $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)\geqslant 0$ である．

但し，cusp とは非特異モデル上に対応する点が1個きりない様な特異点のことである．上記定理では $g=0$ で各々

(イ) 特異点が1個の時．

(ロ) 特異点が2個で2つとも cusp の時．

が分らない訳であるが，これについては，次

の主張が成立する.

<u>定理A</u>. (イ) C が 1 個の特異点を持つ時, その重複度を e とすると, $n \geqq 3e$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 2$ である.

(ロ). $g = 0$ で C が 2 つの cusp を持つ時, それらの infinite near singular points までこめた特異点の重複度を各々 $(e_1, \cdots, e_p)$, $(m_1, \cdots, m_q)$ として,

$$R = \sum_{i=1}^{p}(e_i - 1) + \sum_{j=1}^{q}(m_j - 1) + 6 + d - 3n$$

$$d = \min\{e_p, m_q\}$$

とおく時, $R > 0$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 2$ である.

ところが, 定理Aの条件を満す最も簡単と思われる, (イ) $e = 2$, $n = 6$, (ロ) $e_i = m_j = 2$, $n = 7$ の有理曲線が存在するかどうか問題となる. 以後はもっぱら特異点が 1 個のときに限って考察してみよう. (最後の節で $n = 5$ で 2 つの cusp をもつ時も考えるが). さて, $e = 2$, $n \leqq 5$ の曲線は勿論存在する. それらは次の通りである.

<u>命題B</u>. $g = 0$, $n \leqq 5$, $e = 2$ である曲線は

次の曲線に projectively equivalent である.

(1) $n=3$ の時は $f(x,y)=y^2-x^3$ 又は $xy-x^3-y^3$.

(2) $n=4$ の時は $f_t(x,y)=(y-x^2)^2+tx^2y^2+xy^3$.

(3) $n=5$ の時は $f_t(x,y)=(y-x^2)(y-x^2+ty^2-tx^2y+2xy^2)+y^5$.

ここに, t はパラメーターであり, 各々の次数について, $f_t=0$ と $f_{t'}=0$ とで定義される曲線が projectively equivalent である必要十分条件は, $t^3=t'^3$ である. (つまり射影不変量は t^3 である.) なお特異点が cusp である必要十分条件は $t=0$ である. 更に上記の各曲線についての対数的 m 種数 $\bar{P}_m(\mathbb{P}^2-C)$ の値は, 特異点が cusp なら 0 であり, cusp でないなら 1 である.

さて, $n=6$ の時は $n\leqq 5$ の時と違って次のことが成立する.

<u>定理</u> C. $g=0$, $n=6$, $e=2$ である場合は, 特異点が cusp である曲線は存在しない. しかし cusp でない曲線は projective equivalence を法として, ちょうど2個存在する.

上記 A, B, C の証明は各々 §2, 4, 5 で与え

る．また定理Cの後半の曲線の例も§5で与える．以上の問題に関して有益な御助言を下さいました飯高茂先生に深い謝意を表します．

なお，これから共通して用いられる記号を次のように決めておく．

$$S = S_k \xrightarrow{\pi_k} S_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^2$$

を中心が各々$P_1, \cdots, P_k$の2次変換とし，$\pi = \pi_k \circ \cdots \circ \pi_1$とおく．また$E_i$を$\pi_i$による例外曲線とし，$\pi_k \circ \cdots \circ \pi_{i+1}$による固有像に $'$ を付けて表わし，全像は同じ記号で表わすとする．なお$\mathbb{P}^2$上の曲線Δの$\pi_i \circ \cdots \circ \pi_1$による固有像を$\Delta^{(i)}$と表わし，$H$は$\mathbb{P}^2$の直線を表わすとする．

§2. 定理Aの証明．

まず(イ)の時：　$\pi^{-1}(C) = \bar{D}$は単純正規交叉になっているとし，$C^{(i-1)}$のP_iにおける重複度をe_iとする．また$\bar{K}$をSの標準因子とすると，次の関係がある．

$$\bar{D} = C' + \sum_{i=1}^{k} E_i', \quad \bar{K} \sim -3H + \sum_{i=1}^{k} E_i$$

$$nH \sim C = C' + \sum_{i=1}^{k} e_i E_i$$

これより，$\bar{D} + \bar{K} \sim (n-3)H - \sum_{i=1}^{k}(e_i - 1)E_i + \sum_{i=1}^{k} E_i'$．

従って $n(\bar{D}+\bar{K}) \sim (n-3)C' + \sum_{i=1}^{k}(n-3e_i)E_i + n\sum_{i=1}^{k}E_i'$

右辺は $n \geqq 3e$ より正因子である．つまり $\bar{P}_n > 0$．

そこで，$mn(\bar{D}+\bar{K}) \sim n(n-3)H + (m-1)n(n-3)H - mn\sum_{i=1}^{k}(e_i-1)E_i + mn\sum_{i=1}^{k}E_i' \sim n(n-3)H + (m-1)\times (n-3)C' + \sum_{i=1}^{k}\{m(n-3e_i)-(n-3)e_i\}E_i + mn\sum_{i=1}^{k}E_i'$．

さて，$n > 3e_1$ なら $m \gg 0$ の時 $n(n-3)H + \bar{D}_m$，$\bar{D}_m > 0$ の形になる．また $n = 3e_1$ の時にも，E_i は E_i' たちの一次結合で表わせるから，矢張り $m \gg 0$ の時，上と同じ形に出来る．H は直線であるから，$\bar{K}$ の定義により $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 2$ である，[2]．※

次に (ロ) の時： C の 2 つの cusp を P，Q とし，P，Q，各々中心の 2 次変換から出る例外曲線を E_i，F_j で表わし，π は $\pi^{-1}(C) = \bar{D}$ が単純正規交叉になる最短のものであるとする．この時 (イ) と同様に

$$\bar{D} = C' + \sum_{i=1}^{s}E_i' + \sum_{i=1}^{t}F_i', \quad \bar{K} \sim -3H + \sum_{i=1}^{s}E_i + \sum_{i=1}^{t}F_i$$

$$nH \sim C = C' + e_1E_1 + \cdots + e_pE_p + E_{p+1} + \cdots + E_s + m_1F_1 + \cdots$$

$+ m_q F_q + F_{q+1} + \cdots + F_t$,　かつ　$s - p = e_p$, $t - q = m_q$,

であり，更に $g = 0$ という仮定から

$$(n-1)(n-2) = \sum_{i=1}^{p} e_i(e_i - 1) + \sum_{j=1}^{q} m_j(m_j - 1) \quad \text{———} \circledast$$

である．ここで補題を一つ．

補題 1．§1 の記号の下に，任意の $n \in \mathbb{N}$,
$n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，

$$l\left(nH - \sum_{i=1}^{k} n_i E_i\right) = \dim H^0\left(S, \mathcal{O}\left(nH - \sum_{i=1}^{k} n_i E_i\right)\right)$$
$$\geqq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} n_i(n_i+1)$$

が成立する．

証明．初等的にも出来るが，Riemann-Roch の定理からすぐ得られる．※

さて $\mathcal{E}_1 = (e_1 - 1)E_1 + \cdots + (e_{p-1} - 1)E_{p-1} + (e_p - 2)E_p + E_{p+1} + \cdots + E_{s-2} + (m_1 - 1)F_1 + \cdots + (m_q - 1)F_q$,　$\mathcal{E}_2 = (e_1 - 1)E_1 + \cdots + (e_p - 1)E_p + (m_1 - 1)F_1 + \cdots + (m_{q-1} - 1)F_{q-1} + (m_q - 2)F_q + F_{q+1} + \cdots + F_{t-2}$

とおくと，上の補題によって $l(k(n-3)H - k\mathcal{E}_1)$

$$\geqq \frac{1}{2}\Big[k^2(n-3)^2 + 3k(n-3) + 2 - \sum_{i=1}^{p}\{k^2(e_i-1)^2 + k(e_i-1)\}$$
$$+ k^2(2e_p - 3) + k - k(k+1)(e_p - 2) - \sum_{j=1}^{q}\{k^2(m_j-1)^2 + k(m_j-1)\}\Big]$$

他方 ⊛ の関係を用いて，

$$= \frac{1}{2}\Big[\Big\{\sum_{i=1}^{p}(e_i-1) + \sum_{j=1}^{q}(m_j-1) - 3n + e_p + 6\Big\}k^2$$
$$- \Big\{\sum_{i=1}^{p}(e_i-1) + \sum_{j=1}^{q}(m_j-1) - 3n + e_p + 6\Big\}k + 2\Big]$$

と得る．そこで $R_p = \sum_{i=1}^{p}(e_i-1)+\sum_{j=1}^{q}(m_j-1)+e_p+6-3n$ とおくと，$R_p>0$ なら $k\gg 0$ の時 $\ell(k(n-3)H-k\mathcal{E}_1) \geqq c_1k^2$ である．同様に $R_q = \sum_{i=1}^{p}(e_i-1)+\sum_{j=1}^{q}(m_j-1)+m_q+6-3n$ とおく時，$R_q>0$ なら $k\gg 0$ の時 $\ell(k(n-3)H-k\mathcal{E}_2) \geqq c_2k^2$ である．($c_i>0$)．そこで少なくとも一方が成り立つ時，例えば $R_p>0$ の時，$k(n-3)H\sim k\mathcal{E}_1+\Gamma$ という正因子を取り，一方，$\ell((n-3)H-\mathcal{E}_2)\geqq 1$ より $(n-3)H\sim \mathcal{E}_2+\Delta$ なる正因子 Δ を取る．つまり $k(n-3)H\sim k\mathcal{E}_2+k\Delta$ である．さて，$2k(\bar{D}+\bar{K})\sim 2k(n-3)H-2k\left\{\sum_{i=1}^{p}(e_i-1)E_i+\sum_{j=1}^{q}(m_j-1)F_j\right\}+2k\left\{\sum_{i=1}^{s}E_i'+\sum_{j=1}^{t}F_j'\right\}$ より，$2k(\bar{D}+\bar{K})\sim k\mathcal{E}_1+\Gamma+k\mathcal{E}_2+k\Delta$

$$-2k\left\{\sum_{i=1}^{p}(e_i-1)E_i+\sum_{j=1}^{q}(m_j-1)F_j\right\}+2k\left\{\sum_{i=1}^{s}E_i'+\sum_{j=1}^{t}F_j'\right\}$$

$$= k\Big\{2(E_1'+\cdots+E_{p-1}')+E_p'+2(E_{p+1}'+\cdots+E_{s-2}')+E_{s-1}'$$

$$+2(F_1'+\cdots+F_{q-1}')+F_q'+2(F_{q+1}'+\cdots+F_{t-2}')+F_{q-1}'\Big\}$$

$$+\Gamma+k\Delta$$

ここで Γ は c_1k^2 次元以上あるから，定義に $R>0$ なら $\bar{\kappa}=2$ である．※

§3. 既約性の補題.

この節では後で使う，既約性の一つの判定法を証明する．それは，2次変換を調べることによって既約性を示せるというものである．

<u>補題2.</u> n次の平面代数曲線Δがある点Pで重複度2の特異点をもち，点Pがちょうど$N = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$回の2次変換で非特異になったとすると，$n \geqq 6$なら$\Delta$は既約有理で$P$以外に特異点はない．また$n \leqq 5$の時$\Delta$は可約のこともあるが，それらは次の曲線に projectively equivalent である．

(1) $n = 3$の時は，$g(x,y) = y(x + a_1 y + a_2 x^2 + a_3 xy + a_4 y^2)$, $a_i \neq 0$ for some $i = 2, 3, 4$.

(2) $n = 4$の時は，$g(x,y) = y(y + a_1 xy + a_2 y^2 + a_3 x^3 + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 y^3)$, $a_3 \neq 0$，又は$g(x,y) = (y - x^2)(y - x^2 + axy + by^2)$, $a \neq 0$.

(3) $n = 5$の時は，$g(x,y) = (y - x^2)\{y - x^2 + ax(y - x^2) + by(y - x^2) + cy^3\}$, $c \neq 0$.

<u>証明.</u> Δが可約と仮定して，$\Delta = e_1\Delta_1 \cup \cdots \cup e_r\Delta_r$，各$\Delta_i$は既約と分解する．$P$を通る成分

に注目する．今 P を通る成分が1個だけと仮定し，それを Δ_1 とする．$\mathrm{mult}_P \Delta_1 = 1$ の時，$e_1 = 2$ であり，何回2次変換しても1次の項は出ない．従って $\mathrm{mult}_P \Delta_1 = 2$，$e_1 = 1$，とする．可約の仮定から $\deg \Delta_1 < n$ である．従って Δ_1 の点 P は2次変換がN回より少なくて非特異とならねばならないので不可能である．依って，P を通る成分はちょうど2個である．それらを Δ_i，$i = 1, 2$，として，$\deg \Delta_i = n_i$ とする．勿論 $e_i = 1$，$\mathrm{mult}_P \Delta_i = 1$，$i = 1, 2$，$n_1 + n_2 \leq n$ である．一方，2次変換によって $\Delta = \Delta' + 2E_1 + \cdots + 2E_N$ となり，従ってこの2次変換によって $\Delta_i = \Delta_i' + E_1 + \cdots + E_N$ でなければならない．つまり P での交点数について $I_P(\Delta_1, \Delta_2) \geqq N$ である．従って $n_1 n_2 \geqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ であり，$n_1(n_1 - 3) + n_2(n_2 - 3) \leqq 0$ となる．さて $n_1 \leq n_2$ と仮定して，P はアフィン平面の原点であるようにしておき，Δ の定義方程式を $g(x, y) = 0$ とする．この時，(i) $n_1 = n_2 = 1$ なら $g(x, y) = y(x + ay)(1 + \cdots)$ という形になるが，1回の2次変換で1

次の項が出るから $N=1$，つまり $n=3$ である．よって (1) の形になる．(ii) $n_1=1$, $n_2=2$ なら，$g(x,y) = y(a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2)(1+\cdots)$ という形になるが，$a_1 \neq 0$ なら $N=1$，よって $n=3$ である．他方，$a_1=0$ とすると，$a_3 \neq 0$ より $N=2$ となるが，このような n は存在しないので不可能である．従って (ii) の場合も (1) の形になった．その他の $(n_1, n_2) = (1,3)$, $(2,2)$, $(2,3)$ の場合も N と n の関係に注意すれば，少々めんどうであるが，(2)，(3) の形を得ることができる．そして同時に $n \geqq 6$ なら既約という（一見不思議な結果も）証明される．なお，Plücker の公式によれば，Δ は有理で P 以外に特異点を持たないことも分る．

§4. 命題 B の証明.

$n=3$ の時は良く知られている．$n=4, 5$ については C の定義式を

$$f(x,y) = y^2 + \sum c_{ij} x^i y^j, \quad c_{30}=0,$$

の形にしておく．そこで，まず $n=4$ の時を

証明しよう．C'''も接線は1本でなければならないから $c_{21}^2 = 4c_{40} \neq 0$ である．従って適当な射影変換によって $c_{40}=1$, $c_{21}=-2$ とできる．あとは原点中心の2次変換で重複度2の特異点が3回目に非特異になる条件として，

$$f(x,y) = (y-x^2)^2 + axy^2 + by^3 - ax^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

を得る．但し，$a^2 \neq 4(b+c)$ 又は $a^2 = 4(b+c)$ かつ $ab \neq 2d$ である．また特異点が cusp である必要十分条件は後者の関係があることであることに注意する．そこで $\mathbb{P}^2$ の射影変換で原点を固定し，$y-x^2$ を不変にするものを適当に取れば(2)の形にできることが分る．

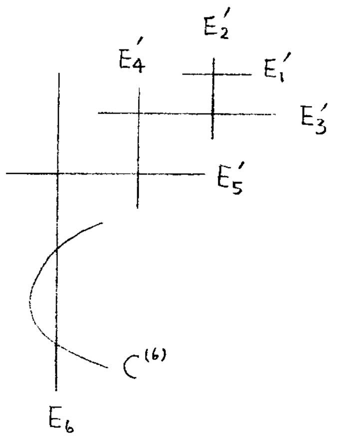
次に $n=5$ の時を証明する．§1における π が C の最短の特異点解消を与えているとすると，$\pi^*C = C' + 2E_1 + \cdots + 2E_6$ である．そこで $D = E_1 + \cdots + E_5$ とおくと，補題1により $l(2H-D) \geq 1$．よって $2H \sim D + \Gamma'$ なる S 上の正因子 Γ' が存在する．$\Gamma = \pi_*(D+\Gamma')$ とおくと Γ は既約である．なぜなら，もし Γ が2本の直線からなると仮

定すると，$C_{40}=0$ でなければならない．というのは，もし $C_{40}\neq 0$ とすれば $C^{(1)}$ と $\Gamma^{(1)}$ は交わったとしても接線は異なる．従って Γ から出る例外曲線は高々 $2E_1+2E_2$ であり，D の形からこれは不可能である．よって $C_{40}=0$ である．すると f は既約であるから $C_{50}\neq 0$ である．これでは C は 2 回の 2 次変換で非特異となってしまうので矛盾である．よって Γ は既約であり，Γ を $y=x^2$ と射影変換できる．D の形によると C と Γ の原点での交点数は 10 である．これより f から y^5 の項を引いた差である多項式は $y-x^2$ で割り切れる．更に 6 回目の 2 次変換で非特異になる条件として，

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-x^2+axy+by^2-ax^3-bx^2y+cxy^2+\frac{ac}{2}y^3)+\frac{1}{4}c^2y^5,\quad c\neq 0.$$

を得る．ここで特異点が cusp である必要十分条件は $a^2=4b$ である．あとは $\mathbb{P}^2$ の射影変換 T で原点を固定し，$y-x^2$ を不変にし，更に f^T も f と係数の間の関係が同じ（つまり，$y=x^2$ を 2 次変換した時 3 回目まで特異点で

の接線が同じ）になる様な変換を適当に取れば(3)の形にできる。さて定理の形のf_tに対して、f_t^Tもf_tと係数における関係が同一になる条件を求めて、f_t^Tに表われるパラメーターt'とtとの関係は$t'^3 = t^3$であることが容易に分る。逆に$t' = \omega t$, $\omega^3 = 1$の時は、$f_t^T = f_{t'}$となるTを簡単に見つけられる。また補題2によればf_tは既約であることも分る。（例えば原点を固定しy, $y - x^2$などを不変にする射影変換を考えればよい。しかし補題2を出すまでもないが）。なお特異点が cusp になる必要十分条件は前頁の$a^2 = 4b$によって$t = 0$であることも従う。最後に$\bar{P}_m(\mathbb{P}^2 - C)$の計算であるが、少々めんどうな所があるので書いておこう。いずれの場合も似ているから、一番複雑な、$n = 5$の時をやってみる。tが0か0でないかで resolution が異なってくるから、これで場合を分けて考察する。まず$t \neq 0$の時：6回2次変換すると単純正規交叉になる。$\bar{D} = C^{(6)} + E_1' + \cdots + E_6'$, $\bar{K} \sim -3H + E_1 + \cdots + E_6$



$$5H \sim C = C^{(6)} + 2E_1 + \cdots + 2E_6$$

Δ を $y - x^2 = 0$ とすると C の resolution によって、

$$2H \sim \Delta = \Delta^{(5)} + E_1 + \cdots + E_5$$

であるから、

$$\bar{D} + \bar{K} \sim \Delta^{(5)} + E_1' + \cdots + E_5' = \mathcal{D}$$

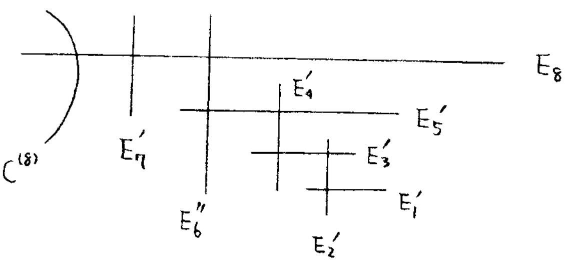
$\mathcal{L}(m\mathcal{D}) = H^0(S, \mathcal{O}(m\mathcal{D}))$ の元 φ について、$\varphi = \pi^*(\psi)$ とおくと $(\psi) + \pi_*(m\mathcal{D}) \geq 0$ より、$\psi = \psi_1 / (y - x^2)^k$, $\deg \psi_1 = 2k$, で表わせる。従って、$(\varphi) + m\mathcal{D} = \Gamma' + \mathcal{E} + (m-k)\Delta^{(5)} + (m-k)E_1' + (m-2k)E_2' + (m-3k)E_3' + (m-4k)E_4' + (m-5k)E_5' - 5kE_6 \geq 0$, $\pi^*((\psi_1)) = \Gamma' + \mathcal{E}$, である。そこで補題を一つ。

補題3. 上記2次変換 π によって、n 次の曲線から出る素因子 E_6 の個数は $\frac{5}{2}n$ より少ない。

証明. まず既約曲線 X に対して考える。$\pi^* X = X' + e_1 E_1 + \cdots + e_6 E_6$ とするとき、$e_1 + \cdots + e_6 \geq \frac{5}{2} n$ であったと仮定する。$(n-1)(n-2) \geq$

$\sum_{i=1}^{6} e_i(e_i-1)$ である。$e_1+\cdots+e_6 \geqq \frac{5}{2}n$ の時、$\sum e_i(e_i-1) = \sum_{i=1}^{6}(e_i-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$ の最小値は $e_1=\cdots=e_6=\frac{5}{12}n$ の時になるから $(n-1)(n-2) \geqq \frac{5}{2}n(\frac{5}{12}n-1)$ である。よって $n^2+12n-48 \leqq 0$, $n \leqq 3$. ところで $n=3$ の時 $2E_1+E_2+\cdots+E_6$ が最も多くて、7個であるが $7 < \frac{5}{2}\times 3$ である。$n=1, 2$ についても同様である。従って矛盾であり、$e_1+\cdots+e_6 < \frac{5}{2}n$ である。次に X が可約の時、$X = m_1X_1 \cup \cdots \cup m_kX_k$, $\deg X_i = n_i$, $n = \sum_{i=1}^{k} m_in_i$ とし、X_i によって $e_{i1}E_1+\cdots+e_{i6}E_6$ が出るとする。初めの考察から $\sum_{j=1}^{6} e_{ij} < \frac{5}{2}n_i$ であり、従って $\sum_{ij} m_ie_{ij} < \frac{5}{2}n$ を得る。※

さて $\bar{P}_m$ の計算にもどろう。補題によれば $(\varphi)+m\mathfrak{D} \geqq 0$ なるためには、$k=0$ でなければならない。つまり $\mathcal{L}(m\mathfrak{D})$ には定数きり存在しない。次に $t=0$ の時： 8回の2次変換で $\bar{\pi}(C)$ は単純正規交叉になる。



$\bar{D} = C^{(8)} + E_1' + \cdots + E_8'$

$\bar{K} \sim -3H + E_1 + \cdots + E_8$

$t \neq 0$ の場合と同様に Δ を用いて, $\bar{D} + \bar{K} \sim \Delta^{(5)} + E_1' + \cdots + E_5' - E_8 = \mathcal{D}$. $\mathcal{L}(m\mathcal{D}) \ni \varphi$ に対して同様に, $\varphi = \varphi_1/(y-x^2)^k$, $\deg \varphi_1 = 2k$, とでき, $(\varphi) + m\mathcal{D} = \Gamma' + \mathcal{E} + (m-k)\Delta^{(5)} + (m-k)E_1' + (m-2k)E_2' + (m-3k)E_3' + (m-4k)E_4' + (m-5k)E_5' - 5kE_6' - 5kE_7' - (10k+m)E_8 \geqq 0$ 従って特に E_6' をに注目すると, 矢張り補題3によって, $k = 0$ でなければならない. しかし今度は $\mathcal{L}(m\mathcal{D})$ には定数も含まれていない. よって $\bar{P}_m = 0$ である. ※

ところで命題Bは次のような moduli の問題に一般化される.

<u>問題 4.</u> 既約有理曲線が特異点を1個だけ持つとし, その次数と重複度を固定する. この様な曲線の定義式に表われるパラメーター数は $\mathbb{P}^2$ の射影変換で最低何個まででできるか. 次に, 定義式が最低のパラメーターを含む形にしておいた時, その不変式はどの様なものであるか.

<u>注意 5.</u> 特異点が cusp なら, その条件とし

て必要な係数の間の関係式が増えて，moduli の次元は少なくなるのであるが，0次元になるとは限らない．つまり $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$ でも C の moduli の次元は1以上のことがある．例えば $n = 5$, $e = 4$ で cusp の時 C は次の (1), (2), (3) のいずれかと projectively equivalent である．

(1) $f_t(x, y) = y^4 + x^5 + x^3y^2 + t x^2y^3$

(2) $g(x, y) = y^4 + x^5 + x^2y^3$

(3) $h(x, y) = y^4 + x^5$

勿論，(1), (2), (3) で定義される曲線は互いに projectively equivalent でなく，(1) でパラメーター t は消せない．$f_t = 0$ の projective invariant は t^5 である．また (1), (2), (3) は互いに変形で移りあわない．

§5. 定理Cの証明．

今，定理Cに述べた曲線が存在したと仮定する．§1 の記号で π は C の最短の特異点解消とする．$\pi^*C = C' + 2E_1 + \cdots + 2E_{10}$ として，$D = 2E_1 + E_2 + \cdots + E_7$ とおくと，補題1から ℓ(3H−

D) $\geqq 1$. 従って S 上の正因子 Γ' で $3H \sim D + \Gamma'$ となるものが存在する。$\Gamma = \pi_*(\Gamma' + D)$ とおき、C の定義式を

$$f(x, y) = y^2 + \sum_{i+j=3}^{6} c_{ij} x^i y^j, \quad c_{30} = 0,$$

としておく。この時，次のことが成立する。

補題 6. (甲) Γ が 3 本の直線なら $c_{40} = 0$ である。(乙) Γ が 1 本の直線と 2 次既約曲線 Δ の時は，$c_{40} \neq 0$ であって，π によって Δ から例外曲線 $E_1, \cdots, E_m$ が出たとすると，$m \geqq 6$ であり，従って $m = 6$ である。(丙) Γ が既約の時は，Γ の定義式は $xy = x^3 + y^3$ としてよい。

証明. (甲)について：$c_{40} \neq 0$ と仮定すると，例外曲線は高々 $3E_1 + 3E_2$ きり出ないので D の形から不可能である。(乙)について：$c_{40} = 0$ と仮定すると，$c_{60} \neq 0$ より 1 本の直線から出る例外曲線は高々 $E_1 + E_2 + E_3$ であり，$\pi^*\Delta = \Delta' + E_1 + \cdots + E_m$ とすると，素因子 E_7' の数を D に含まれる数と比較して $3 + m \geqq 8$, $m \geqq 5$ を得る。そこで Δ の定義式を $y + ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ とすると，$c_{40} = 0$ より $\Delta^{(1)}$ の接線を考えると，$a =$

0でなければならない．すると Δ は可約になってしまって矛盾である．よって $C_{40} \neq 0$ であり1本の直線から例外曲線は高々 E_1+E_2 きり出ない．この時，上と同様に考えて $m \geqq 6$ を得る．C と Δ の交点数を考えると $m=6$ である．（丙）について：D の形から Γ は原点が特異点である．すると Γ は，f は最初に決めた形のままで，$y^2=x^3$ 又は $xy=x^3+y^3$ とできる．しかるに，前者については $\Gamma^{(1)}$ と $C^{(1)}$ の接線が異なってしまうので不可能である．※

以下（甲），（乙），（丙）の各場合に分けて存在を調べる．その前に一つ定義をしておく．

<u>定義7</u>．$\pi_1, \cdots, \pi_{10}$ は次のような2次変換からなっているとする．

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_1 y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 - d_1 x_1 = x_2 y_2 \end{cases}, \quad \cdots \quad \begin{cases} x_9 = x_{10} \\ y_9 - d_9 x_9 = x_{10} y_{10} \end{cases}$$

この時，$(0, -d_1, \cdots, -d_9)$ を<u>2次変換 π の型</u>と呼ぶことにする．

（甲）$C_{40}=0$ の時：

この時は特異点が何であろうと曲線は存在

しないことを証明する．まず補題を，

補題 8. $C_{40}=0$ の時，上の定義中の記号で，$d_1=0$，$d_2=1$，$d_3=0$，$d_5=0$ であるように C を射影変換できる．

証明. 新たに $D=E_1+\cdots+E_8$ と置くと $\ell(3H-D)\geq 2$ を得る．今までと同様に，$3H\sim D+\Gamma'$，$\Gamma=\pi_*(D+\Gamma')$ と置く．まず，Γ として既約なものを選べることを示そう．Γ が 1 本の直線と 2 次曲線にならないことは，上記（ て ）の証明と同様にして分る．また Γ が 3 本の直線になるのは高々 1 次元しかない．つまり，$y^3=0$ 以外で最も例外曲線が出るのは $(ax+by)y^2=0$，$a\neq 0$，の形の時であるが，これでは $C_{60}\neq 0$ であるから，$3E_1+2E_2+2E_3$ で D の形と比らべて不可能である．従って，3 次既約な Γ を取れる．Γ の定義式を g とする．$C_{40}=0$ より g の最低次数は 1 である．よって

$$g(x,y)=y+\sum_{i+j=2}^{3}a_{ij}x^iy^j$$

とおく．$C_{40}=0$ より $\Gamma^{(1)}$ の接線を考えると $a_{20}=0$ を得る．つまり原点は Γ の変曲点である．

従って g は適当な射影変換によって次のいづれかにできる.

(i) $y = x^3$

(ii) $y = x^2(x+y)$

(iii) $y = x(x-y)(x-\lambda y)$, $\lambda \neq 0, 1$.

勿論, このように g を変換した後も, f は節の初めにあげた形のまゝでよい. さて (i), (ii), (iii) の2次変換を実際に行う. D の形により $C^{(6)}$ まで接線が一致しているから補題に述べた結論を得る. ※

従って $C_{40} = 0$ の時, π は

$$\begin{cases} x = x_{10} \\ y = x_{10}^3 (x_{10}^7 y_{10} + d_9 x_{10}^7 + d_8 x_{10}^6 + d_7 x_{10}^5 + d_6 x_{10}^4 \\ \qquad\qquad + d_4 x_{10}^2 + 1) \end{cases}$$

としてよい. そこで $f(x, y)$ を x_{10}, y_{10} で表わす. 簡単の為 x_{10}, y_{10} を各々 x, y と置き直して,

$$f^*(x, y) = x^6 (x^7 y + d_9 x^7 + \cdots + d_4 x^2 + 1)^2 + \sum_{i+j=3}^{6} c_{ij}\, x^{i+3j} (x^7 y + d_9 x^7 + \cdots + d_4 x^2 + 1)^j$$

とおく. ここに, $C_{40} = C_{21} = C_{50} = 0$, $C_{60} \neq 0$

であり，Cの存在の仮定よりπ^*Cからは$2E_1+\cdots+2E_{10}$が出るからx^{20}で割り切れ，またx^{20}の係数は0であり，C'が非特異だから，x^{21}又は$x^{20}y$の係数は0でない．つまり，

$$\begin{cases} ⓐ & x^6, x^7, \cdots, x^{20}, x^{13}y, \cdots, x^{19}y \text{ の係数は0であり.} \\ ⓑ & x^{21} \text{ 又は } x^{20}y \text{ の係数は 0 でない.} \end{cases}$$

ところが，ⓐを仮定するとⓑは成立しないことが，かなりめんどうな計算の結果分る．従って（甲）の場合には曲線が存在しないことが証明された．

（乙）の時：

この時も特異点が何であろうと曲線は存在しないことを証明する．さて，2次曲線Δの方程式を$y=x^2$と射影変換しておく．ΔとCの原点での交点数は12であるからfからy^6の項を引いた差の多項式は$y-x^2$で割り切れることに注意する．またΔを2次変換することによって，πの型は$(0, -1, 0, 0, 0, *, \cdots, *)$となることが分るから，$\pi$は，

$$\begin{cases} x = x_{10} \\ y = x_{10}^2 \left(x_{10}^8 y_{10} + d_5 x_{10}^8 + d_4 x_{10}^7 + d_3 x_{10}^6 + d_2 x_{10}^5 + d_1 x_{10}^4 + 1 \right) \end{cases}$$

である．(甲)と同様に $f(x, y)$ を x_{10}, y_{10} で表わして，簡単の為に x_{10}, y_{10} を各々 x, y と置き直した式を $f^*(x, y)$ とすると，C の存在の仮定より，(甲)の時と同じ理由によって次の ⓒ，ⓓ の条件を満さなくてはならない．

ⓒ x^4, x^5, $\cdots$, x^{20}, $x^{12}y$, $\cdots$, $x^{19}y$ の係数は 0 であり．

ⓓ x^{21} 又は $x^{20}y$ の係数は 0 でない．

ところが，ⓒ を仮定すると ⓓ が成立し得ないことが計算で分る．従って(乙)の場合も曲線は存在しないことが証明された．

(丙)の時：

この時は特異点に cusp という仮定をすると曲線は存在しないが，cusp でない場合は存在してそれらは projective equivalence を法としてちょうど 2 個であることを証明する．さて，Γ : $xy = x^3 + y^3$ の 2 次変換を行うことによって，π の型は $(0, -1, 0, 0, -1, 0, -d_1, -d_2, -d_3, -d_4)$

であるとしてよい。後は今までと同様,

$$\begin{cases} x = x_{10} \\ y = x_{10}^2 \left(x_{10}^8 y_{10} + d_4 x_{10}^8 + d_3 x_{10}^7 + d_2 x_{10}^6 + d_1 x_{10}^5 + x_{10}^3 + 1 \right) \end{cases}$$

を $f(x, y)$ に代入して $f^*(x, y)$ を得る。C の存在の仮定から (乙) における ⓒ, ⓓ の条件を満さなくてはならない。ⓒ の条件による方程式を解くと, $C_{21} = -2$, $C_{40} = 1$, $C_{12} = C_1$, $C_{22} = C_2$, $C_{03} = C_3$, $C_{13} = C_4$, $C_{04} = C_5$, $C_{14} = C_6$ とおくと, $C_{50} = C_1$, $C_{31} = -2C_1$, $C_{60} = C_2 + 2C_3$, $C_{41} = -2C_2 - 3C_3$, $C_{32} = -2C_4 - 2$, $C_{51} = C_4 + 2$, $C_{23} = -2C_5 - 2C_1$, $C_{42} = C_5 + 2C_1$, $C_{33} = -C_6$, $C_{24} = 3 + C_4$, $C_{15} = C_1$, $C_{06} = -C_2 - 3C_3 - C_6$, $C_{05} = -2 - C_4$ であり, 更に, $d_1 = 0$ の時は $d_2 = 2$ 又は $d_2 = 4$ を得る。この場合は比較的容易に x^{21} かつ $x^{20}y$ の係数が 0 になることを示せる。そこで $d_1 \neq 0$ の時を調べる。この場合は $d_2 = \frac{7}{2}$ なら $d_1 d_3 = d_1^3 + \frac{3}{4}$ であり, 同様に曲線は非存在であることが分る。そこで $d_2 \neq \frac{7}{2}$ の時を考える。この時は,

$$C_1 = \frac{(d_2-2)(d_2-4) + d_1 d_3 - d_1^3}{d_1\left(\frac{7}{2} - d_2\right)}$$

を得る．これを用いると，$d_1 d_3 = d_1^3 + (d_2-2) \times (d_2-3)$ 又は $d_1^3 + (d_2-3)(d_2-4) = 0$ を得る．前者の時は矢張り x^{21}，$x^{20}y$ の係数が 0 になってしまうことが分る．そこで後者について考える．この時

$$d_1 d_3 = \frac{2(d_2-3)(d_2-4)^2}{7-2d_2}$$

を得て，更に

$$4d_2^2 - 30d_2 + 55 = 0$$

を得る．さて ⓒ で x^{20} の係数が 0 になる条件によって，d_4 に関する 2 次方程式を得る．しかもこれは異なる根をもつことが分る．従って $C^{(9)}$ の特異点は通常 2 重点であり，cusp という条件を仮定すると曲線は存在しないことが証明された．さて d_4 の 2 つの値は，勿論 x^{20} xy の係数を 0 にしない．よってこの場合は曲線は存在する．(補題 2 によれば既約であることは保証されている．)．さて d_2，d_1 の値に応じて見かけ上 6 個の曲線ができる．これらをすべて書いてみよう．$c_1 = 2d_1^2(8d_2-33)$，$c_2 = (-21d_2 + \frac{159}{2})d_1$，$c_3 = (3d_2 - \frac{23}{2})d_1$，

$c_4 = -4d_2 + 13$, $c_5 = (-16d_2 + 67)d_1^2$, $c_6 = (24d_2 - 92)d_1$ である。d_2 は上記 $4d_2^2 - 30d_2 + 55 = 0$ によって2個存在する。そのうち1つを取った時，d_1 は $d_1^3 + (d_2 - 3)(d_2 - 4) = 0$ によって3個の相異なる値を取りうるのであるが，これらによって決る曲線は3個とも互いに $\mathbb{P}^2$ の射影変換で移りあうことを証明しよう。まず原点を固定し，$y - x^2$ を不変にする条件によって射影変換 T は

$$T = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & r & 0 \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$r^2u^4 = 1$, $p^2ru^3 = 1$, $p^4u^2 = 1$ でなければならない。但し，$x = X_1/X_3$, $y = X_1/X_2$ と非斉次化してあるとする。ところで C の2次変換の型は $(0, -1, 0, 0, -1, 0, *, \cdots, *)$ であった。f^T によって定義される曲線も同じ2次変換の型を持つ条件として，$p^2 = ru$, $sr = 2pq$, $q^2 = rt$, $r^2 = up$, $p^2q = 0$ を得る。つまり，$q = s = t = 0$, $r = p\omega$, $u = p\omega^2$, $p^6 = \omega^2$,

, $\omega^3 = 1$, という関係を得る. そこで f^{II} の係数には ′ を付けて表わすと, $c_1' = \omega c_1$, $c_2' = \omega^2 c_2$, $c_3' = \omega^2 c_2$, $c_4' = c_4$, $c_5' = \omega c_5$, $c_6' = \omega^2 c_6$ である. これは正に d_2 を与えた時, d_1 の取り方によって起る3つの場合になっている! なおこの証明から同時に分る様に, d_2 の2つの値に対する曲線は射影変換で互い移りあわない. q.e.d. of Theorem C. ※

定理Cの証明には厖大な計算が必要であり, もっと簡単に証明できないものかと考えています. 特に(丙)の場合は非常にめんどうです. どうにかならないでしょうか....

さて, 定理Cは次の様な問題に一般化される.

<u>問題9</u>. Cは n 次平面有理既約曲線で特異点は1個だけで, それが重複度 e の cusp であるとする. この時, $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$ であるか? あるいはも少し弱く $n < 3e$ であるか?
(一見易しそうに思われるが, 定理Cの難しさから考えると, 易しくはないのだろうか.)

§6. 一つの注意.

C を既約平面曲線で次数を $n\ (\geqq 3)$ とする. Abhyankar-Moh, [1] によると, $C - C\cap H \cong \mathbb{A}^1$ ならば $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$ である. そこで今度は, 既約2次曲線 Δ に対して, $C - C\cap\Delta \cong \mathbb{A}^1$ を仮定する時, C についてどれだけの事が分るか調べてみたい. まず $g(C) = 0$ で $C\cap\Delta$ は一点でそれは C の cusp であることは直ちに分る. $C\cap\Delta = \{P\}$ とすると次の補題が成立する.

補題 10. 上記の仮定の下で, $\mathrm{mult}_P C = e$ とすると, $e \leqq n-3$ であり, P の infinite near (singular) points の重複度の列を $(e, \cdots, e, e', \cdots)$ $e > e' \geqq 1$, e は m 回続く, とすると

(イ) $me + e' = 2n$

か又は,

(ロ) $le = 2n$, $l \leqq m$

である. 更に (イ) の時は,

$$\frac{n^2 - n + 2}{2n} \geqq e - \frac{e'(e-e')}{2n}$$

であり，(ロ)の時は，

$$\frac{n^2-n+2}{2n} \geqq e$$

である．

証明．まずΔを$y=x^2$と変換し，$C\cap\Delta$は原点であるようにしておく．$e=n-1$ 又は $n-2$ と仮定すると，原点での交点数$I_0(C,\Delta)$が$2n$で特異点がcuspであるということからCは可約であると結論されて矛盾する．同様に，cuspということから，$C^{(m)}$と$\Delta^{(m)}$は交わったとしても接線は異なる．従って $I_0(C,\Delta)=2n$ より(イ)，(ロ)の結果を得る．また(イ)の時，$(n-1)(n-2)\geqq me(e-1)+e'(e'-1)$ も合わせて考えると上記不等式を得る．(ロ)の場合も同じである．

命題11．上の仮定の下で，$n\leqq 6$ ならCは $(y-x^2)(y-x^2+2xy^2)+y^5=0$ で定義される曲線である．

証明．補題10によると，$3\leqq n\leqq 6$ で可能性のある(n,e)の組は，$(5,2)$と$(6,2)$だけである．ところが後者は，§5の(乙)の場合であ

り非存在であった．よって $(5,2)$ のみであるが，これは命題Bにより，上記の曲線である．

問題12．$C - C\cap\Delta \cong \mathbb{A}^1$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) < 2$ であるか．もしこれが成立すれば定理Aと合わせて，$3e > n$ より，例えば $e = 2$ の時は矢張り命題11の5次曲線きり無いということも分る．

§7. 5次曲線の $\bar{\kappa}$ による分類．

C を n 次既約代数曲線とする時，$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = \bar{\kappa}$ で C を分類する事は興味深いことである．$n \leqq 4$ の時は出来ている様であるから，$n = 5$ の時に調べてみよう．2頁の定理によれば，C が有理で

(イ) 特異点が1個の時，

又は

(ロ) 特異点が2個で，2つとも cusp の時，

に調べればよい．さて

(イ)の時：

$\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ を resolution とする時，特異点 P に対して，$\pi^{-1}(P)$ の個数と，$e = \mathrm{mult}_P C$ とによって場合を分ける．一般に次の補題の成立す

ることに注意する.

<u>補題 13.</u> $\deg C = n$, $\mathrm{mult}_P C = n-1$ の時,

(1) P が cusp なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$,

(2) P が ordinary multiple point なら, $n = 3$ の時に $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 0$, $n \geqq 4$ の時に $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 1$,

である.

<u>証明.</u> 容易だから省略する.

さて, 分類の結果は次の通りである.

(i) $e = 2$ の時:

P が cusp なら $\bar{\kappa} = -\infty$, cusp でないなら $\bar{\kappa} = 0$. (これは命題 B)

(ii) $e = 3$ の時:

特異点が cusp となる曲線は存在しない.

P が cusp でない時は, $\#\pi^{-1}(P) = 2$ なら $\bar{\kappa} = 0$ であり, $\#\pi^{-1}(P) = 3$ なら $\bar{\kappa} = 1$ である.

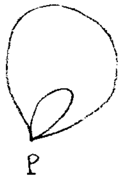
(iii) $e = 4$ の時:

P が cusp なら $\bar{\kappa} = -\infty$ であり, $\#\pi^{-1}(P) = 2$ の時は $\bar{\kappa} = 0$ であり, $\#\pi^{-1}(P) = 3, 4$ の時

は $\bar{\kappa} = 1$ である．

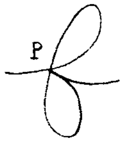
$f = xy^3 + f_5$，

$^{\#}\pi^{-1}(P) = 2$．



$f = x^2y^2 + f_5$，

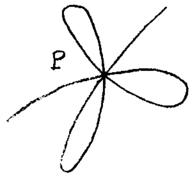
$^{\#}\pi^{-1}(P) = 2$



$f = xy^2(y + ax) + f_5$，

$a \neq 0$．

$^{\#}\pi^{-1}(P) = 3$



$f = xy(y+ax) \times (y+bx) + f_5$

$ab \neq 0$, $a \neq b$,

$^{\#}\pi^{-1}(P) = 4$．

(ロ) の時：

この時は，Plückerの公式を満す数値の組を与えた時に曲線が存在するかどうかはっきりさせなくてはならない．((イ)の場合の存在は明らかであるが，(ロ)では微妙である．) ついでに，パラメーター数を最少にする形まで求めてみよう．さて，定理Aの(ロ)での記号を用いて，$\{(e_1, \cdots, e_p), (m_1, \cdots, m_g)\}$ の組で場合を分けることにする．

(i) $\{(3), (3)\}$ の時は非存在である．

(ii) $\{(3), (2, 2, 2)\}$ の時は1個だけ存在して，

$$f(x, y) = y^3 + x^4 + x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{16}x^4y.$$

(iii) $\{(3,2),(2,2)\}$ の時は互いに projectively equivalent でないものが2つ存在して，それらは，

$$f(x,y) = y^3 - x^5 \quad \text{または}$$
$$y^3 + x^2y^2 - x^5 + \frac{1}{4}x^4y$$

(iv) $\{(2),(3,2,2)\}$ の時は非存在である。

(v) $\{(2),(2,2,2,2,2)\}$ の時も非存在である。

(vi) $\{(2,2),(2,2,2,2)\}$ の時は1個だけ存在して，

$$f(x,y) = y^2 - 2x^2y + 6xy^2 + y^3 + x^4 - 12x^3y + 6x^2y^2 + 8xy^3 + 6x^5 - 7x^4y - 8x^3y^2 + 16x^2y^3.$$

(vii) $\{(2,2,2),(2,2,2)\}$ の時は非存在である。

なお，上記各場合についての $\bar{\kappa}$ は (iii) で $\bar{\kappa} = 1$ である．他の場合は，今計算している所である．

さて上記の証明は，次の補題を用いて，命題Bの証明とほゞ同様にすればよい．

<u>補題 14.</u>　2つの cusps を各々 P，Q とす

る時，適当な射影変換で $P=(0,0,1)$， $Q=(0,1,0)$ かつ P での C の接線を $X_2=0$ とできる．

<u>証明.</u> 容易であるから省略．

cusp が2個の時も2次変換を調べることによって既約かどうか判断できる．勿論今の場合は，5次で特異点が cusp であるから易しいのであるが，やゝ一般的に次の主張がなりたつ．

<u>命題15.</u> n 次の平面曲線 C が2点 P，Q で重複度2の cusp を持ち，P，Q 各々 N_1，N_2 回の2次変換で非特異になり，$N_1+N_2=(n-1)(n-2)/2$ であれば，C は既約有理であり，P，Q 以外に特異点はない．

<u>証明.</u> 可約と仮定して，$C=\sum e_iC_i$ と既約分解する．P，Q が cusp ということから，P，Q 各々を通る成分は1個でなければならない．しかも，それらを C_i，$i=1,2$，とすると，$e_i=1$ $\mathrm{mult}_P\, C_1=\mathrm{mult}_Q\, C_2=2$，でなければならない．すると，$\deg C_i=n_i$，として $n\geqq n_1+n_2$，$(n_1-1)(n_1-2)\geqq 2N_1$，$(n_2-1)(n_2-2)\geqq 2N_2$ より

$n_1 n_2 \leq 1$ となって矛盾である。※

§8. 終りに.

定理Aの(ロ)で、 $R>0$ となる曲線が存在するかどうか分りません。一番簡単(と思われる)場合すら、7次ですから、定理Cの6次の時の困難さを考えると甚だ絶望的な気分にならざるを得ません。有力な一般論は無いのでしょうか？

参考文献

[1]. S. Abhyankar - T. T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. reine angew. Math., 276 (1976) pp 148 - 166.

[2]. S. Iitaka, *On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 岩波書店 (1977), pp 175 - 189.

[3]. I. Wakabayashi, *On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\mathbb{P}^2$*, Proc. Japan Acad., 54 (1978), pp 157 - 162.

[4]. O. Zariski, *On the non-existence of curve of order 8 with 16 cusps.* Amer. J. Math., 53 (1931), PP 309 - 318.

1979, 1, 17.

追加.

33, 34ページについて，(ii)と(vi)の曲線について，$\bar{\kappa}=2$ となることが分りました．また次の事も定理Aの(イ)と同様にして成立することが分ります．

『既約曲線Cの特異点のうち重複度の一番大きいものの重複度を e とする時，$\deg C \geqq 3e$ なら，$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)=2$ となる．』

従って6次有理曲線で cusp 2個を持ち，各々の重複度が2の時は $\bar{\kappa}=2$ となる訳であるが，上に見た様に，cusp 2個で $\bar{\kappa}=2$ の例は5次曲線で，既に存在している．なお，4次で2個の cusp の時は $\bar{\kappa}=2$ となる事はない．

1979. 1. 29.