Coarse Moduli Space for Polarized Algebraic Manifolds

京大 教養　藤木 明

与えられたHilbert多項式 h をもつ偏極代数多様体の同値類の全体を M とする。M から，線織(ruled)多様体の同値類のある集合 R を除くと，その残り $M-R$ には自然に Q-多様体（あるいは Q-空間）の構造がはいる（松阪[8]+[9]）。（但し，標数零．）本稿では複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えた場合，$M-R$ には Artinの意味での algebraic space の構造がはいることを報告する．以下すべて $\mathbb{C}$ 上で考える．

§1. 偏極代数多様体とは，非特異連結射影代数多様体 X と X 上の ample 直線束 L との対 (X, L) である．二つの偏極代数多様体 (X, L) と (X', L') が同値とは，多様体の同形 $h: X \longrightarrow X'$ が存在し $L \equiv h^*L'$ (numerical equivalence) となるときをいう．（記号 $(X, L) \sim (X', L')$）．偏極代数多様体 (X, L) の Hilbert 多項式 $h(X, L)$ は通常の如く $h(X, L)(n) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(X, L^{\otimes n})$ (n 整数) で決まる多項式である．これは (X, L) の同値類のみに依存する．

今，多項式 h を固定する．Hilbert 多項式が h となるような偏極代数

多様体の同値類の全体を $M=M^h$ で表わす：

$$M=\{(X,L)\,;\,h=h(X,L)\}/\sim$$

このとき，coarse moduli の問題はごく大雑把に次のように述べられる．

<u>問題</u> M（ないし M の適当な部分集合）に '自然な' algebraic structure を入れよ．

ここで，'自然な' という言葉を明確にするためには，より正確に functorial な問題設定が必要であるが ここでは省略する．（Popp [12]，Def. 2.7，p21，を参照されたい．）さて M 全体に対しては上の問題の解がないことはすでに経験的にも知られており，M から適当に悪い集合を除く必要がある．実際，その悪い集合として線織（ruled）多様体ばかりからなるものがとれる，というのが冒頭の定理の内容である．再録すると，

<u>定理</u> M の部分集合 R で次の性質をみたすものが存在する．

1) $(X,L)\in R$ *) $\Rightarrow$ X ruled

2) $M-R$ には $\mathbb{C}$ 上有限型の algebraic space の構造がはいる．

より正確な形については §5 を参照．

<u>注意</u> 1. 不正則数 $q(X)=0$ の多様体に限れば，結果は Popp [12] により すでに得られている．2. 一般の場合の，問題の discussion については，Popp [12]，p26 および Seshadri [13]，p274 ff. を参照されたい．

---

*) (X,L) とその同値類を以後，同一視する．

証明は2段階にわかれる. すなわち、

Step 1. M−R に解析空間の構造がはいることを示す.

Step 2. この構造は $\mathbb{C}$ 上の algebraic space の構造からきていることを示す.

とくに証明は大いに解析的である. これに応じて以下、射影代数多様体は、対応する射影複素多様体と同一視し、すべて解析空間の圏で考える.

§2. 証明がどのような問題に帰着されるかをまず説明する. 出発点はもちろん松阪の'大定理'[8]である. 実際大定理の直接の帰結として次を得る.

命題1. 十分大なる任意の整数 n に対し、正整数 N と、$PGL(N+1)$−不変な Zariski 開集合 $U_0 \subseteq \mathrm{Hilb}\,\mathbb{P}^N$ ($\mathbb{P}^N$ の Hilbert スキーム) が存在し、次をみたす. $g: Y \to U_0$ ($Y \subseteq U_0 \times \mathbb{P}^N$) を universal family, H を $\mathbb{P}^N$ の hyperplane bundle とするとき、次が成立する. 1) g は smooth かつ fiber 連結, 2) 各 $u \in U_0$ に対し H の制限 H_u は Y_u 上 sufficiently ample, すなわち、$\Gamma(\mathbb{P}^N, H) \cong \Gamma(Y_u, H_u)$ かつ $H^i(Y_u, H_u^{\otimes m}) = 0$, $i, m > 0$, 3) 各 $u \in U_0$ に対し Y_u 上の直線束 H'_u が存在し、(イ) $(Y_u, H'_u) \in M$ かつ (ロ) $H_u'^{\otimes n} \cong H_u$, 4) 任意の $(X, L) \in M$ に対し $u \in U_0$ が存在し、$(X, L^{\otimes m}) \cong (Y_u, H_u)$ (偏極多様体としての同型).

3)により $\rho(u) = (Y_u, H'_u)$ は (well-defined な) 写像 $\rho: U_0 \to M$ を定める. 4)により、ρ は surjective である. 従って M は quasi-projective な

U_0 の，同値関係による商空間である．一方 PGL の U_0 への作用は明きらかに ρ の fiber を保ち，したがって ρ は $U_0 \to U_0/G \to M$ と分解される．つまり商空間をとる問題は，PGL による商の問題と，その残り，という2段階にわかれる．

アイデアは次の如くである．まず，次節で次を示す．M の部分集合 B が存在し，次をみたす．

1) $U := \rho^{-1}(B) \subseteq U_0 \subseteq \mathrm{Hilb}\,\mathbb{P}^N$ は Zariski 開集合，

2) $(X, L) \in M - B \Rightarrow X$ ruled

3) B には（必ずしも Hausdorff でない）解析空間の構造がはいる．

さらに B の定義から，U の開被覆 $\{U_i\}$ で，各 U_i は G-不変かつ，誘導された G の作用は各 U_i 上固有であるものが存在することがわかる．（U_i は一般に Zariski 開集合とはできない．）すると，（本質的に）Popp により，(cf. [12], Th.3.7)

<u>命題2.</u> U の G による商空間 $\bar{U} := U/G$ が locally separated algebraic space (of finite type over $\mathbb{C}$) の構造をもつ．

さらに誘導された写像 $\bar{\rho}: \bar{U} \to B$ は解析空間の固有正則写像になることがわかる．したがって，もし，$\bar{\rho}$ が flat であることが示されれば（$\bar{\rho}$ は surjective だから）'faithfully flat descent'（cf. Artin [1, Cor.6.3]）により，$\bar{U}$ の algebraic space structure が B の algebraic space structure を誘導することが示され，証明が終わる．（実際，n を適当にとると B は，$\bar{U}$ の

Hilbert 'scheme' Hilb $\bar{U}$ のある既約成分に一致する.) しかし, $\bar{P}$ が一般的に flat になることは, ちょっと想像し難い. そこで, もとの coarse moduli 問題そのものの設定を少し変更するわけであるが (5節参照), どのような変更を行なうべきかは, $\bar{P}$ の構造を調べることにより導かれる. 実際, 4節の主補題により与えられる $\bar{P}$ の(局所)構造が証明のもっとも本質的な部分である.

§3. 本節では,まず, B の定義を述べ, さらに B上の解析空間の構造を説明する. まず <u>用語</u>. <u>代数多様体の偏極族</u> とは, smooth な固有正則写像 $f: \mathcal{X} \to S$ と f の各 fiber 上 ample となる $\mathcal{X}$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ との対, $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$, である. 2つの偏極族 $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$ と $(f': \mathcal{X}' \to S, \mathcal{L}')$ が<u>同値</u>であるとは, S同型 $h: \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ が存在し, 各 s に対し, $(h^* \mathcal{L}')_s \equiv \mathcal{L}_s$ on $\mathcal{X}_s$, となるときをいう.

偏極族 $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$ に対し, 標準的な写像 $\eta = \eta(f, \mathcal{L}): S \to M$ が $\eta(s) = (\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s)$ により定まる. (但し, $h(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s) = h$, $^\forall s \in S$.) M の<u>標準位相</u>とは, 任意の $(f, \mathcal{L})$ に対し, 写像 $\eta(f, \mathcal{L})$ が連続になるような最強位相のこととする.

さて 次の命題が基本的である.

<u>命題3.</u> 任意の偏極代数多様体 (X, L) に対し, その(偏極)倉西

族 $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$, $X = \mathcal{X}_0$, $L \equiv \mathcal{L}_0$, $0 \in S$ が存在する.

このとき, $\eta(f, \mathcal{L})(S) = \bar{S} \subseteq M$ とおくと $\bar{S}$ は M の標準位相による $(X, L) \in M$ の開近傍になっている. したがって $\bar{S}$ に自然な解析空間の構造を入れることが問題となる. さて, 倉西族を用いて B を次の如く定義する. $p_i: S \times S \to S$, $i = 1, 2$, を i 番目への射影とし, $(f_i: \mathcal{X}_i \to S \times S, \mathcal{L}_i)$ を p_i による倉西族 $(f, \mathcal{L})$ の引き戻しとする.

$$I = \mathrm{Isom}_{S \times S}((\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), (\mathcal{X}_2, \mathcal{L}_2))$$

とおく. I は $I_{(s, s')} = \mathrm{Isom}((\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s), (\mathcal{X}_{s'}, \mathcal{L}_{s'})) := \{h: \mathcal{X}_s \cong \mathcal{X}_{s'}, h^*\mathcal{L}_{s'} \equiv \mathcal{L}_s\}$, $s, s' \in S$, なる $S \times S$ 上の解析空間である. 特に $I_{(0,0)} = \mathrm{Aut}(X, L) := \{h: X \cong X;\ h^*L \equiv L\}$. I は (X, L) のみに依存している.

<u>定義</u> $B = \{(X, L) \in M;\ I \to S \times S$ は $(0,0)$ の近傍で固有$\}$

B の性質 2) (2節参照) は次の命題で与えられる.

<u>命題4.</u> (松阪-Mumford [10]) $(X, L) \notin B \Rightarrow X$ ruled.

B に解析空間の構造を入れる際に次が基本的である.

<u>命題5.</u> (松阪 [9]) $(X, L) \in B$ ならば, その倉西族 $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$ に対し $d(s) = \dim H^0(\mathcal{X}_s, \Theta_{\mathcal{X}_s})$ は 0 の近傍で一定 (cf. [9, Cor. to Prop. 11). 但 $\Theta_{\mathcal{X}_s}$ は $\mathcal{X}_s$ 上の正則ベクトル場の層.

命題5 と Palamodov [11] (より簡単な証明も存在する) により,

<u>命題6</u>. $(X, L) \in B$ とし, $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$ をその倉西族とする. このと

き o に十分近い s に対し $(f, \mathcal{L})$ は $(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s)$ の倉西族を与える．

さて，以降，説明の簡略のため，すべて reduced category で考えることにする．たとえば 倉西族 $(f: \mathcal{X} \to S, \mathcal{L})$ とは，以後，これまでの $(f_{red}; \mathcal{X}_{red} \to S_{red}, \mathcal{L}_{red})$ とさす．(non-reduced の場合は話が本質的に複雑になる) さてこの約束のもとでは 命題4と Palamodov [11]-Wavrik により $(X, L) \in B$ の倉西族は局所モデュライ空間になっている．つまり，universal family になっている．したがって，今 $h \in Aut(X, L)$ を任意にとると $(f, \mathcal{L})$ の自己同型

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{h}} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow[\sim]{\bar{h}} & S \end{array} \quad , \quad \tilde{h}_o = h$$

で o の fiber 上 $\tilde{h}_o = h$ となるものが存在するが，$\bar{h}$ は h のみに依存して一意的に決まる．そこで，$\bar{h} = \tau_0(h)$ とおくと τ_0 は $Aut(X, L) \to Aut(S, o)$ なる準同型を定めるが，さらに $Aut_0 X \subseteqq Ker\, \tau_0$ が容易に示される．($Aut_0 X$ は単位元の連結成分)．故に

$$H = H(X, L) := Aut(X, L)/Aut_0 X$$

とおくと，H は $(X, L) \in B$ により有限群で(一般の $(X, L) \in M$ に対しても真だが) τ_0 は準同型

$$\tau : H \longrightarrow Aut(S, o)$$

を誘導する．

<u>命題7</u> $\tau = \tau(f, L)$ により自然に誘導される写像 $\bar{\tau} : S/H \to \bar{S}$ は

同相写像．しかも命題5の同一視に関し，Hの $s\in S$ での stabilizer H_s は $H(\mathcal{X}_s,\mathcal{L}_s)$ に一致する。

この命題により，任意の $(X,L)\in B$ に対し，その開近傍 $\bar{S}$ の解析空間の構造を $\bar{\eta}$ で定めれば，命題7の後半により，これらは大域的につながり B 全体の解析空間の構造を与える．

<u>注意</u> この節の結果はすべて偏極コンパクトKähler多様体に拡張できる．(cf. [2]) この際，命題3.4.5には方法的に全く異なった証明を要する．(命題4については[4]を参照)．

§4． 今 $(X,L)\in B$ を任意に固定し，$(f:\mathcal{X}\to S,\mathcal{L})$, $\mathcal{X}_0=X$, $\mathcal{L}_0\equiv L$, $0\in S$, を(X,L)の倉西族，$\eta: S\to\bar{S}\subseteq B$ を標準写像とする．$\bar{p}^{-1}(\bar{S})=U_{\bar{S}}$, $\bar{p}_{\bar{S}}=\bar{p}|_{U_{\bar{S}}}:U_{\bar{S}}\to\bar{S}$ とおく．目的は $\bar{p}_{\bar{S}}$ を (X,L)の倉西族 $(f,\mathcal{L})$ を用いて記述することである．

一般に偏極代数多様体 (Y,F) に対し

$$P^n(Y,F)=\{F'\in \mathrm{Pic}\,Y\,;\,F'\overset{a}{\sim}F^{\otimes n}\}$$

とおく．ここに $\mathrm{Pic}\,Y$ は Y のPicard多様体，$\overset{a}{\sim}$ は代数的同値を表す．$P^n(Y,F)$ は $\mathrm{Pic}\,Y$ の連結成分の和集合である．$P^n(Y,F)$ には自然に $\mathrm{Aut}_0 Y$ が作用する．$P^n(Y,F)$ の $\mathrm{Aut}_0 X$ による商空間を $\bar{P}^n(Y,F)$ と書く．これは再びアーベル多様体の disjoint union となる．さて，もとの倉西族 $(f:\mathcal{X}\to S,\mathcal{L})$ に戻って $P^n(f,\mathcal{L})$ を $P^n(f,\mathcal{L})=\bigcup_{s\in S}P^n(\mathcal{X}_s,\mathcal{L}_s)$

で定義すると、これは相対Picard多様体 $\mathrm{Pic}\,\mathfrak{X}/S$ の連結成分の和集合であり、S上の解析空間である。さらに、$\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{X}/S=\bigcup_{s\in S}\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{X}_s$ とおくと、$(X,L)\in B$ から、$\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{X}/S$ は S上固有な相対複素Lie群になり、$\mathrm{Pic}\,\mathfrak{X}/S$ に（S上相対的に）作用する。$\mathrm{Pic}\,\mathfrak{X}/S$ の $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{X}/S$ による（相対的）商空間を $\bar{P}^n:=\overline{P^n}(f,\mathcal{L})$ で表わす。$\bar{P}^n=\bigcup\bar{P}^n(\mathfrak{X}_s,\mathcal{L}_s)$ であり、S上固有な解析空間である。

<u>注意</u> n を適当にとれば $P^n(f,\mathcal{L})$, したがって $\bar{P}^n(f,\mathcal{L})$, は連結となる。実際、松阪の大定理により、$(X,L)\in B$ に対し、普遍的なこのような n がとれる。以後このような n を固定し $\bar{P}^n(f,\mathcal{L})$ を連結と仮定する。特に $\bar{P}^n(X,L)$ はアーベル多様体である。

さて $h\in\mathrm{Aut}(X,L)$ が与えられると (1) のような $(f,\mathcal{L})$ の自己同型 $(\tilde{h},\bar{h})$ が存在した。すると $(\tilde{h},\bar{h})$ は $P^n(f,\mathcal{L})\to S$ の自己同型

$$
\begin{array}{ccc}
P^n(f,\mathcal{L}) & \xrightarrow{P(\bar{h})} & P^n(f,\mathcal{L}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \xrightarrow{\bar{h}} & S
\end{array}
$$

を誘導し、さらに $\bar{P}^n(f,\mathcal{L})\to S$ の自己同型

$$
\begin{array}{ccc}
\bar{P}^n(f,\mathcal{L}) & \xrightarrow{\bar{P}(\bar{h})} & \bar{P}^n(f,\mathcal{L}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \xrightarrow{\bar{h}} & S
\end{array}
$$

をも誘導する．次が成立する．

<u>補題1.</u> h_1 を h の $H(X, L)$ における像とする．このとき $\bar{P}(\tilde{h})$ は h_1 のみにしか依存しない．つまり，$H(X, L)$ の $\mathcal{S}$ への作用は $\bar{P}^n(f, \mathcal{L})$ の作用に *lift* する．

すると，

<u>主補題</u> $\bar{P}_S : \bar{U}_S \to \bar{S}$ は誘導写像 $\beta : \bar{P}^n(f, \mathcal{L})/H(X, L) \to S/H(X, L)$ と自然に同型である．

β は smooth な写像を有限群でわったものであるから，一般的にこのようなものが *flat* であるとは期待し難い。しかし，次の補題を思い起こそう．

<u>補題2.</u> $g : \bar{P} \to T$ を解析空間の間の smooth 写像とする．いま有限群 H が，g が同変になるように，$\bar{P}$ と T に作用しているものとする．さらにある点 $0 \in T$ に対し H が $\bar{P}_0 (= g^{-1}(0))$ の点をすべて固定するとする．すると，誘導写像 $\bar{g} : \bar{P}/H \to T/H$ は $\bar{P}_0 = \bar{P}_0/H \ (\subseteq \bar{P}/H)$ に沿って smooth である．

したがって $H(X, L)$ が $\bar{P}^n(X, L)$ にたまたま自明に作用していれば，補題2と主補題により $\bar{P}_S$ は smooth となるわけである．そこでこれを一般に実現するために (X, L) だけでなく，さらに (X, L) の付加構造として，$\bar{P}^n(X, L)$ の *level* l 構造をもあわせ考えようというのが以下のアイデアである．

§5. 一般にアーベル多様体 A の level ℓ 構造とは1つの同型 $\varphi : H_1(A, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$ である. ただし, $g = \dim A$. 従って level ℓ 構造の全体は群 $K_\ell = GL((\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g})$ の principal homogeneous space である.

<u>定義</u> 偏極代数多様体 (X, L) の level ℓ 構造とは $\overline{P}^n(X, L)$ の level ℓ 構造 φ である.

level ℓ 構造 φ をもつ偏極代数多様体 (X, L) を triple (X, L, φ) で表わす. 2つの triple $(X, L, \varphi), (X', L', \varphi')$ の同値を普通に定義する. $M(\ell)$ で, このような triple の同値類のうち, その Hilbert 多項式が h となるものの全体を表わす; $M(\ell) = \{(X, L, \varphi); (X, L) \in M\}$. ここでもとの問題の variation として M のかわりに $M(\ell)$ に algebraic structure を入れる問題を考える. すでに注意したことからわかるように $M(\ell)$ には群 K_ℓ が作用し (free とは限らない), 自然写像 $M(\ell) \to M$ は群 K_ℓ による商になっている. したがって, ごく大雑把に考えると $M(\ell)$ に対する問題ができれば M に対してもほぼできる. もう少し正確には次の Deligne の補題に注意しておく.

<u>補題 (Deligne cf. [6])</u> N を separated な algebraic space, K を N に algebraic に作用する有限群とする. この時, N/K はやはり separated な algebraic space の構造をもつ.

さて, $M(\ell)$ を考えるために, 今度は triple (X, L, φ) に対し,

3, 4節と全く同様の構成を繰り返す. 詳しくは述べないが, 特に (X, L, φ) の倉西族 $(f : \mathcal{X} \to S, \mathcal{L}, \tilde{\varphi})$ が定まり, 集合 $B(\ell)$ が定義される. さらに $\rho : U \to B$, $\bar{\rho} : \bar{U} \to B$ に対応して $\rho(\ell) : U(\ell) \to B(\ell)$, $\bar{\rho}(\ell) : \bar{U}(\ell) \to B(\ell)$ が定まり, また一方 $H(X, L, \varphi) = \{h \in H(X, L) ; \bar{P}(\bar{h})^* \varphi = \varphi\}$ とおくと主補題に対応して, $\bar{\rho}(\ell)$ は $(X, L, \varphi) \in B(\ell)$ 上のファイバーに沿っては誘導写像

$$\bar{P}^n(f, \mathcal{L})/H(X, L, \varphi) \longrightarrow S/H(X, L, \varphi)$$

と同型であることがわかる. ところが,

<u>補題3.</u> 命題1の n を適当にとると, $\ell \geqq 3$ に対し $H(X, L, \varphi)$ の $\bar{P}^n(X, \mathcal{L})$ への作用は自明である.

故に補題2とあわせて望みの結果

<u>命題8.</u> $\bar{\rho}(\ell) : \bar{U}(\ell) \to B(\ell)$ は proper かつ smooth (特に flat) な正則写像である.

を得る. 最終的な結果を述べると次の如くである.

<u>定理.</u> 解析空間 B の separated Zariski 開集合の中に極大なものが有限個存在する. これらを $V_1, \cdots, V_m$ とすると, 1) 各 V_i は separated な $\mathbb{C}$ 上 finite type の algebraic space の構造を持ち, 2) $(X, L) \notin \bigcap_{i=1}^{m} V_i \Rightarrow X$ ruled, となる.

最初の定理の記号では $M - R \subseteq V_i$ for some i となっている.

一方, uniruled な多様体は変形不変であるから (cf. Fujiki [3], Levine [7]), この定理から

<u>定理</u> $A = \{(X, L) \in M ; X \text{ uniruled でない}\}$ とおくと A には Separated な algebraic space of finite type / $\mathbb{C}$ の構造がはいる.

Reduced でない一般の場合の定式化等詳しいことは [5] を参照されたい.

文献

1. Artin, M., Versal deformations of algebraic stacks, Inventiones math., 27(1974), 165-189.
2. Fujiki, A., コムパクト Kähler 多様体の偏極族のモヂュライ空間, 数理解析研究所講究録, 387 (1980), 1-16
3. Fujiki, A., Deformations of uniruled manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17(1981), 687-702.
4. Fujiki, A., A theorem on bimeromorphic maps of Kähler manifolds and its applications, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17(1981), 735-754.
5. Fujiki, A., Coarse moduli space for polarized compact Kähler manifolds and polarized algebraic manifolds, preprint.
6. Knutson, D., Algebraic spaces, Lecture Notes in Math., 203, 1971.
7. Levine, M., Deformations of uni-ruled varieties, Duke Math. J., 48 (1981), 467 – 473.
8. Matsusaka, T., Polarized varieties with given Hilbert polynomials, Amer. J. Math., 94(1972), 1027-1077.
9. Matsusaka, T., Algebraic deformations of polarized varieties, Nagoya J. of Math., 31(1968), 185-245.
10. Matsusaka, T. and Mumford, D., Two fundamental theorems on

deformatins of polarized varieties, Amer. J. Math., 86(1964), 668-684.

11. Palamodov, V. P., Moduli in versal deformations of complex spaces, In: Varietes analytiques compactes, Lecture Notes in Math., 683 , 1978, 74-115.

12. Popp, H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, Lecture Notes in Math., 620, 1977.

13. Seshadri, C.S., Theory of moduli, Proc. of Symp. in Pure Math., 29(1975), 263-304.