Kähler 多様体の Chow variety の Kähler 性
— J. Varouchas の紹介 — [10][11]

京大教養　藤木 明

§1. まず結果の紹介から初める.

(1.1) X を複素多様体とする. 整数 $g \geq 0$ に対し X 上のコムパクト g-サイクルとは形式的有限和 $\sum_i n_i A_i$ をいう; 但し n_i は正整数, A_i は既約かつコムパクトな X の g 次元解析的部分集合.

$B_g(X) = \{X$ 上のコムパクト g サイクル$\}$, $B(X) = \coprod_{g \geq 0} B_g(X)$

とおく. 次が知られている.

<u>定理</u> (Barlet [1]) $B(X)$ には自然な reduced 複素空間の構造がはいる.

<u>注</u>. より正確には, $B(X)$ は, 関手 $\mathcal{B}: (An)^{\circ} \longrightarrow (Sets)$, $\mathcal{B}(S) = \{S$ をパラメタ空間とする X 上のコムパクト g サイクルの正則族$\}$, を represent する.

$B(X)$ を X の <u>Chow variety</u> または <u>Barlet 空間</u>と呼ぶ.

(1.2) さて Varouchas の結果は次の如くである.

<u>定理</u>. X が Kähler 多様体ならば, $B(X)$ には Kähler (複素)空間の構造がはいる.

Kähler 空間の定義は §2 で復習することにして重要な系をまずのべる.

<u>系 1</u>　X を連結 Kähler 多様体, Y を正規複素空間とする. $f: X \to Y$ を上への固有正則写像で, $g = \dim X_y$ は y によらない, とする. このとき, Y も Kähler 空間である.

<u>証明</u>　$X_y := f^{-1}(y)$ の定義する X のコムパクト g サイクルを $[X_y]$ で表わすと, Y の正規性により (cf. [1]), $\{[X_y]\}_{y \in Y}$ は Y をパラメタ空間とする X 上のコムパクト g サイクルの正則族とみなしうる. $\tau: Y \to B_g(X)$ を universal map とすると明きらかに τ は injective であるが実は embedding であることが容易にわか

る．したがって Kähler 空間 $B(X)$ の部分空間として Y も Kähler.

<u>注</u>　Y が正規でないと系1は成立しない．(4.1)参照．

<u>例</u>　X を Kähler 多様体，G を X に正則に作用する有限群とする．$Y = X/G$ を商空間，$f: X \to Y$ を自然写像とする．f は明らかに系1の条件をみたすから Y は Kähler 空間である．たとえば Kähler 多様体 S の n 次対称積 $S^{(n)} := S \times \cdots \times S / n$次対称群 は Kähler 空間である．

(1.3)　コムパクト Kähler 多様体の bimeromorphic structure を調べるため筆者は [5] で class $\mathcal{C}$ の多様体の概念を導入した．

<u>定義</u>　X を reduced なコムパクト複素空間とする．このとき X が "クラス $\mathcal{C}$ に属する" とは，X があるコムパクト Kähler 多様体の有理型写像になっているときをいう．すなわち $X \in \mathcal{C}$ $\longleftrightarrow$ $\exists$ コムパクト Kähler 多様体 Z，$\exists$ generically surjective な有理型写像 $h: Z \to X$.

次の結果は当初から期待されていた．(cf. [5][7])

<u>系2</u>　X がクラス $\mathcal{C}$ に属するための必要(十分)条件は，X がコムパクト Kähler 多様体と双有理型同値であることである．

<u>証明</u>　定義にいう $h: Z \to X$ をとる．必要ならば Z を blow up して h は正則であるとしてよい。また既約成分ごとに考えて X は既約，Z は連結，としてよい。さて X の Zariski 開集合 U で $h|_{h^{-1}(U)}: h^{-1}(U) \to U$ が flat，(したがって特にファイバー次元 $g = \dim Z_x$, $x \in U$, は一定，)となるものをとる．系1の証明と同様に (U を縮めて smooth としてよい) 埋め込み $\tau: U \longrightarrow B_g(X)$ をうるが，τ は実は有理型写像 $\tau^*: X \longrightarrow B_g(Z)$ に拡張される．(たとえば flattening を用いる.)　τ^* の像は X と bimeromorphic な Kähler 空間である．(したがって X はその Kähler な非特異モデルとも bimeromorphic である．
q.e.d.

クラス $\mathcal{C}$ の多様体の性質の多くは定義そのものから導くことができるが，次はその例外の一つである．(cf. [7])

系2の系　X がクラス $\mathcal{C}$ の多様体で，$h^{2,0}(X) := \dim H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ をみたすならば X は Moishezon 空間である．

証明　"$h^{2,0} = 0$ なるコンパクト Kähler 多様体は射影的である" という Kodaira の定理と系2から直ちにしたがう．

(1.4)　関連した未解決の問題を述べておく．

問題　上記定理および系1において，X が必ずしも非特異でない複素空間の場合にも結果が成立するか．

一方類似の問題として次がある．

問題 (Hironaka [8])　Kähler 空間 X の Douady 空間 D_X は再び Kähler 空間となるか．特に $f: X \to Y$ を Kähler 空間 X から複素空間 Y への faithfully flat な正則写像とするとき Y は再び Kähler 空間か．

X が非特異かつ連結のとき後者はもちろん系1の特殊な場合である．ついでにこの問題の当然の一般化を記しておく．X を複素空間とし，$Coh(X) = \{X$ 上の解析的連接層$\}$，$Coh_0(X) = \{\mathcal{F} \in Coh(X)$；$\mathcal{F}$ の台コンパクト$\}$ とおく．任意の $\mathcal{E} \in Coh(X)$ に対し

$$Quot(\mathcal{E}/X) = \{\mathcal{F} \in Coh_0(X);\ \mathcal{F} \text{ は } \mathcal{E} \text{ の商層}\}$$

とおく．このとき $Quot(\mathcal{E}/X)$ には自然に(必ずしも reduced でない)複素空間の構造をもつ (Douady)．特に $Quot(\mathcal{O}_X/X) = D_X$ (X の Douady 空間) である．

問題　X が Kähler 空間のとき $Quot(\mathcal{E}/X)$ も Kähler 空間か．

(1.5)　上の問題を $B(X)$ の場合の結果に帰着させようとするのは自然であろう．関連した問題を一つ定式化しておく．$c = cycl: Coh_0(X) \to \prod B_g(X)$ を，任意の $\mathcal{F} \in Coh_0(X)$ に対し同伴なコンパクトサイクル $(\sum n_i^g A_i^g)_g$ を対応させる写像とする；ここに A_i^g は $\mathcal{F}$ の台の既約成分で g-次元のものの全体を動く．残念ながら $c|_{Quot(\mathcal{E}/X)}$ は一般に正則ではない．さて今 $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ を $D_{X,red}$ の既約成分の全体とし，部分集合 $\mathfrak{A}_g \subseteq \mathfrak{A}$ を，「$\alpha \in \mathfrak{A}_g$

$\longleftrightarrow$ $Z_d \subsetneq X$ を $d \in D_\alpha$ に対応する部分空間とするとき，d が一般なら Z_d は reduced かつ純次元 g」で定義する．$\overline{D}_g(X) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_g} D_\alpha$ とおく．このとき $\bar{c}_g := c|_{\overline{D}_g(X)} : \overline{D}_g(X) \to B_g(X)$ は正則写像となる (cf. [1])．特に $g = 0$ のときは，$B_0(X) = \coprod_{n \geq 1} X^{(n)}$，$X^{(n)} = X$ の n 次対称積，であるから，$X^{[n]} = \bar{c}_0^{-1}(X^{(n)})$ とおく．$\bar{c}_0^n : X^{[n]} \to X^{(n)}$ を誘導写像とする．

<u>問題</u> 任意の X に対し $\bar{c}_g$ は projective morphism か．（$\bar{c}_0^n$ についてもこれは明らかではない．）

<u>注</u>．X が非特異かつ，$\dim X = 2$ のときは，$X^{[n]}$ も非特異であることが知られている．一方 $\bar{c}_0^n$ の exceptional divisor が既約であるという Briançon (Inventiones math. 41) の結果を用いると $\bar{c}_0^n$ の projectivity が容易に示せる．したがって，この場合には，X が Kähler なら $X^{[n]}$ も Kähler である．

一般の Quot$(\mathcal{E}/X)$ の場合にも c の適当な variation を考えることにより，同様の問題を考えることは意味があろう．（X が projective の場合はその様な variation の1つが Fogarty (J. Reine Angew. Math.) に与えられている．）いずれにせよ次のような問題が基本的と思われる：問題．X を連結コムパクト複素多様体，$\mathcal{E}$ を X 上の局所自由連接層，r を正整数とする．このとき，$\mathcal{G}_r(\mathcal{E}) = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Quot}(\mathcal{E}/X);\ \mathcal{F}$ torsion free かつ階数 $r\}$ は Quot$(\mathcal{E}/X)$ の subspace として projective な連結成分をもつか？

(1.6) X がコムパクトのときは，上記の諸問題は，双有理型同値を modulo として（上の系2参照）正しい．すなわち

<u>定理</u> X をクラス $\mathcal{C}$ に属するコムパクト複素空間とする．このとき (i) $B(X)$ の各既約成分 B_r は再びクラス $\mathcal{C}$ に属する．(ii) 任意の $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X)$ に対し，Quot$(\mathcal{E}/X)_{\mathrm{red}}$ の各既約成分 Q_α は再びクラス $\mathcal{C}$ に属する．

証明については [5][6][4][9] を参照．また $\bar{c}$ (cf. (1.5)) が Moishezon，すなわち projective morphism と bimeromorphic であるこ

とは[6]Iの結果からしたがう.

(1.7) さて定理の証明は大きく次のIとIIの証明に分解する.

I. 複素空間Z上に連続Kählerコサイクルが存在すれば,Zは Kähler空間である.

II $B(X)$ 上には連続Kählerコサイクルが存在する.

これに応じて §3 でIの証明を §4 でIIの証明を述べる. §2では必要な諸定義を述べる.

§2. 本節では主にKähler空間及び連続Kählerコサイクルの定義を述べる(cf. (2.4)). 考える関数はすべて実数値とする.

(2.1) G を $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n(z_1, \cdots, z_n)$ の開集合, φ を G 上の C^∞ 関数とする. このとき:

φ が strictly plurisubharmonic (resp. plurisubharmonic, resp. pluriharmonic) $\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}$ φ のヘッシアン $H(\varphi) = (\partial^2\varphi/\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta)_{1 \le \alpha, \beta \le n}$ が各点で positive definite (resp. positive semidefinite, resp. $= 0$).

以後略して "φ は s. psh (resp. psh, resp. ph)" ということにする. 特に φ が ph. $\longleftrightarrow$ $\partial\bar{\partial}\varphi \equiv 0$ である. また $n = 1$ のときは psh は subharmonic function に他ならない.

psh の場合には条件はさらに次のように言いかえることができる: $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, $H(\varphi)(\lambda) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\beta \partial^2\varphi/\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta$, とおく. また, $C_0^+(G) = \{$台がコムパクトな G 上の非負 C^∞ 関数$\}$ とおく. すると, φ が psh $\longleftrightarrow$ $H(\varphi)(\lambda) \ge 0$, $\forall\lambda$, $\longleftrightarrow$ $\int_G H(\varphi)(\lambda) u \, dV \ge 0$, $\forall\lambda$, $\forall u \in C_0^+(G)$ $\underset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ $H(\varphi)(\lambda)$ は G 上の positive distribution (超関数). (但し dV は $\mathbb{C}^n$ の体積要素.) この関係を利用して定義を連続関数の場合に次のように拡張する.

(2.2) φ を G 上の連続関数とする. 特に φ は G 上の超関数とみなしうる. そこで:

φ が psh $\underset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}^n$ に対し $H(\varphi)(\lambda)$ が G 上の positive な超

関数．ただし $\partial^2\varphi/\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta$ は超関数の意味での導関数．

φ が s.psh $\overset{}{\underset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}}$ G 上の任意の C^∞ 関数 μ と G の任意の相対コムパクト開集合 V に対し正数 ε が存在し $\varphi+\varepsilon\mu$ は V 上 psh.

φ が ph $\underset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}$ $\pm\varphi$ が共に psh $\longleftrightarrow$ 超関数として $\partial\bar{\partial}\varphi=0$.
このとき，実は φ は C^∞ になる．

(2.3) Z を reduced な複素空間とする．Z の local chart とは，Z のある開集合 U から $\mathbb{C}^n$ の開集合 G への正則埋め込み $j: V \to G$，をいう．φ を Z 上の C^∞ 関数（resp. 連続関数）とする．このとき：

φ が s.psh（resp. psh，resp. ph）$\underset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}$ 任意の $z\in Z$ に対し，z の近傍 V，Z の local chart $j: V\to G\subseteq\mathbb{C}^n$，$G$ 上の C^∞ (resp. 連続) s.psh (resp. psh, resp. ph) ψ が存在し，$\varphi=j^*\psi$ となる．

psh はさらに次のように言いかえることができる．

<u>補題</u>　φ は Z 上連続とする．このとき φ が psh $\longleftrightarrow$ 単位円板 $H=\{|t|<1\}$ からの任意の正則写像 $h: H\to Z$ に対し $h^*\varphi$ は H 上 subharmonic.

必要性は明白で十分性は本質的に Fornaess-Narasimhan (Math. Ann. 248 (1980)) による．すなわち彼らは上の定義で ψ として必ずしも連続でない psh がとれることを示した．このとき ψ がさらに連続なものでおきかえられることは Richberg [12] による．

(2.4) <u>定義</u>　Y を reduced な複素空間とする．

(1) $\{U_i\}_{i\in I}$ を Y の開被覆，φ_i を U_i 上の C^∞ (resp. 連続) 関数，とする．このとき $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ が Y 上 C^∞ (resp. 連続) Kähler コサイクルであるとは，次の2条件 a) b) がみたされるとき：

a) φ_i は U_i 上 s.psh

b) $\varphi_i-\varphi_j$ は $U_i\cap U_j$ 上 ph.

(2) Y が Kähler 空間 $\underset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}$ Y 上に C^∞ Kähler コサイクルが存在する．

注　Y が複素多様体のときは，$\omega_i = \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_i$ は $\omega|_{U_i} = \omega_i$ により，Y 上の Kähler form ω を定める．（但し Kähler form = real, d-closed, positive (1,1)-form）逆に任意の Kähler form は，適当な C^∞ Kähler コサイクルからこのようにして得られる．すなわち，Y が Kähler 多様体 $\longleftrightarrow$ Y は非特異 Kähler 空間．

§3. (1.7) の I を X がコムパクトの場合に次の強い形で証明する．

定理 A　X をコムパクト reduced 複素空間とする．$\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i \in I$, を X 上の連続 Kähler コサイクルとする．このとき X 上の C^∞ Kähler コサイクル $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ で $U_i \cap U_j$ 上 $\psi_i - \psi_j = \varphi_i - \varphi_j$ をみたすものが存在する．

注　X がコムパクトでない場合でも，$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ を適当にこれにコホモローグなコサイクルでおきかえれば同じ結果が成立する．

(3.1)　証明は実は次の Richberg [12] の結果から formal にしたがう．

定理（Richberg）　U を reduced 複素空間，V, W, Ω を U の開集合で $V \subset\subset W \subset\subset U$（相対コムパクト）となるものとする．$\varphi$ を U 上の連続関数とする．φ は s.psh かつ Ω 上 C^∞ とする．このとき U 上の連続 s.psh ψ で $U - W$ 上 $\psi = \varphi$ かつ $V \cup \Omega$ 上 C^∞ となるものが存在する．

(3.2)　定理 A の証明．簡単のため I を有限集合とする．$I = \{1, \cdots, n\}$ としてよい．X の開集合 V_i, W_i, $1 \le i \le n$, を，$V_i \subset\subset W_i \subset\subset U_i$　$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$，となるようにとる．$A_0 = \phi$，$A_\nu = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$, $1 \le \nu \le n$, とおく．$A_n = X$ に注意する．

さて $0 \le \nu \le n$ に関する帰納法で次の条件 イ)－ハ) をみたす X 上の連続 Kähler コサイクル $\{(U_i, \varphi_i^\nu)\}_{i\in I}$ を構成する；

イ)　$\varphi_i^0 = \varphi_i$　（初期条件）

ロ)　φ_i^ν は $U_i \cap A_\nu$ 上 C^∞

ハ) $U_i \cap U_j$ 上 $\varphi_i^\nu - \varphi_j^\nu = \varphi_i - \varphi_j$.
実際このとき φ_i^n は $U_i = U_i \cap A_n$ 上 C^∞ となるから, $\psi = \varphi_i^n$ とおけば $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ が求めるコサイクルである.

さてすでに $\{(U_i, \varphi_i^{\nu-1})\}$, $1 \le \nu \le n$, が構成されているとする. まず $(\varphi_\nu^{\nu-1}, V_\nu \subset\subset W_\nu \subset\subset U_\nu, \Omega_{\nu-1})$ に Richberg の定理を適用すると(但し $\Omega_{\nu-1} = A_{\nu-1} \cap U_\nu$), U_ν 上連続な s. psh φ_ν^ν で, $U_\nu - W_\nu$ 上 $\varphi_\nu^\nu = \varphi_\nu^{\nu-1}$ かつ $A_\nu \cap U_\nu = \Omega_{\nu-1} \cup V_\nu$ 上 C^∞ となるものが存在することがわかる. すると, $\xi := \varphi_\nu^\nu - \varphi_\nu^{\nu-1}$ は $U_\nu - W_\nu$ 上 $\equiv 0$ であるから W_ν の外側で $\xi \equiv 0$ と定義することにより ξ を X 上の連続関数とみなせる. このとき U_i 上 φ_i^ν を

$$\varphi_i^\nu = \varphi_i^{\nu-1} + \xi$$

で定義する. (これは $i = \nu$ のとき上の定義と一致する.) ξ は i によらないから $\{\varphi_i^\nu\}$ がハ) をみたすことは明きらかである.

ロ) および "φ_i^ν が s. psh" をチェックする. $i = \nu$ に関してはこれは明白であるから $i \neq \nu$ とする. $U_i = (U_i \cap U_\nu) \cup (U_i - W_\nu)$ と考える. まず $U_i \cap U_\nu$ 上では $\varphi_i^\nu = (\varphi_i^\nu - \varphi_\nu^\nu) + \varphi_\nu^\nu$ で, $\varphi_i^\nu - \varphi_\nu^\nu$ は ph, 特に C^∞, で, φ_ν^ν は s. psh かつ A_ν 上 C^∞ だから φ_i^ν も s.psh かつ A_ν 上 C^∞. 次に $U_i - W_\nu$ 上では $\xi \equiv 0$ であるから $\varphi_i^\nu = \varphi_i^{\nu-1}$. 故に φ_i^ν は s. psh かつ $A_\nu \cap (U_i - W_\nu) = A_{\nu-1} \cap (U_i - W_\nu)$ 上 C^∞. q. e. d.

§4. (1.7) の II の証明の概略を述べる.

(4.1) 系1において応用上重要な場合として $f: X \to Y$ が有限次(分岐)被覆 (finite covering) となる場合がある. この場合は証明が本質的に簡単になるのでまずこれを独立に証明しておく. この場合は X は特異点をもってもよいことに注意する.

<u>命題A</u> X, Y と reduced かつ既約な複素空間, $f: X \to Y$ を finite covering とする. このときもし X が Kähler 空間で Y が正規ならば Y は再び Kähler 空間である.

<u>証明</u>　X既約，Yは正規であるから，finite ガロワ covering $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$，と正則写像 $h: \tilde{X} \to X$ が存在し $\tilde{f} = fh$ となる．Xと同様 $\tilde{X}$ も Kähler であるから f を $\tilde{f}$ でおきかえてはじめから f はガロワとしてよい．Gを f のガロワ群とする．

さてYの開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を適当にとって $\tilde{U}_i = \pi_i^{-1}(U_i)$ に対しX上の C^∞ Kähler コサイクル $\{(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}$ が存在するとしてよい．$\hat{U}_i$ はG-不変で $\hat{U}_i/G = U_i$ である．$\hat{\varphi}_i = \sum_{g\in G} g^*\varphi_i$ とおくと，$\hat{\varphi}_i$ はG-不変だから U_i 上の連続関数 φ_i で $\pi^*\varphi_i = \hat{\varphi}_i$ となるものが一意的に存在する．定理Aにより，(1) φ_i が s.psh，(2) $\varphi_i - \varphi_j$ が ph を示せばよい．明きらかに $\hat{\varphi}_i$ は s.psh で，$\hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_j$ は ph でである．すると (1) は φ_i の定義と補題から容易にしたがう．(命題Cの証明参照) もちろんYが非特異なら補題を用いる必要はない．(2) Yが非特異なら $\pi^*(\partial\bar{\partial}(\varphi_i - \varphi_j)) = \partial\bar{\partial}(\pi^*(\varphi_i - \varphi_j)) = \partial\bar{\partial}(\hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_j) = 0$ $\to \partial\bar{\partial}(\varphi_i - \varphi_j) = 0$，でよい．一般の場合は，「ph $\longleftrightarrow$ 正則関数の実部」なる関係と，$\pi_*^G \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$ (π_*^G = G-不変 direct image) を思い合わせればよい．

<u>注</u>　既約性は実際は不要である．またYが正規でないと(よく知られているように) 命題は成立しない．例：$X = \mathbb{P}^2$，ℓ を $\mathbb{P}^2$ の line，Cを $\mathbb{P}^2$ の非特異 conic とする．同型 $\varphi: \ell \xrightarrow{\sim} C$ をとる．Yを，Xにおいて ℓ とCを φ により同一視して得られる非正規複素空間とすると，Yは Kähler でない．(ℓ の像はホモロージ 0 になっている．)

(4.2) 一般の場合はまず次の命題を示す．

<u>命題B</u>．Xを複素多様体，AをXの g 次元コムパクト解析的部分集合とする．

(1) α をX上の実，d-closed，C^∞，$(g+1, g+1)$-form とする．このときAの近傍Uと，U上の実，C^∞，(g,g)-form β が存在し，$\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\beta$ と書ける．

(2) γ をX上の実，C^∞，(g,g)-form で $\partial\bar{\partial}\gamma = 0$ をみたすものと

する．この時 A の近傍 U と U 上の C^∞, (q,q)-form γ_1, γ_2 で，$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\partial\gamma_1 = \bar\partial\gamma_2 = 0$，をみたすものが存在する．

<u>証明</u> (1) U を A の管状近傍とする．特に $H^{2q+2}(U, \mathbb{R}) \cong H^{2q+2}(A, \mathbb{R}) = 0$ である．したがって $\alpha = d\gamma$ となる実 C^∞ $(2q-1)$ form γ が存在する．γ の (s,t) 成分を $\gamma_{s,t}$ で表す．一方 $\dim A = q$ であるから Reiffen (C. R. Acad. Sci. 259 (1964)) により，任意の $s > q$ に対し $\varinjlim_{A \subseteq U} H^s(U, \Omega_X^{2q+1-s}|_U) \cong H^s(A, \Omega_X^{2q+1-s}|_A) = 0$，である．これと Dolbeault 同型とを用いて s に関する descending induction で次を示すのは容易である：「U と γ をとりかえて，$\gamma_{s,2q+1-s} = 0$, $q+2 \leq s \leq 2q+1$，とできる」 つまり $\gamma = \gamma' + \bar\gamma'$, $\gamma' = \gamma_{q+1,q}$，としてよい．するとさらに同じ論法で，適当 C^∞, (q,q)-form β' をとれば $\gamma' = \partial\beta'$ とできる．然らば $\beta := (1/\sqrt{-1})(\beta' - \bar\beta')$ が命題の条件をみたす．(2) の証明も同様である．　q. e. d.

<u>注</u> §1 の定理で，「X：非特異」の仮定を用いるのはここだけである．（明らかに，X が特異点をもつ場合には上の議論は適用できない — Poincare，および Dolbeault の補題を用いている．）したがって命題が一般の場合に成立すれば定理もまた正しい．

(4.3) 次に (4.2) を用いて系 1 の直接証明をしておく．まず次の一般的な結果に注意する (cf. King, Acta Math. 127, (1971))．

<u>命題 C</u> $f: X \to Y$ を reduced な複素空間の間の固有写像とし，$q = \dim X_y$ は y によらないとする．さらに Y は正規とする．β を任意の X 上の連続 (q,q)-form とし $\lambda(y) = \int_{[X_y]} \beta_y$ とおく．このとき次が成立する：

(1) $\lambda(y)$ は Y 上連続

(2) $\partial\beta = 0$ (resp. $\bar\partial\beta = 0$) ならば $\partial\lambda = 0$ (resp. $\bar\partial\lambda = 0$)，したがって特に λ は C^∞.

(3) $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\beta$ が Lelong の意味で positive (たとえばある Kähler form ω に対し $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\beta = \omega^{q+1}$) なら $\lambda(y)$ は Y 上 psh.

注 'King'では(3)において「Y：非特異」を仮定しているが、補題により一般の場合は非特異な場合に帰着できる。

系1の証明 ω を X 上の Kähler form とし $\alpha = \omega^{q+1}$ とおく。命題Bにより任意の $y \in Y$ に対し、近傍 V と $U := f^{-1}(V)$ 上の C^∞ (q,q)-form β をとって $\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\beta$ とできる。このとき $\varphi_V(y) = \varphi_V^\beta(y) := \int_{[X_y]} \beta_y$ は命題Cにより V 上の連続関数である。さらに任意の V 上の C^∞ 関数 μ と任意の V の相対コンパクト開集合 V' に対し ε を十分小にとると $\beta' = \beta + \varepsilon (f|_U)^*\mu\, \omega^q$ は $f^{-1}(V')$ 上 (Lelong) positive になる。故に $\varphi'_V(y) := \int_{[X_y]} \beta'_y$ は命題Cにより psh である。一方 $d = \int_{[X_y]} \omega_y^q$ は y によらない定数で、$\varphi'_V(y) = \varphi_V(y) + \varepsilon d \mu$ である。よって φ_V は V 上 s.psh である。

次に β' を $\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\beta'$ なる別の (q,q)-form とし、$\gamma = \beta - \beta'$ とおくと U 上 $\partial\bar\partial\gamma = 0$. V を縮めて $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, γ_i: (q,q)-form, $\partial\gamma_1 = 0$, $\bar\partial\gamma_2 = 0$, としてよい。(命題B) 故に命題Cにより $\varphi_V^\beta(y) - \varphi_V^{\beta'}(y) = \int_{[X_y]} \gamma_y = \int_{[X_y]} \gamma_{1,y} + \int_{[X_y]} \gamma_{2,y}$ は ph. 以上から Y 上に連続 Kähler コサイクルを構成することができる。定理Aから系1がしたがう。

(4.4) 最後に一般の場合、つまり定理、の証明を命題Cに対応する Barlet の結果に帰着させておく。

まず任意の $b \in B_q(X)$ に対し $C(b)$ で対応する X のコンパクト q-サイクルを表し、$|C(b)|$ でその underlying な analytic subset を表す。$\alpha = \omega^{q+1} = \omega\wedge\cdots\wedge\omega$ ($q+1$個) とおく。命題Bにより任意の $b \in B_q(X)$ に対し $|C(b)|$ の近傍 U と U 上の実, C^∞, (q,q)-form β が存在し $\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\beta$ と書ける。b の近傍 V を適当にとると任意の $b' \in V$ に対し $|C(b')| \subsetneq U$ となる。V 上の関数 φ_V^β を $\varphi_V^\beta(v) = \int_{C(v)} \beta$ (サイクル $C(b)$ 上での β の積分) とおく。すると φ_V^β は、V 上の連続関数である。(cf. [2][5]) 一方 $\alpha = \sqrt{-1}\,\bar\partial\partial\beta'$ となる別の実, C^∞, (q,q)-form をとり $\gamma = \beta - \beta'$ とおく。$\varphi_V^{\beta'}$, φ_V^γ を φ_V^β と同様に定義する。然らば示すべきことは、系1の証明の場合と同様に、「φ_V^β が s.psh」および「φ_V^γ が ph」の2つである。実

際これらは命題Cに対応するBarletの結果 (cf. [3]) からしたがう。 ただし，b が $B_g(X)$ の正規点ならば，主張は命題Cのみから次のようにして得られる。 $Z_g(X) \subseteq B_g(X) \times X$ を universal cycle を表す解析的部分集合，$f_g : Z_g(X) \to B_g(X)$, $\pi_g : Z_g(X) \to X$ を自然射影とする。 X 上の C^∞ form δ に対し，$\tilde{\delta} = \pi_g^* \delta$ と書く。 この時，f_g, V, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$ 等に系1の議論を適用すれば，($\tilde{\alpha}$ はやはり Lelong positive) 望みの主張をうる。

文　献

[1] Barlet, D., Espaces analytiques réduit des cycles analytiques complexes de dimension finie, Sem. F. Norguet, Lecture Notes in Math., 482, (1975), 1-158.

[2] Barlet, D., Familles analytiques des cycles et classes fondamentales relatives Sem. F. Norguet, Lecture Notes in Math., 807 (1977-79), 1-24.

[3] Barlet, D., Convexité de l'espaces des cycles, Bull. Soc. Math. France, 106 (1978), 373-397

[4] Campana, F., Algébricité et compacité dans l'espaces des cycles d'un espace analytique complexe, Math. Ann., 251 (1980), 7-18.

[5] Fujiki, A., Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 14 (1978), 1-52.

[6] Fujiki, A., On the Douady space of a compact complex space in the category $\mathcal{C}$, Nagoya Math. J., 85 (1982), 189-211, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20,

[7] Fujiki A., On a compact complex manifold in $\mathcal{C}$ without holomorphic 2-form, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19 (1983), 193-202.

[8] Hironaka, H., Fundamental problems on Douady spaces, Report of the symposium at Kinosaki, 1977, 253-261

[9] Liebermann, D., Compactness of Chow scheme; Seminaire F. Norguet, Lecture Notes in Math., 670 (1978), 140-186

[10] Varouchas, J., Stabilités des variétés Kähleriennes par certains

morphismes propres, to appear.

[11] Varouchas, J., On the image of a compact Kähler manifold under a holomorphic mappings, to appear

[12] Richberg, R., Stetige streng pseudokonvexe Funktionen, Math. Ann., 175, (1968), 257-286.