代数曲面上の商特異点の数について

都立大学・理　宮岡洋一

§1. 序 — 超曲面上の有理二重点.

複素数体上定義された正規かつ準射影的代数曲面 X の特異点集合は有限であるが，その個数を X の不変量を用いて実際に評価しようと思うと自明なものを除き意外に難しい。本稿では，X が商特異点(=有理特異点)しかもたない場合に，X の極小特異点解消 $\tilde{X}$ の不変量で特異点の個数を上から評価することを考える。

X が $\mathbb{P}^3$ の中の有理二重点のみを含む d 次曲面のときは古典的問題である。d 次曲面のもちうる有理二重点の最大個数を $\mu(d)$ とおこう。明らかに $\mu(1)=0$, $\mu(2)=1$ である。また双対曲面 $X^* \subset (\mathbb{P}^3)^*$ を考察することで，$\mu(3)=4$ (Cayley)，$\mu(4)=16$ (Kummer 1864) が示された。ところが $d \geqq 5$ になると，$\mu(d)$ を求めるのは急に困難になる。$\mu(5)=31$ が証明されたのはつい最近のことであった(Beauville 1977)し，$\mu(6)$ はまだ求められていない。当然，$\mu(d)$ の漸近的挙動をしらべよ，との問題が生じてくる。言いかえれば，$\mu(d)$ を上下から適当な d の関数で評価せよ，ということである。

無論，$\mu(d) \leqq h^{1,1}(\tilde{X}) - 1 = \frac{1}{6}d(5d^2-18d+25) \sim \frac{5}{6}d^3$ が成立する($\tilde{X}$ は X の極小特異点解消)わけであるが，この評価は実際の $\mu(d)$ の上限からはかなりかけ離れていることが認識され精度をあげる試みが種々なされてきた。就中，Segre は 1946 年 $\mu(d) \leqq \binom{d+2}{3} - 4$ という(驚くべき)主張を展開した。$\mathbb{P}^3$ の線型系 $|dH|$ の元が 1 個有理二重

点をもつ条件が余次元1であることからの推論であるが，有理二重点をたくさん含むような曲面は非常に特殊な形をしているはずであり，したがって特異点の位置関係も複雑にからみあっているだろうと想像されるから，Severiのような楽天的推測は許されない。実際，翌1947年になると，Segreが，dが偶数なら十分多くのパラメーターつきで $\frac{1}{4}d^2(d-1)$ 個二重点をもつd次曲面の族が作れることを示した。構成は簡単であって，$L_1,\cdots,L_{d/2}$，$M_1,\cdots,M_d$ を$(z_0,\cdots,z_3)$に関する一般の斉一次式とすれば，曲面

$$L_1^2L_2^2\cdots L_{d/2}^2 = M_1\cdots M_d$$

は上記の数の通常二重点をもつ。Catanese によると，Segreの作った族をさらに特殊化することで，

$$\mu(d) \geqq \frac{1}{3}d^3 + O(d^2)$$

ということまで言えるらしい。

ともかく，Severiのような誤ったものを除くと，興味深いことに $\mu(d)$ の上からの評価は，Basset (1904) から Bruce (1980) に至るまで常に

$$\mu(d) \leqq \frac{1}{2}d^3 + O(d^2)$$

の形をしている。主要項の係数 $\frac{1}{2}$ は双対曲面理論を用いることからくる自然な限界であるらしい。

一方，後述するように，一般の曲面に対する我々の定理をXが$\mathbb{P}^3$のd次超曲面になっている場合に適用すると，

$$(1)\qquad \mu(d) \leqq \frac{4}{9}d(d-1)^2$$

が得られ，超曲面としてのXの性質をすべて捨象しているにもかかわらず，今までのところ最良の結果になっているのである。評価式(1)の右辺と，Kreis，Gallarati，Catanese－

Cesena によって構成された特異点をたくさん含む例をと比較してみると次の表になる。

d	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu(d)$	16	31	≥ 64	≥ 90	≥ 160	≥ 160	≥ 325	≥ 300	≥ 576
$\left[\frac{4}{9}d(d-1)^2\right]$	16	36	66	112	174	256	360	488	645

§2、主要定理。

主定理を述べる前に記号 ν, δ を導入しよう。以下 X は準射影的で、その特異点はすべて孤立商特異点と仮定する。X の特異点 p の解析的近傍の芽 $X_p \cong (\mathbb{C}^2/G_p)_0$ の極小特異点解消を $\tilde{X}_p$, $e(\tilde{X}_p)$ を $\tilde{X}_p$ の位相的 Euler 数としたとき,

$$\nu(p) = e(\tilde{X}_p) - \frac{1}{|G_p|} \quad \left(\geq \frac{3}{2}\right)$$

とおく。また $\tilde{X}_p$ 上の例外曲線 $E = \bigcup E_i$ に対して, $K_{\tilde{X}_p} \approx \sum \alpha_i E_i$ (α_i は有理数) と書いたとき,

$$\delta(p) = -K_{\tilde{X}_p}^2 = -\left(\sum \alpha_i E_i\right)^2$$

と定義する。X の射影的完備化 X' で, $\mathrm{Sing}\, X = \mathrm{Sing}\, X'$, かつ $D = X' - X$ が正規交叉因子となるようなものを一つ選んでおいて, $\tilde{X}'$ をその極小特異点解消とする。以上の約束のもとで、次の定理が成立する。

<u>定理。$\tilde{X}'$ 上の階数2のベクトル束</u> $\mathcal{F} \subset \Omega^1_{\tilde{X}'}(\log D)$ <u>が以下の条件をみたすと仮定する。</u>

<u>条件</u> a. <u>特異点の逆像</u> $E \subset \tilde{X}'$ <u>の上の点では,</u>

$$\mathcal{F}_x = \Omega^1_{\tilde{X}}(\log D)_x = \Omega^1_{\tilde{X},x}.$$

条件 6. det $\mathcal{F}$ は藤田の意味で pseudo-effective と

すると，$\mathcal{F}$ の Chern 数 $c_1^2(\mathcal{F})$，$c_2(\mathcal{F})$ は不等式

(2) $$3\{c_2(\mathcal{F}) - \sum \nu(P)\} \geqq c_1^2(\mathcal{F}) + \sum \delta(P)$$

をみたす。

特に $\mathcal{F} = \Omega^1_{\tilde{X}}(\log D)$ のときは，

系 1. $\bar{\kappa}(\tilde{X}) \geqq 0$ ならば，

(3) $$3(c(\tilde{X}) - \sum \nu(P)) \geqq (K_{\tilde{X}} + D)^2 + \sum \delta(P).$$

さらに，$X = X'$ で X の特異点はすべて有理二重点，すなわち $\delta(P) = 0$ と仮定すると

(4) $$\sum \nu(P) \leqq c(\tilde{X}) - \frac{1}{3}K_X^2$$

である。$\nu(P) \geqq 3/2$ を用いれば，

系 2. X は射影的で有理二重点のみをもち，$\kappa(X) \geqq 0$ とすると，X の特異点の個数は

$$\frac{2}{9}(3c_2(\tilde{X}) - K_X^2) = \frac{8}{9}(9\chi(\mathcal{O}_X) - K_X^2)$$

で上からおさえられる。

X が d 次曲面のときは系 2 は §1 の不等式 (1) を与える。

定理の証明方針は筆者の以前の論文（Inv. Math. 42 (1977) p. 225→238）と本質的には同一であり，また Math. Ann. に近日掲載の予定なので，特に興味を持たれる方はそちらを参照していただくことにするが，定理の意味だけは簡単に説

明しておこう。

$X_p = Z_p/G_p$ とおこう。すなわち $Z_p - p$ は $X_p - p$ の普遍被覆面，G_p は $X_p - p$ の基本群である。すると，Z_p に $|G_p|$ 重に覆われることから期待される Euler 数 $\frac{1}{|G_p|}e(Z_p)$ $1/|G_p|$ と，現実の $\tilde{X}_p$ の Euler 数 $e(\tilde{X}_p)$ とのズレが $\iota(p)$ である。また $K^2_{\tilde{X}_p}$ と $K^2_{Z_p}$ の差を表すのが $\delta(p)$ である。$\mathcal{F}$ は $\tilde{X}_p$ 上では Ω^1_X と一致しているのだから，$e(\tilde{X}_p)$ および $K^2_{\tilde{X}_p}$ は，各々 $c_2(\mathcal{F})$, $c_1^2(\mathcal{F})$ への p における局所的寄与と考えられる。特に，$X = Z/G$ と大域的に書けている場合は，(2) は

$$(5) \qquad 3c_2(Z) \geq c_1^2(Z)$$

と本質的に同等である。つまり，定理では，X があたかも大域的に商多様体 Z/G になっているかのように考えて (5) が適用でき，かつまた X は非 compact であってもかまわない，ということを主張しているのである。

逆に，(5) と (2) との同等性を逆に考えれば，Z を単位球 $B = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < 1\}$ を普遍被覆面とするような準射影的多様体 $X = Z/G$ （G は有限群），$\mathcal{F} = \Omega^1_X(\log D)$ としたとき，(2) (3) は等式になる。したがって，不等式 (2) (3) をこれ以上改良することは一般にはできない。

§3. 応用例.

定理は種々の応用をもつが，ここでは代表的なものを二つ挙げておく。

A. 一般型曲面上の非特異有理曲線

非特異代数曲面 X が非特異有理曲線 C を含んでいるものとする。$K_X C = d$ とおくと，adjunction formula より $C^2 = -d-2$ で，$K(X) \geq 0$ なら $C^2 < 0$ となる。このとき，C を一点 p に縮めてできる曲面 X' は正規かつ影的であって，

$$\nu(P) = \frac{2d+3}{d+2}$$
$$\delta(P) = \frac{d^2}{d+2}$$

である。(3) を用いると，

$$(6) \qquad \frac{(d+3)^2}{d+2} \leqq 3c_2(X) - c_1^2(X)$$

となって，X を一つ定めておけば，d は C によらず有界である。よって Hilbert 概型の理論より，

<u>命題</u>　<u>一般型代数曲面 X は高々有限個しか $\mathbb{P}^1$ を含まない。</u>

これは $K(X) \leqq 1$ の場合と非常に異るところである。
また，$K(X) \geqq 0$ なら (6) の左辺は 4 以上，さらに X が極小と仮定すると左辺は $9/2$ 以上であることから，

<u>命題</u>　a) <u>$K(X) \geqq 0$ かつ $3c_2(X) = c_1^2(X)$ ($\Leftrightarrow K_X^2 = 9\chi(\mathcal{O}_X)$) ならば X は非特異有理曲線を含まない。特に X の普遍被覆は $\mathbb{C}^2$ か単位球 $\mathbb{B}$ のいずれかである。</u>

b) <u>$3c_2(X) = c_1^2(X) + 4$ ($\Leftrightarrow K_X^2 = 9\chi(\mathcal{O}_X) - 1$) のとき，$K(X) \geqq 0$ かつ X が極小なら，X 上には $\mathbb{P}^1$ は存在しない（例：$K_X^2 = 8$, $p_g = q = 0$）。</u>

B. $\mathbb{P}^3$ 内の d 次曲面上の直線

X を $\mathbb{P}^3$ の中の非特異 d 次曲面 $(d \geqq 4)$ とし，X に乗っているいくつかの直線の和集合を L と書く。重複度3以上の L の点全部で X に二次変換を施したものを $\tilde{X}$ とすると，L の strict transform $\tilde{L} \subset \tilde{X}$ は正規交叉因子となる。$\mathcal{F} = \Omega^1_{\tilde{X}}(\log \tilde{L})$ に対して定理を適用すると，

$$3\{e(\tilde{X}) - e(\tilde{L})\} \geqq (K_{\tilde{X}} + \tilde{L})^2$$

となる。さて，L の既約因子の数を l，m 重点の数を $k(m)$ とおくと，

$$e(\tilde{X}) = e(X) + \sum_{m \geqq 3} k(m),$$
$$e(\tilde{L}) = 2l - k(2),$$
$$(K_{\tilde{X}} + \tilde{L})^2 = (K_X + L)^2 - \sum_{m \geqq 3} (m-1)^2 k(m).$$

一方 L の各既約成分 L_i $(i \leqq l)$ に対しては，$L_i K_X = (d-4)$，$L_i^2 = (2-d)$，$2\sum_{i<j} L_i L_j = 2\sum_{m \geqq 2} \binom{m}{2} k(m)$ となって，結局

$$(K_{\tilde{X}} + \tilde{L})^2 = K_X^2 - 2l + 2k(2) + \sum_{m \geqq 3} (m-1) k(m)$$

を得る。よって，

$$4l - k(2) + \sum_{m \geqq 3} (m-4) k(m) \leqq 3c_2(X) - K_X^2$$
$$= 2d(d-1)^2$$

であり，X 上の直線の配置は特殊な組合せ論的条件をみたす。

一方 L が非特異，すなわち相交らない直線の和集合となっているときは，L の各成分を一点に縮めた曲面に定理を用いると，

$$l \frac{(d-1)^2}{d-2} \leqq 3c(X) - K_X^2 = 2d(d-1)^2$$

すなわち

(7) $$\ell \leqq 2d(d-2) \sim 2d^2.$$

なる ℓ の評価式がでてくる。有理二重点と違い，d 次曲面上の相交らない直線の数は d に関して 2 次程度しか大きくなれない。

文献

$\mathbb{P}^3$ の d 次曲面上の有理二重点の数については，

A.B. Basset, The maximum of double points on a surface, Nature, 73 (1906),

F. Severi, Sul massimo di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario e di una forma di un iperspazio, Annali di Mat. 25 (1946)

B. Segre, Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine, Boll. U.M.I. 2 (1947)

W. Bruce, The maximum number of singularity on a hypersurface, Bull. London Math. Soc. (1980)

等を参照のこと。