高次元の extremal ray について

東大理　安藤哲哉

§0　序

以下基礎体 k は標数 0 の代数閉体とする。多様体はすべて射影的とする。今 X は非特異で、その canonical divison K_X は not nef とする。すると extremal curve ℓ が存在する。(定義は §1 を見よ。) 任意の extremal curve ℓ をひとつ fix した時、森，川又，Shokurov 等の理論により，extremal ray $R = \mathbb{R}_+[\ell]$ の contraction と呼ばれる射 $f: X \longrightarrow Y$ が存在して次の性質をみたす。

(i)　X 内の curve Z につき，$f(Z)$ が一点 $\Leftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$，

(ii)　Y は projective, normal で $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$．

(iii)　$0 \longrightarrow \operatorname{Pic} Y \xrightarrow{f^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{(\cdot \ell)} \mathbb{Z}$　は exact.

このような contraction $f: X \longrightarrow Y$ の形は 3 次元以下の時は森 [1] によって分類されている。この小論では，4 次元以上の場合の f の構造を調べる。§1 では，定義と §2 以下の議論に必要な知られている結果を簡単に述べ，§2 では，f が birational な場合の構造について，§3 では，$\dim Y < \dim X$ の場合の構造について考察する。§4 では，§1 に述べる contraction theorem の 4 次元の場合への Riemann-Roch を用いた古い証明を付記しておく。

§1.　定義と知られている結果

k は標数 0 の閉体，X は k 上の非特異射影多様体とする。以下に述べる結果は，すべて高々 canonical singularity をもつ多様体の場合に拡張されているが，これに関しては，本報告集の中の川又氏の論文を参照されたい。ここでは，最小限必要な

弱い形で述べる。

<u>Notation</u> $N^1(X) := \{\text{Cartier divisor on } X\}/\equiv \otimes \mathbb{R}$
$N_1(X) := \{\text{1-cycle on } X\}/\equiv \otimes \mathbb{R}$

ただし $\equiv$ は numerical equivalence をあらわす。$N^1(X)$ と $N_1(X)$ は，intersection pairing によって互いに dual vector space になっている。これらには，自然に位相を入れておく。

$\overline{NE}(X) :=$ $N_1(X)$ 内で effective 1-cycle で生成される convex cone の closure.

<u>定義</u>. Cartier divisor D が nef とは任意の curve Z に対し，$(D \cdot Z)_X \geq 0$ となること。

1-cycle Z が nef とは任意の effective Cartier divisor D に対し，$(D \cdot Z)_X \geq 0$ となること。

D が nef のとき，D の numerical Kodaira dimension $\kappa_{num}(D)$ (又は $\sigma(D)$ と書く) とは，$\kappa_{num}(D) := \max\{d \mid D^d \not\equiv 0\}$ のこと。一般に，$\kappa(D) \leq \kappa_{num}(D) \leq n$ $(n = \dim X)$ が知られている。

D が big とは $\kappa(D) = n$ となること。

特に D が nef のとき，D が big $\Leftrightarrow$ $\kappa_{num}(D) = n$ である。

Linear system が free とは，fixed component も base point ももたないことをいう。

$|mD|$ が free $({}^\exists m > 0)$ ならば，$\kappa(D) = \kappa_{num}(D)$ である。

<u>定義</u>. curve ℓ が extremal であるとは，

(i) $(K_X \cdot \ell)_X < 0$

(ii) $A, B \in \overline{NE}(X)$ が $A + B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ をみたすとき，必ず $A, B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ となることをいう。ただし $\mathbb{R}_+[\ell]$ は，ℓ の numerical class $[\ell]$ が vector space $N_1(X)$ 内で張る半直線をあらわす。

<u>定義</u>. ℓ が extremal curve の時，Cartier divisor H が，ℓ の good supporting divisor であるとは

(i) H は nef,

(ii) 任意の $Z \in \overline{NE}(X)$ につき，$(H \cdot Z)_X = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$.

以上のnotationのもとに、基本的な定理をいくつか述べる。

<u>定理1.1</u>（Base point free theorem：川又, Shokurov）
H はnef, $aH-K_X$ はnef and big（$^\exists a>0$）とすると、全ての十分大なる m について、$|mH|$ はfreeとなる。

<u>定理1.2</u>（Cone theorem：森）　$\overline{NE}(X)$ は $\{z\in N_1(X) \mid (K_X\cdot z)<0\}$ なる半空間において、locally polyhedralである。

<u>系1.3</u>　任意のextremal curve ℓ について、必ずgood supporting divisor H が存在して、さらに次の性質をみたす。

(i)　E を $(E\cdot\ell)_X>0$ となる任意のCartier divisorとすると、$^\forall m\gg 0$ について、$mH+E$ はample. 特に
$$H^i(X, mH+E)=0 \quad (\text{for } i>0,\ m\gg 0).$$

(ii)　$H^i(X, mH)=0 \quad (\text{for } i>0,\ m\gg 0)$.

(iii)　m を十分大にとり、$f: X \dashrightarrow Y$ を $|mH|$ から定まるrational mapとすると、f はmorphismとなり、f は $\mathbb{R}_+[\ell]$ のcontractionを定める。すなわち、

(iii-1)　X 内のcurve Z に対し、$f(Z)$ が一点 $\Leftrightarrow$ $Z\in\mathbb{R}_+[\ell]$.

(iii-2)　Y はprojective, normal, $f_*(\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_Y$, $R^if_*\mathcal{O}_X=0$ $(i>0)$.

(iii-3)　$0 \to \operatorname{Pic} Y \xrightarrow{f^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{(\cdot\ell)} \mathbb{Z}$ はexact.

<u>Rem</u>　系1.3は(i)の中のvanishingと(iii-3)を除けば、X が、canonical singularityをもつ場合にも成り立つ。

系1.3は森[1], Reid[4]の3次元の場合の証明と全く同様であるので省略する。

<u>prop 1.4</u>　ℓ はextremal curve, $f: X\to Y$ はそのcontraction, H は ℓ のgood supporting divisorとする。このとき、
f がbirational $\Leftrightarrow$ H がbig $\Leftrightarrow$ ℓ がnot nef.

証明は森[1]の3次元の場合と同様にしてできるが、念のため、「H がbig $\Rightarrow$ ℓ がnot nef」の証明のみ書いておく。

$(H^n)>0$ $(n=\dim X)$ を仮定する。
H はnef and bigだから川又vanishingにより　$H^i(X, mH+K_X)=0$ $(i>0)$.

$\therefore\ h^0(X, mH+K_X) = \chi(mH+K_X) = \frac{1}{n!}(mH+K_X)^n + \cdots\cdots$

$= \frac{m^n}{n!}(H)^n +$ mについて低次の項 $\longrightarrow \infty$ as $m \longrightarrow \infty$.

従って $m \gg 0$ に対し $|mH+K_X| \neq \phi$. そこで $D \in |mH+K_X|$ をとる.

$(D\cdot l) = m(H\cdot l) + (K_X\cdot l) = (K_X\cdot l) < 0$. 従って l は not nef. $\square$

§2 Birational Case.

以下 X は非特異とし, extremal curve l をひとつ fix する. さらに, l は not nef と仮定する. すなわち, l の contraction $f: X \longrightarrow Y$ は birational と仮定する. A を Y 上の任意の ample divisor とすると, $H := f^*A$ は l の good supporting divisor となる. $E \subset X$ を f の exceptional set とする. また $n := \dim X$ とする。

§2-1° 以下の sub section では $\dim E = n-1$ を仮定し, この場合を考察する. 今, l は not nef だから $(D\cdot l) < 0$ となる irreducible divisor D が存在する。

lemma $D = E$. 特に D は unique で, E は既約.

($\because$) 系 1.3 (i) より $mH - D$ は ample ($m \gg 0$). また $H^1(X, mH-D) = 0$ より, $H^0(X, mH) \twoheadrightarrow H^0(D, mH)$. 従って $|mH|$ は D の外で ample. つまり, f は D の外で同型. $\therefore D \supset E$. 今 D は既約で $\dim E = n-1$ だから $D = E$. $\square$

さて, $\kappa := \kappa_{num}(H|_D) = \kappa(D, H|_D) = \dim f(D)$ とする. まず, $\kappa = 0$ の場合を扱う.

prop 2.1. $\dim f(D) = 0$ とする. このとき, ある X 内の Cartier divisor L が存在して

(o) $L|_D$ は D 上 ample

(i) $\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(pL)$, $\mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ $(\exists p, q \in \mathbb{N})$.

特に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(p+q)L)$.

(ii) $H^i(D, tL) = 0$ ただし, i と t は (ア) $i > 0$, $t \geqq -p$ であるか,

(イ) $i < n-1$, $t \leqq -q$ 又は (ウ) $n \leqq 5$, $0 < i < n-1$, ${}^\forall t \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n=2 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

$n=3 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$

または $D \cong Q^2$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. ただし Q^2 は $\mathbb{P}^3$ 内の singularity を許した hyper quadric.(以下でも同様).

$n=4 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^3$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2)$ or $\mathcal{O}(-3)$.

または $D \cong Q^3$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$ or $\mathcal{O}(-2)$

または D は Del Pezzo variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$, すなわち.

$\Delta(D,L) := \dim D + (L^{n-1})_D - h^0(D,L) = 1$, $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-2L)$,

$H^i(D, tL) = 0$ for $0<i<n-1$, ${}^\forall t \in \mathbb{Z}$ となる variety.

このとき, D は hypersurface singularity を許す.

$n=5 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^4$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3)$ or $\mathcal{O}(-4)$.

または $D \cong Q^4$, $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3)$.

または D は Del Pezzo variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$ or $\mathcal{O}(-2)$. すなわち

$\Delta(D,L) = 1$, $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-3L)$, $H^i(D,tL) = 0$ $(0<i<n-1, {}^\forall t \in \mathbb{Z})$.

または D は Mukai variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. すなわち,

$\Delta = \frac{d}{2}$ (ただし $d = (L^{n-1})_D$), $\omega_D \cong \mathcal{O}(-2L)$ で

$H^i(D, tL) = 0$ $(0<i<n-1, {}^\forall t \in \mathbb{Z})$ となる variety.

このようなタイプを $(E(n-1)-0)$ 型と呼ぶ.

<u>proof</u> $|mH|$ は free $(m \gg 0)$ で, $H|_D \approx 0$ だから $\mathcal{O}_D(H) \cong \mathcal{O}_D$ である. D 内の任意の curve Z について, $(H \cdot Z)_X = 0$ だから $Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$. すなわち $\mathrm{Im}(N_1(D) \to N_1(X)) \cong \mathbb{R}$. 双対的に $\mathrm{Im}(N^1(D) \to N^1(X)) \cong \mathbb{R}$. 今 $I := \mathrm{Im}(\mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, D)$ とおき $I \cong \mathbb{Z}$ を示す. $M \in \mathrm{Pic}\, X$ を $M|_D \approx 0$ on D となるような任意の元とするとき, $\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D$ を示せばよい. $0 \to \mathcal{O}_X(mH+M-D) \to \mathcal{O}_X(mH+M) \to \mathcal{O}_D(M) \to 0$ は exact で, $m \gg 0$ に対し $mH+M-D-K_X$, $mH+M-K_X$ は ample だから. 小平 vanishing とこの exact sequence より, $H^i(D, \mathcal{O}_D(M)) = 0$ $(i>0)$. 特に $M=0$ としてみると $H^i(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(i>0)$ と $\chi(\mathcal{O}_D) = 1$ を得る. よって $h^0(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1$ であるから, $|M|_D| \neq \phi$.

$M|_D \approx 0$ であったから，このことは $\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D$ を意味する。
$\therefore\ I \cong \mathbb{Z}$.

さて，$-K_X|_D \sim (mH-K_X)|_D$ は ample だから，I には ample な元がある．今 $L \in \mathrm{Pic}\,X$ を $L|_D$ が I の ample generator となるようにとる．$I \cong \mathbb{Z}$ であり，$-K_X|_D$, $-D|_D$ は ample だったから，$\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(pL)$, $\mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ ($^\exists p, q \in \mathbb{N}$) とかける．特に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(K_X+D)$ より $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(p+q)L)$.

次に (ii) を証明する。$0 \to \mathcal{O}_X(mH+tL-D) \to \mathcal{O}_X(mH+tL) \to \mathcal{O}_D(tL) \to 0$ は exact で，$t \geq -p$ のとき，$m \gg 0$ について，$mH+tL-D-K_X$ は ample, $mH+tL-K_X$ は nef and big となる。川又 vanishing とこの exact sequence から $H^i(\mathcal{O}_D(tL))=0$ ($i>0$, $t \geq -p$) を得る．また Serre duality により，$t \leq -q$ のとき，$-t-p-q \geq -p$ であるから，
$H^i(\mathcal{O}_D(tL)) \cong H^{n-i-1}(\mathcal{O}_D((-t-p-q)L))=0$ ($i<n-1$, $t \leq -q$)．
最後の (う) の場合は (iii) の分類の帰結である。

(iii) を証明する．$P(t) := \chi(\mathcal{O}_D(tL))$ とおくと $P(t)$ は t について $n-1$ 次の多項式になる．$d := (L^{n-1})_D$ として，Riemann-Roch により，
$$P(t) = \frac{d}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{pd}{2(n-2)!}t^{n-2} + t\text{について低次の項}$$
となる．また $P(0)=\chi(\mathcal{O}_D)=1$，Serre duality により，
$P(-t)=\chi(\mathcal{O}_D(-tL))=(-1)^{n-1}\chi(\omega_D(tL))=(-1)^{n-1}\chi(\mathcal{O}_D((t-p-q)L))=(-1)^{n-1}P(t-a-b)$
さらに $-p \leq t \leq 0$ なる整数 t については，$H^i(\mathcal{O}_D(tL))=0$ for $\forall i$ より $P(t)=0$。以上の $P(t)$ に関する条件から

$n=4$ のとき $P(t) = \frac{d}{12}t(t+p+q)(2t+p+q) + \frac{2t}{p+q} + 1$

$n=5$ のとき $P(t) = \frac{1}{24}\{t^2(t+p+q)^2 d + t(t+p+q)(pqd + \frac{24}{pq})\} + 1$

が得られる。$h^0(\mathcal{O}_D(L)) = P(1)$ に注意して Fujita の Δ-genus: $\Delta := \Delta(D,L) = \dim D + d - h^0(\mathcal{O}_D(L))$ を計算する。

$n=4$ のとき $p+q \leq 4$ となり (∵ $p+q \geq 5$ とすると $\Delta < 0$ となってしまいます.)，

$(p,q)=(3,1),(2,2),(1,3)$ なる $\Delta=0,\ d=1$ で $D\cong\mathbb{P}^3$,
$(p,q)=(2,1)$ or $(1,2)$ なる $\Delta=0,\ d=2$ で $D\cong Q^3$,
$(p,q)=(1,1)$ なる $\Delta=1$ で D は Del Pezzo variety となる。
$n=5$ の時も同様だから略す。 $\square$

次は $E=D$ で $\dim f(D)$ が一般の場合を扱う。

<u>prop 2.2</u> $\dim f(D)=k$ とすると、$f_D: D\longrightarrow f(D)$ の general fiber は $(E(n-k)-0)$ 型の exceptional divisor と同型である。(すなわち、prop 2.1 で $n=n-k$ とした時の D の分類にあらわれるものと同一視できる。)

<u>proof</u> general point $p\in Y$ に対し、$A_1,\cdots,A_k\subset Y$ を general な ample divisor で $A_1\cap\cdots\cap A_k\ni p$, となるようにとれば、$H_i:=f^*A_i$ $(1\leq i\leq k)$ とおくとき、$\dim H_1\cap\cdots\cap H_k=n-k-1$ で F が $H_1\cap\cdots\cap H_k$ の連結成分となるようにできる。$H_1,\cdots,H_k$ は l の good supporting divisor である。F 内の任意の curve Z に対して $(Z\cdot H)_X=0$ である。これより prop 2.1 の証明と同様にして、$\mathrm{Im}(\mathrm{Pic}X\to\mathrm{Pic}F)\cong\mathbb{Z}$ がわかる。$L\in\mathrm{Pic}X$ を $L|_F$ が $\mathrm{Im}(\mathrm{Pic}X\to\mathrm{Pic}F)$ の ample generator となるようにとる。$\mathcal{O}_F(H_i)\cong\mathcal{O}_F$ だから $\omega_F\cong\mathcal{O}_F(K_X+D)$。今 $\mathcal{O}_F(-K_X)\cong\mathcal{O}_F(pL)$, $\mathcal{O}_F(-D)\cong\mathcal{O}_F(qL)$ $({}^\exists p,q\in\mathbb{N})$ と書くと、以下 prop 2.1 の証明と同様に $H^i(\mathcal{O}_F(tL))=0$ for (ア) $i>0,\ t\geq -p$ or (イ) $i<n-k-1,\ t\leq -q$ がわかる。これらより結論は容易に導かれる。 $\square$

<u>prop 2.3</u> $\dim f(D)=n-2$ で $f_D: D\longrightarrow f(D)$ が equidimensional ならば、f_D は $\mathbb{P}^1$-bundle で Y, $f(D)$ は non-singular, f は $f(D)$ を center とした Y の blow up となる。

<u>proof</u> $S:=f(D)$ とおく。$C\in R_+[l]$ を任意の既約な curve とする。$p=f(C)\in S$ は point. Y の ample divisor $A_1,\cdots,A_{n-2}$ で、$p\in A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}$ $\dim A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}\cap S=0$ となるようなものがある。f_D は equidimensional だから $H_i:=f^*A_i$ $(1\leq i\leq n-2)$ とするとき $\dim H_1\cap\cdots\cap H_{n-2}\cap D=1$.

今 C' は $(C')_{red} = C$ となる X 内の任意の scheme とする。$a \gg 0$ を $I_{C'} \supset I_{H_1}^a + \cdots + I_{H_{n-1}}^a + I_D^a$ となるようにとる。ここに $I_{C'}$ は C' の $\mathcal{O}_X$ での定義 ideal 等である。Standard exact sequence をいくつか書いて計算すると、$H^1(\mathcal{O}_{aD \cap aH_1 \cap \cdots \cap aH_{n-2}}(mH)) = 0$, $H^1(\mathcal{O}_{aD \cap aH_1 \cap \cdots \cap aH_{n-2}}(mH + K_X)) = 0$ $(m \gg 0)$ が容易に得られる。これより $H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH)) = H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH + K_X)) = 0$ が得られる。ここで $\mathcal{O}_{C'}(H) \cong \mathcal{O}_{C'}$ より $H^1(\mathcal{O}_{C'}) = H^1(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = 0$. 特に $C \cong \mathbb{P}^1$ がわかる。$0 \leq h^0(\mathcal{O}_C(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C) + (K_X \cdot C)_X = 1 + (K_X \cdot C)_X$ で $(K_X \cdot C) < 0$ より $(K_X \cdot C)_X = -1$ がわかる。f_D の general fiber は既約で K_X との intersection number は -1 だから、f_D の全ての fiber は既約で $\mathbb{P}^1$ に同型であることがわかる。また $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ が後で述べるようにしてわかるから、Deformation 理論により、D は smooth で、$f_D : D \to S$ は Zariski $\mathbb{P}^1$-bundle であることがわかる。ここで中野の contraction theorem を用いると f は S を center とした Y の blow up と同一視できることがわかる。

さて $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ を証明する。$I_C/I_C^2 = \mathcal{O}_C(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(a_{n-1})$ $(a_1 \geq \cdots \geq a_{n-1})$ とおく。I_C は locally complete intersection だから $0 \to I_C/I_C^2 \to \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \to \Omega_C^1 \to 0$ は exact. $\therefore a_1 + \cdots + a_{n-1} = \deg I_C/I_C^2$ $= \chi(I_C/I_C^2) - \mathrm{rank}(I_C/I_C^2) = \{\chi(\mathcal{O}_C(\Omega_X^1)) - \chi(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1)\} - (n-1) = \{(K_X \cdot C)_X + n\} - (-1) - (n-1) = (K_X \cdot C)_X + 2 = 1$. また $I_C \supset J \supset I_C^2$ を $I_C/J \cong \mathcal{O}_C(a_{n-1})$ となるようにとると $0 \to I_C/J \to \mathcal{O}_X/J \to \mathcal{O}_X/I_C \to 0$ (i.e. $0 \to \mathcal{O}_C(a_{n-1}) \to \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{O}_C \to 0$) より $\chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C(K_X)) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}) \otimes \mathcal{O}_C(K_X))$ $= \{(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_C)\} + \{(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}))\} = 2(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_{C'}) = -2 + \chi(\mathcal{O}_{C'})$
$\therefore 2 \leq 2 + h^0(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = 2 + \chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}))$ $= 1 + (1 + a_{n-1}) = 2 + a_{n-1}$. $\therefore a_{n-1} \geq 0$. $\therefore a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0$
$\therefore N_{C/X} = (I_C/I_C^2)^\vee = \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ □

§2-2° ここからは $\dim E < n-1$ と仮定する。このようなことは $n \leq 3$ では起こらないが $n = 4$ のとき $E \cong \mathbb{P}^2$ の例が構成されている。($\xrightarrow{\text{see}}$ M. Reid Decomposition of Toric morphism, Example (3.9)).

しかし具体的なEの分類に関しては$n=4$の時ですらまだわかっていない。わかっているのは、$\dim E$, $\dim f(E)$についての条件くらいである。ところで、$mH+K_X$という形のdivisorはいろいろな意味で大切な役割をはたす。例えば、$|mH+K_X|$の一般の元Dは既約で$(D\cdot \ell)_X<0$となるから、$(D\cdot\ell)_X<0$となる既約なdivisor Dは一意に存在する。$m\gg 0$のとき$Bs|mH+K_X|=E$である。さらに$|mH+K_X|$はelementary transformationを定めるであろうと予想されている。

§3. Fiber case.

このSectionでも$X, \ell, H, f: X\to Y$は§2と同様とする。ただしℓはnefと仮定する。すなわち$\dim X>\dim Y$と仮定する。
$K:=\dim Y=\kappa(H)=\kappa_{num}(H)$とおく。

<u>prop 3.1</u>　fのgeneral fiberはFano $(n-K)$-foldである。ただしFano 1-foldは$\mathbb{P}^1$、Fano 2-foldはDel Pezzo sorfaceと解釈する。

<u>proof</u>　$p\in Y$をgeneral pointとする。Ample divisor $A_1,\cdots,A_K\subset Y$を$p\in A_1\cap\cdots\cap A_K$, $\dim A_1\cap\cdots\cap A_K=0$となるようにとる。pはgeneralだから、$F:=f^{-1}(p)$は非特異な$n-K$次元多様体としてよい。Fは$H_1\cap\cdots\cap H_K$の連結成分$(H_i:=f^*A_i)$で、$H_1\cap\cdots\cap H_K$はpure $n-K$次元としてよい。Fはlocally complete intersectionで、$\mathcal{O}_F(H_i)\cong\mathcal{O}_F$だから$\omega_F\cong\mathcal{O}_F(K_X)$となる。F内の任意のcurveは$\mathbb{R}_+[\ell]$に属するから$-K_X|_F$はF上ample. $\therefore\ \omega_F^{-1}$はampleとなりFはFano $(n-K)$-fold. □

森[1]では$\dim X=3$の時Yは必ず非特異であったが、一般次元では、$\dim Y=1$ならもちろんYは非特異であるが、それ以外の時は次のことしかわかっていない。しかし次のpropositionのfがequidimensionalという仮定は3次元では自明的に正しいので、$\dim X=3$の時の全ての結果は完全に含まれてしまう。

<u>prop 3.2</u> $\dim Y = \dim X - 1$ で $f : X \longrightarrow Y$ が equidimensional ならば、Y は非特異で、f は conic bundle となる。

証明にはまず次の lemma を用いる。

<u>Lemma 3.3</u> X は non singular, C は X 内の irreducible curve で $(K_X \cdot C) < 0$, かつ $(C')_{red} = C$ となる X 内の任意の scheme C' について $\chi(\mathcal{O}_{C'}) \geq 0$ とする。すると $C \cong \mathbb{P}^1$ で

$$N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n-1} \text{ or } \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4} \text{ or } \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$$
$$\text{or } \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$$

となる。さらに、$N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4}$ 又は $\mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$ の時には $I_C \supset J \supset I_C{}^2$ を $I_C/J \cong \mathcal{O}_C(-1)$ となるような ideal とすると、$J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ となる。ここに I_C は X における C の定義 ideal。

<u>proof</u> $C \cong \mathbb{P}^1$ の証明は簡単であるし、あとで必要としないので省略する。$I := I_C$ とおき、$I/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(p_{n-1})$ (ただし $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{n-1}$) とおく。$C$ は locally complete intersection だから、$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0$ は exact, prop 2.3 の証明と同様に $p_1 + \cdots + p_{n-1} = (K_X \cdot C) + 2 \leq 1$. 特に $0 \geq p_{n-2} \geq \cdots \geq p_1$. local には、$I = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ と書ける。

Case I. $p_1 = 0$ のとき: $\sum p_i \leq 1$ より $(p_1, \cdots, p_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ or $(0, \cdots, 0, 1)$ となりおしまい。

Case II. $p_1 \leq -2$ のとき: $I \supset J \supset I^2$ を $I/J \cong \mathcal{O}_C(p_1)$ となるようにとる。$J/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(p_{n-1})$. また local には $J = (x_1^2, x_2, \cdots, x_{n-1})$ と書ける。$C' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/J$ とおく。$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(p_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{C'} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$ は exact だから、$0 \leq \chi(\mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_C(p_1)) = 1 + (1 + p_1) = 2 + p_1 \leq 0$ $\therefore p_1 = -2$. $0 \longrightarrow I^2/IJ \longrightarrow J/IJ \longrightarrow J/I^2 \longrightarrow 0$ で $I^2/IJ \cong S^2(I/J) \cong \mathcal{O}_C(2p_1)$ だから $J \supset IJ$ は quotient が $\mathcal{O}_C(2p_1), \mathcal{O}_C(p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_{n-1})$ となる filtration をもつ。$0 \longrightarrow IJ/J^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow J/IJ \longrightarrow 0$ で $IJ/J^2 \cong J/IJ \otimes I/J$ だから、$J \supset J^2$ は quotient が $\mathcal{O}_C(2p_1), \mathcal{O}_C(p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_{n-1}), \mathcal{O}_C(3p_1), \mathcal{O}_C(p_1 + p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_1 + p_{n-1})$ となる filtration をもつ。従って $\chi(J/J^2) = 2(n-1) + (n+1)p_1 + 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1})$ を得る。これより、

$0 \le \chi(\mathcal{O}_X/J^2) = 2n + (n+2)p_1 + 2(p_1 + \cdots + p_{n-1}) \le 2n + (n+2)\times(-2) + 2\times 1$ $= -2$ となり矛盾。∴ $p_1 \le -2$ とはなり得ない。

Case Ⅲ. $p_1 = -1$ のとき：まず次の公式を証明する。

$$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = 2\times {}_nH_{r-1} + \left(1+\frac{4(r-1)}{n}\right){}_nH_{r-1}\cdot p_1 + 2\,\frac{r-1}{n}\cdot {}_nH_{r-1}\cdot(p_2+\cdots+p_{n-1})$$

ただし ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$。次に $I \supset H \supset I^2$ を $I/H \cong \mathcal{O}_C(p_1)\oplus\mathcal{O}_C(p_2)$, $H/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_3)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(p_{n-1})$ となるような ideal とすると、

$$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = (3\cdot{}_nH_{r-1} + {}_nH_{r-2}) + \left(6\,\frac{r-1}{n}\cdot{}_nH_{r-1} + 2\,\frac{r-2}{n}\,{}_nH_{r-2} + {}_nH_{r-1} + {}_nH_{r-2}\right)(p_1+p_2) + \left(3\,\frac{r-1}{n}\,{}_nH_{r-1} + \frac{r-2}{n}\,{}_nH_{r-2}\right)(p_3+\cdots+p_{n-1})$$

はじめの、$\chi(\mathcal{O}_X/J^r)$ の公式は local には $J=(x_1^2, x_2, \cdots, x_{n-1})$ と書けることで、$\mathcal{O}_X/J$ の間の filtration をよく見ると、$\mathcal{O}_X/J^r$ の間の filtration の quotient は $\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})$（ただし $\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r$）が各々1回づつ出てくることがわかる。従って

$$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = \sum_{\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r} \chi(\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})) = \sum_{\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r} (1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})$$

となり前の公式を得る。次に $\chi(\mathcal{O}_X/H^r)$ の公式は local に $H = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3, \cdots, x_{n-1})$ とかけることで $\mathcal{O}_X/H$ の filtration を J の場合と同様に構成すると、結局

$$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = \sum_{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{2}+r_3+\cdots+r_{n-1}<r} \chi(\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1}))$$

となり、公式を得る。

さてここで、もし $p_2=-1$ とすると $r\to\infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/H^r)\to-\infty$ がでてきて矛盾。∴ $0\le p_2\le\cdots\le p_{n-1}$。次に $p_2+\cdots+p_{n-1}\le 1$ とすると $r\to\infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/J^r)\to-\infty$ となりやはり矛盾。従って $p_2+\cdots+p_{n-1}=2$ がわかり、$(p_1,\cdots,p_{n-1}) = (-1,0,\cdots,0,1,1)$ or $(-1,0,\cdots,0,2)$ となり結論を得る。

さらに Case Ⅲ の場合は $J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ であることを証明する。

$J\otimes\mathcal{O}_C = J/IJ =: \mathcal{O}_C(q_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(q_{n-1})$ $(q_1\le\cdots\le q_{n-1})$ とおく。$0\to I^2/IJ\to J/IJ\to J/I^2\to 0$ で $I^2/IJ \cong S^2(I/J)\cong\mathcal{O}_C(2p_1)$, $J/I^2 = \mathcal{O}_C(p_2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(p_{n-1})$ より $q_1+\cdots+q_{n-1} = \deg J/IJ = \deg I^2/IJ + \deg J/I^2 = 2p_1+p_2+\cdots+p_{n-1} = 0$。

Case Ⅲ-1. $q_1=0$ のとき。$0\to IJ/J^2\to J/J^2\to J/IJ\to 0$ で今 $q_1 = q_2=\cdots=q_{n-1}=0$ だから $J/IJ\cong\mathcal{O}_C^{\oplus n-1}$, $IJ/J^2\cong J/IJ\otimes I/J\cong\mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1}$.

これより
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^{\oplus n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & IJ/J^2 & \longrightarrow & J/J^2 & \longrightarrow & J/IJ & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$
また $H^0(J/J^2) \cong H^0(J/IJ) \cong k^{n-1}$ であるから この同型により 上の図式の可換性をたもつ写像 $(\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1} \longrightarrow J/J^2$ が作れ, five lemma によりこれが同型になる。 $\therefore J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$.

Case IV-2. $q_1 \neq 0$ とすると $q_1 \leq -1$ となる。今 $J \supset L \supset IJ$ を $J/L \cong \mathcal{O}_C(q_1)$, $L/IJ \cong \mathcal{O}_C(q_2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(q_{n-1})$ となるようにとる。$I \supset J \supset L$ より $\chi(I/L) = \chi(\mathcal{O}_C(-1)) + \chi(\mathcal{O}_C(q_1)) = 1+q_1 \leq 0$. さらに $0 \to L/IJ \to J/IJ \to J/L \to 0$, $0 \to J^2/JL \to IJ/JL \to IJ/J^2 \to 0$, $0 \to IJ/JL \to L/JL \to L/IJ \to 0$, $0 \to JL/L^2 \to L/L^2 \to L/JL \to 0$, $J^2/JL \cong \mathcal{O}_C(2q_1)$, $IJ/J^2 \cong J/IJ \otimes I/J \cong J/IJ \otimes \mathcal{O}_C(-1)$, $JL/L^2 \cong L/JL \otimes J/L \cong L/JL \otimes \mathcal{O}_C(q_1)$ を用いると, $\chi(\mathcal{O}_X/L^2) = 2nq_1 + q_1 + 2n < 0$ を得て矛盾。 $\square$

<u>prop 3.2の証明</u> f の fiber F は $\mathbb{P}^2$ の conic に同型であることを示す。すなわち、(i) $F \cong \mathbb{P}^1$ で $N_{F/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$, $(-K_X \cdot F) = 2$ or (ii) $F = F_1 \cup F_2$ で $F_1, F_2 \cong \mathbb{P}^1$, $F_1 \cap F_2 =$ 一点, $(-K_X\cdot F_1) = (-K_X \cdot F_2) = 1$ or (iii) $F = 2F_0$ (as 1-cycle) で $F_0 \cong \mathbb{P}^1$, $N_{F_0/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-3}$ or $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-4}$ で $(-K_X \cdot F_0) = 1$ かつ F の定義 ideal を $J \subset \mathcal{O}_X$ とすると $J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$, $I/J \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. ただし I は F_0 の定義 ideal.

さて $F = F_1 \cup \cdots \cup F_t$ と既約な curve に分解する。今 F が f の general fiber ならば F は既約で $N_{F/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$ だから $(-K_X \cdot F) = 2 - \deg N_{F/X} = 2$. また一般の $F = F_1\cup\cdots\cup F_t$ についても $(-K_X\cdot F) = 2$, $(-K_X \cdot F_i) > 0$ であるから, $t \leq 2$ がわかる。 $\therefore$ F は (i) 既約・被約 or (ii) $F = F_1 \cup F_2$ or (iii) $F = 2F_0$.

Case (i) この時結論が成立することは Lemma 3.3 より明らか。

Case (ii) $0 \to \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_{F_1}\oplus\mathcal{O}_{F_2} \to \mathcal{O}_{F_1\cap F_2} \to 0$ より $\chi(\mathcal{O}_{F_1\cap F_2}) = 2 - \chi(\mathcal{O}_F)$ ところで, $(-K_X \cdot F_i) = 1$ $(i=1,2)$ より $N_{F_i/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-2}$ である。今 F は連結だから $\chi(\mathcal{O}_{F_1\cap F_2}) \geq 1$. また $H^1(\mathcal{O}_X/I_F) = 0$ より $\chi(\mathcal{O}_F) \geq 1$. 従って $\chi(\mathcal{O}_{F_1 \cap F_2}) = 1$. $\therefore$ F_1 と F_2 は一点で交わる。

Case (iii) $I \supset J \supset I^2$ $(I = I_{F_0}, J := I_F)$ は F_0 上の各点の local ring で見ればすぐわかる。$1 = \chi(\mathcal{O}_F) = \chi(\mathcal{O}_{F_0}) + \chi(I/J)$ より $0 \geq \chi(I/J) = \deg I/J + \operatorname{rank} I/J$.

となるが Lemma 3.3 より $\deg I/J \geq -1$. これより $\deg I/J = -1$. $\mathrm{rank}\, I/J = 1$, $\chi(I/J) = 0$ を得る. ∴ $I/J \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Lemma 3.3 より結論を得る。

以上の F の分類により f は flat であることがわかる. 従って Y は non singular. □

§4 Appendix.

次に述べる proposition は Shokurov によって川又の結果が一般化される以前のものである.

<u>prop. 4.1</u> X は non singular, H は nef and big な Cartier divisor で $aH - K_X$ が ample なもの ($\exists a > 0$) とすると十分大なる全 m について $Bs|mH| = \phi$ となる.

<u>proof.</u> $a = 1$ としてよい. $Bs|mH| \neq \phi$ とする. $f : Y \longrightarrow X$ を $Bs|mH|$ の resolution で以下の条件をみたすものとする.

(0) ΣF_j は SNC (simple normal crossing)

(i) $K_Y = f^*H + \Sigma a_j F_j$, $a_j \geq 0$. そして $a_j > 0$ は F_j が exceptional な時に限る.

(ii) $mf^*H \sim L + \Sigma r_j F_j$. $|L|$ は free で $r_j \geq 0$. そして ある r_j は真に正.

(iii) $f^*H - \Sigma p_j F_j$ は $\mathbb{Q}$-ample, $0 \leq p_j << 1$.

(iv) ある index 0 について $-cr_0 + a_0 - p_0 = -1$, $j \neq 0$ については $-(r_j + a_j - p_j) > -1$, $c > 0$. すなわち $\sum_j \ulcorner -cr_j + a_j - p_j \urcorner F_j = A - B$. ここに $B = F_0$, $\ulcorner\ \urcorner$ は切り上げをあらわす.

以上が可能なのは例えば Reid [4] の証明と同様である。

$t \in \mathbb{Z}$ について, $N_t := tf^*H + \Sigma(-cr_j + a_j - p_j)F_j - K_Y \equiv cL + f^*((t-cm)H - K_X) - \Sigma p_j F_j$. $M_t := N_t + f^*K_X \equiv cL + f^*((t-cm)H) - \Sigma p_j F_j$ と $\mathbb{Q}$-divisor N_t, M_t を定義する. $t > cm+2$ の時 N_t, M_t は nef + ample の形に書けるから $\mathbb{Q}$-ample となる. また N_t, M_t の小数部分は SNC. 川又 Vanishing により $H^1(Y, tf^*H + A - B) = H^1(Y, \ulcorner N_t \urcorner + K_Y) = 0$, $H^i(B, tf^*H + A) \cong H^i(B, \ulcorner N_t \urcorner + K_B) = 0$ $(i > 0)$, $H^i(B, f^*(tH + K_X) + A) = H^i(B, \ulcorner M_t \urcorner + K_B) = 0$ $(i > 0)$ がわかる. もし $H^0(B, tf^*H + A) \neq 0$ $(t >> 0)$ がわかれば, $H^0(Y, tf^*H) = H^0(Y, tf^*H + A) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow H^0(B, tf^*H + A) \neq 0$ であるから $f(B) \not\subset Bs|tH|$

がわかる．以下 Noetherian induction で $t\gg 0$ について $Bs|tH|=\phi$ が得られる．そこで以下 $H^0(B, tf^*H+A)\neq 0$ $(t\gg 0)$ を証明する．

以下 $\square'$ によって $\square|_B$, $f^*\square|_B$ をあらわす．例えば $K_X' := f^*K_X|_B$．

Case I. $H'\approx 0$ on B のとき：このときは $\forall t\in\mathbb{Z}$ に対し N_t' は ample だから $H^i(B, tH'+A')=0$ $(i>0)$．∴ $h^0(B, tH'+A')=\chi(\mathcal{O}_B(tH'+A'))=\chi(\mathcal{O}_B(A'))=h^0(B, A')>0$ となり主張が言える．

Case II. $H'\not\approx 0$ on B のとき：$t>cm+2$ に対して

$h^0(B, tH'+A')=\chi(\mathcal{O}_B(tH'+A'))=\frac{1}{6}t^3H'^3+\frac{1}{4}t^2H'^2(2A'-K_B)+\frac{1}{12}ct+\mathrm{const.}$

（ただし $c:=\{6H'A'(A'-K_B)+H'(K_B^2+c_2(B))\}$）となる．そこで，

Case II-1. $(H'^3)_B\neq 0$ のとき：この時 $t\to\infty$ で，$h^0(B, tH'+A')\to\infty$ となり主張は正しい．

Case II-2. $(H'^3)_B=0$, $H'^2\not\approx 0$ のとき：このときは $H'^2(2A'-K_B)$ $=H'^2(A'+(\nu H'+A'-K_Y'-B'))=H'^2A'+H'^2N_\nu'+H'^2(\ulcorner N_\nu'\urcorner-N_\nu')$ （ただし $\nu\gg 0$）．今 H' は nef, A', $(\ulcorner N_\nu'\urcorner-N_\nu')$ は effective, N_ν' は ample だから $H'^2(2A'-K_B)\geq H'^2N_\nu'>0$．∴ 2次の係数が正だから，$t\to\infty$ のとき $h^0(B, tH'+A')\to\infty$．

Case II-3. $H'^2\approx 0$, $c\neq 0$ のとき：このときは $h^0(B, tH'+A')$ で，t について3次と2次の項がなく，1次の係数は正となり，$t\to\infty$ のとき $h^0(B, tH'+A')\to\infty$ がいえる．

Case II-4. $H'^2\approx 0$, $c=0$ のとき：$h^0(B, tH'+K_X'+A')=\chi(\mathcal{O}_B(tH'+K_X'+A'))$ $=\frac{t}{12}\{6H'(K_X'+A')(K_X'+A'-K_B)+H'(K_B^2+c_2(B))\}+\mathrm{const.}$ となる．今この式で t の係数は正だから，

$0\leq\{6H'(K_X'+A')(K_X'+A'-K_B)+H'(K_B^2+c_2(B))\}-c=6H'K_X'(K_X'+2A'-K_B)$ $=-6H'(H'-K_Y')((\nu H'+K_X'+A'-K_Y'-B')+A')=-6H'(H'-K_X')(M_\nu'+(\ulcorner M_\nu'\urcorner-M_\nu')$ $+A')$ （ただし $\nu\gg 0$）．ここで，$H'-K_X'$, H' は nef, A', $(\ulcorner M_\nu'\urcorner-M_\nu')$ は effective, M_ν' は ample だから上式の最後の辺は0以下．すなわち $H'(H'-K_X')(M_\nu'+(\ulcorner M_\nu'\urcorner-M_\nu')+A')=0$．特に $H'(H'-K_X')M_\nu'=0$．さて $f_B=f|_B: B\to f(B)$ を考える．$H'\not\approx 0$ だから $1\leq\dim f(B)\leq 3$ である．

Case Ⅱ-4-i $\dim f(B)=1$ のとき: $\deg_{f(B)} H>0$ であるから, $h^0(f(B), tH)>0$ $(t\gg 0)$. $\therefore$ $H^0(B, tH'+A')\neq 0$.

Case Ⅱ-4-ii $\dim f(B)=2$ のとき: $H(H-K_X)|_{f(B)}$ は positive degree の 0-cycle ($\because$ $H-K_X$ は ample, $H|_{f(B)}\not\equiv 0$). $\therefore$ $H'(H'-K_X')$ も positive な B 上の 1-cycle. $\therefore$ $H'(H'-K_X')M_v'>0$ となり矛盾.

Case Ⅱ-4-iii $\dim f(B)=3$ のとき: このときも上と同様にして $H'(H'-K_X')M_v'>0$ が導かれ矛盾を生じる. $\square$

文献

[1] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176.

[2] Y. Kawamata, Cone of curves of algebraic varieties, Preprint.

[3] V.V. Shokurov, Non-vanishing theorem (Теорема о необращении в нуль), to appear in Известия Академии Наук СССР.

[4] M. Reid, Projective morphisms according to Kawamata, Preprint.

[5] T. Fujita, Classification of projective varieties of Δ-genus one, Proc. Japan Acad., 58 (1982), 113-116.

[6] V.A. Iskovskih, Fano 3-fold I, Ⅱ Math. USSR-Izv. 11(1977) 485-527, 12(1978), 469-506

[7] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 6(1971), 483-502.