On Weierstraß Models.

東大・理　中山　昇

§0. Introduction.

Elliptic fibrationはどんな構造をしているか？curve上では小平先生の結果[8],[9]により完全にわかっている。2次元以上では河井[7],上野[12]により小平先生の議論の中でBasic modelを作るところが拡張された。残りはlog-transf.をいかに拡張するかである。ところでBasic modelはsectionをもつ。sectionをもつelliptic fibrationはほとんどWeierstraß modelといっていい(Th 2.1)。従ってBasic modelもWeierstraß modelによって構成される(Th 2.3)。ただしこれが河井・上野のmodelと同じかどうかはまだわからない。

一方、K3 surfaceはdeformationで移りあうが、小平先生は[9]の中でWeierstraß modelになるK3からdeformできることを示している。それで3次元で$K_X = \mathcal{O}_X$の多様体を調べるのに、XがWeierstraß modelの形をしているものはどんなものか、そしてそれのdeformationはどうなるかということを問題にした。すると実際はこのようなXはあまりなくて(Th 3.3)、deformationしても他のものへは移らないようだ。

でも $K_X = \mathcal{O}_X$ に限らない一般の Weierstraß model の形の 3-fold では minimal model conjecture (see [4], [6]) が成り立つ (Th3.2) ということもわかったのでこれらについてもある程度分類ができるかもしれない。

§1. Elementary properties.

S を complex variety, $\mathcal{L}$ をその上の line bundle (= invertible sheaf), $a \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{-4})$, $b \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{-6})$ を $4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0$ となる sections とする。この $(\mathcal{L}, a, b)$ に対し Weierstraß model $W(\mathcal{L}, a, b)$ は次のように定義される。

まず $\mathbb{P} := \mathbb{P}_S(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3)$ の tautological line bundle を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ として、$p: \mathbb{P} \longrightarrow S$ を projection とするとき、標準的なうめこみ $\mathcal{O} \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^2 \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^3 \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$ に応じて sections $Z \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$, $X \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \otimes p^*\mathcal{L}^{-2})$, $Y \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \otimes p^*\mathcal{L}^{-3})$ が定義される。ここで

$$W(\mathcal{L}, a, b) := \{Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\} \subseteq \mathbb{P}$$

と定義します。

<u>$W = W(\mathcal{L}, a, b)$ の性質。</u>

(1). W も complex variety で $p: W \longrightarrow S$ は projective flat surj. ですべての fiber は $\mathbb{P}^2$ 内の irreducible cubic。

(2). S が normal ならば W も normal。S が Gorenstein ならば W も Gorenstein。そして $\omega_W = p^*(\omega_S \otimes \mathcal{L}^{-1})$.

(3). 3つ目へのprojection $\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}^2\oplus\mathcal{L}^3 \longrightarrow \mathcal{L}^3$ は $p: W \longrightarrow S$ のsection $\sigma: S \longrightarrow W$ を与える。 $\sigma(S) \subseteq W^\# := \{x \in W$ s.t. p is smooth at $x\}$ で $\sigma(S)$ は W の Cartier divisor となる。この $\sigma(S)$ を $\Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ とかき、$W(\mathcal{L}, a, b)$ の canonical section とよぶ。

(4). s を $\Sigma = \Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ の defining eq. つまり $s \in \Gamma(\mathcal{O}_W(\Sigma))$ で $\mathrm{div}(s) = \Sigma$ となるものとする。このとき同型

$\psi: \mathcal{O}_W(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_W(3\Sigma)$ で $\psi(Z) = s^3$ となるものがあり、

さらに sections $f \in \Gamma(\mathcal{O}_W(2\Sigma) \otimes p^*\mathcal{L}^{-2})$, $g \in \Gamma(\mathcal{O}_W(3\Sigma) \otimes p^*\mathcal{L}^{-3})$

で $\psi(X) = f \cdot s$, $\psi(Y) = g$ となるのがある。

(5). $p_*\mathcal{O}_\Sigma(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ という同型があって (4) の f, g, s を使うと、

$$p_*\mathcal{O}_W(\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot s$$
$$p_*\mathcal{O}_W(2\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot s^2 \oplus \mathcal{L}^2 f$$
$$p_*\mathcal{O}_W(3\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot s^3 \oplus \mathcal{L}^2 f \cdot s \oplus \mathcal{L}^3 g \quad \text{etc.}$$

と identify できて、$p_*\mathcal{O}_W(6\Sigma) \otimes \mathcal{L}^{-6}$ において

$$g^2 = f^3 + afs^4 + bs^6 \quad \text{がなりたつ。}$$

(6). $R^1p_*\mathcal{O}_W \simeq \mathcal{L}$, $R^i p_*\mathcal{O}_W(m\Sigma) = 0$ for $i \geq 1$, $m \geq 1$.

さて、$T \subseteq W$ を Σ と別の *irreducible Cartier divisor* で p により $T \xrightarrow{\sim} S$ となるものとする。すると、

Lemma (1.1)

(1). S上のautomorphism $j: W \simeq W$ で $j(\Sigma)=T$, $j(T)=\Sigma$, $j\circ j = id$ になるのがある。

(2). Translation $L(T): W \simeq W$ で smooth fiber上は

$$x \longmapsto x + T(p(x)) \quad (\Sigma=0 \text{ として group str. を入れる})$$

となるものが存在する。

これより $W^\# = \{x\in W \mid p \text{ is smooth at } x\} \longrightarrow S$ が Σ を zero とする S上の group str. をもつことが示される。

Lemma (1.2). $\eta: W(\mathcal{L},a,b) \longrightarrow W(\mathcal{L}',a',b')$ を S上の isomorphism で $\eta(\Sigma(\mathcal{L}ab)) = \Sigma(\mathcal{L}'a'b')$ となっているとすると、ある nowhere vanishing section $\varepsilon\in\Gamma(S,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}^{-1})$ があって $a = a'\cdot\varepsilon^4$, $b=b'\cdot\varepsilon^6$ と書け、η は

$$(X:Y:Z)\longmapsto(\varepsilon X: Y: \varepsilon^3 Z)$$

という morphism になる。 特に $(\mathcal{L}',a',b')=(\mathcal{L},a,b)$ の時、$\varepsilon\in\mathbb{C}^*$ で $\varepsilon^4=1$ or $\varepsilon^6=1$ が成立し、$\varepsilon^6\neq1$ なら $a\equiv0$, $\varepsilon^4\neq1$ なら $b\equiv0$ となる。

$\varepsilon=-1$ のときの $\eta:(X:Y:Z)\longmapsto(-X:Y:-Z)$ を i_Σ と書き Wの Σ における involution とよぶ。これは $W^\#$ においては (-1) 倍に対応する。

Cor. (1.3) $\lambda : W \longrightarrow W$ を S 上の automorphism とすると、$p : W \to S$ の section になる Cartier divisor T が存在し、λ は $L(T)$ と (1.2) の η のどれかの composition になる。

Def. (1.4) S を complex manifold とする。このとき
$(\mathcal{L}, a, b)$ が minimal $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{div}(a) \geqq 4\Delta$, かつ $\mathrm{div}(b) \geqq 6\Delta$ となる effective nonzero divisor Δ が存在しない、
と定義し、このときの $W(\mathcal{L}, a, b)$ を minimal Weierstraß model とよぶ。

任意の Weierstraß model は minimal Weierstraß model から blow up と blow down によって得られる。

§2. Elliptic fibrations.

Th (2.1). X, S : complex manifolds, $\pi : X \longrightarrow S$ を elliptic fibration で $\sigma : S \longrightarrow X$ という π の section をもつものとする。このとき、S 上の Weierstraß model (minimal とは限らない) $W(\mathcal{L}, a, b)$ と S 上の bimeromorphic morphism $\mu : X \longrightarrow W(\mathcal{L}, a, b)$ で $\mu^* \Sigma(\mathcal{L}, a, b) = \sigma(S)$ となるものがある。

略証. $T = \sigma(S)$ として exact sequence

$$(\#_m) \quad 0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_X((m-1)T) \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(mT) \xrightarrow{\varphi_m} \pi_* \mathcal{O}_T(mT) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X((m-1)T) \longrightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(mT) \longrightarrow 0$$

を見ると、まず$(\maltese_1)$より、$\pi_*\mathcal{O}_X(T)=\mathcal{O}_S$,

$$0\longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_T(T)\longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_X\longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T)\longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

がわかる。

ここで $\dim S=1$ のとき φ_m $(m\geqq 2)$ が surjective になることが minimal fibration を使って示せる。だからある open subset $S^1\subset S$ で $S\setminus S^1$ が codim $\geqq 2$ の analytic subset かつ、$\varphi_m(2\leqq m\leqq 6)$ が S^1 上 surj. になるのがある。このとき、S^1 上に、

$f:\pi_*\mathcal{O}_T(2T)\longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X(2T)$, $g:\pi_*\mathcal{O}_T(3T)\longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X(3T)$ でそれぞれ φ_2,φ_3 の splitting になり、

$$g^2=f^3+afs^4+bs^6 \quad \text{in } \Gamma(S^1,\pi_*\mathcal{O}_X(6T)\otimes\mathcal{L}^{-6})$$

となるのが作れる。ここで $\mathcal{L}=\pi_*\mathcal{O}_T(T)$, s は T の defining eq. a, b は $\mathcal{L}^{-4}$, $\mathcal{L}^{-6}$ の S^1 上のある sections.

それから、$\pi_*\mathcal{O}_X(mT)$ が $\forall m$ に対し reflexive sheaf になることが Duality と vanishing $R^i\pi_*\omega_X=0$ for $i\geqq 2$ からわかるので、結局 f,g,a,b は S までのびて、φ_m $m\geqq 2$ は surj. になる。

すると $\pi_*\mathcal{O}_X(3T)\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}^2\oplus\mathcal{L}^3$ で $\pi^*\pi_*\mathcal{O}_X(3T)\longrightarrow\mathcal{O}_X(3T)$ が surjective になるから $\mu: X\longrightarrow W(\mathcal{L},a,b)$ がつくれる。$\square$

<u>Cor. (2.2)</u>. S : complex manifold, $W=W(\mathcal{L},a,b)$ を S 上の Weierstraß model で $\mathrm{div}(4a^3+27b^2)_{\mathrm{red}}$ が高々 normal crossing であるとする。

このとき．$(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ minimal $\Longleftrightarrow$ W has only rational sing.

証明

$\mu : X \longrightarrow W$ を resolution of sing. $\pi := p \circ \mu : X \longrightarrow S$,

$T := \mu^* \Sigma(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ とおく。T も π の section だから (2.1) より

$R^i\pi_*\mathcal{O}_X(T) \simeq R^i\pi_*\mathcal{O}_X(mT)$ for $m \geqq 2$, $i \geqq 1$。一方

$R^i\pi_*\mathcal{O}_X$ は locally free ([11]) なので $R^i\pi_*\mathcal{O}_X = 0$ for $i \geqq 2$.

ゆえに．$R^i\pi_*\mathcal{O}_X(mT) = 0$ for $m \in \mathbb{Z}$, $i \geqq 2$.

だから．spectral sequence

$R^p p_*(R^q\mu_*\mathcal{O}_X(mT)) = R^p p_*(R^q\mu_*\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_W(m\Sigma)) \Longrightarrow R^{p+q}\pi_*\mathcal{O}_X(mT)$ より．

W has only rat. sing. $\Longleftrightarrow$ $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T) = 0$.

ここで $0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_T(T) \longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T) \longrightarrow 0$ に注目。

もし $(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ not minimal なら $\pi_*\mathcal{O}_T(T) \subsetneqq R^1\pi_*\mathcal{O}_X$. ゆえに

$R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T) \neq 0$。　$\dim S = 1$ のとき．$(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ minimal

$\Longrightarrow W(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ has only rat. sing. はよく知られているので；

$\dim S \geqq 2$ の場合でも，$(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ minimal ならば

$\operatorname{codim}(\operatorname{Supp} R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T)) \geqq 2$. しかし．$R^1\pi_*\mathcal{O}_X$ は invertible sheaf だから．$R^1\pi_*\mathcal{O}_X(T) = 0$. ゆえに W has only rat. sing. □

Remark．このとき W/S は relative minimal model．つまり．K_W rel nef で W has only ~~rat.~~ canonical sing.．(2.2)の normal crossing の条件をはずすと．$(\mathcal{L}, a, \mathfrak{b})$ minimal で

$W(\mathcal{L}, a, b)$ が rat. sing. のみにならないものがある。(See §3).

<u>Th(2.3)</u> S : complex manifold, $S^0 \subset S$ Zariski open set (つまり $S \setminus S^0$ が analytic set), $p^0 : W^0 := W(\mathcal{L}_0, a_0, b_0) \to S^0$ を S^0 上の smooth な Weierstraß model とする。すると、

(A) minimal な $(\mathcal{L}, a, b)$ on S で次の条件Ⓔをみたすものがある。

Ⓔ: ある nowhere vanishing section $\varepsilon \in \Gamma(S^0, \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}^{-1})$ があって $a|_{S^0} = \varepsilon^4 \cdot a_0$, $b|_{S^0} = \varepsilon^6 \cdot b_0$ となる。

(B) もし別の minimal な $(\mathcal{L}', a', b')$ がⒺをみたせば ある nowhere vanishing section $e \in \Gamma(S, \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^{-1})$ があって $a = e^4 a'$, $b = e^6 \cdot b'$ となる。

<u>証明のスケッチ</u> ($a_0 \not\equiv 0$ かつ $b_0 \not\equiv 0$ の場合。$a_0 \equiv 0$ or $b_0 \equiv 0$ なら容易)。

まず $S \setminus S^0$ を normal crossing な divisor と仮定していいことがわかるので以下そう仮定する。すると (2.2) によりⒺをみたす $(\mathcal{L}, a, b)$ があると森脇[11]の結果から

$\mathcal{L} \simeq Gr_F^0({}^{l}\mathcal{H}_0)$ となる。ここで ${}^{l}\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}_0 = (R^1 p^0_* \mathbb{C}_{W^0}) \otimes \mathcal{O}_{S^0}$ の lower canonical extension。このこと、minimal ということから (B) がすぐいえる。従ってもし S 上局所的に $(\mathcal{L}, a, b)$ が作れれば (B) より、involution などに注意すれば、$W(\mathcal{L}, a, b)$ をはりあわすことができる。だから S をどんどん小さくしてかまわない。

一方、J-function : $S^0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ $x \mapsto \dfrac{4a_0^3(x)}{4a_0^3(x)+27b_0^2(x)}$ は、$S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ までのびるので このことから、

S上の line bundle $\mathcal{N}$ と sections $a_1 \in \Gamma(S, \mathcal{N}^{\otimes 2})$, $b_1 \in \Gamma(S, \mathcal{N}^{\otimes 3})$, nowhere vanishing section $\xi \in \Gamma(S^0, \mathcal{N} \otimes \mathcal{L}_0^{-2})$ があって、$a_1|_{S^0} = \xi^2 a_0$, $b_1|_{S^0} = \xi^3 b_0$ となる。

もしも $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}^{\otimes 2}$, $\xi = \eta^2$ for some $\mathcal{M}$ and $\eta \in \Gamma(S^0, \mathcal{L}_0^{-1} \otimes \mathcal{M})$ ならば $(\mathcal{M}, a_1, b_1)$ は Ⓔ をみたすので minimal なものにおきかえればよい。そうでないときは S を polydisk と考えてよくて、S の double covering $\tau : \tilde{S} \longrightarrow S$ で $\tau^* \xi \underset{(S^0\text{上})}{=} \eta^2$ とかけるものをとって $W \times_S \tilde{S}$ を involution をかるませて割れば S上に Ⓔ をみたす Weierstraß model の存在が示せる。 $\square$

Cor (2.4). (See Lemma 10.4 of [8]).

$p : W \longrightarrow S$ と $p' : W' \longrightarrow S$ を minimal Weierstraß models でともに S^0上 smooth fibration でかつ $\varphi^0 : W \times_S S^0 \to W' \times_S S^0$ という canonical section を保つ S^0上の同型があるとする。

すると φ^0 は S 上の同型 $\varphi : W \longrightarrow W'$ にのびる。

Cor (2.5). H_0 を S^0上の V.P.H.S (variation of polarized Hodge str.) で rank 2, weight 1 のものとする。このとき

proper surjective morphism $f: B \longrightarrow S$ で

(1) B は S 上の minimal Weierstraß model

(2) f は S^0 上 smooth

(3) $R^1 f_* \mathbb{Z}_B|_{S^0}$ は H_0 と V.H.S. の意味で同型

となるものが unique にある。

<u>証明</u> 小平先生の構成 [8, p.580, (i)] により S^0 上に smooth elliptic fibration $f^0: B^0 \longrightarrow S^0$ で f^0 が section をもち, $R^1 f^0_* \mathbb{Z}_{B^0} \simeq H_0$ となるのが作れる。だから (2.3) により $f: B \longrightarrow S$ ができる。さらに (2.3), (2.4) より uniqueness も出る。□

<u>Remark.</u> もし $S \setminus S^0$ が normal crossing な divisor にふくまれるならば B は rat. sing. のみしかもたず, B/S は relative minimal model になる。

さて, X, S を complex manifold, $\pi: X \to S$ を elliptic fibration とする。すると Zariski open set S^0 があって π は S^0 上 smooth になる。 $H_0 := R^1 \pi_* \mathbb{Z}_X|_{S^0}$ は locally const. system of rank 2 で S^0 上に V.P.H.S. を定める。ゆえに (2.5) から H_0 に associate した minimal Weierstraß model $f: B \longrightarrow S$ が決まる。

Problem (2.6). この $f: B \longrightarrow S$ は河井[7], 上野[12]の Basic elliptic fibration と同じものか?

Problem (2.7)

$$\mathbb{R}f_* IC^\cdot(\mathbb{C}_B) \simeq \bigoplus_{i=0}^{2} IC^\cdot(R^i f^\circ_* \mathbb{C}_{B^\circ}[-i])$$ がいえるか?

とにかく、S 上の minimal Weierstraß model で S° 上 smooth なものと S° 上の VPHS には1対1の関係があることがわかった。

以下 この $f: B \longrightarrow S$ について考える。$B \cong W(\mathcal{L}, a, b)$ for some minimal $(\mathcal{L}, a, b)$ とする。

Prop (2.8). (See Th 11.2 of [8]).

次の exponential sequence がある。

$$0 \longrightarrow j_* H_0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_S(B^\#) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}.$$

ここで $j: S^\circ \hookrightarrow S$, $B^\# := \{x \in B \mid f \text{ is smooth at } x\}$, $\mathcal{O}_S(B^\#)$ は $f: B^\# \longrightarrow S$ の section のなす sheaf.

証明

Σ を B の Weierstraß model としての canonical section とすると、$B^\# \longrightarrow S$ は Σ を zero となす group str. over S をもつ。ゆえに exponential map

$$f_*(T_{B^\#/S} \otimes \mathcal{O}_\Sigma) \longrightarrow \mathcal{O}_S(B^\#)$$ が定義され surjective になる。ここで $T_{B^\#/S}$ は relative tangent.

ところで $f_*(T_{B^\#/S} \otimes \mathcal{O}_\Sigma) \simeq \mathcal{L}$ なので、

$\mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S(B^\#)$ ができた。

S^0 上の上の射の kernel は H_0 で $H_0 \to \mathcal{L}_0$ は

$H_0 \hookrightarrow H_0 \otimes \mathcal{O}_{S^0} = \mathcal{H}_0 \twoheadrightarrow Gr_F^0(\mathcal{H}_0) = \mathcal{L}_0$ によって

与えられている。

もしも $S \setminus S^0$ が normal crossing な divisor D であれば

[1, Lemma (1.4)] により、

$\mathbb{R}j_* H_0 \xrightarrow{\sim} \Omega_S^\cdot(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_S} {}^{\ell}\mathcal{H}_0$. ここで

${}^{\ell}\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}_0$ の lower-canonical extension. そして

$\mathcal{L} = Gr_F^0({}^{\ell}\mathcal{H}_0)$ なので、 $j_* H_0 \to \mathcal{L}$ ができる。

$S \setminus S^0$ が normal crossing な divisor でないときも、今のことから

codim 1 で $j_* H_0 \to \mathcal{L}$ がつくれるから、実際 S 上でできる。

残りの $0 \to j_* H_0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_S(B^\#) \to 0$ の exactness は

S^0 上の exactness から出てくる。 $\square$

$\eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ をとってくる。(1.1) により、[8], [7], [12] と同じように はりあわせを変えて $B^\eta \to S$ という新しい elliptic fibration が作れ、次のことがわかる。

<u>Prop. (2.9)</u> $\pi: X \to S$ を elliptic fibration で S 上 local には π の bimeromorphic section が存在するものとすると、$\pi: X \to S$ からつくった $f: B \to S$ に対し ある $\eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ があって、X は B^η と S 上

bim. equiv. になる。

さらに exponential sequence に関しては次もいえる。

<u>Prop (2.10)</u>. (See Th 11.3 of [8]).

$c : H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#)) \longrightarrow H^2(S, j_*H_0)$ を exponential sequence から導かれた homomor. とする。すると、

$\theta, \eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ に対し $c(\theta) = c(\eta)$ ならば B^θ と B^η は S 上の deformation でつながる。

§3. Elliptic Threefold.

<u>Th (3.1)</u> $f : X \longrightarrow S$ を projective surj. morphism.

X: canonical sing. のみしかもたない normal variety

S: normal variety, $\exists L \in \mathrm{Pic}(S)$, $\exists m > 0$ で

$\mathcal{O}_X(mK_X) = f^*L$, $\dim X = \dim S + 1$ となっているとする。このときある effective $\mathbb{Q}$-divisor Δ on S があって、$[\Delta] = 0$, (S, Δ) は log-terminal

$$K_X =_{\mathbb{Q}} f^*(K_S + \Delta)$$ となる。

証明は、藤田 [2] の canonical bundle formula からすぐ出る。

この§では3次元のWeierstraß modelのminimal modelを作ることを考える。上のTh(3.1)から、高々quotient sing.しかもたないS上に$W(\mathcal{L}, a, b)$を作ればいいようだが、一般には$\mathcal{L}$はinvertible sheafでなくなるので次のように一般化する。

Sをnormal surface with only quotient sing. $\mathcal{L}$をS上のreflexive sheaf of rank 1, $a \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[-4]})$, $b \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[-6]})$を$4a^3+27b^2 \not\equiv 0$ on Sとなるsectionsとする。ここで$\mathcal{L}^{[k]}$は$\mathcal{L}^{\otimes k}$のdouble dual。

Sをlocalにみると、ある$m>0$とnowhere vanishing section $t \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[m]})$があるから、これが$\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{L}^{[i]}$に$\mathcal{O}_S$-alg. str.を入れて、

$$\tau : T := \underline{\mathrm{Specan}} \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{L}^{[i]} \longrightarrow S$$

とおけば、Tはnormal, τはétale in codim 1, $(\tau^*\mathcal{L})^\wedge =: \mathcal{M}$はinvertible sheafになる。ここで∧はdouble dualを表す。

ゆえにT上にWeierstraß model $W_T = W(\mathcal{M}, \tau^*a, \tau^*b)$が定義できる。ここにはGal(T/S)が$\sigma \in \mathrm{Gal}(T/S)$に対し$(X:Y:Z, u) \longmapsto (X:Y:Z, \sigma(u))$, $u \in T$というようにW_TにもTとcompatibleになるようにactするので、そこで$W = W_T/\mathrm{Gal}(T/S)$とおく。すると、Wはm, tのとり方によらないことがわかるので、

S上ではりあって global に $W \xrightarrow{p} S$ ができる。この W を $W(\mathcal{L}, a, b)$ と書く。$W \xrightarrow{p} S$ の fiber はすべて1次元なので、

$$\mathcal{O}_W(mK_W) \cong (p^*\mathcal{O}_S(mK_S - m\mathcal{L}))^\wedge$$

$$p_*\mathcal{O}_W(mK_W) \cong \mathcal{O}_S(mK_S - m\mathcal{L}) \text{ が成立。}$$

$m > 0$ で $mK_S - m\mathcal{L}$ が Cartier divisor になるのがあるから、

$$K_W =_{\mathbb{Q}} p^*(K_S - \mathcal{L}).$$

とくに W は $\mathbb{Q}$-Gorenstein normal variety。

<u>Th (3.2).</u> X を3次元 projective manifold で elliptic fibration $X \longrightarrow S$ で global bimeromorphic section をもつものがあるとする。すると X は uniruled か又は、X と birationally equiv. な W で good minimal model になっているものが存在する。

<u>証明</u> §2の結果から X は smooth projective surface S 上の minimal Weierstraß model $W(\mathcal{L}, a, b)$ で $\mathrm{div}(4a^3+27b^2)_{red}$ が normal crossing な divisor になっているとしてよい。ここで $K_W = p^*(K_S - \mathcal{L})$ だった。

さて今、$p: W(\mathcal{L}, a, b) \longrightarrow T$ を normal projective surface T with only quotient sing. 上 reflexive sheaf $\mathcal{L}$ からつくった一般化した Weierstraß model とする。さらに、

$W_T := W(\mathcal{L}, a, b)$ が高々 canonical singularity のみをもつと仮定する。すると(3.1)よりある effective $\mathbb{Q}$-divisor Δ があって、$-\mathcal{L} =_{\mathbb{Q}} \Delta$, (T, Δ) log-terminal,

$K_W =_{\mathbb{Q}} p^*(K_T + \Delta)$ となる。

もし K_W が not nef ならば、$K_T + \Delta$ が not nef なので Cone theorem ([4], [6]) により $K_T + \Delta$ に関する extremal ray R と contraction $\varphi = \mathrm{cont}_R : T \longrightarrow \bar{F}$ ができる。

もし $\dim \bar{F} \leqq 1$ なら、W 上に curve の family $\{C_\lambda\}$ で

$0 > K_W \cdot C_\lambda$, $\overline{\bigcup C_\lambda} = W$ となるものができるので、

[10] により W は uniruled.

ゆえに uniruled でないなら φ は birational, $(\bar{F}, \varphi_*(\Delta))$ も log-terminal になる。$(\varphi_* \mathcal{L})^\wedge = M$ とおく。

すると $a_{\bar{F}} := \varphi_* a \in \Gamma(\bar{F}, M^{[4]})$

$b_{\bar{F}} := \varphi_* b \in \Gamma(\bar{F}, M^{[6]})$ によって

$W_{\bar{F}} := W(M, a_{\bar{F}}, b_{\bar{F}}) \xrightarrow{\pi} \bar{F}$ をつくることができる。

明らかに W_T と $W_{\bar{F}}$ は birat. equiv.

この $W_{\bar{F}}$ が canonical sing のみしかもたないことを示す。

$\nu : Y \longrightarrow W_{\bar{F}}$ を resolution of sing. とすると、

$W_{\bar{F}}$: cano sing. のみ $\Longleftrightarrow$ $\nu_* \mathcal{O}_Y(mK_Y) = \mathcal{O}_{W_{\bar{F}}}(mK_{W_{\bar{F}}})$ for $m \gg 0$.

$K_{W_{\bar{F}}} = \pi^*(K_{\bar{F}} - M)$ なので、

これは $\pi_* \nu_* \mathcal{O}_Y(mK_Y) = \pi_* \mathcal{O}_{W_F}(mK_{W_F})$ と同値.

左辺 は $\varphi_* \mathcal{O}_T(m(K_T - \mathcal{L}))$

右辺 は $\mathcal{O}_F(m(K_F - M))$. に同型。

ところが今 $(K_T - \mathcal{L}) \cdot R < 0$ だから

$\varphi_* \mathcal{O}_T(m(K_T - \mathcal{L}))$ は reflexive sheaf になる。

ゆえに W_F は cano. sing. のみ。

従って はじめの $W \longrightarrow S$ から この方法で W が uniruled

でなければ K_{W_T} nef となる $S \longrightarrow T$ をつくることができる。

ところで $K_{W_T} = p^*(K_T + \Delta)$ より $K_T + \Delta$ nef になる。

今 surface 上 なので $K_T + \Delta$ が semi-aple。

ゆえに K_{W_T} は semi-ample. $\square$

<u>Th (3.3).</u> X : elliptic 3-fold, global section をもつ.

$\kappa(X) = 0$, $q(X) = 1$ とすると. X は次の

どれかと birat. equiv.

(I) $\kappa(S) = 0$ の nonsingular minimal surface S

上の Weierstraß model $W(K_S, a, b)$ で

ここで a, b は constant.

(II). $q(S) = 1$ の nonsingular minimal ruled surface S

上の Weierstraß model $W(K_S, a, b)$.

(III). $S = \mathbb{P}^2$ or $\Sigma_r := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-r))$ $0 \le r \le 12$

上の Weierstraß model $W(K_S, a, b)$.

<u>証明</u> (3.2) より、X は $W = W(\mathcal{L}, a, b) \longrightarrow S$ で

W が good minimal model となるものに birat. equiv.

K_W semi-ample, $\chi(W) = 0$, $p_g(W) = 1$ より

$K_W \cong \mathcal{O}_W$. ゆえに $p_*\mathcal{O}_W(K_W) \cong \mathcal{O}_S(K_S - \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_S$.

$\therefore$ $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_S(K_S)$.

$\mu : T \longrightarrow S$ を S の minimal resolution とする

このとき $\mu_*\mathcal{O}_T(-4K_T) = \mathcal{O}_S(-4K_S)$

$\mu_*\mathcal{O}_T(-6K_T) = \mathcal{O}_S(-6K_S)$ となるから、

$a \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T(-4K_T))$, $b \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T(-6K_T))$ とする。

そこで $W_T := W(K_T, a, b) \longrightarrow T$ を考えると、

$P_m(W) = 1$ なので W_T も 高々 cano. sing. のみで

$K_{W_T} \cong \mathcal{O}_{W_T}$ となる。 だから S は smooth projective

surface $\mathcal{L} = K_S$ としてよい。

もし S に (−1)−curve E があれば

$\nu : S \longrightarrow F$ を E の contraction としたとき、

F 上に Weierstraß model $W_F = W(K_F, \mu_*a, \mu_*b)$ が

できる。全く同じ理由で、W_F も 高々 cano sing のみ。

従って、(−1) curve をつぶしていって、S は relatively minimal

な surface としてよい。

(I). $\varkappa(S) \geqq 0$ とする. $a \in \Gamma(-4K_S)$, $b \in \Gamma(-6K_S)$ だから $\mathcal{O}_S(4K_S) \cong \mathcal{O}_S$ or $\mathcal{O}_S(6K_S) \cong \mathcal{O}_S$. しかも a, b は constant.

(II). $\varkappa(S) = -\infty$, $q(S) \geqq 1$ とする. Edge sequence $0 \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^1(W, \mathcal{O}_W) \to H^0(S, R^1p_*\mathcal{O}_W)$ と

$R^1p_*\mathcal{O}_W \cong \omega_S$ から $q(S) = q(W)$ がわかる.

$\alpha: S \to \mathrm{Alb}(S)$ を Albanese map とする。

すると $f: W \to S \to \mathrm{Alb}(S)$ は W の Albanese map.

ゆえに 川又[3] により f は surjective. S は ruled だから、

$\mathrm{Alb}(S)$ は elliptic curve。ゆえに $q(S) = q(W) = 1$.

(III). のこりは $S \cong \mathbb{P}^2$ or Σ_r.

ところが $r \geqq 13$ とすると $|-4K_S|_{fix} \geqq 4\Delta$, $|-6K_S|_{fix} \geqq 6\Delta$

, Δ は $\Delta^2 = -r$ となる $\Delta \cong \mathbb{P}^1$, なので,

$W(K_S, a, b)$ は minimal にならない。だから rat. sing. のみではなくなって矛盾. ゆえに $r \leqq 12$. $\square$

(I)(II)(III)のそれぞれの場合を調べる

(I): $\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ ならば: $W \cong E \times S$ over S

ここで $E = \{Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$ なる elliptic curve。

その他のときは étale cover $\tau: T \to S$ で $\mathcal{O}_T(K_T) = \mathcal{O}_T$ となるのがあるから W は $E \times T$ の quotient として書ける。

ここでの $\mathrm{Gal}(T/S)$ の action は (1,2) のどれかになる。

(II): $\mathrm{Alb}(S) = C$ とおく。川又 [5, Th 8.3] によれば、

ある étale covering $\tau : \tilde{C} \longrightarrow C$ があって

$W \times_C \tilde{C} \simeq F \times \tilde{C}$ over $\tilde{C}$ となる。F は $W \to C$ の fiber.

$\tilde{W} := W \times_C \tilde{C}$, $\tilde{S} := S \times_C \tilde{C}$, $\tilde{\Sigma} := \Sigma \times_C \tilde{C}$, Σ は

$W \longrightarrow S$ の canonical ~~sup~~ section とおく。

ここで $\tilde{\Sigma} \subsetneq \tilde{W} \simeq F \times \tilde{C} \longrightarrow F$ を考えると、

$0 = \kappa(F) > \kappa(\tilde{\Sigma}) = \kappa(\Sigma) = \kappa(S) = -\infty$ だから

この image Γ は F に一致しない。すると

$\tilde{\Sigma} \subsetneq \tilde{W} = F \times \tilde{C}$ は $\Gamma \times \tilde{C}$ を通過する。

ゆえに Γ は curve で $\tilde{\Sigma} \cong \Gamma \times \tilde{C}$ over $\tilde{C}$.

$\tilde{S} \cong \tilde{\Sigma}$ だから $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$.

改めて $\tilde{W} \longrightarrow \tilde{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \tilde{C}$ をみると、

$K_{\tilde{S}} = pr_1^*(K_{\mathbb{P}^1})$ だから $\mathbb{P}^1$ 上の Weierstraß model

$W_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ があって

$$\begin{tikzcd}
W_{\mathbb{P}^1} \times \tilde{C} \cong \tilde{W} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \tilde{C} \arrow[d] \\
W_{\mathbb{P}^1} \arrow[r] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

となる。

ゆえに $W_{\mathbb{P}^1} \cong F$ は K3 surface.

(III) $S = \Sigma_r$ $3 \leq r \leq 12$ とする。このとき

$|-4K_S|_{fix} \geq 2\Delta$, $|-6K_S|_{fix} \geq 2\Delta$

ここで Δ は $\Delta^2=-r$ なる $\Delta\cong\mathbb{P}^1$.

ゆえにどんな $a\in\Gamma(-4K)$, $b\in\Gamma(-6K)$ についても

$W(K_S,a,b)$ は nonsingular にならない。

しかし reduced linear systems

$|-4K_S|_{red}$ と $|-6K_S|_{red}$ は base pt free なので

次の Lemma より general な a,b に対しては $W(K_S,a,b)$

は高々 rational Gor. sing. しかもたない。

Lemma (3.4).

$p: W=W(\mathcal{L},a,b)\longrightarrow S$ を smooth surface 上の

Weierstraß model とする。 もし各点 $x\in S$ に対し

$\mathrm{mult}_x a\leq 3$ or $\mathrm{mult}_x b\leq 5$ がなりたてば

W has only rational Gor. sing.

証明は rat. sing. の deformation が rat. sing. である

ことからわかる。

$S=\mathbb{P}^2$ or Σ_r $0\leq r\leq 2$ については,

$|-K_S|$ が base pt free なので

general な $a\in\Gamma(-4K)$, $b\in\Gamma(-6K)$ に対し,

$W(K_S,a,b)$ は nonsingular になる。しかしこのとき

$\mathrm{div}(4a^3+27b^2)_{red}$ は normal crossing とは

限らない。

では、$\mathrm{div}(4a^3+27b^2)_{red}$ が normal crossings でないとき、どういう (a, b) に対し、$W(\mathcal{L}, a, b)$ が高々 rat. sing. のみになるのか？

$p: W = W(\mathcal{L}, a, b) \longrightarrow S$ を smooth surface 上の minimal Weierstraß model とする。

そして $x \in S$ において $\mathrm{mult}_x a \geq 4$, $\mathrm{mult}_x b \geq 6$ とする。 $\mu: T \longrightarrow S$ を x での blow up とすると、

$\mu^* a = a^* e^4$, $\mu^* b = b^* e^6$, ここで e は $\mu^{-1}(x) = E$ の defining eq. で

$a^* \in \Gamma(\mu^* \mathcal{L}^{-4} \otimes \mathcal{O}(-4E))$, $b^* \in \Gamma(\mu^* \mathcal{L}^{-6} \otimes \mathcal{O}(-6E))$

とかける。

Lemma (3.5) $W(\mathcal{L}, a, b)$ has only rational sing.

$\iff$ $W(\mu^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E), a^*, b^*)$ has only rational sing.

故に、(3.4), (3.5) により、もし a, b が与えられたら $W(\mathcal{L}, a, b)$ が高々 rat. sing かどうか check することができる。

特に、$\mathrm{mult}_x a \geq 8$, $\mathrm{mult}_x b \geq 12$ なる x があれば $W(\mathcal{L}, a, b)$ は rat. sing のみではない。

Example $S = \mathbb{P}^2$, $\Gamma(S, \mathcal{O}(-3)) \ni \alpha, \beta$ を $\mathrm{div}(\alpha)$, $\mathrm{div}(\beta)$ が transversal に交わる smooth cubic curves となるようにする。

すると、$\mathrm{mult}_x(\alpha^4) \geqq 4$ かつ $\mathrm{mult}_x(\beta^6) \geqq 6$ なる x は

$\mathrm{div}(\alpha) \cap \mathrm{div}(\beta)$ の 9 点。

そこで $\tau: T \longrightarrow S$ をこの 9 点を center とした blow up とすると、もし α, β が general ならば、$W(K_T, \alpha'^4, \beta'^6)$ は nonsingular になる。ここで $\tau^*\alpha = \alpha' \cdot e$, $\tau^*\beta = \beta' \cdot e$, e は τ の exceptional divisors の def. eq. ゆえにもとの $W(S, \alpha^4, \beta^6)$ も高々 rat. Gor sing. のみ。このTは $(\alpha' : \beta')$ により elliptic surface $T \longrightarrow \mathbb{P}^1$ になる。そして $W(K_T, \alpha'^4, \beta'^6) \to T \to \mathbb{P}^1$ は (elliptic curve) $\times$ (elliptic curve) を general fiber とする fiber space になる。

<u>Example</u>. $S = \mathbb{P}^2$, $\Gamma(S, \mathcal{O}(-6)) \ni u$ を $\mathrm{div}(u)$ が smooth になるものとする。ここで $W = W(K_S, u^2, u^3)$ を考える。すると (3,4) より、W は高々 rat. sing のみ。そして、$\lambda: V \longrightarrow S$ を $u \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S(-K_S)^{\otimes 2})$ からつくった double covering とすると V は K3 surface で、$W \times_S V$ は $E \times V$ と birationally equiv. になる。ここで $E = \{Y^2 Z = X^3 + XZ^2 + Z^3\}$ なる curve.

とくに $\mathrm{Var}(W/S) = 0$

<u>Th (3.6).</u> $S=\mathbb{P}^2$ or Σ_r $0\leq r\leq 2$ 上の smooth な Weierstraß model $W=W(K_S, a, b)$ は simply connected で $\chi_{top}(W)=-60\cdot c_1^2(S)$, $\rho(W)=\rho(S)+1$ となる。

$S=\mathbb{P}^2$ でみると $h^{1,0}=h^{2,0}=0$ で

$h^{1,1}=\rho=2$, $h^{2,1}=h^1(W, T_W)=272$.

一方 $U:=\{(a,b)\in\Gamma(S,-4K)\times\Gamma(S,-6K)\}/GL(3,\mathbb{C})$

の次元が 272.

しかも U 上の family $\{W(K_S\, a, b), [a,b]\in U\}$ において各点で Kodaira-Spencer map が injective になるから、結局 U が Kuranishi space になる。特に W の small deformation はまた $\mathbb{P}^2$ 上の Weierstraß model になる。

それから. $\Sigma\subset W$ を canonical section とすると. それ以外には $W\longrightarrow S=\mathbb{P}^2$ の section はなくて. しかも Σ を 1点につぶす contraction

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \cup & & \cup \\ \Sigma & \longrightarrow & q \end{array}$$

がある。この V は $\rho(V)=1$ で q で rat. Gor. sing をもつ。そして この W, V 以外に. W と birat. equiv. な minimal model が存在しないことがわかる。

References.

1. H. Esnault, E. Viehweg, Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, preprint.
2. T. Fujita, Zariski decomposition and canonical rings of elliptic threefolds, preprint.
3. Y. Kawamata, Characterization of abelian varieties, Compositio Math., 43 (1981) 253–276.
4. ———, The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math., 119 (1984) 603–633.
5. ———, Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic varieties, preprint.
6. Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, preprint.
7. S. Kawai, Elliptic fibre spaces over compact surfaces, Commen. Math. Univ. St. Paul., 15 (1967) 119–138.
8. K. Kodaira, On compact analytic surfaces II–III, Ann. of Math., 77 (1963) 563–626, ibid. 78 (1963) 1–40.
9. ———, On the structure of compact complex analytic surface I, Amer. J. Math., 86 (1964) 751–798.

10. Y. Miyaoka, S. Mori, A numerical criterion of uniruledness, preprint.

11. A. Moriwaki, Torsion freeness of higher direct images of canonical bundle, preprint.

12. K. Ueno, Classification of algebraic varieties I, Compositio Math., 27 (1973) 277–342.