

Refinament conforme per malles de quadrilàters i hexàedres

Autor: Joan Carreras Camins

Tutor: Josep Sarrate Ramos

Índex

Introducció	3
Capítol 1. Definicions i consideracions prèvies	9
Capítol 2. Refinament 2D	15
2.1 Refinament dins una pila de quadrilàters	15
2.2 Refinament <i>Edge-Based</i>	17
2.2.1 Algoritmes de Refinament <i>Edge-Based</i>	20
2.2.1.1 Algoritme <i>Edge-Based</i> Complet	23
2.2.1.2 Algoritme <i>Edge-Based</i> Complet Millorat	25
2.2.2 Exemples	27
2.3 Refinament <i>Node-Based</i>	31
2.3.1 Algoritmes de Refinament <i>Node-Based</i>	36
2.3.1.1 Algoritme <i>Node-Based</i> de Schneiders	39
2.3.1.2 Algoritme <i>Node-Based</i> de Descripció General	40
2.3.1.3 Algoritme <i>Node-Based</i> III	41
2.3.1.4 Algoritme <i>Node-Based</i> IV	41
2.3.2 Exemples	42
2.4 Anàlisi del comportament dels algoritmes de refinament 2D sota l'efecte d'un suavitzador	45
2.4.1 Diversos refinaments d'un mateix element	48
2.4.2 Diversos refinaments d'una mateixa aresta	52
2.4.3 Diversos refinaments d'un mateix node	57
2.4.4 Diversos refinaments de dos mateixos nodes	60
2.4.5 Refinaments successius dels dos pitjors elements	64

Capítol 3. Refinament 3D	67
3.1 Refinament dins una làmina d'hexàedres	67
3.2 Refinament <i>Edge-Based</i>	69
3.2.1 Algoritmes de Refinament <i>Edge-Based</i>	72
3.2.1.1 Existència de qualsevol patró <i>Edge-Based</i>	73
3.2.1.2 Algoritme <i>Edge-Based</i> Millorat	74
3.2.2 Exemples	78
3.3 Refinament <i>Node-Based</i>	81
3.3.1 Algoritmes de Refinament <i>Node-Based</i>	84
3.3.2 Exemples	85
Conclusions i futures línies d'investigació	89
Referències	93
Apèndix	95
Apèndix A: Mesura de la distorsió d'un element	96
Apèndix B: Millores topològiques	96

Introducció

El mètode dels elements finits és l'eina més usada per la resolució numèrica d'equacions en derivades parcials. Aquest mètode requereix prèviament una malla del domini en el que és considerada l'equació a resoldre. S'acostumen a considerar per problemes bidimensionals malles que tenen per elements triangles o bé quadrilàters. Per contra, en el cas tridimensional les malles considerades estan formades per elements tetraèdrics o bé hexaèdrics. S'han fet molts estudis de determinació d'algoritmes de generació de malles. Succeeix, però, que aquest problema és més senzill per malles de triangles que per malles de quadrilàters. Anàlogament, les malles de tetràedres presenten menys dificultat que les malles d'hexàedres. Actualment, molts esforços es centren en el camp de la generació de malles d'hexàedres, desafortunadament no hi ha encara algoritmes que presentin un comportament del tot adequat mallant volums complicats.

En un procés de càlcul adaptatiu, un estimador de l'error pot prescriure mides més petites per certs elements de la malla a fi d'aconseguir una millor aproximació de la solució exacta. Conseqüentment la malla requereix ser modificada mitjançant un algoritme de refinament. D'aquí el doble objectiu d'estudi d'aquest projecte: *i)* la determinació i *ii)* la implementació d'algoritmes de refinament, concretament per malles conformes, no estructurades i formades exclusivament per quadrilàters o bé hexàedres.

Un algoritme de refinament ha de complir les següents característiques:

- Refinar els elements de la malla d'acord amb les mides prescrites per l'estimador de l'error.
- El refinament ha de ser local, és a dir, ha de modificar el menor nombre possible d'elements que no els cal ser refinats.

- La malla refinada ha de mantenir la conformitat de la malla original.
- La malla refinada ha de ser de bona qualitat, en particular, ha de contenir elements poc distorsionats.

Cal també remarcar una altre camp en el que es considera la conveniència de refinar una malla, concretament, en la generació automàtica de malles formades per elements hexaèdrics. La idea fonamental consisteix en considerar algorismes basats en refinaments successius d'una malla inicial [6, 7, 8].

La majoria de mètodes de refinament per malles conformes amb elements quadriculars o hexaèdrics es basen en una senzilla tècnica anomenada *Shrink and Connect* o *Pillowng* [8, 12, 13]. Segons Tchou *et al.* [8], no hi ha gaires més operacions locals possibles per refinar malles de quadrilàters o hexàedres mantenint-ne la conformitat. D'aquest tipus de mètodes de refinament destaca un mètode més general anomenat Refinament de Schneiders [1, 2]. El més rellevant d'aquest mètode és que determina el refinament a partir de la substitució de cada element per un patró convenient etiquetat per nodes marcats. Tanmateix, juntament amb el mètode de Refinament de Schneiders, és considerat un altre mètode semblant que utilitza patrons etiquetats per arestes marcades [3].

El primer capítol d'aquesta memòria inclou definicions i consideracions prèvies. Els dos capítols principals tracten el problema de refinament per malles formades per quadrilàters (capítol 2) i el mateix problema per malles formades per elements hexaèdrics (capítol 3). L'estructura dels capítols segon i tercer és la mateixa ja que els mètodes de refinament que es consideren en cada capítol són mètodes anàlegs. Concretament, aquests dos capítols tenen tres parts comunes:

- Refinament dins una pila de quadrilàters (làmina d'hexàedres).
- Refinament *Edge-Based*.
- Refinament *Node-Based*.

Els tres apartats esmentats es consideren amb aquest ordre per seguir un mètode d'exposició deductiu. El primer d'aquests apartats és de caràcter introductori; el refinament que s'hi descriu és molt senzill i pot ser considerat també com un refinament de tipus *Pillowing*. Els següents dos apartats comprenen algoritmes més sofisticats que són el principal objecte d'estudi. Concretament, els algoritmes estudiats permeten realitzar refinaments substituint elements per certs patrons. Un algoritme si determina els seus patrons etiquetant-los per arestes s'ha considerat designar-lo com un algoritme de tipus *Edge-Based*. Altrament, si etiqueta els seus patrons per nodes marcats és considerat del tipus *Node-Based*. El segon capítol té un quart apartat que considera un anàlisi dels diferents mètodes de refinament considerats per malles bidimensionals.

El mètode de refinament de Schneiders per malles bidimensionals formades per quadrilàters considera un patró per cada configuració possible de nodes marcats d'un element (i.e., un node marcat, dos nodes marcats consecutius, dos nodes marcats oposats, tres nodes i quatre nodes). Una de les consideracions d'aquest projecte consisteix en prendre patrons alternatius per dues configuracions possibles de nodes marcats. D'aquesta manera s'han determinat altres algoritmes de refinament anomenats *NB-III* [7], *NB-IV* i *NB-DG* a fi de millorar l'algoritme de Schneiders. L'apartat de Refinament *Node-Based* del capítol 2 inclou aquests quatre algoritmes.

També per malles bidimensionals formades per quadrilàters s'ha considerat l'algoritme anteriorment citat que utilitza patrons amb arestes marcades [1, 3]. Aquest algoritme ha estat anomenat *Edge-Based* Bàsic, per falta de nom i d'acord amb la seva naturalesa. Només inclou dos patrons, un patró per un element amb una aresta marcada, i un patró per un element amb quatre arestes marcades. Aquests dos patrons han estat

designats com patrons bàsics. A més a més s'han determinat patrons per les altres configuracions possibles d'arestes marcades, i a partir d'ells han estat determinats dos nous algoritmes designats com *EB-C* i *EB-CM*. L'apartat de Refinament *Edge-Based* del capítol 2 inclou aquests tres algoritmes.

L'ús d'un suavitzador permet millorar globalment la qualitat d'una malla. L'apartat 2.4 del capítol 2 té per objectiu comparar la qualitat de les malles obtingudes per cadascun dels algoritmes de refinament i que posteriorment han estat suavitzades. Es consideren cinc tests enfocats en dos aspectes. Els quatre primers tests consisteixen en fer diversos refinaments successius per una entitat d'una malla, obtenint elements distorsionats concentrats en la zona de refinament. L'altre test és de caràcter expansiu i és considerat per il·lustrar les patologies més pròpies de cada mètode que es puguin donar en una situació arbitrària. Aquests tests entesos com indicadors de la qualitat d'un mètode de refinament serveixen per comparar els algoritmes considerats.

Els algoritmes de refinament de malles d'elements hexaèdrics que formen part del capítol 3 són basats en els algoritmes bidimensionals. Però cal remarcar, que no és possible concebre la versió tridimensional de tots els algoritmes *Node-Based* del capítol 2, per una condició de paritat del nombre de quadrilàters disposats en les cares d'un cert patró [2, 9]. Un fet il·lustrador de la limitació que suposa aquesta condició de paritat és que l'algoritme de Schneiders per malles amb elements hexaèdrics està compost per només quatre patrons [1, 2]; i a més a més, no és possible determinar una descomposició hexaèdrica per un total set patrons. Una altra limitació conseqüència de la condició de paritat és que un dels patrons hexaèdrics bàsics corresponent a dos dels algoritmes *Node-Based* bidimensionals considerats no té una descomposició en hexàedres.

En el capítol 3, la major contribució és per partida doble en l'apartat 3.2 corresponent al mètode de Refinament *Edge-Based*. En primer lloc, s'obté un resultat teòric que assegura l'existència d'una descomposició en

hexàedres per qualsevol patró. En segon lloc, es determinen nous patrons no bàsics que s'incorporen en un nou algoritme anomenat *EB-M* que correspon a la versió tridimensional de l'algoritme *EB-CM*. Cal com a futura línia d'investigació desenvolupar pels algoritmes del capítol 3 un estudi del comportament que presenten sota l'efecte d'un suavitzador.

El primer capítol inclou diverses definicions i consideracions prèvies. S'hi inclou un plantejament formal del problema de refinament. Cal remarcar també, que aquest primer capítol descriu la malla dual d'una malla de quadrilàters o hexàedres [4]. S'ha considerat oportú incloure aquest concepte per un doble motiu. En primer lloc, un refinament pot ser interpretat com la inclusió d'una corba dual (o superfície dual, pel cas tridimensional). En segon lloc, encara que els efectes d'un refinament són locals per mantenir la conformitat de la malla cal considerar un ajust global de les connectivitats; i precisament, la malla dual conté informació sobre les connectivitats de la malla primal.

Capítol 1. Definicions i consideracions prèvies

Def 1. Es defineix una malla M com el parell (N, E) on N és el conjunt de nodes i E és el conjunt d'elements. A partir de M es pot determinar el conjunt d'arestes A . En cas de ser els elements de E tridimensionals, també es pot determinar el conjunt de cares C a partir de M .

Def 2. M és considerada una malla de quadrilàters (hexàedres) si cada elements de E és un quadrilàter (hexàedre).

Def 3. Una malla de quadrilàters M és conforme si cada parella d'elements $e_1, e_2 \in E$ compleix només una de les següents condicions:

- e_1, e_2 comparteixen una aresta i dos nodes.
- e_1, e_2 comparteixen un node.
- La intersecció de e_1, e_2 és buida.

Def 4. Una malla d'hexàedres M és conforme si cada parella d'elements $e_1, e_2 \in E$ compleix només una de les següents condicions:

- e_1, e_2 comparteixen una cara, quatre arestes i quatre nodes.
- e_1, e_2 comparteixen una aresta i dos nodes.
- e_1, e_2 comparteixen un node.
- La intersecció de e_1, e_2 és buida.

Def 5. Una malla de quadrilàters (hexàedres) M és estructurada si cada node interior de la malla és vèrtex de quatre (vuit) elements. Altrament, es diu que és no estructurada.

Al llarg d'aquest treball l'interès es centra en malles de quadrilàters o d'hexàedres, conformes i no estructurades.

Plantejament del problema de refinament

La necessitat de refinar esdevé d'un requeriment geomètric imposat per un estimador de l'error: un element e de mida h ha de ser substituït per elements de mida h_e , tal que $h_e < h$.

Def 6. Donada una mida prescrita h_e per un element $e \in E$ de mida h , es defineix el nivell de refinament $\eta(e)$ com el nombre de refinaments que cal realitzar per substituir e amb elements de mida h_e .

Anàlogament es defineixen els nivells de refinament de les arestes (i cares, si la malla és d'hexàedres). També un node pot tenir nivell de refinament assignat.

Considerant que amb els refinaments estudiats les arestes són dividides en tres parts, el nivell de refinament d'un element es pot calcular com:

$$\eta(e) = \left\lceil \log_3 \frac{h}{h_e} \right\rceil$$

Per malles formades per quadrilàters, els mètodes de refinament estudiats permeten dividir:

- Un element e de E en $9^{\eta(e)}$ elements.
- Una aresta a de A en $3^{\eta(a)}$ arestes.

Per malles formades per hexàedres, els mètodes de refinament estudiats permeten dividir:

- Un element e de E en $27^{\eta(e)}$ elements.
- Una cara c de C en $9^{\eta(c)}$ cares.
- Una aresta a de A en $3^{\eta(a)}$ arestes.

Malla dual

Def 7. La malla dual M^* d'una malla M de quadrilàters es defineix a partir de *i*) i *ii*) :

i) la co-dimensió de cada entitat de M , concretament:

Malla M		Malla dual M^*
Element (dimensió = 2)	\leftrightarrow	Centroide (co-dimensió = 0)
Aresta (dimensió = 1)	\leftrightarrow	Aresta (co-dimensió = 1)
Node (dimensió = 0)	\leftrightarrow	2-Cel·la (co-dimensió = 2)

ii) una aresta de la malla dual connecta dos centroides si els dos respectius quadrilàters de M comparteixen aresta.

Anàlogament es defineix la malla dual per una malla d'hexàedres:

Def 8. La malla dual M^* d'una malla M d'hexàedres es defineix a partir de *i*) i *ii*) :

i) la co-dimensió de cada entitat de M , concretament:

Malla M		Malla dual M^*
Element (dimensió = 3)	\leftrightarrow	Centroide (co-dimensió = 0)
Cara (dimensió = 2)	\leftrightarrow	Aresta (co-dimensió = 1)
Aresta (dimensió = 1)	\leftrightarrow	2-Cel·la (co-dimensió = 2)
Node (dimensió = 0)	\leftrightarrow	3-Cel·la (co-dimensió = 3)

ii) una aresta de la malla dual connecta dos centroides si els dos respectius hexàedres de M comparteixen cara.

Una malla M i la seva malla dual M^* estan unívocament determinades [4].

La malla dual d'una malla de quadrilàters (hexàedres) es pot considerar com un arranjamant de corbes (superfícies) anomenades corbes duals (superfícies duals) [4].

Def 9. Una pila de quadrilàters (làmina d'hexàedres) és la col·lecció d'elements d'una malla de quadrilàters (hexàedres) M corresponent a una corba (superfície) dual de M^* .

La Figura 1 mostra una malla de quadrilàters (Figura 1 (a)) i la corresponent malla dual superposada en la malla primal (Figura 1 (b)). Observis que tota 2-Cel·la inclou en el seu interior només un node de la malla primal. Observis també que una 2-Cel·la és un polígon de tants costats com tantes arestes surten del node corresponent. La Figura 1 (b) mostra colorejades 2-Cel·les de 3, 4 i 5 costats.

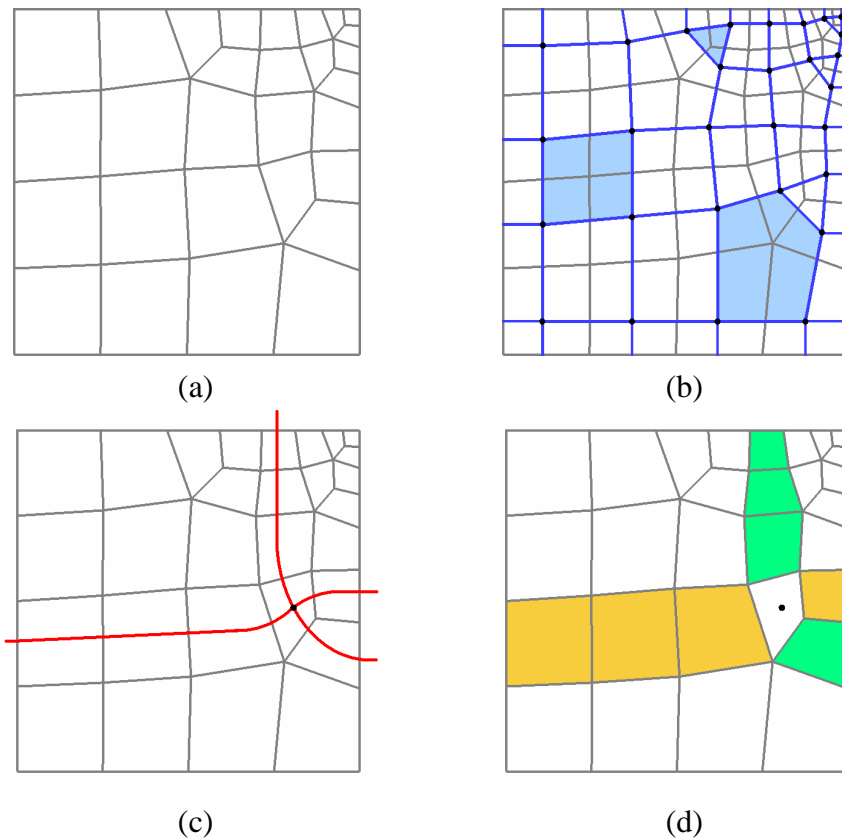


Figura 1: (a) Malla M . (b) Malla M^* superposada en M . (c) Dues corbes duals definides recorrent arestes duals de M^* . (d) Dues piles de quadrilàters definides per les dues corbes duals de (c).

En la Figura 1 (c) es mostren dues corbes duals obtingudes recorrent arestes de malla dual. En la Figura 1 (d) són colorejades en la malla primal les dues piles de quadrilàters determinades per les corresponents corbes duals.

Considerant la malla dual d'una malla de quadrilàters, un centroide correspon a la intersecció de dues corbes duals o a l'autointersecció d'una corba dual, Figura 1 (c).

En el cas de considerar la malla dual d'una malla d'hexàedres, un centroide correspon a la intersecció de tres superfícies duals. Tanmateix, la intersecció de dues superfícies duals és una corba dual. Com a conseqüència un centroide també és intersecció de tres corbes duals. Les tres corbes duals que intersequen en un centroide determinen els sis centroides que es corresponen amb els sis hexàedres adjacents per cara.

Refinar una malla conforme M és equivalent a afegir corbes duals en la malla dual M^* . D'aquesta manera s'obtenen nous centroides que equivalen a nous elements de la malla primal, i les connexions queden determinades per les noves arestes duals. Cal remarcar la importància d'aquesta caracterització. Un refinament és una modificació local d'una malla però les connectivitats afectades han de ser administrades globalment. En ocasions, seran considerades les configuracions duals obtingudes per un refinament a fi d'assegurar-ne la conformitat.

Capítol 2. Refinament 2D

En aquest capítol es descriuen i s'analitzen diversos algoritmes de refinament conforme de malles bidimensionals formades exclusivament per quadrilàters. Tanmateix, la malla dual d'una malla de quadrilàters es pot considerar un arranjament de corbes duals. Cada intersecció de dues corbes duals és un centroide, que es correspon amb un element de malla primal.

2.1 Refinament dins una pila de quadrilàters

Primerament, cal notar que un element es pot refinar afectant només arestes corresponents a una pila d'elements, com mostra la Figura 2.

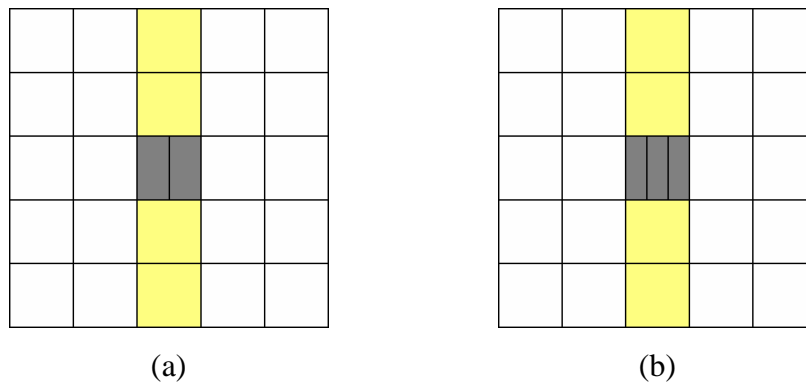


Figura 2: Refinament no conforme d'un element per dues arestes oposades que determinen una pila. (a) Dividint les arestes en dues arestes. (b) Dividint les arestes en tres arestes. La pila d'elements determinada és pintada de color groc.

Un refinament conforme que divideixi un element com en la Figura 2 (a) ha de ser propagat al llarg de tots els elements de la pila [4], com mostren les Figures 3 (a) i 3 (c). En canvi, realitzant un refinament com en la Figura 2 (b), consistent en dividir les arestes en tres arestes, s'aconsegueix un refinament conforme que no es propaga al llarg de tota la pila, veure Figures 3 (b) i 3 (d).

Fent un refinament com el de la Figura 3 (b) queden afectats només els dos elements que comparteixen les arestes refinades. Es designen aquests elements com zona de transició del refinament, que són els elements responsables de garantir-ne la conformitat.

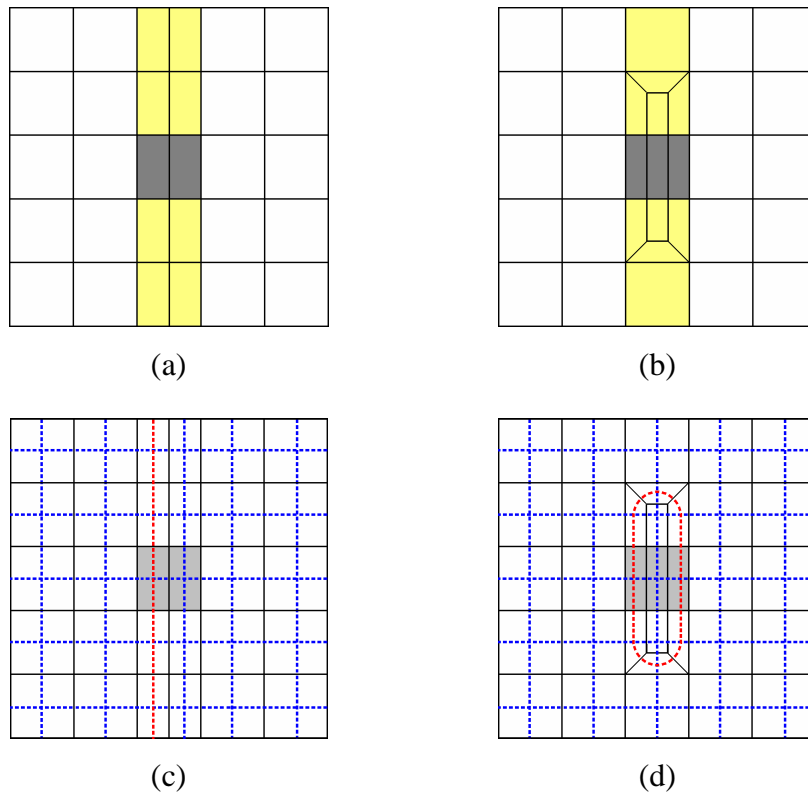


Figura 3: Refinament conforme d'una pila per una cara marcada. (a) Dividint les arestes en dues arestes i havent d'arribar arribant a la frontera. (b) Dividint les arestes en tres arestes i involucrant només dues cares més. (c),(d): Respectives malles duals.

Des del punt de vista dual, fer un refinament consisteix en incloure corbes duals. La corba dual afegida pel refinament de la Figura 3 (a) és forçada a recórrer tota la pila d'elements involucrada. Tanmateix, el refinament de la Figura 3 (b) correspon a una corba dual tancada. Les corbes duals de les Figures 3 (a) i 3 (b) són mostrades en les Figures 3 (c) i 3 (d)

respectivament. Per evitar la propagació del refinament al llarg de tota la pila i per no sobrecarregar d'elements la malla cal considerar refinaments a partir de corbes duals tancades.

2.2 Refinament *Edge-Based*

Aquest refinament es basa en combinar refinaments com els de l'apartat 2.1 per cadascuna de les dues piles que determinen un element. La Figura 4 (a) mostra la malla de quadrilàters obtinguda fent un Refinament *Edge-Based* per un element marcat. La Figura 4 (b) il·lustra les corbes duals de la mateixa malla resultant, on es veu que el refinament consisteix en la inserció de dues corbes duals tancades, una per cada pila. L'element marcat esdevé refinat en nou elements.

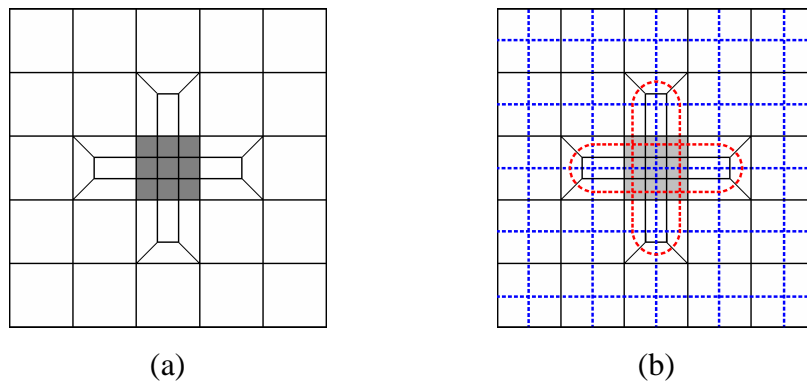


Figura 4: Refinament conforme *Edge-Based* per un element marcat. Consisteix en la inclusió de dues corbes duals tancades, una per cada pila. (a) Malla refinada. (b) Corbes duals de la malla: aportades pel refinament (vermell) i corbes originals (blau).

La Figura 5 mostra el comportament d'aquest tipus de refinament per un cas concret de més d'un element marcat per pila. S'observa en la figura que els quatre elements involucren dues piles horitzontals i dues piles verticals. Des d'un punt de vista dual, el refinament s'ha assolit inserint quatre corbes duals tancades, una per cada pila.

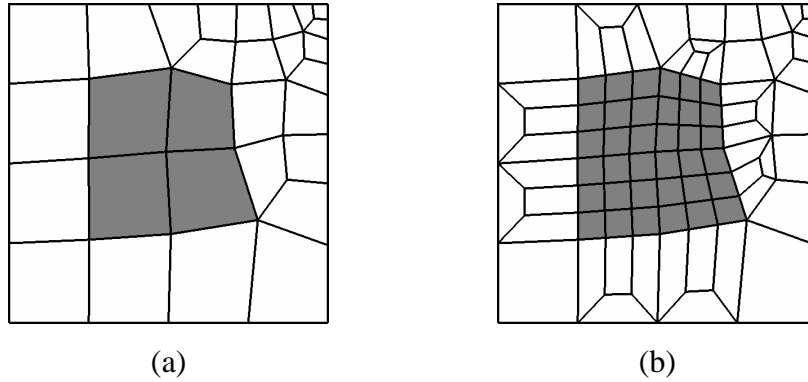


Figura 5: Refinament conforme *Edge-Based* per quatre element marcats.
 (a) Malla original.
 (b) El refinament corresponent.

Tanmateix, el tipus de refinament *Edge-Based* es pot definir a partir de dos patrons, com es pot veure en les Figures 4 (a) i 5 (b). Es tracta dels següents patrons:

- Patró de quatre arestes marcades: element refinat, Figura 6 (a).
- Patró d'una aresta marcada: element de transició, Figura 6 (b).

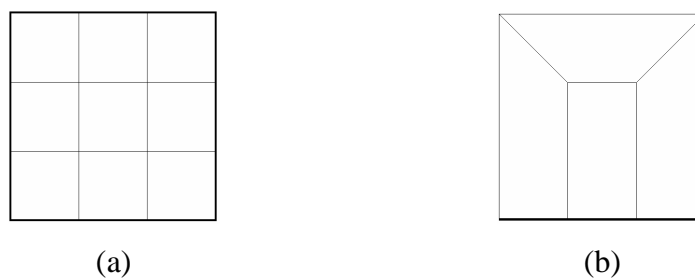


Figura 6: Patrons bàsics per un Refinament *Edge-Based* conforme.
 (a) Patró per un element amb quatre arestes marcades.
 (b) Patró per un element amb una aresta marcada.

Els patrons de la Figura 6 s'anomenen patrons bàsics pel mètode de Refinament *Edge-Based*. L'algoritme de refinament definit només a partir dels patrons bàsics s'anomena *Edge-Based* Bàsic. Els patrons s'etiqueten amb arestes marcades, d'aquí el nom *Edge-Based*. La conformitat del refinament està assegurada usant aquests patrons. Els patrons propis d'un Refinament dins una pila (apartat 2.1) també s'etiqueten per arestes. De fet, l'algoritme *Edge-Based* Complet que és definit més endavant permet considerar el mètode de Refinament dins una pila com un cas particular de refinament *Edge-Based*.

Cal notar que el mètode de Refinament *Edge-Based* refina les arestes marcades en tres noves arestes i els elements marcats en nou elements nous. Per realitzar un refinament s'admet com a *input* qualsevol tipus d'entitat de la malla (tant elements, com arestes i com nodes). Un node marcat per ser refinat amb el Refinament *Edge-Based* Bàsic aporta tots els elements que el tenen com a vèrtex.

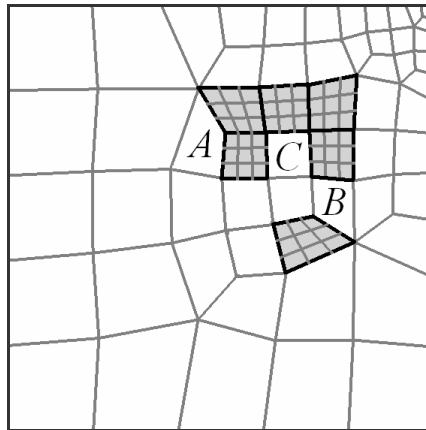


Figura 7: Refinament no conforme de sis elements d'una malla. A més d'elements de transició amb una aresta marcada apareixen altres elements de transició amb dos o tres arestes marcades (elements A,B,C).

La necessitat de refinar configuracions d'elements marcats com la que mostra la Figura 7, obliga a escollir un criteri d'entre dues opcions:

- I. Expandir el conjunt d'elements marcats: marcant la resta d'arestes dels elements A, B, C de la Figura 7.
- II. No expandir el conjunt d'elements marcats definint nous patrons de transició:
 - i)* Patró de dues arestes consecutives marcades (cas de l'element A de la Figura 7).
 - ii)* Patró de dues arestes oposades marcades (cas de l'element B de la Figura 7).
 - iii)* Patró de tres arestes marcades (cas de l'element C de la Figura 7).

Per la determinació d'un algoritme de Refinement *Edge-Based* és més indicada l'opció II. El motiu és que per l'opció I el conjunt d'elements a refinar pot ser estès considerablement (com es veu en el primer exemple de l'apartat 2.2.2, Figura 15).

2.2.1 Algoritmes de Refinement *Edge-Based*

Per cadascun dels elements A, B, C de la Figura 7 és considerat un patró oportú. Amb aquests nous patrons i els patrons bàsics són definits posteriorment dos algoritmes. Per determinar la malla de quadrilàters adient per cada patró cal satisfer les restriccions de refinament imposades en les arestes dels patrons, tanmateix els patrons són:

Patró de dues arestes consecutives marcades (cas de l'element A de la Figura 7). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta dues arestes consecutives que són refinades en tres arestes cadascuna. El contorn del patró és discretitzat en vuit arestes, veure Figura 8 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 8 (b), i està format per cinc quadrilàters.

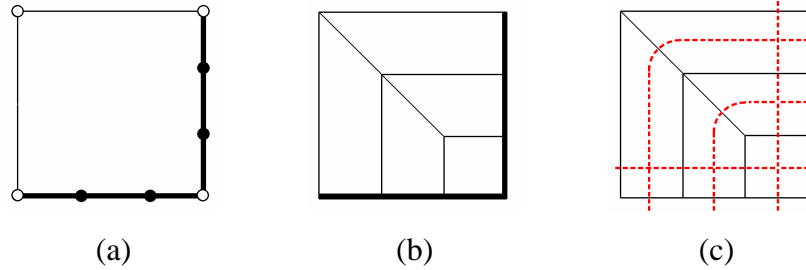


Figura 8: Procés d'obtenció del patró de dues arestes consecutives marcades. (a) Quadrilàter amb arestes imposades en la frontera: els nodes blancs són els nodes originals, els negres resulten del refinament de les dues arestes marcades. (b) Patró determinat per aquest cas. (c) Configuració de les corbes duals del patró.

Patró de dues arestes oposades marcades (cas de l'element B de la Figura 7). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta dues arestes oposades que són refinades en tres arestes cadascuna. El contorn del patró és discretitzat en vuit arestes, veure Figura 9 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 9 (b), està format per tres quadrilàters. Cal dir que aquest patró correspon pròpiament a algoritmes de Refinament dins una pila.

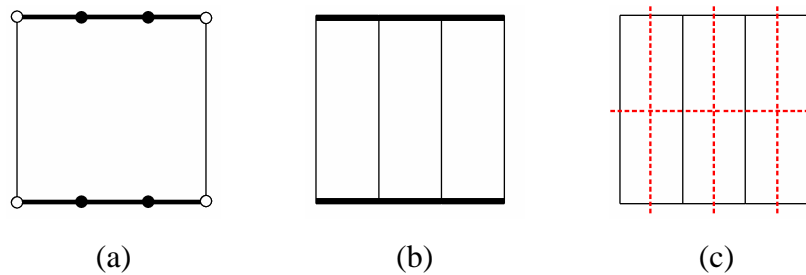


Figura 9: Procés d'obtenció del patró de dues arestes oposades marcades. (a) Quadrilàter amb arestes imposades en la frontera: els nodes blancs són els nodes originals, els negres resulten del refinament de les dues arestes marcades. (b) Patró determinat per aquest cas. (c) Configuració de les corbes duals del patró.

Patró de tres arestes marcades (cas de l'element *C* de la Figura 7). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta tres arestes que són refinades en tres arestes cadascuna. El contorn del patró és discretitzat en deu arestes, veure Figura 10 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 10 (b), i està format per deu quadrilàters.

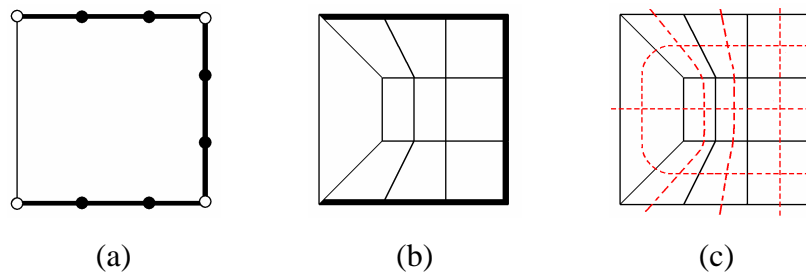


Figura 10: Procés d'obtenció del patró de tres arestes marcades. (a) Quadrilàter amb arestes imposades en la frontera: els nodes blancs són els nodes originals, els negres resulten del refinament de les dues arestes marcades. (b) Patró determinat per aquest cas. (c) Configuració de les corbes duals del patró.

Les eleccions d'aquests tres nous patrons són bones segons tres aspectes:

- i)* Aquests tres patrons mantenen la conformitat que els patrons bàsics garanteixen.
- ii)* Cada patró està format per un reduït nombre de quadrilàters degut a que la seva configuració dual presenta poques interseccions (centroïdes). Veure Figures 8 (c), 9 (c), 10 (c).
- iii)* Des d'un punt de vista topològic, tot node inserit en l'interior d'una aresta refinada té grau de connectivitat quatre, que és el grau de connectivitat òptim [5].

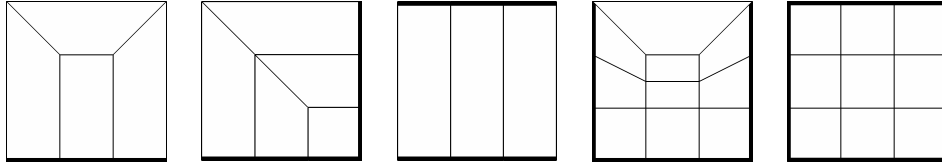


Figura 11: Patrons usats pels algoritmes *Edge-Based* Complet i *Edge-Based* Complet Millorat.

2.2.1.1 Algoritme *Edge-Based* Complet

Aquest algoritme aplica per cada element amb arestes marcades el patró requerit, segons la Figura 11. Aquests patrons són els bàsics (Figura 6) i els tres patrons de les Figures 8-10. L'algoritme definit s'anomena Algoritme *Edge-Based* Complet, també s'escriu com algoritme *EB-C*.

Les arestes són les etiquetes dels diferents patrons però tant els elements com els nodes poden ser marcats per refinar. Un element marcat aporta les quatre arestes com a arestes marcades. Un node marcat aporta totes les arestes que el tenen per extrem (aquest criteri no es pot prendre amb el mètode *Edge-Based* Bàsic). La transmissió de nivells de refinament és natural, consisteix en combinar recursivament aquests criteris:

- Si una aresta té nivell de refinament η aleshores després de ser refinada les tres arestes noves tenen un nivell de refinament $\eta-1$.
- Si un element té un nivell de refinament η aleshores després de ser refinat (havent marcat les seves arestes no marcades) els nou elements nous tenen un nivell de refinament $\eta-1$.
- Si un node té un nivell de refinament η aleshores després de ser refinat (havent marcat les arestes que el tenen per extrem no marcades) el nivell de refinament del node esdevé $\eta-1$.

La Figura 12 mostra un exemple de transmissió de nivells de refinament d'arestes. S'observa que l'angle colorejat en la figura decreix en cada iteració de refinament, donant lloc a elements més distorsionats (en l'Apèndix A es detalla el model de Oddy de mesura de la distorsió, segons [11]). Aquest mateix comportament ja es dona en l'algoritme *Edge-Based Bàsic*. Per aquest fet, Schneiders qualifica el mètode de Refinement *Edge-Based Bàsic* de mètode inestable [1]. La Figura 13 mostra dues altres configuracions que donen lloc a elements distorsionats com els de la Figura 12.

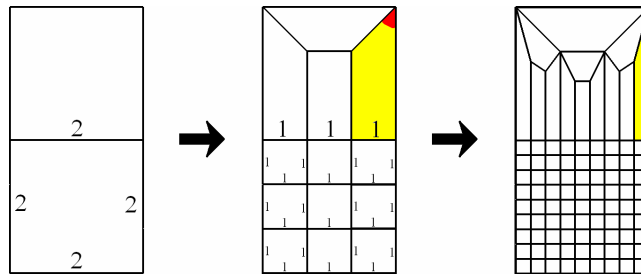


Figura 12: Exemple de transmissió dels nivells de refinament usant l'algoritme *EB-C*. S'indiquen els nivells de refinament no nuls per cada aresta. Amb vermell és colorejat un angle que decreix per cada nivell de refinament, ocasionant una major distorsió a l'element groc.

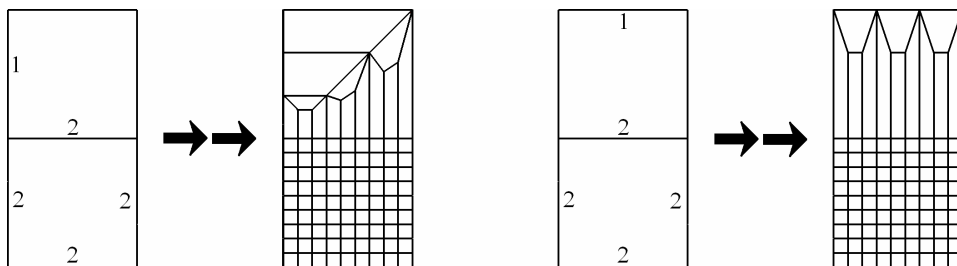


Figura 13: Dos exemples de transmissió dels nivells de refinament usant l'algoritme *EB-C*. Reflecteixen situacions anàlogues a la situació de la Figura 12.

2.2.1.2 Algoritme *Edge-Based* Complet Millorat

En aquesta secció es defineix l'Algoritme *Edge-Based* Complet Millorat, també anomenat *EB-CM*. Aquest algoritme considera els mateixos patrons que l'algoritme *EB-C*, però considera un altre criteri per la transmissió dels nivells de refinament aplicat a les arestes, anomenat criteri **c.CM**. El criteri és determinat per obtenir un comportament regular de l'algoritme *EB-CM* en situacions en les que l'algoritme *EB-C* presenta un comportament pitjor en cada nivell de refinament. Per elements i nodes l'algoritme *EB-CM* utilitza els mateixos criteris que l'algoritme *EB-C*. El criteri **c.CM** és el següent:

- c.CM** Si una aresta té nivell de refinament $\eta > 1$ aleshores es marquen les seves arestes adjuntes no marcades. Després de ser refinada les tres arestes noves tenen un nivell de refinament $\eta - 1$.

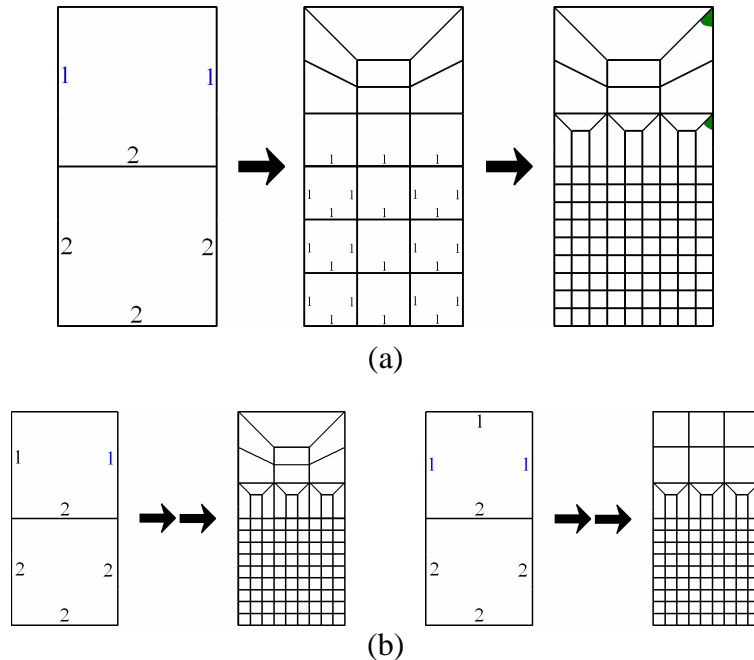


Figura 14: Exemples de transmissió dels nivells de refinament usant l'algoritme *EB-CM*. Els números de color negre representen els nivells de refinament prescrits. Els números de color blau

representen els nivells de refinament atorgats pel criteri **c.CM**. Amb verd és colorejat l'angle que es manté constant per cada nivell de refinament.

La Figura 14 (a) mostra la transmissió de nivells de refinament usant l'algoritme *EB-CM* amb les mateixes prescripcions que la Figura 12. Clarament, l'algoritme *EB-CM* presenta un comportament regular al llarg de les dues iteracions de refinament. En canvi, l'algoritme *EB-C* presenta un comportament pitjor per cada iteració de refinament (Figura 12). La Figura 14 (b) mostra com el criteri **c.CM** permet evitar també refinaments com els de la Figura 13.

2.2.2 Exemples

Per il·lustrar la diferència de comportament entre els mètodes presentats anteriorment, en la Figura 15 es consideren tres malles uniformes en les que els elements a refinar són pintats amb color gris.

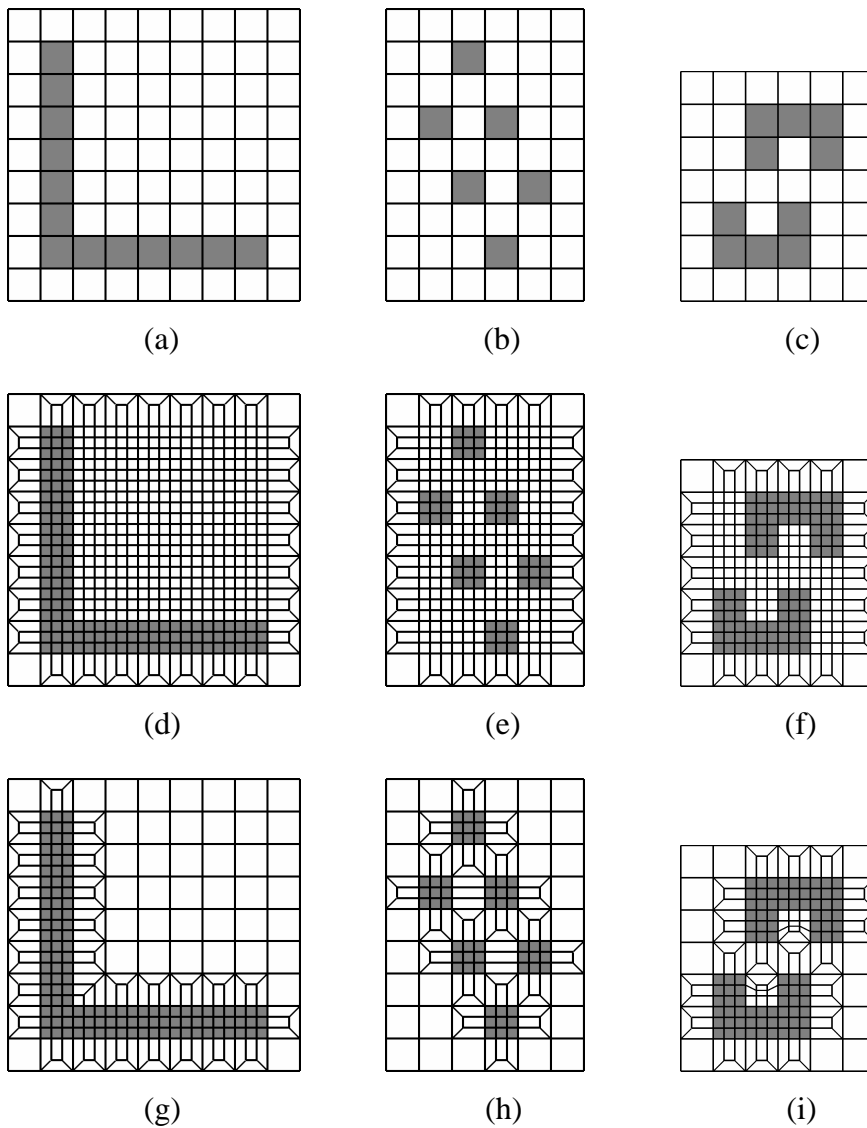
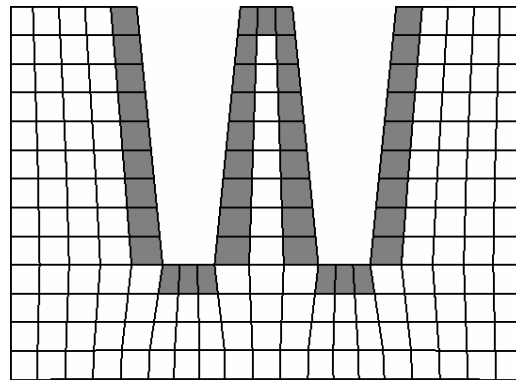


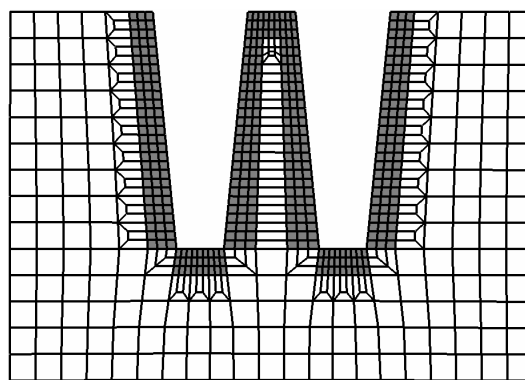
Figura 15: (a), (b), (c): Tres configuracions de quadrilàters a refinar. (d), (e), (f): Refinaments a partir de l'algoritme *Edge-Based* Bàsic. (g), (h), (i): Refinaments aplicant l'algoritme *EB-C*.

En la Figura 15 es mostra com l'algoritme *Edge-Based* Bàsic dóna lloc a una extensa zona de transició del refinament. Per contrari, l'algoritme *EB-C* rebaixa significativament l'expansió a partir de l'ús de patrons no bàsics.

Un exemple de refinament que inclou tots els patrons de l'algoritme *Edge-Based* Complet és el de la Figura 16. Cal observar que no tots els patrons apareixen el mateix nombre de vegades; hi ha patrons molt més usuals que d'altres. Tanmateix, els patrons bàsics són els més usuals.

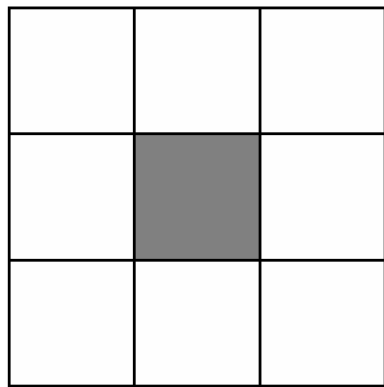


(a)

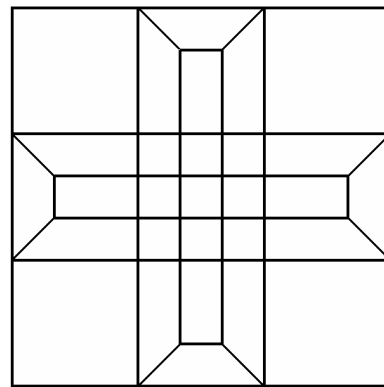


(b)

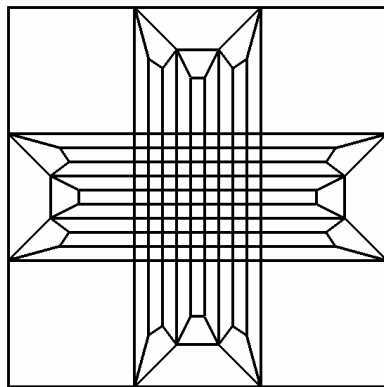
Figura 16: (a) Malla original amb els elements marcats amb color gris.
(b) Malla resultant d'un refinament *Edge-Based* complet.
Resulta la mateixa malla usant *EB-C* com *EB-CM*.



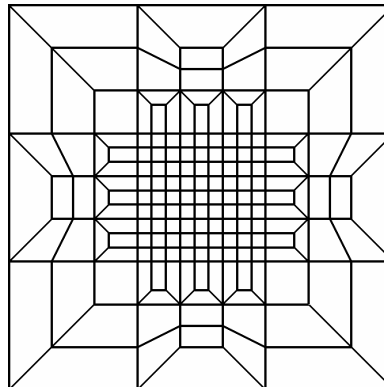
(a)



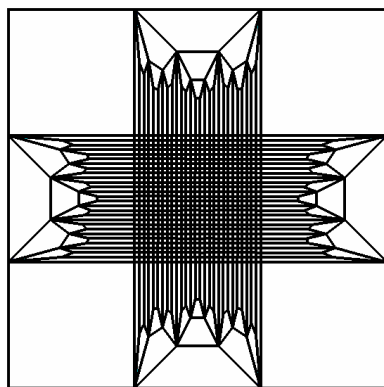
(b) 29 elements



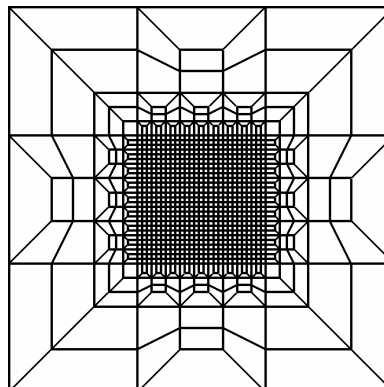
(c) 137 elements



(d) 177 elements



(e) 893 elements



(f) 1021 elements

Figura 17: Malles resultants per un nivell de refinament requerit η .
 (a) Malla original amb l'element per refinar marcat.
 (b) Malla obtinguda per $\eta = 1$ amb *EB-C* i *EB-CM*.
 (c), (e): Malles resultants per $\eta = 2, 3$ amb l'algoritme *EB-C*.
 (d), (f): Malles resultants per $\eta = 2, 3$ amb l'algoritme *EB-CM*.

Anteriorment, s'ha fet referència a la transmissió dels nivells de refinament. L'aspecte que diferencia els algoritmes *EB-C* i *EB-CM* és quins són els criteris que determinen la transmissió de nivells de refinament. En la Figura 17, a partir d'una malla estructurada 3x3 es considera que es prescriuen per l'element central nivells de refinament $\eta = 1, 2, 3$. La Figura 17 (b) és la mateixa pels dos algoritmes, ja que per $\eta = 1$ el comportament de *EB-C* i *EB-CM* és el mateix. Cal observar que per nivells $\eta = 2, 3$ amb l'algoritme *EB-C* s'obtenen elements molt distorsionats. Per contra l'algoritme *EB-CM* dona lloc a elements poc distorsionats, com a conseqüència d'involucrar de manera adient més elements. La Figura 17 també especifica el nombre d'elements continguts en cada malla, permetent comparar quants elements més inclou l'algoritme *EB-CM*.

2.3 Refinement *Node-Based*

El refinament *Node-Based* actua sobre un element marcat per refinar combinant un refinament *Edge-Based* Bàsic amb un refinament dels elements que envolten l'element marcat, tal com mostra la Figura 18 (c). Fixis que cada element que comparteix aresta amb l'element marcat és refinat a través de les seves dues piles: per una hi té lloc un refinament *Edge-Based* (Figura 18 (a)) i per l'altra pila hi té lloc un refinament envoltant (Figura 18 (b)).

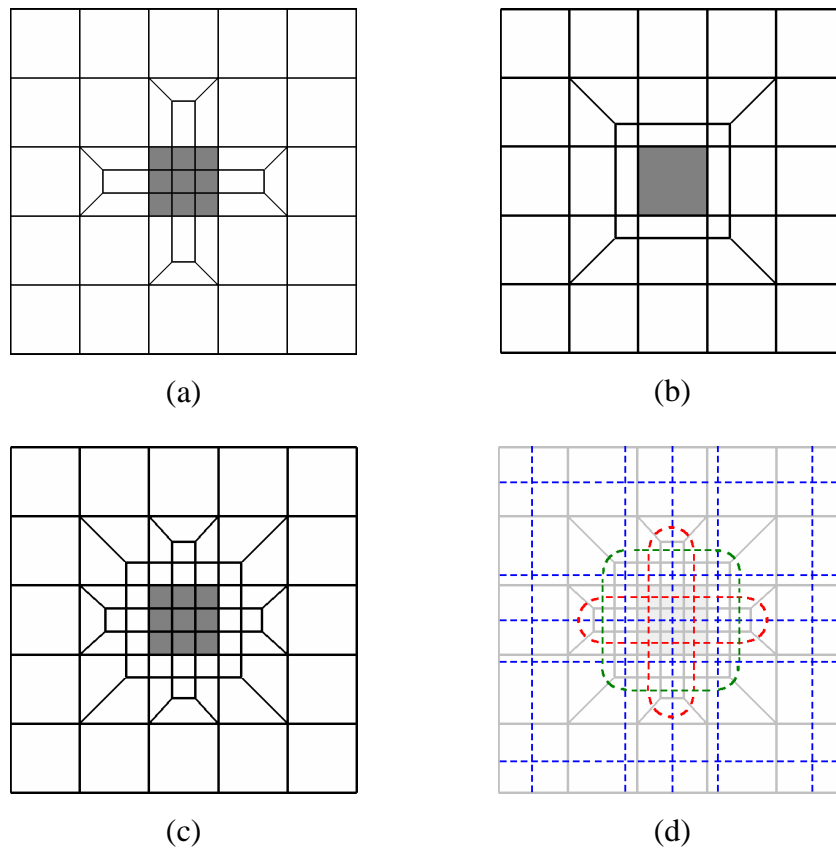


Figura 18: (a) Refinament *Edge-Based* per l'element marcat. (b) Refinament que envolta l'element marcat. (c) Refinament *Node-Based* per l'element marcat. (d) Malla dual del refinament *Node-Based*.

En la Figura 18 (d) es mostren les corbes duals del refinament *Node-Based* de la Figura 18 (c). Les corbes duals de color blau són les originals. Les corbes duals de color vermell corresponen a un refinament *Edge-Based*. Les corbes duals verdes corresponen a un refinament envoltant, inclòs en la zona de transició del refinament *Edge-Based*.

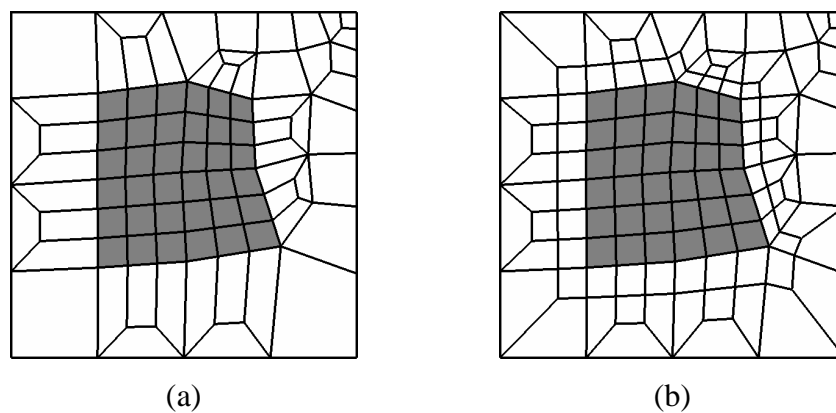


Figura 19: Refinement conforme *Node-Based* per quatre element marcats.
 (a) Malla original.
 (b) El refinament corresponent.

La Figura 19 mostra el comportament d'aquest tipus de refinament per un cas concret de més d'un element marcat, i s'observa la diferència respecte el refinament *Edge-Based*. La zona de transició d'un Refinement *Node-Based* és més extensa i aporta més elements que la zona de transició d'un Refinement *Edge-Based*, com es mostra en les Figures 18 i 19.

Tanmateix, el tipus de refinament *Node-Based* es pot definir a partir de tres patrons bàsics etiquetats per nodes, com es pot veure en les Figures 18 i 19. Es tracta dels següents patrons:

- Patró de quatre nodes marcats: element refinat, Figura 20 (a).
- Patró de dos nodes consecutius marcats: Figura 20 (b).
- Patró d'un node marcat: Figura 20 (c).

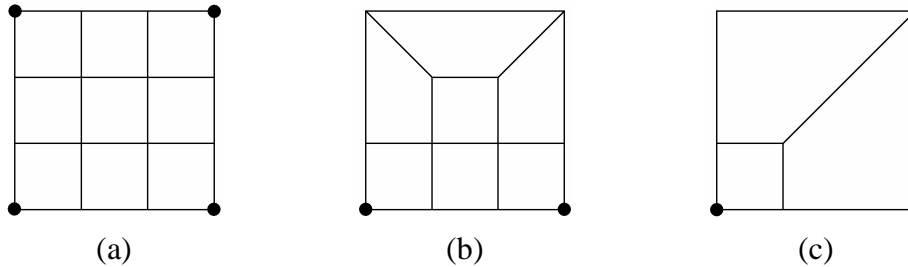


Figura 20: Patrons bàsics per un Refinement *Node-Based* conforme.
 (a) Patró per un element amb quatre nodes marcats. (b)
 Patró per un element amb dos nodes consecutius marcats.
 (c) Patró per un element amb un node marcat.

Els patrons de Figura 20 (b) i (c) són patrons de transició del refinament. Els tres patrons de la Figura 20 s'anomenen patrons bàsics pel mètode de Refinement *Node-Based*. Es determinen a partir dels nodes marcats, d'aquí el nom *Node-Based*. La conformitat del refinament està assegurada usant aquests patrons.

Cal notar que el mètode de Refinement *Node-Based* refina per cada node marcat totes les arestes que el tenen per extrem. Concretament:

- si una aresta té un extrem marcat aquesta queda refinada per dues arestes (Figura 21 (a));
- i si una aresta té els dos extrems marcats aquesta queda refinada per tres arestes (Figura 21 (b)).

Els elements marcats són refinats en nou elements.

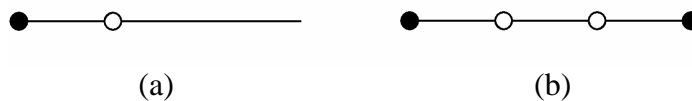


Figura 21: Refinement d'una aresta. (a) Aresta amb un node marcat.
 (b) Aresta amb dos nodes marcats.

Cal remarcar que els patrons *Node-Based* de transició presenten un bon comportament en les mateixes situacions que els patrons *Edge-Based* de transició presenten pitjors resultats per cada iteració de refinament, fet que ha suggerit la consideració de l'algoritme *EB-CM*. La Figura 22 mostra el comportament de l'algoritme *Node-Based* Bàsic per la mateixa situació que és considerada en la Figura 12. Tots els algoritmes *Node-Based* considerats més endavant mantenen aquesta característica.

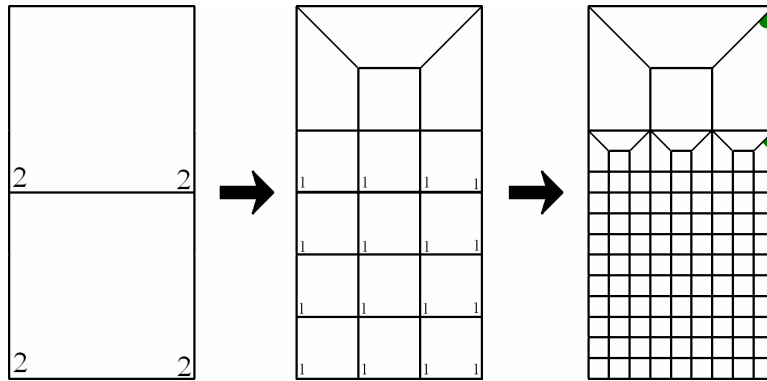


Figura 22: Exemple de transmissió dels nivells de refinament usant l'algoritme *Node-Based*. S'indiquen els nivells de refinament no nuls per cada node. Amb verd és colorejat un angle que es manté constant per cada nivell de refinament.

La Figura 30 també serveix per mostrar aquests bon comportament dels mètodes *Node-Based* ja que inclou refinaments obtinguts amb dos algoritmes *Node-Based* fins a un nivell prescrit $\eta = 3$.

La transmissió dels nivells de refinament per part dels algoritmes *Node-Based* és anàloga a la que és considerada per l'algoritme *Edge-Based* Complet però transmetent els nivells de refinament als nodes i no a les arestes [1], [2].

La necessitat de refinar configuracions de cares marcades com la que mostra la Figura 23, obliga a escollir un criteri d'entre dues opcions:

- I. Expandir el conjunt d'elements marcats: marcant la resta de nodes dels elements A, B de la Figura 23.
- II. No expandir el conjunt d'elements marcats definint nous patrons de transició:
 - i*) Patró de dos nodes oposats marcats (cas de l'element A de la Figura 23).
 - ii*) Patró de tres nodes marcats (cas de l'element B de la Figura 23).

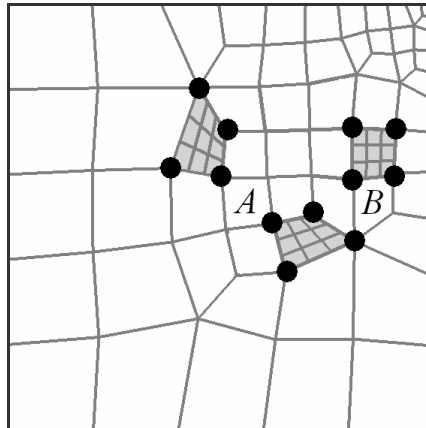


Figura 23: Refinament no conforme de tres elements d'una malla etiquetant els seus nodes. L'element A té dos nodes oposats marcats. L'element B té tres nodes marcats.

Com en el tipus de Refinement *Edge-Based*, l'opció II és la més indicada. El motiu és que per l'opció I el conjunt d'elements a refinar generalment presenta extensions considerables que amb l'opció II s'eviten.

2.3.1 Algoritmes de Refinement *Node-Based*

Pel cas de l'element *A* de la Figura 23 són determinats dos patrons i pel cas de l'element *B* de la Figura 23 es considera un nou patró. Tanmateix es determina un nou patró pel cas d'un element amb un node marcat. Amb aquests patrons nous i els patrons bàsics (Figura 20) es basen els quatre algoritmes de refinament *Node-Based* estudiats. Aquests quatre algoritmes es consideren més endavant, després de determinar tots els patrons. La determinació d'un patró s'aconsegueix a partir de la prescripció de la seva frontera imposada pels nodes marcats (veure Figura 21). Els nous patrons són:

Patró de dos nodes oposats. Patró I (cas de l'element *A* de la Figura 23). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta quatre nodes inserits en la frontera, un per cada aresta. El contorn del patró és discretitzat en vuit arestes, veure Figura 24 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 24 (b), i està format per set quadrilàters. Aquest patró forma part de l'algoritme de Refinement de Schneiders [1].

Patró de dos nodes oposats. Patró II (cas de l'element *A* de la Figura 23). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta quatre nodes inserits en la frontera, un per cada aresta. El contorn del patró és discretitzat en vuit arestes, veure Figura 24 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 24 (d), i està format per quatre quadrilàters. Aquest patró forma part d'un algoritme de refinament considerat en [7], anomenat algoritme *NB-III*, que es considera més endavant.

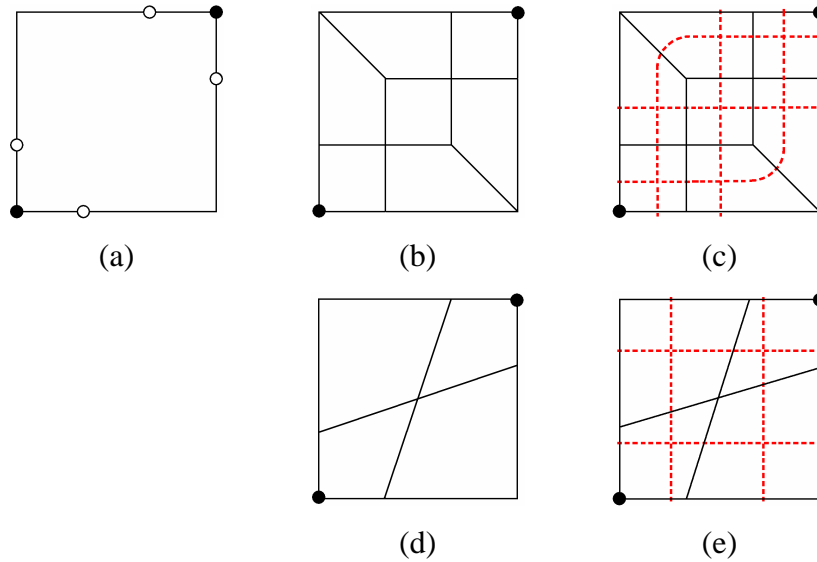


Figura 24: Procés d'obtenció dels dos patrons considerats pel cas de dos nodes oposats marcats. (a) Quadrilàter amb les arestes de la frontera refinades d'acord amb els nodes marcats. (b), (d): Patrons determinats per aquest cas. (c), (e): Configuracions de les corbes duals.

Patró de tres nodes marcats (cas de l'element B de la Figura 23). Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta sis nodes inserits en la frontera i la discretitza en deu arestes, veure Figura 25 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 25 (b), i està format per vuit quadrilàters. Aquest patró forma part de l'algoritme de Refinament de Schneiders [1].

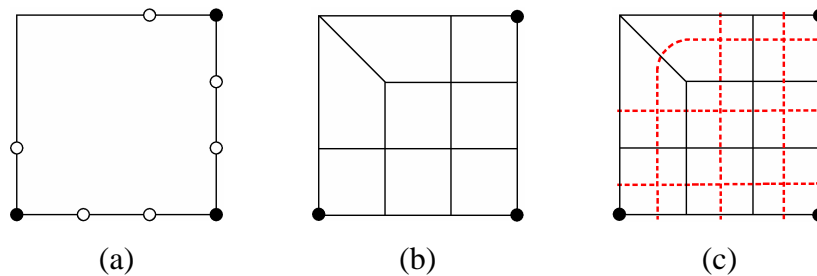


Figura 25: Procés d'obtenció del patró de tres nodes marcats. (a) Quadrilàter amb les arestes de la frontera refinades d'acord amb els nodes marcats. (b) Patró determinat per aquest cas. (c) Configuració de les corbes duals del patró.

Patró bàsic alternatiu d'un node marcat. Un quadrilàter substituït per aquest patró presenta dos nodes inserits en la frontera i la discretitza en sis arestes, veure Figura 26 (a). El patró considerat és mostrat per la Figura 26 (b), i està format per sis quadrilàters.

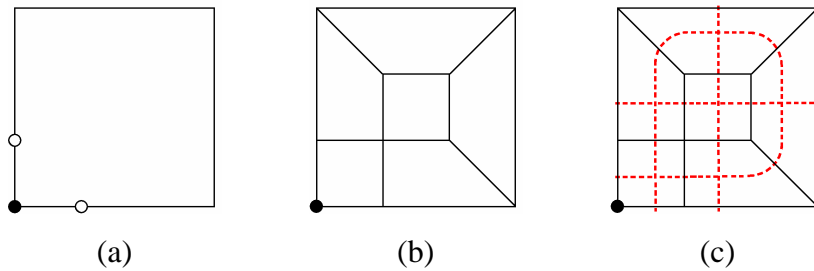


Figura 26: Procés d'obtenció d'un nou patró per un node marcat. (a) Quadrilàter amb les arestes de la frontera refinades d'acord amb el node marcat. (b) Patró determinat per aquest cas. (c) Configuració de les corbes duals del patró.

Les eleccions d'aquests tres nous patrons són bones segons dos aspectes:

- i) Aquests tres patrons mantenen la conformitat que els patrons bàsics garanteixen.
- ii) Des d'un punt de vista topològic, tot node inserit en l'interior d'una aresta refinada té grau de connectivitat quatre, que és el grau de connectivitat òptim [5].

Cal remarcar que tant pel cas d'un node marcat com de dos nodes marcats oposats, un dels dos patrons considerats aporta un menor nombre de quadrilàters i no incrementa el grau de connectivitat dels nodes no marcats. Tanmateix, es consideren algorismes que contempen tots els patrons. La Figura 27 mostra els patrons considerats pels algorismes *Node-Based* estudiats seguidament.

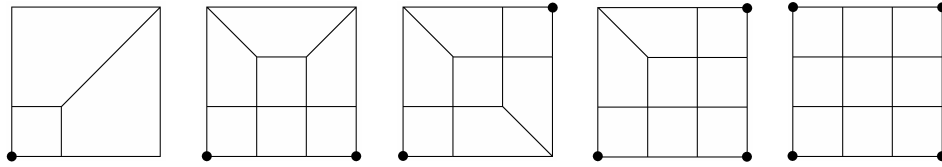
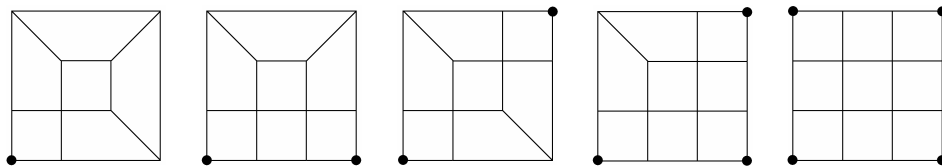
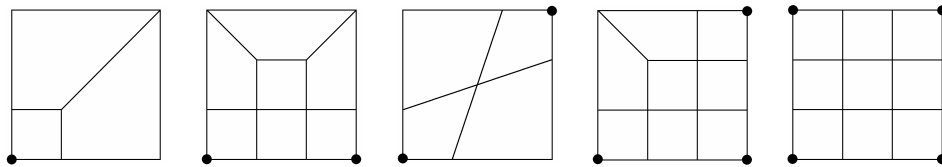
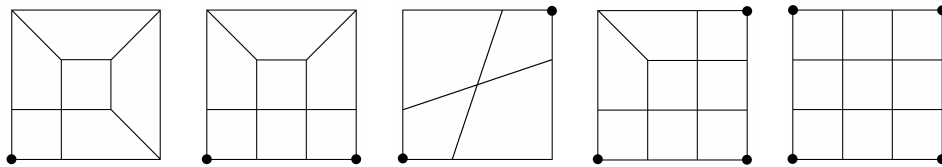
(a) Patrons de l'algorithm *NB-S*(b) Patrons de l'algorithm *NB-DG*(c) Patrons de l'algorithm *NB-III*(d) Patrons de l'algorithm *NB-IV*

Figura 27: Classificació de tots els patrons usats pels diferents algoritmes de refinament *Node-Based*.

2.3.1.1 Algoritme *Node-Based* de Schneiders

Aquest algoritme considera els patrons de la Figura 27 (a), i també s'anomena algoritme *NB-S* (*Node-Based* de Schneiders) [1]. Concretament, considera els patrons bàsics i els patrons de les Figures 24 (b) i 25 (b). Aquests dos últims patrons presenten configuracions similars entre elles que han suggerit la determinació del patró de la Figura 26 (b) que és incorporat pels algoritmes *NB-DG* i *NB-IV*.

2.3.1.2 Algoritme *Node-Based* de Descripció General

El patró d'un node marcat que és considerat per aquest algoritme és el patró de la Figura 26 (b). Els altres patrons són els mateixos patrons que l'algoritme de Schneiders. L'algoritme *Node-Based* de Descripció General també s'anomena algoritme *NB-DG*.

Cal remarcar que tots els patrons d'aquest algoritme queden definits a partir d'una descripció general, d'aquí el nom de l'algoritme. Aquesta regla consisteix en:

Per un quadrilàter Q de vèrtexs $V_1 V_2 V_3 V_4$ (algun d'ells marcat),

i) constituir en el seu interior un nou quadrilàter Q' de vèrtexs $W_1 W_2 W_3 W_4$ tal com mostra la Figura 28 (a).

ii) si V_i és un vèrtex marcat de Q :

es constitueix un nou quadrilàter Q_i de vèrtexs $N_{2i-1} V_i N_{2i} W_i$.

Els nodes N_{2i-1} , N_{2i} són els nodes aportats en les arestes de Q que tenen V_i per extrem, com a conseqüència de ser V_i marcat.

La Figura 28(b) mostra per V_i marcat el quadrilàter Q_i que es construeix.

iii) si V_i és un vèrtex no marcat de Q :

- i si V_{i-1} és marcat (anàlogament per V_{i+1}):

es constitueix el quadrilàter $N_{2i-2} V_i W_i W_{i-1}$

- i si V_{i-1} no és marcat (anàlogament per V_{i+1}):

es constitueix el quadrilàter $V_{i-1} V_i W_i W_{i-1}$

La Figura 28 (c) mostra amb groc el quadrilàter format en el cas de V_i no marcat i V_{i-1} marcat. També mostra amb blau el quadrilàter en el cas de V_i no marcat i V_{i+1} no marcat.

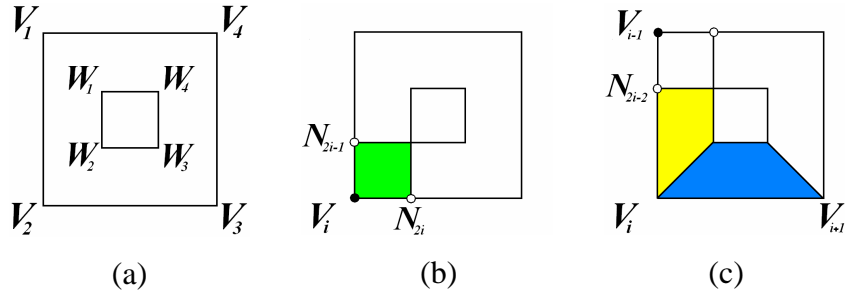


Figura 28: Procés esquemàtic de la definició general de tots els patrons de l'algoritme *NB-DG*. (a) Quadrilàter intern inserit. (b) Quadrilàter intern generat per un node marcat. (c) Quadrilàters interns generats per un node no marcat.

2.3.1.3 Algoritme *Node-Based III*

El patró de dos nodes oposats marcats que és considerat per aquest algoritme és el patró de la Figura 24 (d). Els altres patrons són els mateixos patrons que l'algoritme de Schneiders. L'algoritme *Node-Based III* també s'anomena algoritme *NB-III*. El nom d'aquest algoritme és degut a què és el tercer algoritme *Node-Based* considerat. L'algoritme *NB-III* també és considerat en [7]. El patró de dos nodes oposats marcats escollit per aquest algoritme és preferible perquè aporta quatre elements i no augmenta el grau de connectivitat dels nodes marcats, degut a que és obtingut a partir d'una configuració dual senzilla. En canvi, el patró corresponent de Schneiders aporta set elements i augmenta un grau de connectivitat dels dos nodes marcats.

2.3.1.4 Algoritme *Node-Based IV*

Aquest algoritme considera pel cas d'un node marcat el patró de la Figura 26 (b), i pel cas de dos nodes oposats marcats el patró de la Figura 24 (d). Pels altres tres casos pren els mateixos patrons que l'algoritme *NB-S*. L'algoritme *Node-Based IV* també s'anomena algoritme *NB-IV*. L'algoritme *NB-IV* és l'algoritme *Node-Based* més diferenciat de l'algoritme de Schneiders ja que en comú només tenen tres patrons.

2.3.2 Exemples

La Figura 29 mostra la malla resultant obtinguda amb l'algoritme *NB-S* pels mateixos elements marcats que en la Figura 16. Cal notar que sent els mateixos elements marcats en les dues figures, s'observa que la zona de transició per l'algoritme *NB-S* presenta un nombre major d'elements que per *EB-C*.

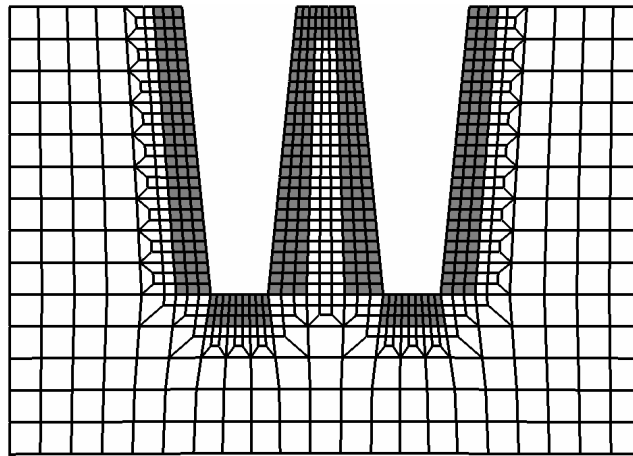
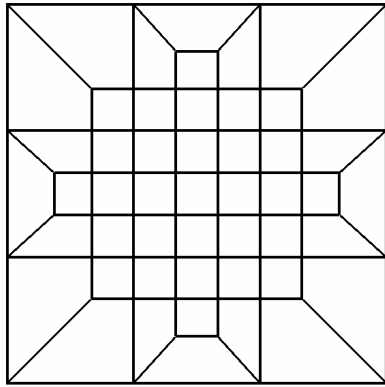
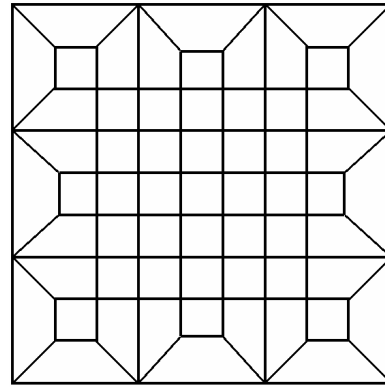


Figura 29: Malla refinada amb el mètode *Node-Based* de Schneiders. Resulta la mateixa malla que usant *NB-III* ja que no apareix el patró de dos nodes oposats marcats.

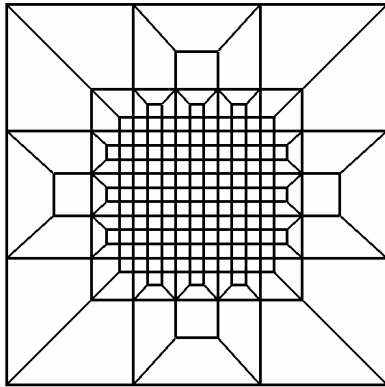
Un altre exemple anàleg a un exemple de refinament *Edge-Based* considerat, és el que mostra la Figura 30. Es considera com a malla inicial una malla estructurada 3×3 (Figura 17 (a)). Es consideren per l'element central diversos nivells de refinament prescrits, $\eta = 1, 2, 3$. Les Figures 30 (a), (c), (e) mostren els resultats obtinguts amb l'algoritme *NB-S* (l'algoritme *NB-III* presenta els mateixos resultats per aquesta configuració). Les Figures 30 (b), (d), (f) mostren els resultats obtinguts amb l'algoritme *NB-GD* (l'algoritme *NB-IV* presenta els mateixos resultats per aquesta configuració). La Figura 30 també especifica el nombre d'elements continguts en cada malla.



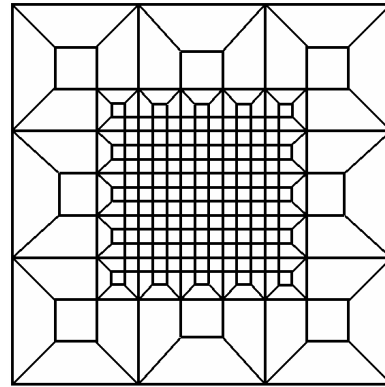
(a) 49 elements



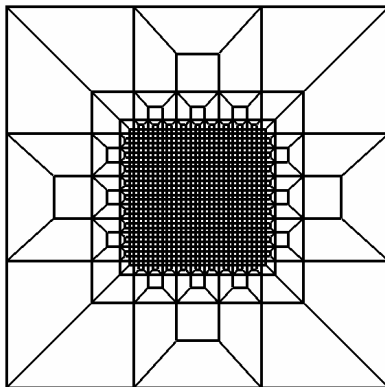
(b) 61 elements



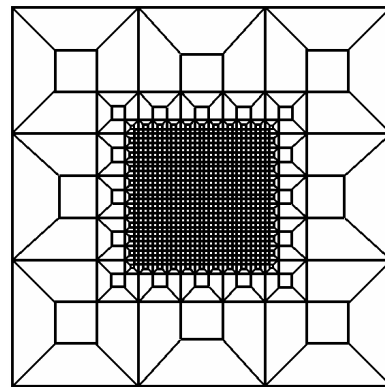
(c) 201 elements



(d) 225 elements



(e) 1073 elements



(f) 1109 elements

Figura 30: Malles resultants per un nivell de refinament requerit η .
 (a), (b): Malles resultants per $\eta = 1$ amb *EN-S* i *EN-DG*.
 (c), (d): Malles resultants per $\eta = 2$ amb *EN-S* i *EN-DG*.
 (e), (f): Malles resultants per $\eta = 3$ amb *EN-S* i *EN-DG*.

Cal notar, que tant el comportament dels algoritmes *NB-S* i *NB-DG* en l'exemple de la Figura 30 com el comportament de l'algoritme *EB-CM* en l'exemple de la Figura 17, són bons comportaments al llarg de cada nivell de prescripció obtenint malles amb elements poc distorsionats. Comparant el nombre d'elements de les malles obtingudes per aquests tres algoritmes per aquest exemple, s'obté que l'algoritme *EB-CM* és el que aporta una zona de transició amb menys elements per cada nivell de refinament considerat.

2.4 Anàlisi del comportament dels algoritmes de refinament 2D sota l'efecte d'un suavitzador

El problema de refinar esdevé d'un requeriment geomètric, i.e., que un element e de mida h assoleixi una certa mida $h_e < h$. Tanmateix, l'objectiu intrínsec d'un mètode de refinament és garantir una certa mida per cada element. En segon lloc, un altre objectiu és obtenir refinaments de qualitat. La manera quantitativa establerta per determinar la qualitat d'una malla és segons la mesura de la distorsió dels elements. El posterior ús d'un suavitzador contribueix a disminuir la distorsió dels elements, un requeriment habitual per un procés de càlcul adaptatiu.

Cadascun dels refinaments considerats en els apartats anteriors efectuen modificacions topològiques de la malla. Un suavitzador permet millorar globalment la geometria d'una malla restringit per la seva topologia. D'aquí que alguns algoritmes de refinament considerats permetin una major operativitat a un suavitzador posterior.

L'objectiu principal d'aquest apartat és veure com se sotmet a l'efecte d'un suavitzador cada algoritme de refinament. L'estudi comprèn diversos nivells de refinament (fins a $\eta = 3$) per obtenir resultats significatius. Els resultats s'obtenen considerant un suavitzador Laplaciana [10] i els valors de distorsió dels elements es calculen segons la mesura de distorsió per quadrilàters de Oddy [11] (Apèndix A). El suavitzador Laplaciana és el més indicat per malles de quadrilàters convexos, com ho son els refinaments obtinguts amb els algoritmes d'estudi.

La comparació entre els algoritmes se centra en els següents aspectes:

- Observar per diversos nivells de refinament en quina mesura el suavitzador rebaixa la distorsió màxima d'una malla refinada.
- Observar si per diversos nivells de refinament es requereix el suavitzador després de cada iteració o només després de l'última (reduint els costos computacionals).

L'anàlisi del comportament dels algorismes bidimensionals considerats consisteix en cinc tests descrits en els següents apartats. Els cinc tests consisteixen en:

- i)* diversos nivells de refinament d'un mateix element
- ii)* diversos nivells de refinament d'una mateixa aresta
- iii)* diversos nivells de refinament d'un mateix node
- iv)* diversos nivells de refinament de dos mateixos nodes
- v)* refinaments successius dels dos pitjors elements

Tots els tests atenen a la propagació dels valors de distorsió al llarg de successius refinaments. Els tests *i)*, *ii)*, *iii)*, *iv)* consideren la distorsió concentrada en una zona per diversos nivells de refinament, permetent comparar els diferents patrons entre ells. Per contra en el test *v)* no té limitada la zona d'actuació.

Per una bona interpretació dels resultats obtinguts en els tests dels propers apartats cal prèviament considerar la distorsió que presenten els patrons usats per cada algoritme de refinament. La Figura 31 mostra l'assignació del valor de distorsió per cada element obtingut substituint un quadrat per cada patró.

S'estableix la següent notació pels següents apartats:

Sigui M una malla, notarem la malla resultant després d'haver fet un cert refinament R com $R(M)$. Si després a $R(M)$ s'aplica un suavitzador S , notarem la malla resultant com $S \circ R(M)$.

Aquesta notació permet compondre aplicacions successives de refinaments. Per exemple, si R_1 , R_2 són refinaments i S_1 , S_2 són suavitzadors $S_2 \circ R_2 \circ S_1 \circ R_1(M)$ denota la malla resultant després d'aplicar R_1 , S_1 , R_2 , S_2 amb aquest ordre.

En el cas particular d'un element amb un cert nivell de refinament prescrit η , $R^\eta(M)$ designa el refinament obtingut després d'assolir tots els nivells de refinament η . $S \circ R^\eta(M)$ correspon al posterior ús del suavitzador. $(S \circ R)^\eta(M)$ designa el refinament obtingut després d'assolir tots els nivells de refinament usant el suavitzador en cada iteració.

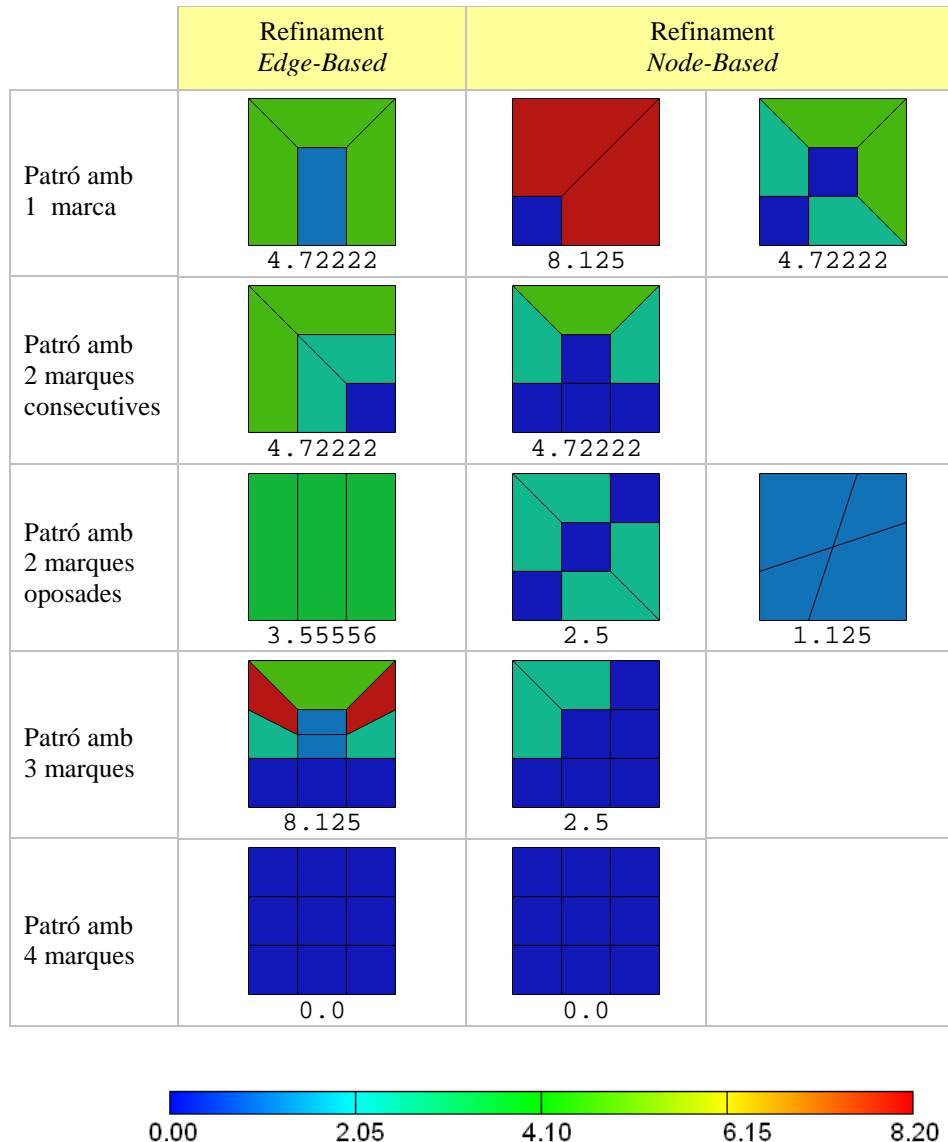


Figura 31: Distorsions de cada patró substituït en un quadrat. El color de cada element es correspon segons l'escala de colors al valor de distorsió de Oddy [Apèndix A]. El número és el màxim de les distorsions dels elements del patró.

2.4.1 Diversos refinaments d'un mateix element

Donada una malla uniforme de 11×11 elements anomenada M , R designa el refinament de l'element central de M . L'operador suavitzat és designat per S . Els algorismes considerats en aquest apartat són:

- Algoritme *EB-C*
- Algoritme *EB-CM*
- Algoritme *NB-S* (*NB-III* dona el mateix resultat en aquest test)
- Algoritme *NB-DG* (*NB-IV* dona el mateix resultat en aquest test)

Les Taules 1, 2, 3, 4 contenen el màxim dels valors de distorsió de les malles R^η , $S \circ R^\eta$, $(S \circ R)^\eta$ resultants obtingudes per nivells de refinament prescrits $\eta = 1, 2, 3$ per l'element central de la malla. Algunes de les malles obtingudes es mostren en les Figures 32 i 33.

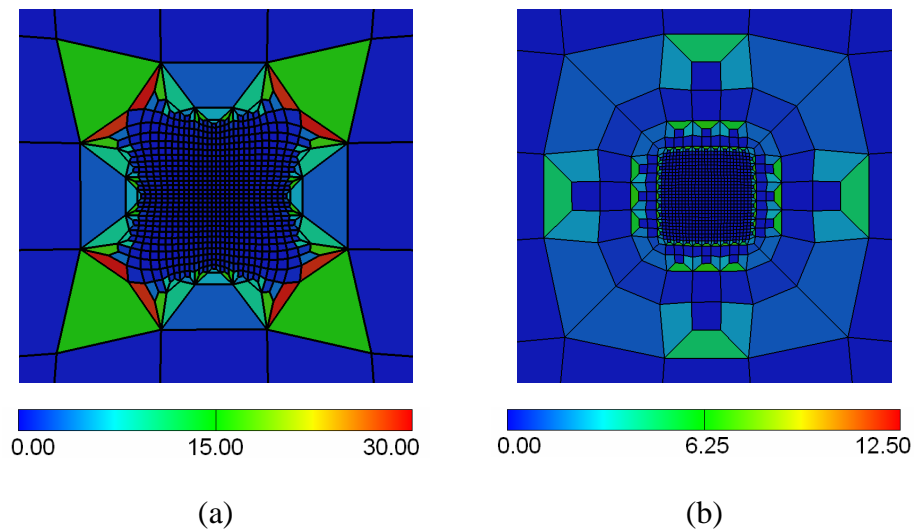
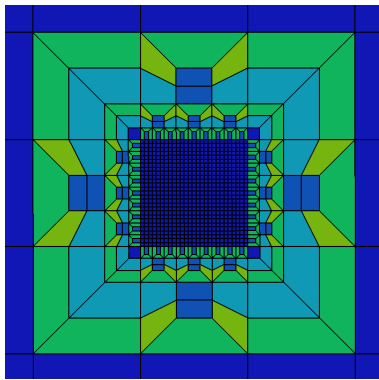
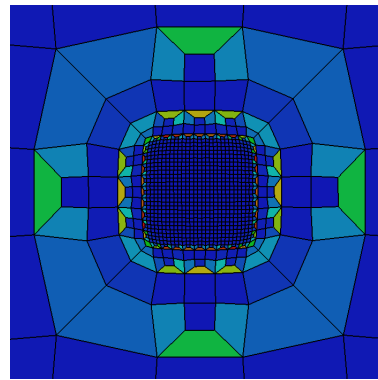


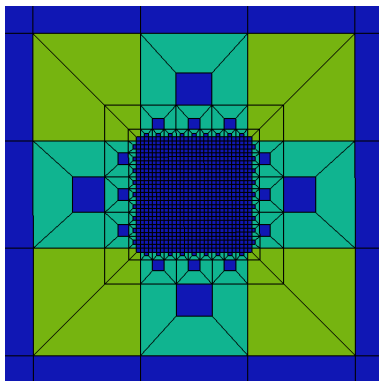
Figura 32: Tercer nivell de refinament, $\eta=3$, d'un element. (a) $(S \circ R)^\eta$ per *EB-C*. (b) $(S \circ R)^\eta$ per *EB-CM*.



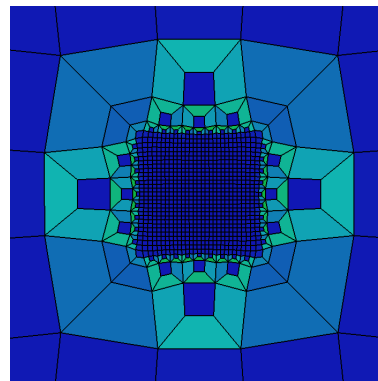
(a)



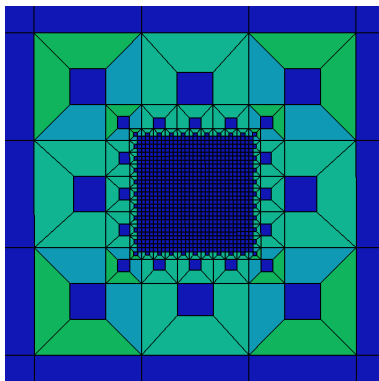
(b)



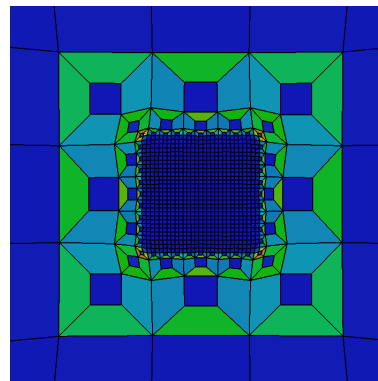
(c)



(d)



(e)



(f)

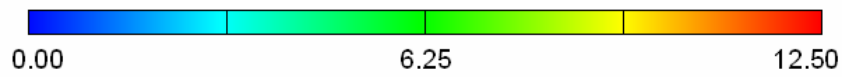


Figura 33: Tercer nivell de refinament, $\eta = 3$, d'un element. (a) R^{η} per EB-CM. (c) R^{η} per NB-S. (e) R^{η} per NB-DG. (b) $S\circ R^{\eta}$ per EB-CM. (d) $S\circ R^{\eta}$ per NB-S. (f) $S\circ R^{\eta}$ per NB-DG.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	2.80738	2.80738
$\eta = 2$	54.2334	9.00741	8.83423
$\eta = 3$	506.432	26.0157	30.518

Taula 1: Algoritme *EB-C*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	2.80738	2.80738
$\eta = 2$	8.125	6.65552	5.8323
$\eta = 3$	8.125	12.4157	6.91354

Taula 2: Algoritme *EB-CM*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	8.125	3.98763	3.98763
$\eta = 2$	8.12524	5.07896	5.34573
$\eta = 3$	8.12524	5.28895	6.3311

Taula 3: Algoritme *NB-S*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	6.49483	6.49483
$\eta = 2$	4.72231	7.71172	7.62
$\eta = 3$	4.72231	10.321	10.2974

Taula 4: Algoritme *NB-DG*: Màxims valors de distorsió.

El comportament de l'algoritme *EB-C* sense aplicar un suavitzador dona pitjors valors de distorsió per cada iteració de refinament. Amb els algorismes *EB-CM*, *NB-S* i *NB-DG*, sense aplicar un suavitzador els valors de distorsió presentats esdevenen constants al llarg de les successives iteracions de refinament. Però cal remarcar que aquests valors de distorsió constants són conseqüència del fet particular d'haver pres per refinar un element de M tal que sigui quadrat (ja que M és uniforme).

El suavitzador rebaixa significativament els alts valors de distorsió assolits en R^η per $\eta = 2,3$ usant l'algoritme *EB-C*. Però en el cas de $\eta = 3$ el màxim valor de distorsió obtingut després d'un suavitzat és massa gran comparat amb que els màxims aconseguits amb els altres algorismes. La malla R^η per $\eta = 3$ obtinguda pel mètode *EB-C* suavitzada és mostrada en la Figura 32 (a).

Clarament els millors resultats de $S \circ R^\eta$ s'obtenen amb l'algoritme *NB-S*. Per $\eta = 3$ es veu (Taula 3) que l'algoritme *NB-S* presenta un màxim valor de distorsió més baix que els altres algorismes. Tanmateix, els màxims que per $\eta = 3$ presenten els algorismes *EB-CM* i *NB-DG* (Taules 2 i 4) són aproximadament el doble que el màxim obtingut amb *NB-S*. Les malles discutides en aquest paràgraf corresponents als algorismes *EB-CM*, *NB-S*, *NB-DG* es poden veure en la Figura 33 (b), (d), (f), respectivament.

Considerant els refinaments de tipus $(S \circ R)^\eta$ per $\eta = 3$ es veu (Taules 2 i 3) que els algorismes *EB-CM* i *NB-S* presenten màxims distorsió baixos. La malla $(S \circ R)^\eta$ per $\eta = 3$ obtinguda usant l'algoritme *EB-CM* es mostra en la Figura 32 (b). És l'algoritme *EB-CM* l'únic que presenta diferències significatives entre $(S \circ R)^\eta$ i $S \circ R^\eta$. Clarament, els algorismes *EB-CM* i *NB-S* presenten millor malla resultant $(S \circ R)^\eta$ que *NB-DG*.

Cal remarcar que segons els resultats obtinguts, l'algoritme *NB-DG* (Taula 4) no ha sofert millores de valors de distorsió. Aquest fet s'atribueix a l'augment de graus de connectivitat que suposa la consideració del patró

de la Figura 26 (b) enlloc del patró de la Figura 20 (c) (diferència entre $NB-DG$ i $NB-S$). Aquest augment dels graus de connectivitat carrega excessivament la topologia limitant l'efecte del suavitzador.

2.4.2 Diversos refinaments d'una mateixa aresta

Donada una malla uniforme de 11×10 elements anomenada M , R designa el refinament d'una aresta interna de M . L'operador suavitzat és designat per S . Els algorismes considerats en aquest apartat són:

- Algoritme $EB-C$
- Algoritme $EB-CM$
- Algoritme $NB-S$ ($NB-III$ dóna el mateix resultat en aquest test)
- Algoritme $NB-DG$ ($NB-IV$ dóna el mateix resultat en aquest test)

Les Taules 5, 6, 7, 8 contenen el màxim dels valors de distorsió de les malles R^η , $S \circ R^\eta$, $(S \circ R)^\eta$ resultants obtingudes per nivells de refinament prescrits $\eta = 1, 2, 3$ per l'aresta marcada de la malla. Algunes de les malles obtingudes es mostren en les Figures 34, 35 i 36.

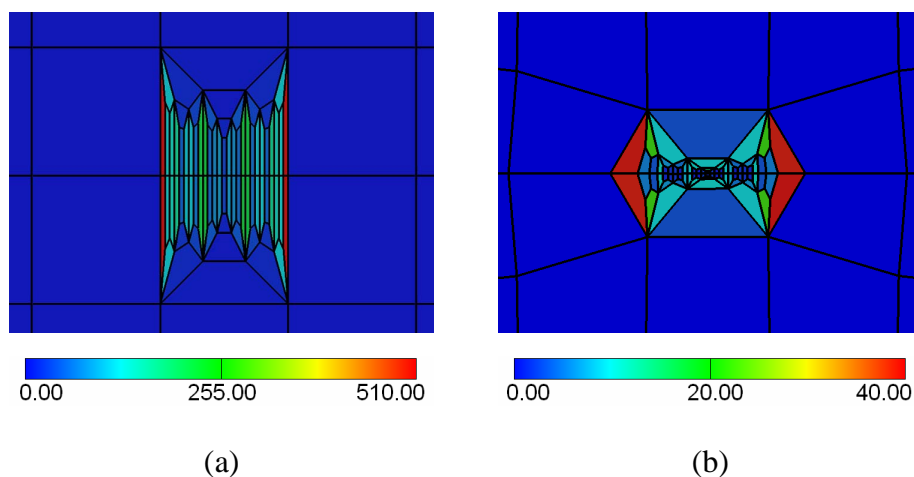


Figura 34: Tercer nivell de refinament, $\eta=3$ (a) $(S \circ R)^\eta$ per $EB-C$.
(b) $(S \circ R)^\eta$ per $EB-CM$.

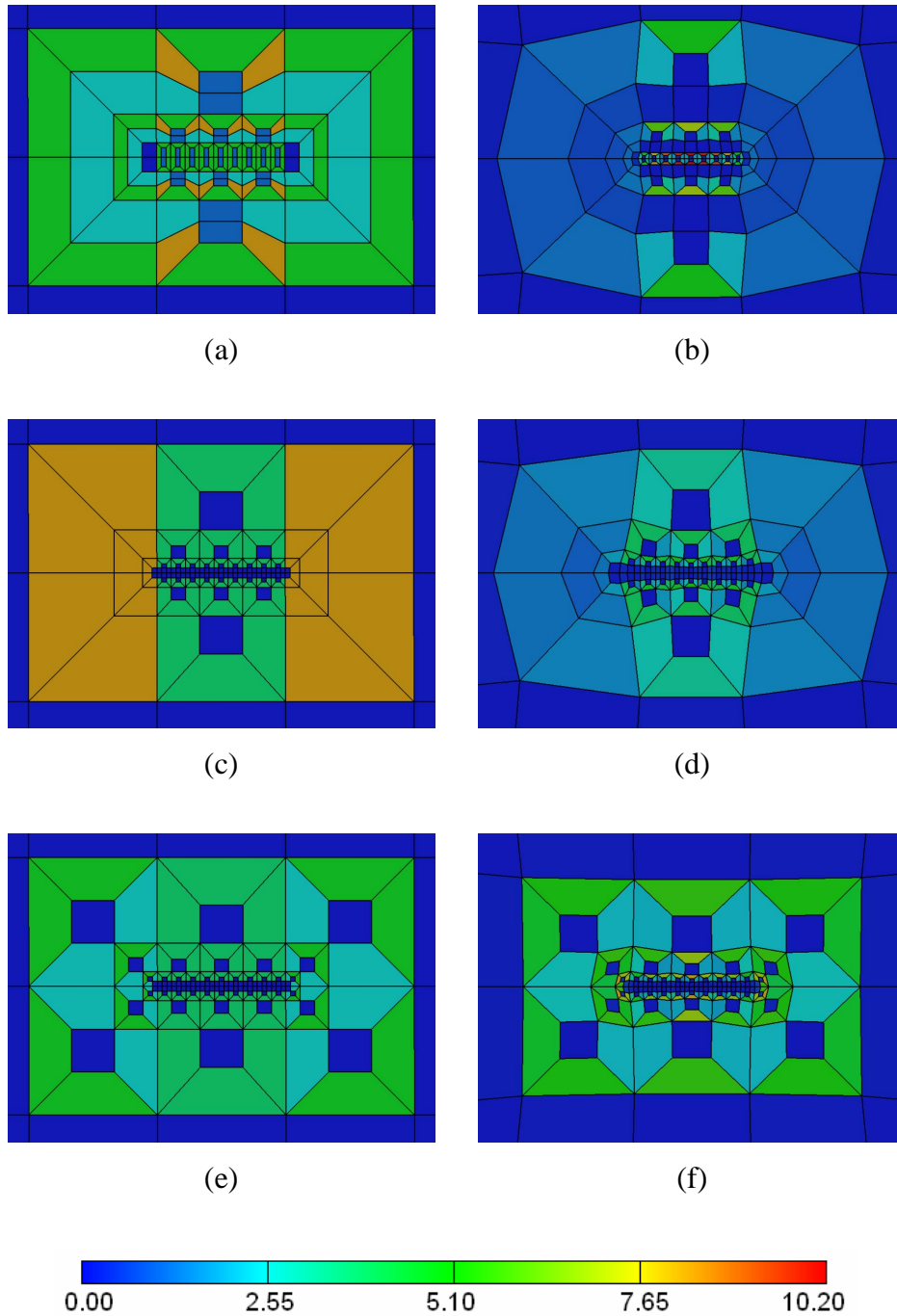


Figura 35: Tercer nivell de refinament, $\eta = 3$, d'una aresta. (a) R^η per EB-CM. (c) R^η per NB-S. (e) R^η per NB-DG. (b) $S \circ R^\eta$ per EB-CM. (d) $S \circ R^\eta$ per NB-S. (f) $S \circ R^\eta$ per NB-DG.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	2.72722	2.72722
$\eta = 2$	54.2334	14.2434	14.2301
$\eta = 3$	506.432	39.7981	42.8774

Taula 5: Algoritme *EB-C*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	2.72722	2.72722
$\eta = 2$	8.125	5.33624	5.04237
$\eta = 3$	8.125	10.2011	5.74435

Taula 6: Algoritme *EB-CM*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	8.125	3.72841	3.72841
$\eta = 2$	8.12524	4.51855	4.70467
$\eta = 3$	8.12524	4.85665	5.38242

Taula 7: Algoritme *NB-S*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	6.2537	6.2537
$\eta = 2$	4.72231	6.81342	6.70896
$\eta = 3$	4.72231	7.92637	7.59555

Taula 8: Algoritme *NB-DG*: Màxims valors de distorsió.

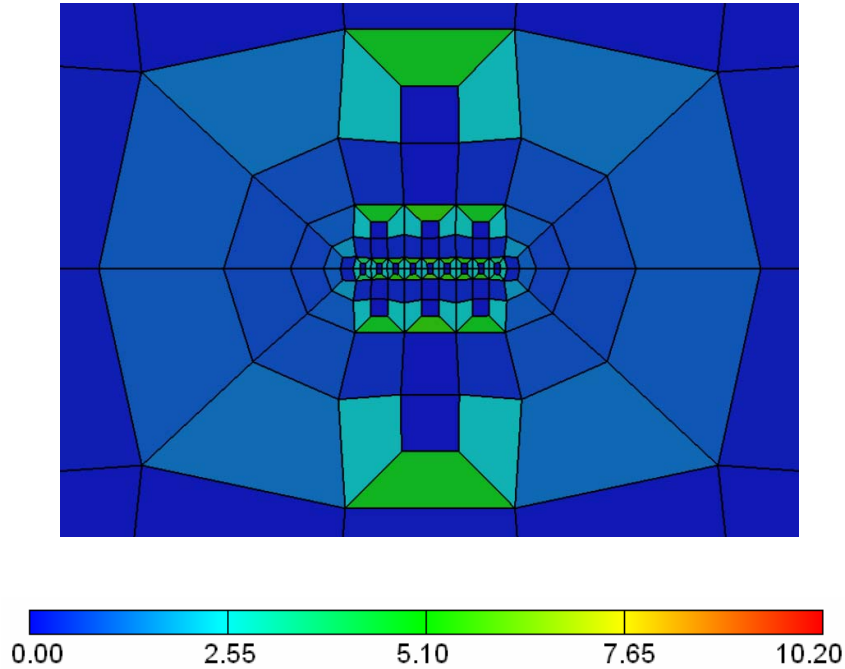


Figura 36: Tercer nivell de refinament, $\eta = 3$, d'una aresta. La malla correspon a $(S \circ R)^\eta$ obtinguda amb l'algoritme *EB-CM*.

En general, el comportament de cada algoritme en aquest test és anàleg al comportament que ofereix en el test anterior.

El comportament de l'algoritme *EB-C* sense aplicar un suavitzador dóna pitjors valors de distorsió per cada iteració de refinament. Per altra banda, sense aplicar un suavitzador, els valors de distorsió presentats pels algorismes *EB-CM*, *NB-S*, *NB-DG* esdevenen constants al llarg de les successives iteracions de refinament. Però cal remarcar que aquests valors de distorsió constants són conseqüència del fet particular d'haver pres per refinar un element de M tal que sigui quadrat (ja que M és uniforme).

El suavitzador rebaixa significativament els alts valors de distorsió absoluts en R^η per $\eta = 2,3$ usant l'algoritme *EB-C*. Però en el cas de $\eta = 3$ el màxim valor de distorsió obtingut després d'un suavitzat és massa gran

comprat amb que els màxims aconseguits amb els altres algoritmes. La malla R^η per $\eta = 3$ obtinguda pel mètode *EB-C* és mostrada en la Figura 34 (a), i després d'aplicar-hi un suavitzador és mostrada en la Figura 34 (b).

Clarament els millors resultats de $S \circ R^\eta$ s'obtenen amb l'algoritme *NB-S*. Per $\eta = 3$ es veu (Taula 7) que l'algoritme *NB-S* presenta un màxim valor de distorsió més baix que els altres algoritmes. Tanmateix, els màxims que per $\eta = 3$ presenten els algoritmes *EB-CM* i *NB-DG* (Taulas 6 i 8) són aproximadament el doble que el màxim obtingut amb *NB-S*. Les malles discutides en aquest paràgraf corresponents als algoritmes *EB-CM*, *NB-S*, *NB-DG* es poden veure en la Figura 35 (b), (d), (f), respectivament.

Considerant els refinaments de tipus $(S \circ R)^\eta$ per $\eta = 3$ es veu (Taulas 6 i 7) que els algoritmes *EB-CM* i *NB-S* presenten màxims distorsió baixos. La malla $(S \circ R)^\eta$ per $\eta = 3$ obtinguda usant l'algoritme *EB-CM* es mostra en la Figura 36. És l'algoritme *EB-CM* l'únic que presenta diferències significatives entre $(S \circ R)^\eta$ i $S \circ R^\eta$. Clarament, els algoritmes *EB-CM* i *NB-S* presenten millor malla resultant $(S \circ R)^\eta$ que *NB-DG*.

Cal remarcar que segons els resultats obtinguts, l'algoritme *NB-DG* (Taula 8) no ha sofert millores de valors de distorsió. Aquest fet s'atribueix a l'augment de graus de connectivitat que suposa la consideració del patró de la Figura 26 (b) enlloc del patró de la Figura 20 (c) (diferència entre *NB-DG* i *NB-S*). Aquest augment dels graus de connectivitat carrega excessivament la topologia limitant l'efecte del suavitzador.

2.4.3. Diversos refinaments d'un mateix node

Donada una malla uniforme de 10x10 elements anomenada M , R designa el refinament del node central de M . L'operador suavitzat és designat per S . Els algorismes considerats en aquest apartat són:

- Algoritme $EB-C$ ($EB-CM$ dóna el mateix resultat en aquest test)
- Algoritme $NB-S$ ($NB-III$ dóna el mateix resultat en aquest test)
- Algoritme $NB-DG$ ($NB-IV$ dóna el mateix resultat en aquest test)

Les Taules 9, 10, 11 contenen el màxim dels valors de distorsió de les malles R^η , $S \circ R^\eta$, $(S \circ R)^\eta$ resultants obtingudes per nivells de refinament prescrits $\eta = 1, 2, 3$ pel node central de la malla. Algunes de les malles obtingudes es mostren en la Figura 37.

L'algoritme $EB-C$ és l'algoritme que presenta els màxims de distorsió més baixos (Taula 9) per cada nivell de refinament tant per R^η , com $S \circ R^\eta$, com $(S \circ R)^\eta$. Els resultats obtinguts amb l'algoritme $NB-S$ aplicant suavitzador són lleugerament pitjors que els obtinguts amb $EB-C$, veure Taula 10 i Figura 37. El comportament de l'algoritme $EB-C$ en aquest test difereix radicalment del comportament que ha presentat en els dos tests anteriors.

Cal remarcar que segons els resultats obtinguts, l'algoritme $NB-DG$ segueix presentant com en els dos apartats anteriors un pobre comportament sota l'efecte del suavitzador (Taula 11). Aquest fet s'atribueix a l'augment de graus de connectivitat que suposa la consideració del patró de la Figura 26 (b) enlloc del patró Figura 20 (c) (diferència entre $NB-DG$ i $NB-S$). Aquest augment dels graus de connectivitat carrega excessivament la topologia limitant l'efecte del suavitzador.

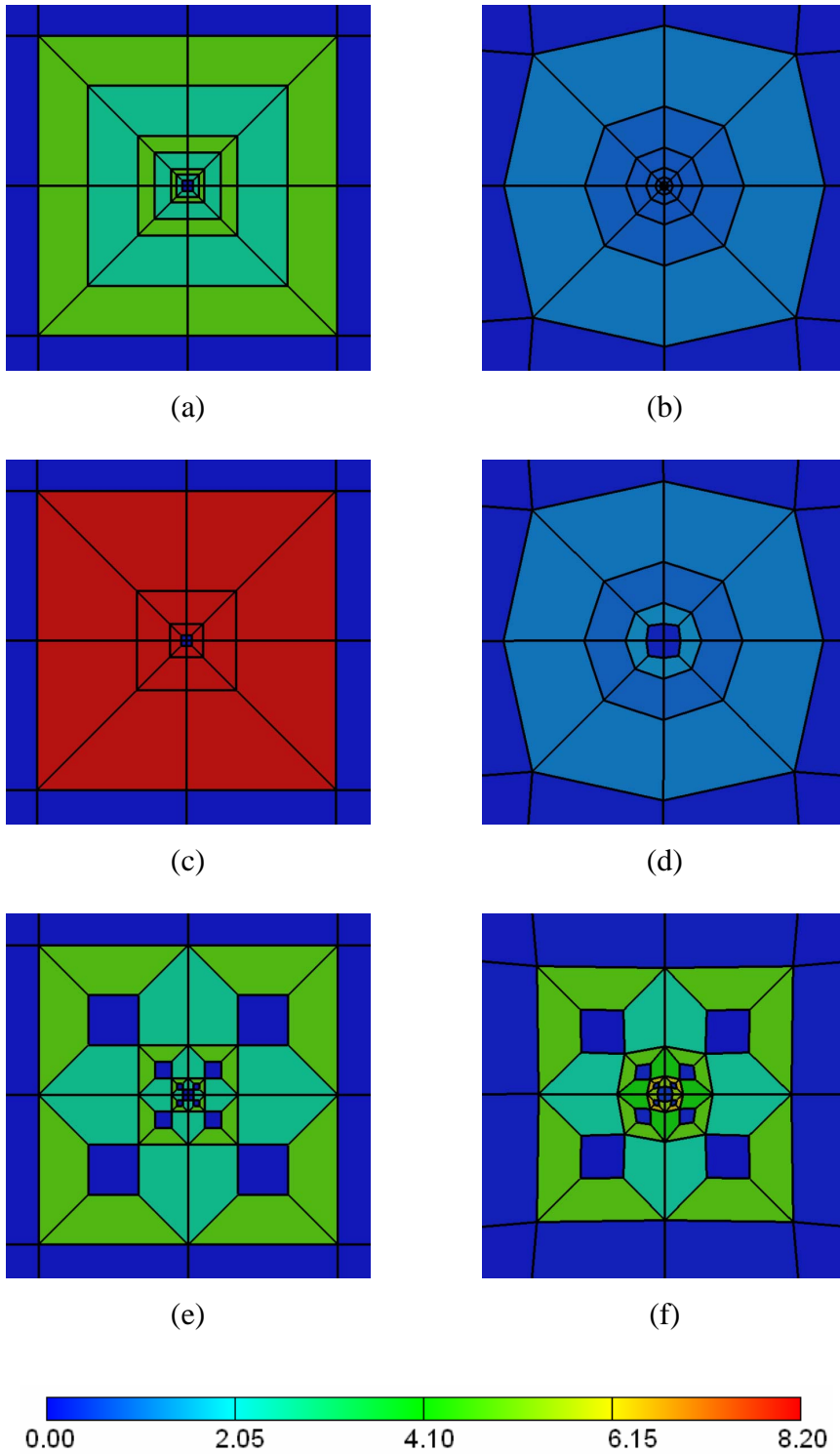


Figura 37: Tercer nivell de refinament, $\eta=3$, d'un element. (a) R^η per EB-CM. (c) R^η per NB-S. (e) R^η per NB-DG. (b) $S \circ R^\eta$ per EB-CM. (d) $S \circ R^\eta$ per NB-S. (f) $S \circ R^\eta$ per NB-DG.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	1.4099	1.4099
$\eta = 2$	4.72231	1.25465	1.24463
$\eta = 3$	4.72231	1.24572	1.18563

Taula 9: Algoritme *EB-C*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	8.125	1.72039	1.72039
$\eta = 2$	8.12524	1.42012	1.42178
$\eta = 3$	8.12524	1.30952	1.31468

Taula 10: Algoritme *NB-S*: Màxims valors de distorsió.

	R^n	$S\circ R^n$	$(S\circ R)^n$
$\eta = 1$	4.72222	5.34948	5.34948
$\eta = 2$	4.72231	5.82307	5.84758
$\eta = 3$	4.72231	6.20886	6.30935

Taula 11: Algoritme *NB-DG*: Màxims valors de distorsió.

2.4.4 Diversos refinaments de dos mateixos nodes

Els anteriors tests han involucrat principalment els patrons bàsics dels algorismes de refinament considerats. Aquest test és considerat per comparar els dos patrons de refinament *Node-Based* considerats en el cas d'un element amb dos nodes oposats marcats.

Els refinaments que es consideren en aquest test no atenen només a diferents nivells de refinament, concretament, es defineixen d'aquesta manera:

Sigui una malla uniforme M . Donats dos nodes N_1, N_2 tals que formen part d'un mateix element i són oposats, es defineix el conjunt $L_1 = \{N_1, N_2\}$.

R_i per $i = 1, 2, 3$ correspon a un refinament amb els elements de L_i com a nodes marcats. Es defineix L_i per $i = 2, 3$ com el conjunt dels nodes interiors de grau 4 aportats per tot patró de dos nodes oposats (Figura 38) unió amb L_{i-1} .

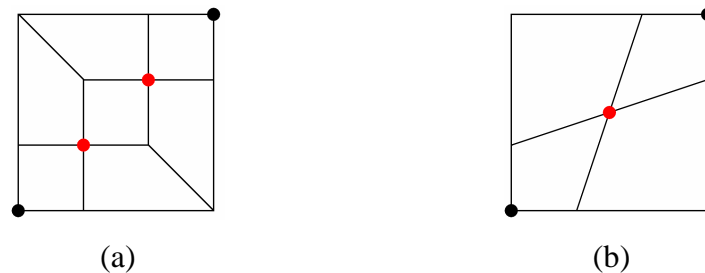


Figura 38: Nodes interiors de grau 4 del patró de dos nodes oposats marcats.
(a) Patró de Schneiders. (b) Patró alternatiu.

Els algorismes considerats en aquest apartat són: *NB-S* i *NB-III*. Es consideren aquests dos algorismes *Node-Based* ja que són representants del comportament dels dos patrons estudiats per un element de dos nodes marcats, i en el cas d'un node marcat involucren el millor patró segons els

tres tests anteriors. No es consideren algoritmes *Edge-Based* perquè aquesta situació no representa cap comportament interessant per aquest tipus d'algoritmes.

Les Taules 12, 13 contenen el màxim dels valors de distorsió de les malles obtingudes a partir dels refinaments considerats en aquests apartats. Algunes de les malles obtingudes es mostren en les Figures 39, 40, 41.

El comportament de l'algoritme *NB-S* sense aplicar un suavitzador presenta alts valors de distorsió en els refinaments. L'ús posterior d'un suavitzador rebaixa els alts valors de distorsió absoluts en R^η per $\eta = 2,3$ amb *NB-S* (Taula 12). Però clarament amb l'algoritme *NB-III* s'obtenen millors resultats que amb *NB-S* a cada iteració de refinament ja sigui aplicant suavitzador o no, (veure Taules 12, 13).

Cal remarcar que segons els resultats obtinguts, l'algoritme *NB-S* presenta per aquest test un pobre comportament sota l'efecte del suavitzador (Taula 12). Aquest fet s'atribueix a l'augment de graus de connectivitat que suposa la consideració del patró de la Figura 24 (b) de Schneiders enlloc del patró de la Figura 24 (d) (diferència entre *NB-S* i *NB-III*). Aquest augment dels graus de connectivitat carrega excessivament la topologia limitant l'efecte del suavitzador.

	$R_i \circ R_{i-1} \circ \dots \circ R_1$	$S \circ R_i \circ \dots \circ R_1$	$(S \circ R_i) \circ \dots \circ (S \circ R_1)$
$i=1$	8.125	2.53301	2.53301
$i=2$	51.389	10.1133	9.66287
$i=3$	51.3891	18.4325	19.0546

Taula 12: Algorisme NB-S: Màxims valors de distorsió.

	$R_i \circ R_{i-1} \circ \dots \circ R_1$	$S \circ R_i \circ \dots \circ R_1$	$(S \circ R_i) \circ \dots \circ (S \circ R_1)$
$i=1$	8.125	1.71178	1.71178
$i=2$	8.125	2.54013	2.51478
$i=3$	11.5204	2.79305	2.78272

Taula 13: Algorisme NB-III: Màxims valors de distorsió.

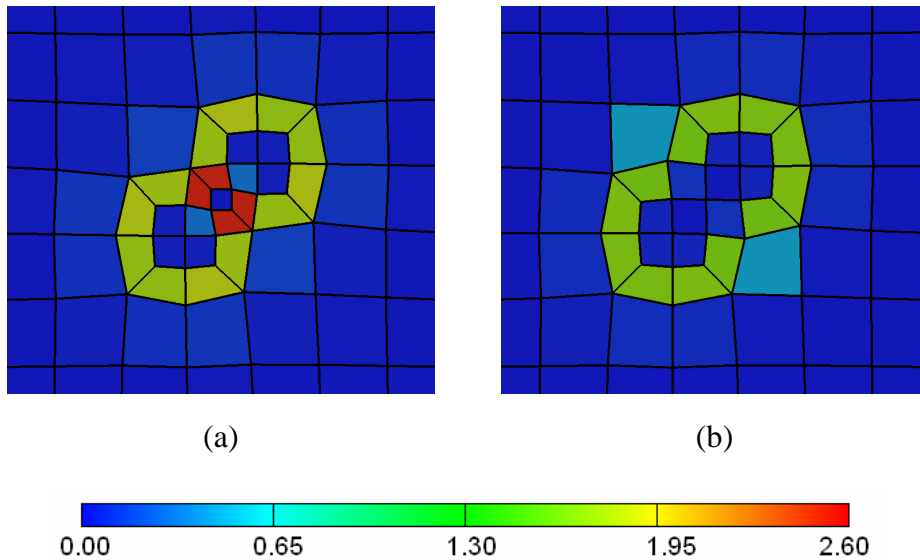


Figura 39: (a) Malla corresponent a $S \circ R_1$ usant l'algorisme NB-S.
 (b) Malla corresponent a $S \circ R_1$ usant l'algorisme NB-III.

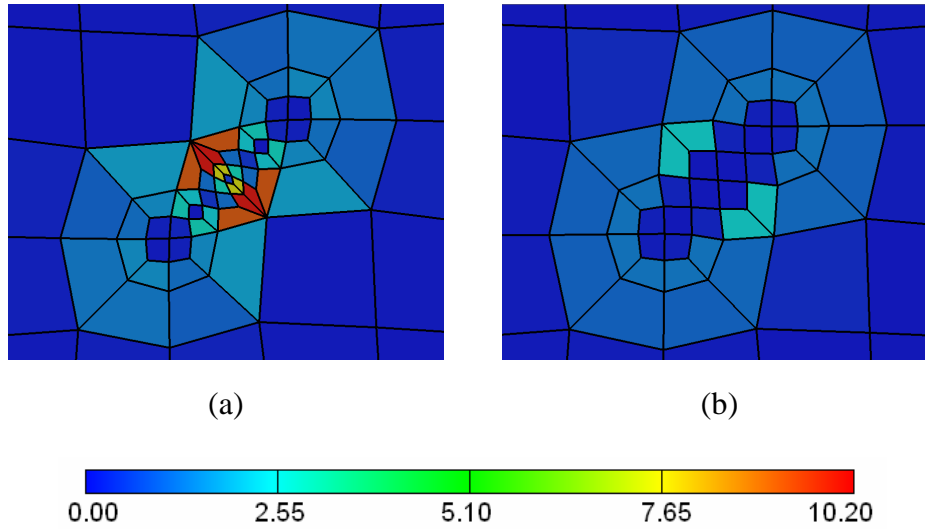


Figura 40: (a) Malla corresponent a $S \circ R_2 \circ R_1$ usant l'algoritme *NB-S*.
 (b) Malla corresponent a $S \circ R_2 \circ R_1$ usant l'algoritme *NB-III*.

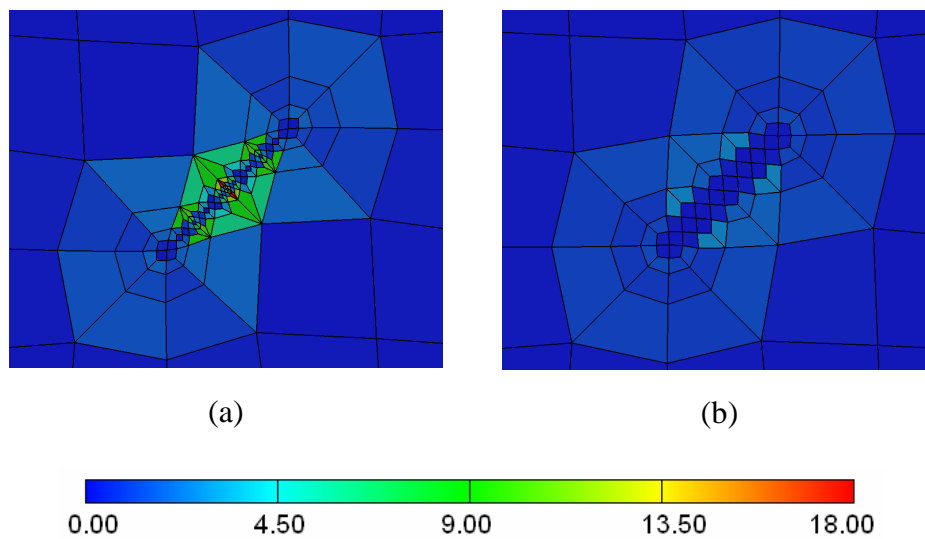


Figura 41: (a) Malla corresponent a $S \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1$ usant l'algoritme *NB-S*.
 (b) Malla corresponent a $S \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1$ usant l'algoritme *NB-III*.

2.4.5 Refinaments successius dels dos pitjors elements

Donada una malla no estructurada M , el plantejament d'aquest apartat consisteix en fer un primer refinament $S \circ R_1(M)$ i després fer successius refinaments $S \circ R_i(M_{i-1})$ per $i > 1$ definits com:

R_i és l' i -èssim refinament i consisteix en refinar els dos elements amb major valor de distorsió de

$$M_{i-1} := (S \circ R_{i-1}) \circ \dots \circ (S \circ R_2) \circ (S \circ R_1)(M).$$

La configuració d'elements marcats pel refinament inicial R_1 s'ha de prendre diferent pels algorismes *Edge-Based* i *Node-Based* atès que es planteja com una configuració que doni lloc a tots els patrons. Aquestes configuracions involucren els elements pitjors de la malla, Figura 42.

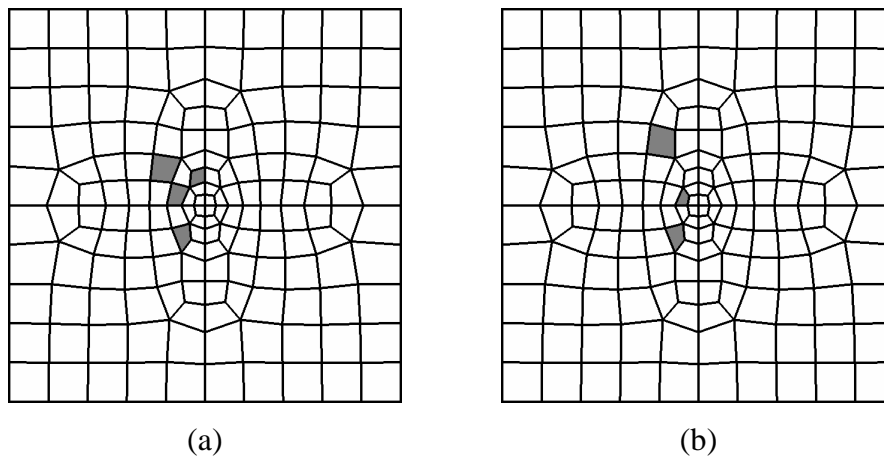


Figura 42: (a) Elements marcats pel primer refinament *Edge-Based*
(b) Elements marcats pel primer refinament *Node-Based*

Aquest test és concebut per caracteritzar la propagació dels pitjors elements segons cada algoritme. Així que es consideren fins a cinc iteracions de refinament. L'atenció es centra en dos trets principals:

- i)* Quins valors màxims de distorsió s'obtenen en cada iteració per cada algoritme.
- ii)* Quin patró origina els elements amb valors més alts de distorsió en cada iteració per cada algoritme.

La Taula 14 conté els valors de distorsió màxims en cada iteració. Responent a la qüestió *i)*, els algorismes *EB-C*, *NB-S* i *NB-III* presenten els millors comportaments al llarg de totes les iteracions donant lloc a elements amb valors de distorsió similars. Es fa difícil dir quin d'aquests tres es comporta millor, atès que els valors de distorsió obtinguts són similars. Cal notar que *EB-CM* presenta el mateix comportament que *EB-C* ja que no hi ha elements amb nivells de refinament prescrits superiors a 1. Els algorismes *NB-DG* i *NB-IV* clarament presenten els pitjors comportaments, des de la segona iteració.

	<i>EB-C</i> <i>EB-CM</i>	<i>NB-S</i>	<i>NB-DG</i>	<i>NB-III</i>	<i>NB-IV</i>
<i>M</i>	2.27818 2.27818	2.27818 2.27818	2.27818 2.27818	2.27818 2.27818	2.27818 2.27818
$S \circ R_1(M)$	11.4852 7.96598	8.06397 7.68262	13.6312 11.5849	7.99054 7.06893	13.3765 11.3895
$S \circ R_2(M_1)$	9.81736 8.46505	11.5864 7.68322	33.807 31.7501	11.9808 11.8403	31.8464 27.484
$S \circ R_3(M_2)$	12.6706 11.3107	9.76079 7.19111	32.2297 28.0824	10.4534 9.42753	33.9653 32.1461
$S \circ R_4(M_3)$	14.0296 11.1125	14.0248 11.5679	34.3097 27.7712	13.8261 11.4363	24.4391 20.4004
$S \circ R_5(M_4)$	16.3971 9.404	10.5619 9.34897	27.0213 20.9757	13.0063 12.7864	52.0336 50.979

Taula 14. Màxim i segon màxim dels valors de distorsió assolits en cada iteració.

Responent a la qüestió *ii*) la Figura 43 conté els patrons que ocasionen els elements que requereixen ser marcats en els posteriors refinaments.

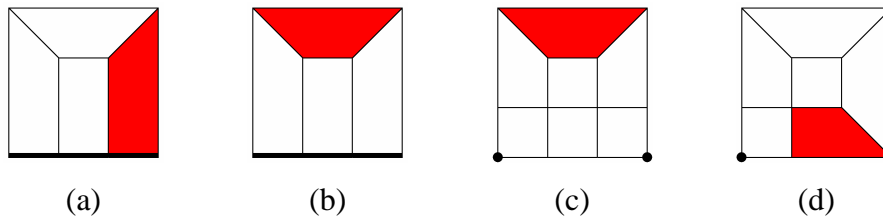


Figura 43: Patrons que ocasionen els pitjors elements. Els elements són pintants de color vermell.

Usant l'algoritme *EB-C* es requereix per ser refinat en la primera iteració l'element indicat en la Figura 43 (a). En les successives iteracions és refinat el quadrilàter indicat en la Figura 43 (b).

Usant els algorismes *NB-S* i *NB-III* és refinat en totes les iteracions l'element indicat en la Figura 43 (c).

En la primera iteració, usant els algorismes *NB-DG* i *NB-IV* es requereix l'element indicat en la primera iteració. En les iteracions posteriors és refinat l'element de la Figura 43 (d).

Els resultats obtinguts en aquest test suggereixen com a treballs futurs considerar millores topològiques concretes pels patrons mostrats en la Figura 43.

Capítol 3. Refinament 3D

En aquest capítol són considerats algorismes de refinament per malles conformes formades exclusivament per hexàedres. Aquests algorismes s'atenen als mateixos tipus de refinament estudiats en el capítol anterior, i.e., són algorismes que es descriuen per patrons etiquetats o bé per arestes marcades o bé per nodes marcats.

Els patrons pels algorismes tridimensionals s'obtenen a partir dels patrons bidimensionals. La tècnica per aconseguir patrons tridimensionals consisteix en mallar mitjançant patrons 2D les cares del patró 3D que ha de ser descompost en hexàedres. La determinació de la descomposició hexaèdrica pot no ser possible; sent condició necessària (i suficient) per l'existència de la descomposició hexaèdrica que la frontera estigui descomposta en un nombre parell de quadrilàters [9]. Tanmateix, encara que existeixi una descomposició hexaèdrica del patró pot ser difícil determinar-la, i en alguns casos no és possible que el patró obtingut sigui simètric.

3.1 Refinament dins una làmina d'hexàedres

Es pot refinar un hexàedre afectant només arestes corresponents a una làmina d'elements, com mostra la Figura 44.

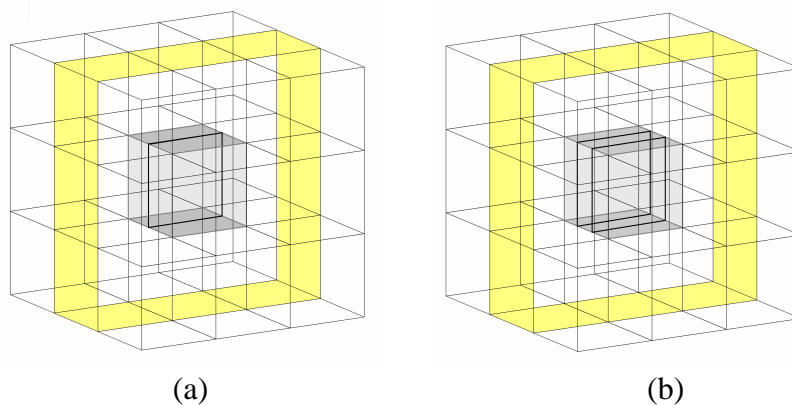


Figura 44: Refinament no conforme d'un element per les quatre arestes

que determinen una làmina d'hexàedres. (a) Refinant les arestes en 2 arestes. (b) Refinant les arestes en 3 arestes. Amb color groc són pintades les cares exteriors dels hexàedres de la làmina.

Cal refinar un element en tres nous elements (Figura 44 (b)) per mantenir la conformitat de la malla i no haver d'estendre el refinament al llarg de tota la làmina afectada [4]. Tanmateix la conformitat de la malla s'aconsegueix amb uns patrons de transició adequats. Considerant que un element marcat per refinar té quatre arestes marcades, els patrons de transició requerits per adjacència han ser marcats de la següent manera:

- una aresta marcada, Figura 45 (a).
- dues arestes oposades d'una cara marcades, Figura 45 (b).



Figura 45: Patrons de transició requerits per l'algoritme de refinament dins una làmina. (a) Una aresta marcada. (b) Dues arestes oposades marcades en una mateixa cara.

Per establir un patró primerament cal mallar les seves cares amb els patrons 2D pertinents, com es pot veure en les Figura 46. Posteriorment, cal determinar la descomposició del patró en hexàedres, Figura 47.



Figura 46: (a) Refinament 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 45 (a). (b) Refinament 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 45 (b).

Els patrons de les Figures 47 són els patrons bàsics del mètode de refinament dins una làmina. Aquests patrons són usats en els apartats posteriors per determinar altres patrons.

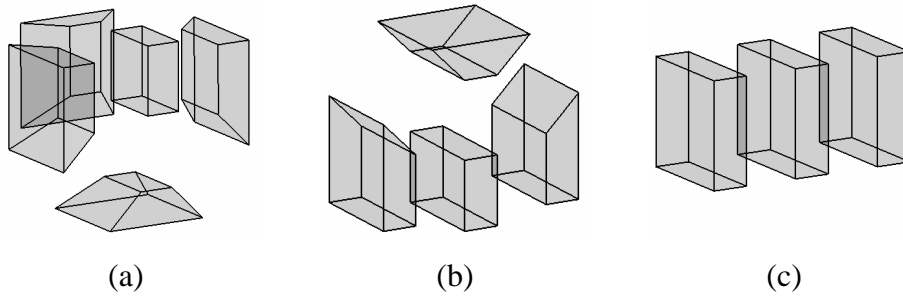


Figura 47: Patrons bàsics de l'algorisme de refinament dins una làmina.
 (a) Patró d'una aresta marcada. (b) Patró de dues arestes oposades marcades d'una mateixa cara. (c) Patró amb les quatre arestes que determinen la làmina.

3.2 Refinament *Edge-Based*

El plantejament del mètode de refinament *Edge-Based* Bàsic 3D, anàlogament al cas bidimensional, és el de considerar simultàniament refinaments com els de l'apartat 3.1 per cadascuna de les tres làmines que defineixen un hexàedre marcat per refinar. Es considera per tant, que el patró per refinar un hexàedre marcat consisteix en vint-i-set elements, com mostra la Figura 51 (c). Aquest patró té les dotze arestes marcades.

Per tal que el refinament sigui conforme, es requereixen patrons de transició que han ser marcats de la següent manera:

- una aresta marcada, Figura 48 (a).
- quatre arestes d'una cara marcades, Figura 48 (b).

Per obtenir el refinament per les cares de cada patró es recorre als patrons bàsics 2D del mètode de refinament *Edge-Based*. La Figura 49 mostra els refinaments per les cares dels patrons tridimensionals de transició per aquest mètode de refinament.



Figura 48: Patrons de transició requerits per l'algoritme *EdgeBased*.
 (a) Una aresta marcada. (b) Quatre arestes d'una cara marcades.



Figura 49: (a) Refinement 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 48 (a).
 (b) Refinement 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 48 (b).

Concretament, el refinament de les cares de l'hexàedre mostrat en la Figura 49 (b) d'una cara arestes marcades s'obté substituint la cara marcada pel patró 2D de quatre arestes marcades i les quatre cares adjacents són substituïdes pel patró d'una aresta marcada 2D.

El patró d'una aresta marcada considerat és el mateix que en l'apartat 3.1, veure la Figura 47 (a). Per contra, la determinació del patró de quatre arestes marcades de manera que sigui compatible amb el refinament bidimensional de les seves cares no és trivial. La Figura 50 mostra el procés d'obtenció de la descomposició en hexàedres d'aquest patró. S'obté substituint un hexàedre amb el patró de dues arestes marcades de l'apartat 3.1 (Figura 47 (b)), i novament considerar aquest patró per les altres dues arestes marcades al llarg de la làmina que defineixen.

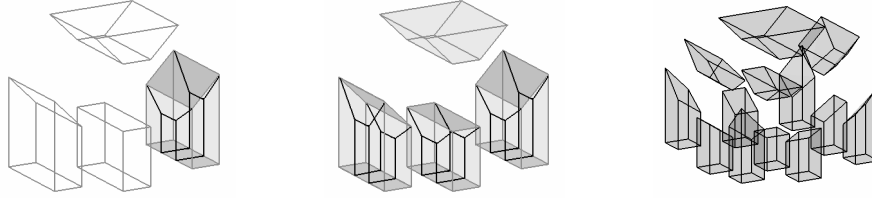


Figura 50: Procés de descomposició del patró de quatre arestes d'una cara marcades. Es basa en la consideració del patró de la Figura 47 (b) inclòs en ell mateix.

Així doncs, els patrons bàsics *Edge-Based* són tres patrons, que es mostren en la Figura 51. Cal remarcar, que en el cas 3D el refinament d'un sol element aporta un nombre significativament major d'elements que en el cas 2D. Per exemple, pel cas particular de refinar un element intern d'una malla estructurada s'obtenen amb el refinament *Edge-Based* 146 nous elements.

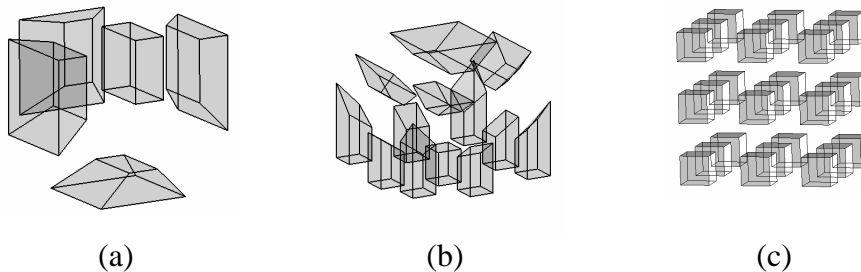


Figura 51: Patrons bàsics de l'algoritme de refinament *Edge-Based*.
 (a) Patró d'una aresta marcada. (b) Patró de quatre arestes d'una cara marcades. (c) Patró amb totes arestes marcades.

L'algoritme *Edge-Based* Bàsic expandeix el conjunt d'arestes marcades quan un hexàedre té una configuració d'arestes marcades que no coincideix amb cap patró bàsic. Tanmateix aquesta expansió es defineix de manera que si és possible es marquin només les arestes d'una cara, o altrament que es marquin totes les arestes. La Figura 52 detalla aquest criteri d'expansió.

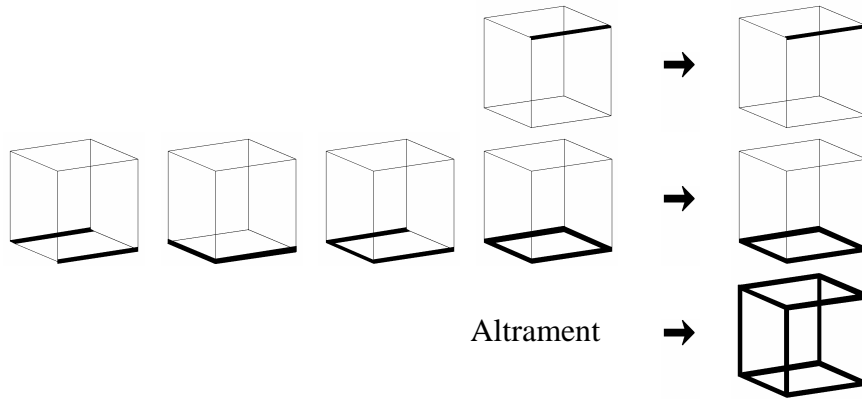


Figura 52: Criteri *Edge-Based* d'expansió d'arestes no marcades per refinar amb els patrons bàsics.

3.2.1 Algoritmes de Refinement *Edge-Based*

En el cas 2D s'ha trobat un patró per cada combinació possible d'arestes marcades. Amb tots els patrons s'ha determinat un nou algoritme anomenat algoritme *Edge-Based* Complet. A més a més, amb tots els patrons i considerant un adequat criteri de transmissió de nivells de refinament s'ha determinat un altre nou algoritme anomenat algoritme *Edge-Based* Complet Millorat. L'algoritme *EB-CM* presenta un millor comportament respecte els algoritmes *EB-Bàsic* i *EB-C*. L'objectiu en aquest apartat és aconseguir una versió tridimensional de l'algoritme *EB-CM*. Aquest nou algoritme s'anomena algoritme *Edge-Based* Millorat, *EB-M*, perquè no considera tots els patrons possibles.

Per definir l'algoritme *EB-M* calen certs patrons no bàsics, que són determinats en el subapartat 3.2.1.2. Cal remarcar que l'obtenció d'aquests patrons és possible ja que ha quedat demostrat en el proper subapartat que qualsevol combinació d'arestes dona un patró *Edge-Based* que pot ser descompost en hexàedres.

3.2.1.1 Existència de qualsevol patró *Edge-Based*

Com ja s'ha esmentat al principi d'aquest capítol, hi ha una condició necessària i suficient que caracteritza els patrons que poden ser descompostos en hexàedres. Concretament, Mitchell (1996) [9] presenta aquesta caracterització amb el següent teorema:

Teorema Qualsevol malla, d'una superfície topològicament equivalent a una esfera, feta d'un nombre parell de quadrilàters admet una malla compatible d'hexàedres pel volum envoltat. [9]

Usant aquest teorema, com a corol·lari s'obté un resultat important que assegura l'existència de qualsevol patró hexaèdric per l'algoritme *Edge-Based*. El corol·lari, requereix un lema previ que assegura que hi ha un nombre parell de cares amb un nombre senar d'arestes marcades.

Lema Sigui $X = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ el conjunt d'arestes marcades d'un hexàedre H , $n \leq 12$. Per cada cara c_i de H sigui $X_i = \{e_j \mid e_j \in X, e_j \in c_i\}$, $i = 1 \div 6$. Sigui $S = \{i \mid i = 1 \div 6, X_i \text{ té cardinal senar}\}$. Aleshores, S té cardinal parell.

Demostració: per inducció sobre el cardinal de X .

Si $|X| = 1$, $X = \{e_{i_1}\}$. Siguin c_i, c_j les cares adjacents amb e_{i_1} .

Clarament, $S = \{i, j\}$ i per tant té cardinal parell.

Suposant ara que S té cardinal parell per $|X| = n$ marquem una nova aresta $e_{i_{n+1}}$, $X = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, e_{i_{n+1}}\}$. Siguin c_i, c_j les cares que tenen $e_{i_{n+1}}$ per aresta. Al considerar aquesta nova aresta la paritat de $|X_i|, |X_j|$ ha canviat, però el cardinal de S conserva la seva paritat que per hipòtesi d'inducció era parell.

Corol·lari Sigui $X = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ el conjunt d'arestes marcades d'un hexaèdre H . Sigui R_X el refinament *Edge-Based* 2D efectuat en les cares de H d'acord amb el conjunt d'arestes marcades X . Aleshores, existeix una malla d'hexàedres per H compatible amb R_X .

Demostració: la substitució d'una cara de H pel corresponent patró *Edge-Based* 2D aporta (veure Figura 11):

- cas *i*) un nombre parell de cares (2, 4 o 8) si el patró atén a un nombre parell de costats marcats.
- cas *ii*) un nombre senar de cares (3 o 9) si el patró atén a un nombre senar de costats marcats.

El Lema permet assegurar que el cas *ii*) es pot només donar un nombre parell de vegades. D'aquesta manera, com que inicialment l'hexaèdre H té 6 cares, després de fer l'oportuna substitució en cada cara, el nombre total de cares que constitueixin R_X és també un nombre parell. Així, com a conseqüència del Teorema de Mitchell s'assegura l'existència d'una malla compatible amb R_X .

3.2.1.2 Algoritme *Edge-Based* Millorat

Prenent un criteri de transmissió de nivells de refinament anàleg al considerat en el cas 2D, un element marcat amb diversos nivells de refinament transmet un nivell de refinament a totes les arestes no marcades adjacents. Aquest requeriment fa necessària la consideració de nous patrons, com mostra la Figura 53.

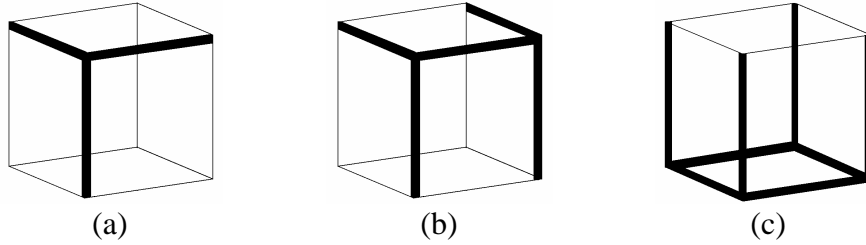


Figura 53: Patrons *EdgeBased* no bàsics requerits per l'algoritme *EB-M*.

En el cas particular d'un hexàedre amb diversos nivells de refinament els seus hexàedres veïns adjacents per node, per aresta i per cara seran substituïts respectivament els patrons (a), (b), (c) de la Figura 53.

La Figura 54 mostra el refinament del contorn dels hexàedres de la Figura 53. Posteriorment, cal determinar la descomposició de cada patró en hexàedres.

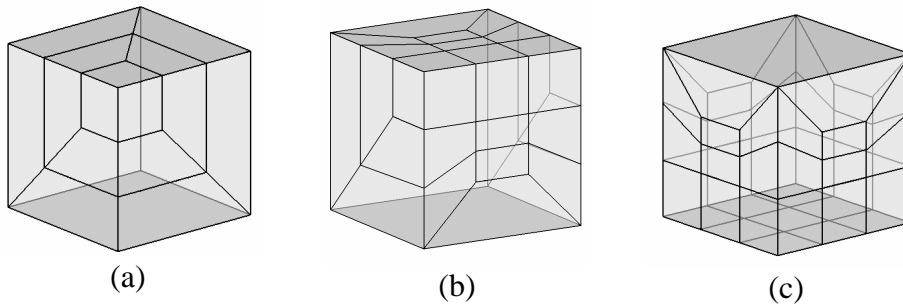


Figura 54: (a) Refinament 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 53 (a).
 (b) Refinament 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 53 (b).
 (c) Refinament 2D de les cares de l'hexàedre de la Figura 53 (c).

Existeix una descomposició en hexàedres per cada patró requerit, com assegura el corol·lari del subapartat anterior. No obstant, la determinació del patró de cinc arestes marcades (Figura 54 (b)) no és trivial. Per determinar-lo cal considerar inicialment el patró d'una aresta marcada (Figura 51 (a)) i inserir dues vegades al llarg d'una làmina un patró auxiliar. El procés d'obtenció del patró de cinc arestes marcades és

detallat en la Figura 55. Per més detalls sobre el patró auxiliar, veure el següent apartat on és detallat amb altres patrons auxiliars, Figura 61 (b).

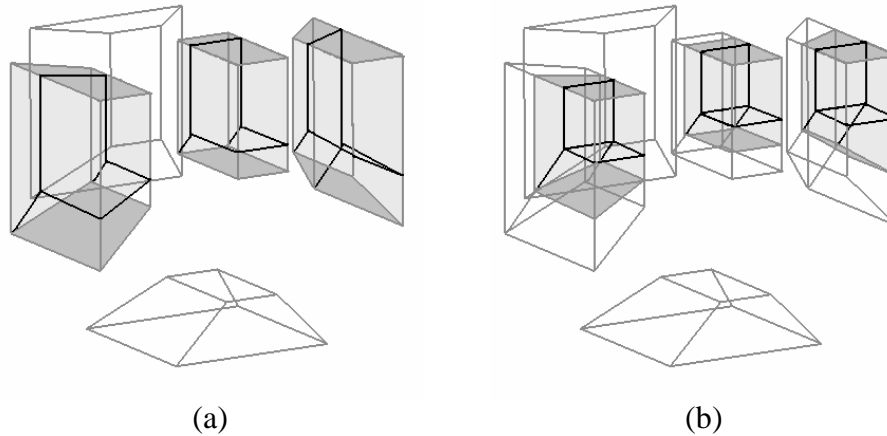


Figura 55: Procés de descomposició del patró de cinc arestes marcades. Es basa en el patró d'una aresta marcada (Figura 51 (a)).

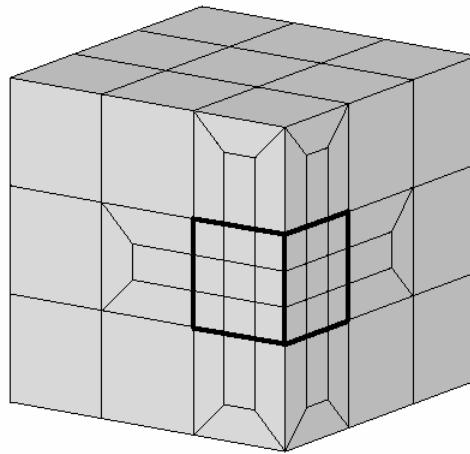
La Figura 56 mostra la descomposició en hexàedres dels tres nous patrons de transició considerats per l'algoritme *EB-M*. La Figura 55 (b) mostra el resultat obtingut pel procés detallat en la Figura 54.

El patró de tres arestes marcades no té gaire dificultat, Figura 56 (a). El patró de vuit arestes marcades (Figura 56 (c)) es mostra descompost en tres blocs. Els dos blocs inferiors tenen configuracions trivials, i el bloc superior correspon al patró de quatre arestes marcades (Figura 51 (b)).

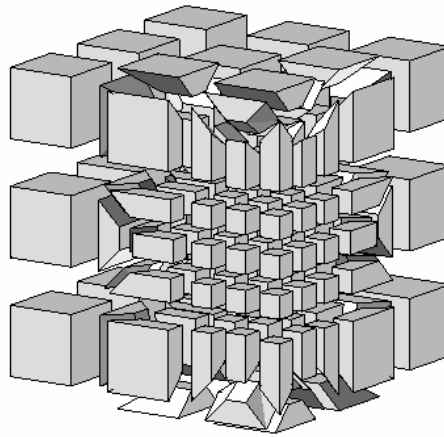
El criteri que es pren per aquest algoritme d'expansió d'arestes marcades quan un hexàedre té una configuració d'arestes marcades que no coincideix amb un patró bàsic és detallat en la Figura 57.

3.2.2 Exemples

Com a primer exemple, es considera el refinament d'un sol element d'una malla uniforme $3 \times 3 \times 3$. La Figura 58 mostra el resultat obtingut per la substitució dels patrons *Edge-Based* bàsics corresponents.

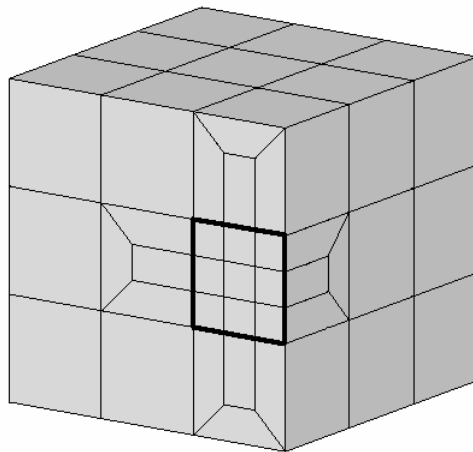


(a)

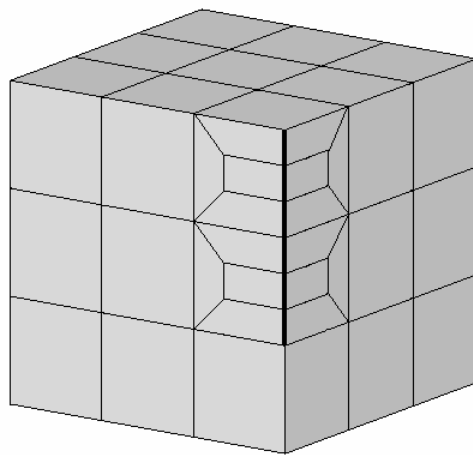


(b)

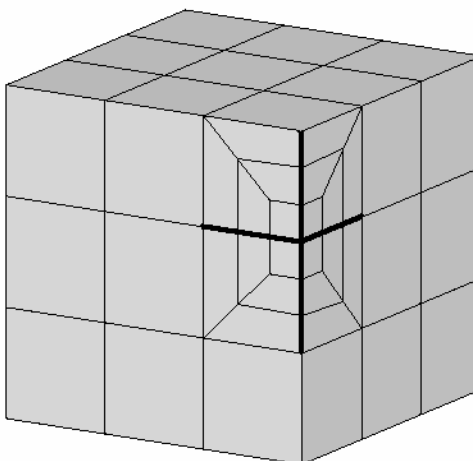
Figura 58: Refinament d'un element d'una malla uniforme $3 \times 3 \times 3$ usant l'algoritme *Edge-Based* Bàsic.



(a)



(b)



(c)

Figura 59: (a) Refinament d'una cara. (b) Refinament de dues arestes. (c) Refinament d'un node.

La Figura 59 mostra tres malles refinades obtingudes marcant una cara, dues arestes i un node, respectivament. Les dues primeres malles s'obtenen com en l'exemple anterior, prenent els patrons bàsics pertinents. Cal remarcar, que amb els patrons bàsics no és possible aconseguir mallar al voltant d'un node com en la Figura 59 (c). Per obtenir-la s'ha utilitzat el patró de tres arestes marcades de l'algoritme *EB-M*.

Finalment, es mostra en la Figura 60 la malla obtinguda per dos nivells de refinament prescrits en un element usant l'algoritme *EB-M*.

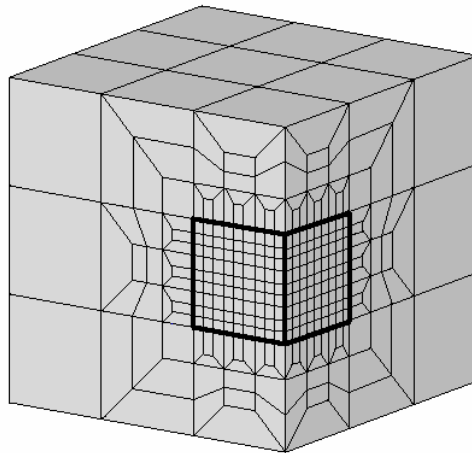


Figura 60: Malla obtinguda usant l'algoritme *EB-M* per un element marcat amb dos nivells de refinament prescrits.

3.3 Refinement *Node-Based*

El mètode de refinament *Node-Based* 3D té un plantejament anàleg al de la seva versió 2D. Pel cas tridimensional, el plantejament consisteix en afegir una làmina d'elements que envolti un element ja refinat amb un refinament *Edge-Based* [4]. Per arribar a determinar els patrons bàsics per aquest plantejament, cal abans notar com s'aconsegueix un refinament que envolti un element; i posteriorment, cal integrar-ho en el patrons *Edge-Based* bàsics.

Observis, que amb els patrons de la Figura 61 s'inclou una làmina d'hexàedres al voltant d'un hexàedre marcat. Aquesta làmina d'hexàedres es correspon en el dual amb una superfície dual tancada que embolica l'element marcat.

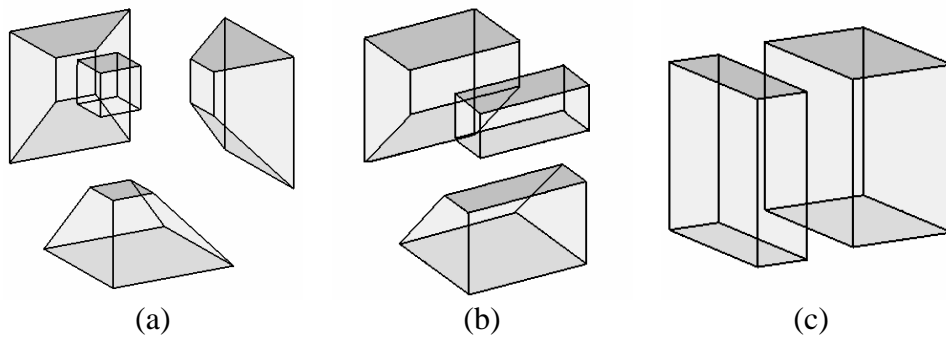


Figura 61: Patrons que descriuen un refinament conforme al voltant d'un element. (a) Patró adjacent a l'element per node. (b) Patró adjacent a l'element per aresta. (c) Patró adjacent a l'element per cara.

Doncs, per obtenir els patrons bàsics del refinament *Node-Based* cal incloure adequadament els patrons de la Figura 61 en els patrons bàsics del refinament *Edge-Based* mostrats en la Figura 51. Els patrons bàsics de tipus *Node-Based* es mostren en la Figura 63. L'algoritme *Node-Based* definit a partir dels patrons bàsics seria pròpiament anomenat algoritme

Node-Based Bàsic però preferiblement es designa com algoritme *Node-Based de Schneiders* [1], [2].

La Figura 62 detalla el procés d'obtenció d'un patró amb descomposició no trivial, concretament, el patró de dos nodes consecutius marcats. El patró de quatre nodes marcats d'una cara s'obté afegint una làmina de nou hexàedres com es veu en la Figura 63 (c). Cal remarcar que anàlogament a la versió 2D, els patrons de l'algoritme *Node-Based* s'etiqueten per nodes.

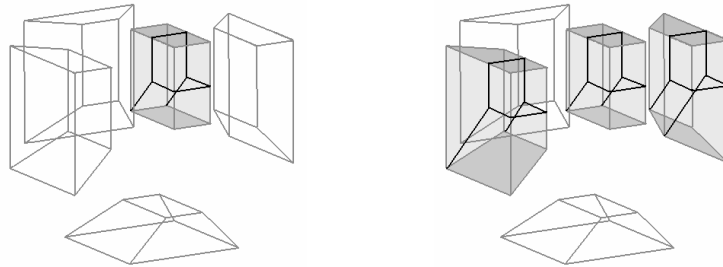


Figura 62: Procés d'obtenció del patró de dos nodes consecutius marcats. Consisteix en incloure el patró de la Figura 57 (b) per una làmina del patró d'una aresta *Edge-Based*.

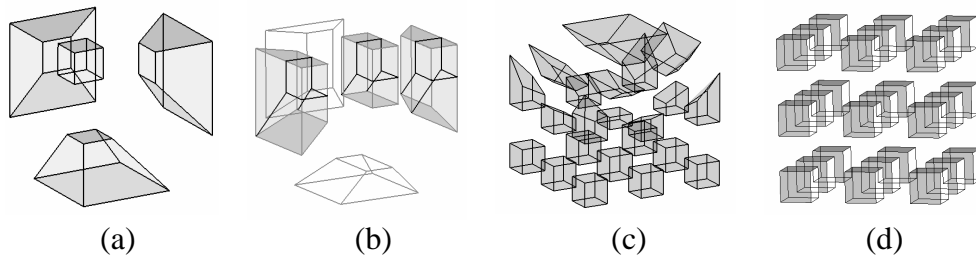


Figura 63: Patrons de Schneiders o patrons bàsics de l'algoritme de refinament *Node-Based*. (a) Patró d'un node marcat. (b) Patró de dos nodes consecutius marcats. (c) Patró de quatre nodes d'una cara marcats. (d) Patró amb tots els nodes marcats.

Pel cas particular de refinar un element intern d'una malla estructurada s'obtenen amb el refinament *Node-Based* 305 nous elements. En aquesta mateixa situació l'algoritme *Edge-Based* aporta menys de la meitat d'aquest total d'elements.

La Figura 64 mostra els refinaments en quadrilàters de les cares dels patrons *Node-Based* obtinguts. Observis que coincideixen amb els refinament 2D usant l'algoritme de Schneiders.

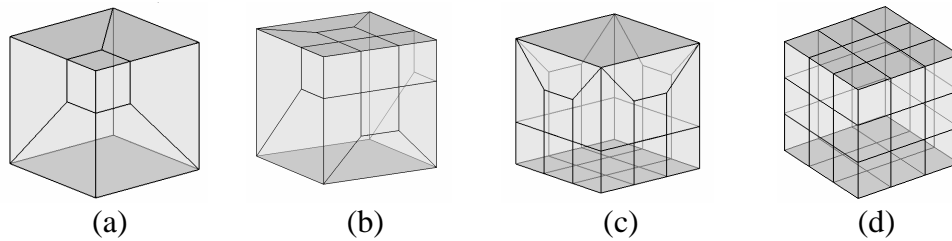


Figura 64: Respectius contorns de les figures mostrades en la Figura 63.

L'algoritme *Node-Based* Bàsic expandeix el conjunt de nodes marcats quan un hexàedre té una configuració de nodes marcats que no coincideix amb cap patró bàsic. La Figura 65 detalla aquest criteri d'expansió.

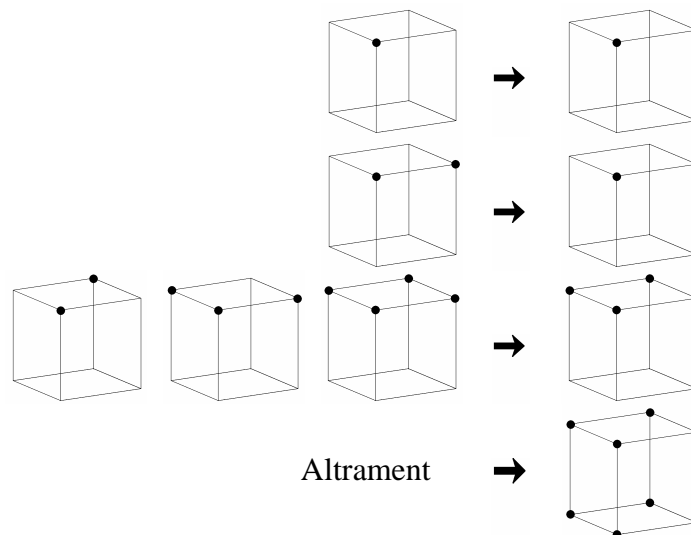


Figura 65: Criteri *Node-Based* d'expansió de nodes no marcats per refinar amb els patrons bàsics.

3.3.1 Algoritmes de Refinement *Node-Based*

En la seva versió tridimensional, cadascun dels algoritmes *Node-Based* considerats en el capítol 2 pateix fortes limitacions. Intentant aconseguir patrons tridimensionals mallant les cares d'un hexàedre a partir dels algoritmes bidimensionals s'obtenen patrons impossibles de descompondre en hexàedres. El motiu és que el nombre total de quadrilàters del contorn és senar [9].

Considerant l'algoritme de Schneiders 2D, es troben set patrons que són impossibles de descompondre en hexàedres. La Figura 66 (a) mostra un d'aquests patrons que no admeten cap descomposició d'hexàedres. La frontera d'aquest patró queda refinada per vint-i-nou quadrilàters. Exactament, de vint-i-dos combinacions per marcar els nodes en set casos el patró corresponent no té cap descomposició en hexàedres [2].

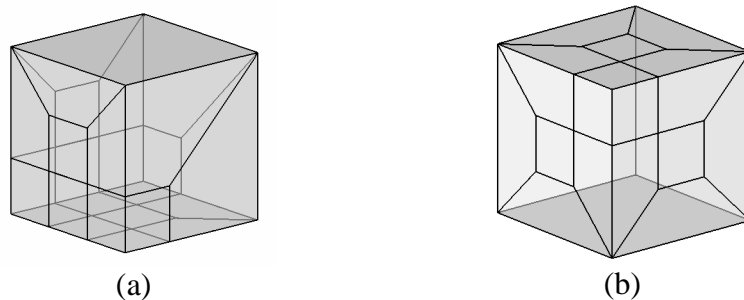


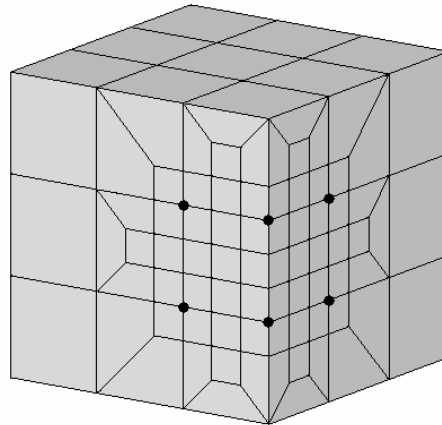
Figura 66: (a) Refinement amb l'algoritme *NB-S* de les cares d'un hexàedre amb tres nodes marcats d'una mateixa cara.
(b) Refinement amb l'algoritme *NB-DG* de les cares d'un hexàedre amb un node marcat.

Considerant l'algoritme *NB-III* 2D per aconseguir patrons tridimensionals, també es donen patrons impossibles de descompondre. Concretament, en nou dels vint-i-dos casos que es pot marcar de manera diferent els nodes no existeix una descomposició en hexàedres.

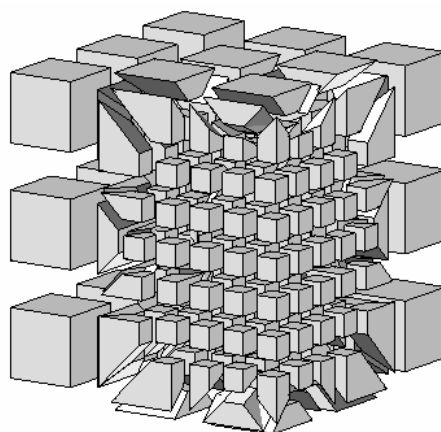
Amb els algorismes *NB-DG* i *NB-IV* no és possible ni obtenir els patrons bàsics. Un refinament *NB-DG* de les cares d'un hexàedre que té un únic node marcat comporta vint-i-una cares, veure Figura 66 (b).

3.3.2 Exemples

Els exemples considerats són anàlegs als de l'apartat *Edge-Based*. Com a primer exemple, es considera el refinament d'un sol element d'una malla uniforme 3x3x3. La Figura 67 mostra el resultat obtingut per la substitució dels patrons *Node-Based* bàsics corresponents.

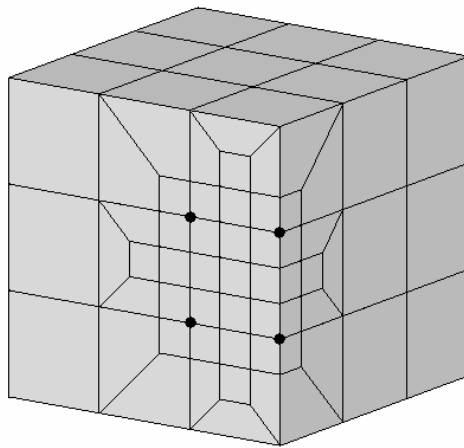


(a)

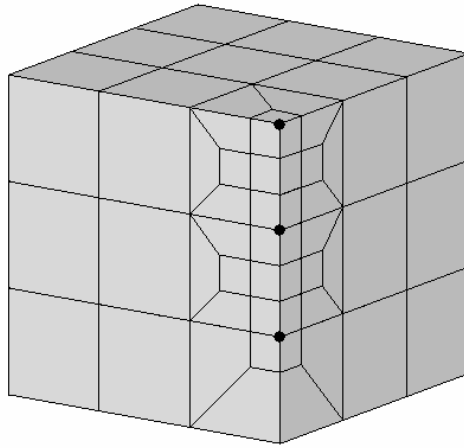


(b)

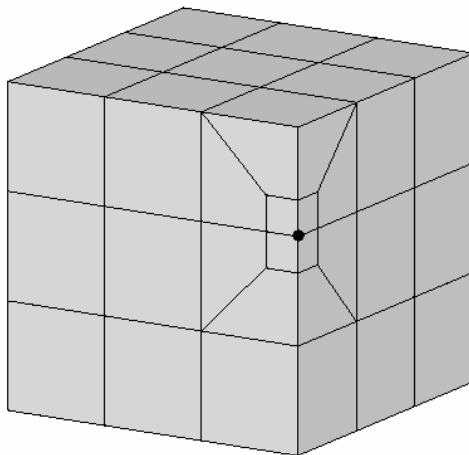
Figura 67: Refinament d'un element d'una malla uniforme 3x3x3 usant l'algoritme de Schneiders.



(a)



(b)



(c)

Figura 68: Refinaments obtinguts mitjançant l'algoritme de Schneiders. (a) Refinament d'una cara. (b) Refinament de dues arestes. (c) Refinament d'un node.

La Figura 68 mostra tres malles refinades obtingudes marcant quatre nodes d'una cara, els tres nodes de dues arestes consecutives i un node, respectivament.

Per últim, es mostra en la Figura 69 la malla obtinguda per dos nivells de refinament prescrits en un element usant l'algoritme de Schneiders.

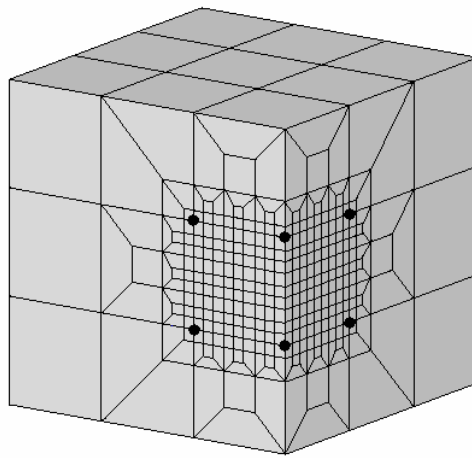


Figura 69: Malla obtinguda usant l'algoritme de Schneiders per un element marcat amb dos nivells de refinament prescrits.

Conclusions i futures línies d'investigació

Els algoritmes de refinament de malles formades amb quadrilàters que han estat estudiats inclouen un patró per cada possible configuració d'arestes marcades (algoritmes *Edge-Based*) o bé de nodes marcats (algoritmes *Node-Based*). D'aquesta manera s'evita la necessitat d'expandir la zona de refinament i també s'evita la conseqüent expansió de la zona de transició del refinament. Els algoritmes *Edge-Based* bidimensionals *EB-C* i *EB-CM* són aportacions significatives en aquest sentit; especialment el segon d'aquests algoritmes pel fet que presenta un bon comportament per diversos refinaments successius i també presenta un bon comportament sota l'efecte d'un suavitzador.

En quant a algoritmes *Node-Based* bidimensionals, l'algoritme de Schneiders presenta també un bon comportament, tant en diversos refinaments successius com sota l'efecte d'un suavitzador. L'algoritme anomenat *NB-III* suposa una certa millora respecte l'algoritme de Schneider, considerant una elecció de patró de dos nodes oposats marcats que no afegeix dues connectivitats innecessàries. Aquest fet suggereix estudiar la consideració d'un nou patró de tres nodes marcats que eviti incloure una connectivitat innecessària. Concretament, aquest patró proposat s'especifica en l'Apèndix B. Cal remarcar però, que els dos patrons esmentats són requerits en menys ocasions que altres patrons més habituals.

Tanmateix per millorar els algoritmes considerats, els resultats obtinguts suggereixen enfocar l'atenció en el patró de dos nodes consecutius marcats (per algoritmes *Node-Based*) i en el patró d'una aresta marcada (patró ànalog per algoritmes *Edge-Based*). En aquest context, com a possible treball futur es poden considerar millores topològiques (Apèndix B) per aquests patrons i incloure-les en el codi implementat.

Els algoritmes *EB-CM* i *NB-S* (també el *NB-III*) ofereixen els millors resultats tant per diversos refinaments successius com també pel

comportament que presenten sota l'efecte d'un suavitzador. L'avantatge que ofereix l'algoritme *EB-CM* respecte l'algoritme *NB-S* consisteix en que l'algoritme *EB-CM* aporta menys elements en la zona de transició per qualsevol nivell de refinament prescrit. Per altra banda, l'avantatge que presenta l'algoritme *NB-S* respecte l'algoritme *EB-CM* és que el primer no requereix l'ús del suavitzador en cada iteració de refinament, sinó que l'aplicació del suavitzador en la última iteració és suficient.

Els algoritmes coneguts de refinament de malles formades amb hexàedres només inclouen patrons bàsics. En conseqüència, aquests algoritmes poden donar lloc a significatives expansions de la zona de refinament. Per aquest motiu és oportuna la consideració de nous patrons. En aquest sentit, l'algoritme de Schneiders presenta limitacions ja que diversos patrons no poden ser obtinguts. Per contrari, una aportació significativa d'aquest projecte és el resultat que assegura la existència de qualsevol patró *Edge-Based*. Per consegüent, ha estat possible determinar nous patrons inclosos en el nou algoritme *EB-M*.

L'algoritme *EB-M* presenta dos avantatges respecte l'algoritme *Node-Based*. En primer lloc, els nous patrons compresos en l'algoritme *EB-M* són patrons no bàsics, que permeten reduir certes necessitats d'expansió. En segon lloc, l'algoritme *EB-M* presenta el mateix avantatge que la seva versió bidimensional concretament, aporta menys elements en la zona de transició per qualsevol nivell de refinament prescrit que l'algoritme de Schneiders.

Hi ha diverses línies d'investigació derivades d'aquests algoritmes. En primer lloc, és important determinar nous patrons hexaèdrics a fi de reduir els casos que comporten una expansió de la zona de refinament. Aquest fet ha de ser considerat principalment per refinaments *Edge-Based*, i en el cas de refinaments *Node-Based* intentar determinar descomposicions dels patrons que ho permetin.

En segon lloc, tenint en consideració els resultats obtinguts en el cas bidimensional, seria d'esperar que al llarg de diversos refinaments successius els algoritmes *EB-M* i *NB-S* presentin bons comportaments. Tanmateix caldria analitzar-ho fent un estudi pels algoritmes tridimensionals anàleg al que s'ha realitzat per els algoritmes bidimensionals.

Una tercera consideració comuna pels algoritmes de refinament bidimensionals i tridimensionals consisteix en la integració del codi desenvolupat en un procés de càlcul adaptatiu per determinar mitjançant l'experimentació el comportament d'aquests algoritmes de refinament. Finalment, es pot pensar també en integrar el codi d'aquests algoritmes en un programa de generació de malles que descompongui el domini en blocs.

Referències

- [1] Schneiders R. “Refining quadrilateral and hexahedral element meshes.” *5th International Conference on Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 679-688. 1996
- [2] Schneiders R., Debye J. “Refinement Algorithms for Unstructured Quadrilateral or Brick Element Meshes.” *Modeling, Mesh Generation and adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations; Proceedings IMA*. 1995
- [3] Harris N.J., Benzley S.E., Owen S.J. “Conformal Refinement of All-Hexahedral Element Meshes based on Multiple Twist Plane Insertion.” *13th International Meshing Roundtable*, pp. 157-168. 2004
- [4] Murdoch P., Benzley S., Blacker T., Mitchell S.A. “The Spatial Twist Continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes.” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol.28, Elsevier, pp. 137-149. 1997
- [5] Staten M.L., Canann S.A. “Post Refinement Element Shape Improvement for quadrilateral meshes.” *AMD-Trends in Unstructured Mesh Generation*, vol 220, pp. 9-16. 1997
- [6] Schneiders R., Schindler R., Weiler F. “Octree-based generation of hexahedral element meshes.” *5th International Meshing Roundtable*, pp.195-196. 1997
- [7] Zhang Y., Bajaj C. “Adaptive and quality Quadrilateral/Hexahedral Meshing from Volumetric Data.” *13th International Meshing Roundtable*, pp. 365-376. 2004
- [8] Tchou K.F., Dompierre J., Camarero R., “Conformal Refinement of All-Quadrilateral and All-Hexahedral Meshes according to an anisotropic metric.” *11th International Meshing Roundtable*, pp. 231-242. 2002

- [9] Mitchell S.A., “A Characterization of the Quadrilateral Meshes of a Surface Which Admit a Compatible Hexahedral Mesh of the Enclosed Volume.” *Proceedings, 13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS '96), Lecture Notes in Computer Science 1046*, Springer, pp. 465- 476. 1996.
- [10] Herrmann L.R., “Laplacian-isoparametric grid generation scheme”, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol 102, pp. 749-756. 1976.
- [11] Oddy A., Goldak J., McDill M., Bibby M. “A distortion metric for isoparametric finite elements”, *Transactions of the Canadian Soc. Mesh. Engr.*, pp. 213-217, vol 12. 1988.
- [12] Mitchell S., Tautages T., “Pillowing Doublets: Refining a Mesh to Ensure That Faces Share at Most One Edge”, *4th International Meshing Roundtable*, pp.231-240.1995.
- [13] Borden M., Benzley S., Mitchell S.A., White D.R., Meyers R., “The cleave and fill tool: An hexahedral refinement algorithm for swept meshes”, *9th International Meshing Roundtable*, pp.69-76. 2000.

Apèndix A: Mesura de la distorsió d'un element

Es defineix la distorsió d'un quadrilàter d'una malla com la desviació del quadrilàter respecte a un quadrat. Oddy [11] considera una mesura de la distorsió basada en la deformació que experimenta un quadrat mitjançant la transformació isoparamètrica per coincidir amb la forma de l'element. Per una major deformació s'atorga una major distorsió.

Oddy determina la distorsió d'un element en un punt amb el tensor:

$$D = \mathbf{C} : \mathbf{C} - \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{C}))^2$$

on $\mathbf{C} = \mathbf{J}'^T \cdot \mathbf{J}'$, amb \mathbf{J}' la matriu jacobiana normalitzada. Aquesta expressió s'obté del segon invariant del tensor de Green de deformacions.

Cal remarcar que aquest tensor determina la distorsió en un punt. Es considera la distorsió d'un element com la distorsió màxima assolida amb aquest tensor pels punts de Gauss de l'element.

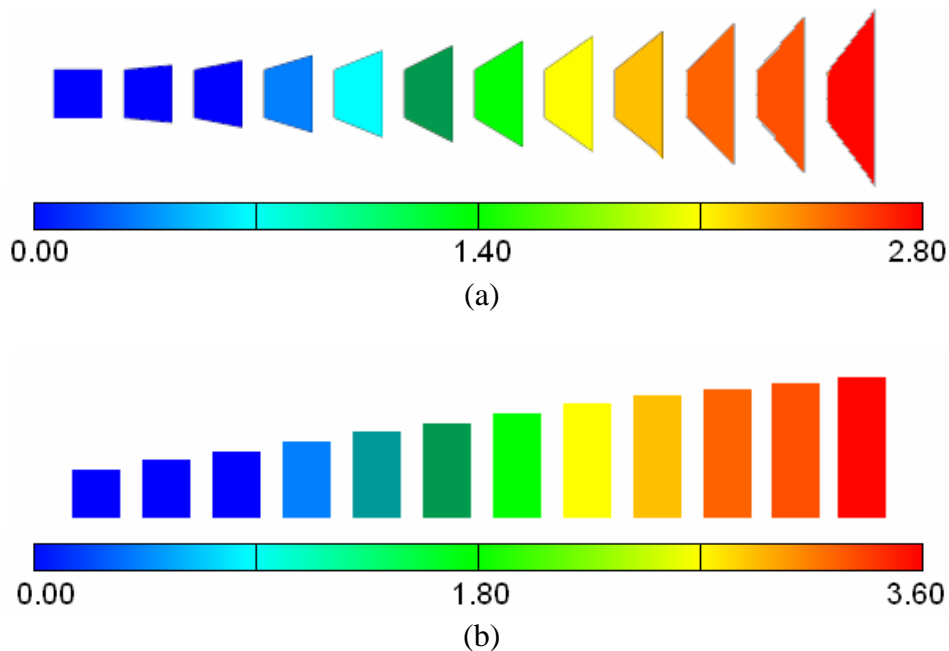


Figura 70: Distribució de la mesura de la distorsió. (a) Per trapezidis isòsceles. (b) Per rectangles.

La Figura 70 (a) mostra l'escala de valors de distorsió pels trapezis isòsceles obtinguts des d'un quadrat fins a un trapezi isòsceles amb una bases en proporció 1:3. La Figura 70 (b) mostra l'escala de valors de distorsió pels rectangles obtinguts per passar d'un quadrat a un rectangle de bases 1:3.

Apèndix B: Millores topològiques

B.1 Millores topològiques de Staten

Staten [5] considera dues millores topològiques per aplicar a un Refinament de Schneiders d'una malla formada per quadrilàters. Considera oportunes aquestes modificacions per desafavorir l'assignació d'alts graus de connectivitat entre nodes provocats pel refinament. Concretament aquestes millores topològiques involucren els patrons bàsics de transició de l'algoritme de Schneiders. La millora topològica que detalla la Figura 72 involucren dos patrons de dos nodes consecutius marcats. La Figura 71 detalla l'altra millora topològica que involucren tres patrons en total.

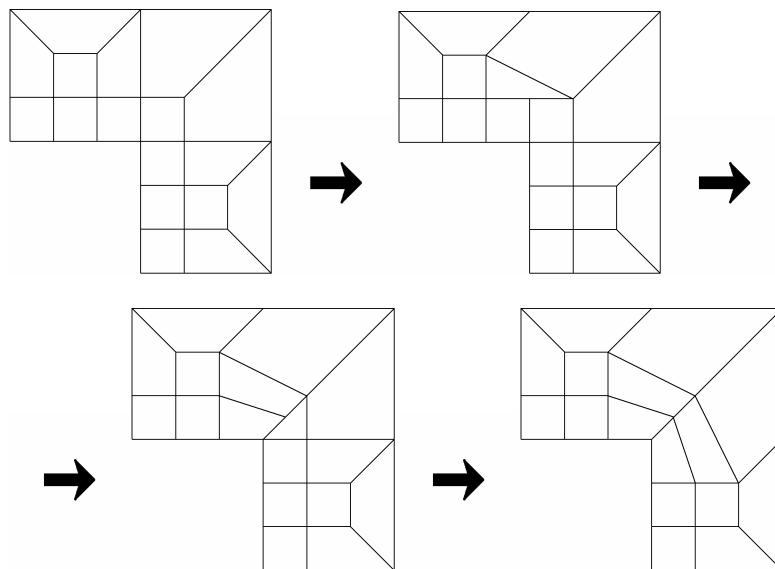


Figura 71: Un patró d'un node marcat i la corresponent millora de Staten.



Figura 72: Dos patrons adjunts de dos nodes consecutius marcats i la corresponent millora de Staten.

B.2 Altres millores topològiques

La millora topològica que descriu la Figura 72 pot ser molt convenient perquè la situació que té en consideració és molt habitual. Però també seria oportú considerar altres millores topològiques, com les que s'han inclòs en la Figura 73.

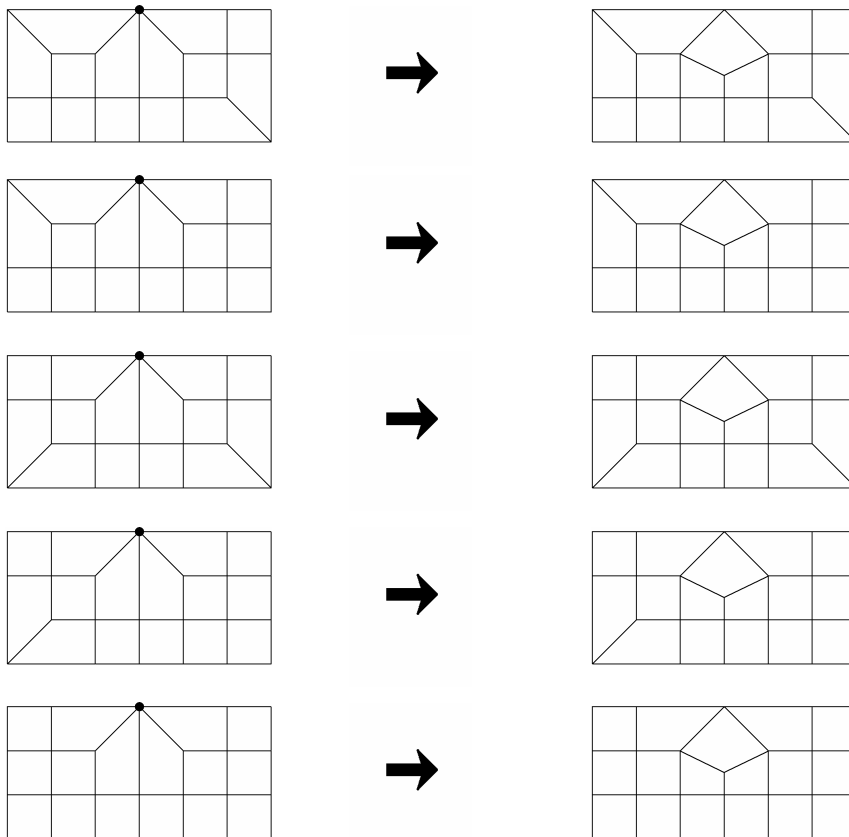


Figura 73: Noves millores topològiques per l'algoritme *Node-Based*

També cal remarcar que aquestes millores topològiques podrien ser adaptades pels patrons *Edge-Based*. Com per exemple, el cas que mostra la Figura 74.



Figura 74: Dos patrons adjunts d'una aresta marcada i la corresponent millora topològica.

B.3 Nou patró a considerar per algoritmes *Node-Based*

Pel cas d'un element amb tres nodes marcats, es podria considerar el següent patró mostrat per la Figura 75. A priori, l'avantatge que ofereix aquest patró és que no afegeix cap aresta que connecti amb el vèrtex no marcat del patró.

Caldrà estudiar l'algoritme consistent en incloure aquest patró en l'algoritme *NB-III*. En quant a millores topològiques per aquest nou algoritme, només caldria considerar les millores topològiques de Staten ja que les noves millores topològiques considerades no són requerides per aquest algoritme.

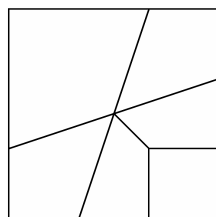


Figura 75: Patró *Node-Based* alternatiu per tres nodes marcats.