

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE  
TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA**

**Control Lineal y No Lineal de un Levitador Magnético.  
Estudio Comparativo.**

---

Proyecto Fin de Carrera

Autor: **Juan Carlos Milena Moreno**  
Directora: **Rosa María Fernández Cantí**  
Barcelona, 2010

# Acrónimos

**EE** – Espacio de estados

**IAE** – Integral del valor absoluto del error

**ISEU** – Integral del cuadrado del error y del cuadrado del esfuerzo de control

**ISM** – Modo deslizante integral

**ITAE** – Integral del tiempo por el valor absoluto del error

**LE** – Linealización exacta entrada-estado

**LQ** – Mínimos cuadrados

**MAGLEV** – Levitador magnético bajo estudio

**MIMO** – Entrada múltiple y salida múltiple

**MISO** – Entrada múltiple y salida única

**SISO** – Entrada única y salida única

**SM** – Modo deslizante

**SMC** – Control en modo deslizante

**SSM** – Modo deslizante estático

# Tabla de contenidos

<b>I.</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1	PROBLEMÁTICA DE LOS LEVITADORES MAGNÉTICOS .....	1
1.2	MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS .....	1
1.3	ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA .....	2
<b>II.</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO Y DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA</b> .....	<b>4</b>
2.1	DINÁMICA DE LA LEVITACIÓN MAGNÉTICA .....	4
2.1.1	<i>Fuerza electromagnética</i> .....	4
2.1.2	<i>Mecánica</i> .....	5
2.1.3	<i>Modelo eléctrico</i> .....	6
2.1.3	<i>Levitación magnética</i> .....	6
2.1.4	<i>Ecuaciones en el espacio de estados</i> .....	7
2.1.4.1	Ecuaciones de estado de un levitador magnético.....	8
2.2	DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA .....	9
2.2.1	<i>Sensor</i> .....	9
2.2.2	<i>Actuador</i> .....	10
2.2.3	<i>Controlador</i> .....	10
2.2.4	<i>Ecuaciones de estado del Maglev</i> .....	12
2.2.5	<i>Sistema linealizado</i> .....	12
2.2.6	<i>Valores físicos del Maglev de Feedback Instruments S.L.</i> .....	14
<b>III.</b>	<b>CONTROL</b> .....	<b>15</b>
3.1	CONTROL LINEAL CLÁSICO.....	15
3.1.1	<i>Controlador PD</i> .....	15
3.1.2	<i>Controlador PID</i> .....	17
3.1.3	<i>Controlador ITAE óptimo</i> .....	19
3.2	CONTROL LINEAL EN EL ESPACIO DE ESTADOS .....	21
3.2.1	<i>Fijación de polos</i> .....	22
3.2.2	<i>Control LQ óptimo</i> .....	24
3.2.3	<i>Observador de estados</i> .....	25
3.3	CONTROL NO LINEAL .....	25
3.3.1	<i>Linealización exacta entrada-estado</i> .....	26
3.3.2	<i>Control en modo deslizante</i> .....	30
3.3.2.1	Control en modo deslizante estático .....	32
3.3.2.2	Control en modo deslizante integral.....	34
<b>IV.</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTALES</b> .....	<b>36</b>
4.1	MODIFICACIONES.....	36
4.2	RÉGIMEN PERMANENTE.....	38
4.3	SEGUIMIENTO DE SEÑAL.....	41
4.4	ROBUSTEZ .....	44
<b>V.</b>	<b>CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS</b> .....	<b>49</b>
5.1	CONCLUSIONES.....	49
5.2	LÍNEAS FUTURAS .....	50
	<b>ANEXO I - ÁLGEBRA DE LIE</b> .....	<b>51</b>
	<b>ANEXO II – MODELOS SIMULINK</b> .....	<b>52</b>
	<b>ANEXO III – ARTÍCULO JORNADAS AUTOMÁTICA JAÉN</b> .....	<b>54</b>
	<b>ANEXO IV – PRÁCTICA FINAL DE LA ASIGNATURA SEC</b> .....	<b>65</b>
	<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>70</b>

# I. INTRODUCCIÓN

Este proyecto surge de la ilusión por profundizar en la ingeniería de control y de la oportunidad de estudiar una planta de levitación magnética adquirida recientemente por el grupo de Sistemas Electrónicos de Control del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones.

## 1.1 *Problemática de los levitadores magnéticos*

La levitación magnética consiste en mantener objetos suspendidos sin existir contacto mecánico gracias a la fuerza magnética. Este proceso es por naturaleza inestable y no lineal, esto hace que el control de estos sistemas sea altamente desafiante. Además, se hace obligatoria la utilización del control en lazo cerrado para mantener la levitación.

El principal interés para la utilización de la levitación magnética en ingeniería aplicada radica en que son sistemas sin contacto, por lo que no requieren lubricantes, y su coste de mantenimiento es muy bajo.

Esta falta de contacto y la no necesidad de lubricantes hace de esta tecnología la ideal para trabajar en entornos industriales en que son necesarias atmósferas libres de polución, algunos ejemplos de su utilización serían la levitación de objetos en túneles de viento o la levitación en mesas antivibración en fabricantes de semiconductores [4].

Además la falta de contacto también permite evitar el rozamiento y todos los problemas derivados de este (desgaste, calentamiento). Esta cualidad hace que la levitación magnética sea ideal para su utilización en cojinetes magnéticos y formando parte de turbinas en molinos de viento [6].

Probablemente, la aplicación más conocida de todas sea su utilización en la suspensión de los trenes de levitación magnética, como en el caso Japon, permitiendo alcanzar velocidades de hasta 580km/h [4]. Pero existen otras aplicaciones igual de importantes aunque menos conocidas, como es el caso de los dispositivos de asistencia ventricular, debido a que al ser un sistema sin contacto permite su utilización para hacer fluir la sangre sin aumentar la temperatura y por tanto sin modificar sus propiedades [13]. Otra aplicación es su utilización en el guiado de naves espaciales.

## 1.2 *Motivación y objetivos*

En el ámbito de la investigación existen gran variedad de trabajos relacionados con el control de levitadores magnéticos, algunos de estos trabajos comprueban sus resultados únicamente mediante simulación y otros utilizan resultados experimentales o ambos. Se aplican en ellos diferentes técnicas de control, desde control clásico [4, 8], hasta control lineal robusto [14], pasando por control adaptativo [11], control por ganancia programada, control difuso [8], control mediante linealización por realimentación [6, 7], control por redes neuronales [18] o control en modo deslizante [1, 4, 9, 16]. La mayor parte de estos trabajos explican las propiedades y ventajas del controlador bajo estudio realizando una comparación exclusivamente con un único controlador, habitualmente un PID, pero no

existe una comparativa entre un abanico mayor de controladores. Este es el principal objetivo de este proyecto, la realización de un estudio comparativo con un número mayor de controladores mediante comprobación experimental en la misma planta.

En el ámbito docente en ingeniería de control, los sistemas de levitación magnética tienen un especial interés para la realización de laboratorios y demostraciones en clase. En primer lugar, porque permite profundizar en las bases teóricas de una forma más motivante para los alumnos. Y en segundo lugar, porque permite a los estudiantes enfrentarse a problemas reales de control, acortando de esta manera la distancia entre los conocimientos teóricos y las aplicaciones reales. La propuesta de diferentes experimentos aplicables tanto en estudios de grado como de postgrado en ingeniería de control es el segundo objetivo de este proyecto.

El levitador magnético utilizado en este proyecto es el modelo 33-210 del fabricante Feedback Instruments Ltd., y a partir de ahora y durante toda la memoria utilizaremos el término Maglev para referirnos a él. En el momento de comenzar este proyecto el Maglev acababa de llegar al laboratorio de SEC, por este motivo aún estaba pendiente de ser instalado y no existía ningún trabajo previo dentro del grupo relacionado con levitación magnética. Esto motivó que hubiesen dos objetivos previos a la realización de los experimentos, el primero fue la puesta en marcha del equipo y el segundo la búsqueda bibliográfica del estado del arte en control de levitadores magnéticos.

La elección de los controladores bajo estudio se realizó teniendo en cuenta que la levitación magnética es un proceso no lineal. Esto implica que para utilizar métodos de control lineal sea necesario linealizar el sistema en torno a un punto de trabajo, mientras que los métodos de control no lineal pueden trabajar directamente con sistemas no lineales. La teoría indica que para desviaciones grandes respecto al punto de trabajo el controlador lineal debe perder su efectividad, mientras que el controlador no lineal debe trabajar con la misma efectividad independientemente del punto de trabajo. Otro aspecto que se tuvo en cuenta a la hora de escoger los controladores bajo estudio fue la robustez ante incertidumbres en el modelo de la planta, esto fue motivado porque únicamente se disponía del modelo facilitado por el fabricante. Pero no existía la posibilidad de realizar mediciones sobre el equipo para certificar la exactitud de los parámetros, ni del modelo.

### **1.3 Organización de la memoria**

La memoria se divide en cinco partes principales.

En la primera realizamos una breve introducción a la levitación magnética, apuntamos diferentes aplicaciones y marcamos los objetivos de este proyecto.

En la segunda parte desarrollamos el modelo matemático utilizado mayoritariamente con levitadores magnéticos a partir de las diferentes ecuaciones mecánicas y eléctricas. Una vez obtenida la dinámica de la levitación magnética se explican las características técnicas del Maglev y se desarrollan los modelos utilizados para el diseño y simulación de la planta. Finalmente se muestra el valor de todos los parámetros facilitados por Feedback Instruments Ltd. para el Maglev.

En la tercera parte explicamos los diferentes métodos de control lineal y no lineal que se aplicarán al Maglev, además se comprueba la efectividad de cada uno de ellos mediante simulación. Los métodos de control desarrollados se basan en las teorías de control lineal clásico, de control lineal en el espacio de estado y de control no lineal. Mediante la teoría de control lineal clásico se diseña un controlador PD, un PID y un ITAE óptimo, mediante

la teoría de control lineal en el espacio de estados diseñaremos un controlador utilizando el método LQ óptimo, y utilizando la teoría de control no lineal se diseña un controlador por el método de linealización exacta entrada-estado por realimentación, y dos controladores mediante el método del modo deslizante.

En la cuarta parte se aplican todos los controladores diseñados en la planta real. Algunos de los controladores diseñados se tuvieron que modificar para poder ser utilizados en el Maglev, por lo que se empieza con una explicación sobre las modificaciones realizadas. Con los controladores modificados se realizan doce experimentos, cinco experimentos comprueban el comportamiento en régimen permanente, otros cinco comprueban el comportamiento en seguimiento de referencia, y los dos experimentos restantes comprueban la robustez ante incertidumbres.

Finalmente, la última parte contiene todas las conclusiones extraídas después del análisis de los resultados obtenidos en los experimentos. También se confirma el cumplimiento de los diferentes objetivos marcados para este proyecto y se marcan posibles líneas futuras de trabajo.

## II. MODELO MATEMÁTICO Y DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA

En el estudio de los sistemas de control el primer paso siempre debe ser la obtención de un modelo matemático que describa la dinámica del sistema. Se define el modelo matemático de un sistema dinámico como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema incluyendo las principales características. Al obtener un modelo matemático existe un compromiso entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados, esto se debe principalmente a que utilizando un modelo simplificado estamos ignorando ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. Pero en una primera aproximación es preferible utilizar un modelo simplificado para obtener de una manera más sencilla una idea general sobre la solución, y seguidamente aumentar la complejidad del sistema si fuese necesario.

Téngase presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado, motivo por el cual podemos tener muchos modelos matemáticos dependiendo de cada perspectiva. Para realizar métodos de control clásico es preferible tener descrito el modelo matemático representado como función de transferencia, mientras que para el resto de métodos de control clásico y para métodos de control no lineal es preferible tener el modelo matemático representado en el espacio de estados.

Podemos describir la dinámica de muchos sistemas físicos en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de las leyes físicas que gobiernan un determinado sistema, algunos ejemplos de leyes físicas aplicables serían las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos.

En este capítulo describiremos en primer lugar la dinámica de la levitación magnética de forma genérica, y seguidamente explicaremos las características del levitador magnético disponible en el laboratorio de SEC, modelo 33-210 del fabricante Feedback Instruments Ltd.

### 2.1 *Dinámica de la levitación magnética*

La levitación consiste en mantener un objeto suspendido en el aire sin ningún tipo de contacto mecánico. En el caso de la levitación magnética, la fuerza que permite esta suspensión es la fuerza electromagnética. Esta fuerza electromagnética es generada por un electroimán que mediante atracción permite mantener en suspensión un objeto ferromagnético.

Obtendremos las ecuaciones matemáticas que rigen el proceso de levitación magnética aplicando leyes fundamentales y principios básicos de mecánica y electromagnetismo.

#### 2.1.1 Fuerza electromagnética

La fuerza magnética es la fuerza generada por el campo magnético sobre un dipolo

magnético. En la fuerza electromagnética este campo magnético esta generado por el paso de un corriente eléctrica sobre un conductor.

Conocemos que la co-energía almacenada en un campo magnético es

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (1)$$

donde  $\vec{H}$  indica el valor del campo magnético y  $\vec{B}$  el valor de la inducción magnética.

Mediante la aplicación de las leyes de Ampere y Faraday calculamos los valores de  $\vec{B}$  y de  $\vec{H}$ . Esto nos permite reescribir la expresión anterior en función de la inductancia  $L$  y de la corriente que circula por el conductor.

$$\vec{W}_m = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot i^2 \quad (2)$$

El valor de la fuerza electromagnética lo encontramos mediante el gradiente de la co-energía magnética.

$$\vec{f}_{el-mag} = \nabla \vec{W}_m = \left( \frac{\partial W_{mx}}{\partial x}, \frac{\partial W_{my}}{\partial y}, \frac{\partial W_{mz}}{\partial z} \right) \quad (3)$$

En nuestro caso, estudiaremos un levitador con un único grado de libertad, por tanto solo nos interesa la fuerza electromagnética generada  $f_{el-mag}$  en una dirección.

$$f_{el-mag} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (4)$$

La inductancia la modelamos según [2]

$$L(x) = L_i + \frac{L_0 x_0}{x} \quad (5)$$

donde  $L_i$  es la inductancia del electroimán en ausencia del objeto levitado y  $L_0$  es la inductancia adicional generada por el objeto levitado en la posición  $x_0$ .

Finalmente uniendo las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$f_{el-mag} = \frac{L_0 x_0}{2} \frac{i^2}{x^2} = k \frac{i^2}{x^2} \quad (6)$$

### 2.1.2 Mecánica

La mecánica es la parte de la física encargada de estudiar el movimiento de un sistema y las fuerzas que lo provocan.

El estudio de la mecánica del levitador magnético se basa en aplicar la segunda ley de Newton, que nos indica que la suma de fuerzas sobre un objeto es igual al producto de la masa del objeto por la aceleración del mismo

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (7)$$



Teniendo en cuenta que únicamente tenemos un grado de libertad y que solamente estudiaremos las variaciones en la altura del objeto levitado (sin tener en cuenta los desplazamientos horizontales) obtenemos la siguiente expresión

$$m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = m \cdot g - f_{el-mag} \quad (8)$$

donde  $h$  nos indica la altura del objeto, y donde tomamos el peso ( $m \cdot g$ ) como positivo, porque la referencia de altura la tomaremos en el electroimán y el eje positivo con dirección descendente.

### 2.1.3 Modelo eléctrico

El circuito eléctrico que modela el comportamiento del levitador es un circuito  $RL$ . Aplicando la ley de Kirchoff obtenemos la siguiente relación tensión-corriente.

$$v = R \cdot i + L(x) \frac{\partial i}{\partial t} \quad (9)$$

Asumiendo que estamos cerca de la posición de equilibrio  $x_0$  y que  $L_i$  es mucho mayor que  $L_0$  podemos aproximar el valor de la inductancia

$$L(x) = L_i + \frac{L_0 x_0}{x} \approx L_i \quad (10)$$

con lo que podemos reescribir la ecuación (9)

$$v = R \cdot i + L_i \frac{\partial i}{\partial t} \quad (11)$$

### 2.1.3 Levitación magnética

Podemos representar un levitador magnético genérico de un grado de libertad mediante la figura siguiente.

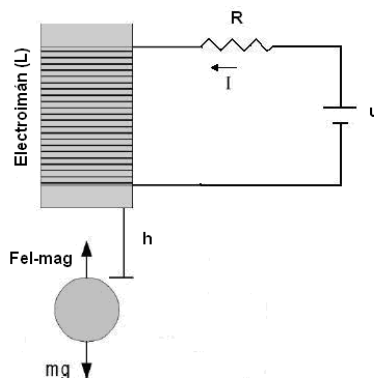


Figura 1. Levitador magnético genérico

Teniendo en cuenta que las anteriores expresiones están relacionadas entre sí por la corriente que atraviesa el electroimán. Podemos describir la dinámica de un levitador magnético genérico mediante el siguiente par de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = g - \frac{1}{m} \frac{L_0 h_0}{2} \left( \frac{i}{h} \right)^2 = g - \frac{k}{m} \left( \frac{i}{h} \right)^2 \quad (12)$$

$$v = R \cdot i + L_l \frac{\partial i}{\partial t} \quad (13)$$

### 2.1.4 Ecuaciones en el espacio de estados

Un sistema complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, y desde este punto de vista el enfoque en ecuaciones de estados es el más conveniente para el análisis de estos sistemas.

Definimos en primer lugar el concepto de estado, el estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en  $t \geq t_0$ , junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier  $t \geq t_0$ .

Se debe tener en cuenta que las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables, tal libertad en la elección de las variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estados. Sin embargo en la práctica es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, porque las leyes de control en el espacio de estados requerirán realimentar todas las variables de estado con una ponderación adecuada.

Las ecuaciones de estado, son el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica de un sistema mediante la relación entre las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. El modelado de sistemas dinámicos en el espacio de estados permite describir el comportamiento de todo tipo de sistemas; SISO, MIMO, lineales, no lineales, invariantes, variantes,.... La descripción genérica para las ecuaciones de estado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{y}_2(t) &= h_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_m(t) &= h_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

si se define

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

las ecuaciones anteriores se pueden expresar en formato matricial.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

Si linealizamos las ecuaciones anteriores, o en sistemas directamente lineales las ecuaciones de estado se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $\mathbf{A}(t)$  se denomina matriz de estado,  $\mathbf{B}(t)$  matriz de entrada,  $\mathbf{C}(t)$  matriz de salida y  $\mathbf{D}(t)$  matriz de transmisión directa.

Si el sistema además de ser lineal, o haberse linealizado, es invariante temporalmente se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

#### 2.1.4.1 Ecuaciones de estado de un levitador magnético

Una vez obtenidas en el apartado 2.1.3 las ecuaciones que modelan la dinámica de un levitador magnético podemos expresar estas ecuaciones en el espacio de estados. Para representar el sistema en el EE debemos conocer cuales son las variables de salida, las variables de entrada y las variables de estado.

Un levitador magnético de un grado de libertad es un sistema SISO, así que únicamente tendremos una variable de entrada y una variable de salida. La variable de entrada siempre será la tensión de entrada al circuito y la variable de salida siempre será la altura. Ahora faltaría definir las variables de estado para tener la representación del sistema en el EE, y para un levitador magnético genérico habitualmente se escogen las siguientes

$$x_1 = h, \quad x_2 = \frac{dh}{dt}, \quad x_3 = i$$

con esta elección las ecuaciones de estado resultantes serían

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{u}{L} - \frac{R}{L} x_3 \end{aligned} \tag{20}$$

## 2.2 Descripción de la planta

El dispositivo bajo estudio en este proyecto es el Maglev (Magnetic Levitator) del fabricante Feedback Instruments S.L. Este dispositivo consiste principalmente en tres componentes; sensor, actuador y controlador.

Podemos ver una representación esquemática del Maglev en la siguiente figura.

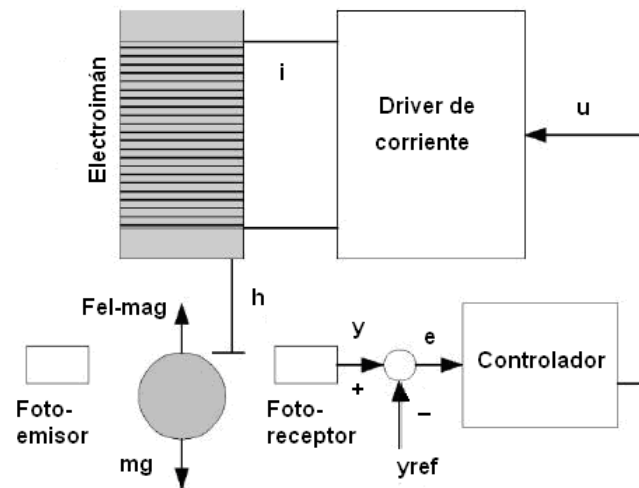


Figura 2. Representación esquemática del Maglev.

### 2.2.1 Sensor

El sensor consiste en un par foto-emisor y foto-receptor de infrarrojos. Un voltaje constante es enviado al foto-emisor de infrarrojos, que lo transforma en un haz de luz infrarroja que es detectada por el foto-receptor. La salida del foto-receptor es directamente proporcional a la cantidad de luz infrarroja recibida. Cuando la cantidad de luz recibida aumenta, lo cual ocurre cuando el objeto metálico se aleja del electroimán, la salida del foto-receptor aumenta y viceversa.

La ecuación que describe la salida del sensor es

$$v_s = k_s \cdot h + \bar{v}_s \tag{21}$$

donde  $k_s$  nos indica la ganancia del sensor ( $k_s > 0$ ), y  $\bar{v}_s$  es una constante.

## 2.2.2 Actuador

El actuador del levitador magnético es el electroimán. El electroimán es el encargado de generar la fuerza electromagnética que permite la levitación del objeto. Para ello es necesario variar el valor de la fuerza electromagnética mediante el ajuste de la corriente que atraviesa al electroimán.

En el caso del Maglev de Feedback Instruments Ltd., éste incluye un controlador interno que genera la corriente que pasa a través del electroimán mediante una relación lineal con la tensión aplicada al mismo.

$$i = k_v \cdot v + \bar{i} \quad (22)$$

Siendo  $\bar{i}$  la corriente necesaria para que la salida del sensor sea  $\bar{v}_s$ .

De este modo desacoplamos la relación entre las ecuaciones del modelo mecánico y del modelo eléctrico. Obtenemos de este modo una única ecuación diferencial que modela la dinámica del Maglev bajo estudio.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = g - \frac{k}{m} \left( \frac{k_v \cdot v}{h} \right)^2 \quad (23)$$

## 2.2.3 Controlador

El controlador utiliza la señal del sensor para ajustar la tensión aplicada al actuador y de este modo mantener la levitación. En este proyecto utilizaremos un control en tiempo real mediante PC. Este control en tiempo real se realiza mediante el componente Simulink de Matlab que permite el modelado de los diferentes controladores y permite también la comunicación en tiempo real con la planta, gracias a las librerías Real Time Workshop (RTW) y Real Time Windows Target (RTWT). Estas herramientas de Matlab permiten el diseño, desarrollo, simulación y ejecución del control del Maglev.

En la siguiente figura observamos los componentes físicos necesarios para realizar el control en tiempo real del Maglev de Feedback Instruments.



**Figura 3. Componentes físicos del Maglev**

En la figura 3 observamos numerados los siguientes componentes.

- 1) Planta del Maglev.
- 2) Módulo de interfaz analógica.
- 3) Tarjeta de adquisición PCI (Advantech PCI-1711).
- 4) Adaptador de cable SCSI, y cableado necesario para la interconexión de estos dispositivos.

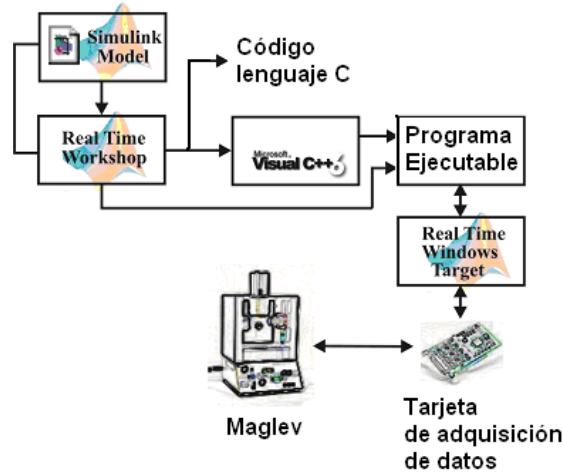


Figura 4. Diagrama del proceso de control en tiempo real

Los pasos necesarios para realizar el control en tiempo real mediante la aplicación Matlab, véase la figura 4, son:

- Realización del modelo del servosistema en Simulink.
- Creación del código C y obtención del código ejecutable mediante la librería RTW de Matlab.
- Carga del fichero ejecutable en la tarjeta de adquisición mediante la librería RTWT

#### 2.2.4 Ecuaciones de estado del Maglev

Teniendo en cuenta tanto las características del sensor, como del actuador del Maglev, podemos expresar las ecuaciones de estado para la planta bajo estudio como.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m} \left( \frac{k_v \cdot u}{x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Las ecuaciones de estado son la base para realizar tanto las técnicas de control lineal en el EE, como las técnicas de control no lineal.

#### 2.2.5 Sistema linealizado

Mediante la linealización realizamos una aproximación de la dinámica del sistema alrededor de un punto. Para sistemas SISO podemos escribirnos este sistema linealizado tanto en formato función de transferencia, como en formato ecuaciones de estado linealizadas. En cambio, para sistemas MISO o MIMO únicamente podremos utilizar las ecuaciones de estado linealizadas.

Como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, las técnicas de control clásico están basadas en la función de transferencia del sistema. Mientras que las

técnicas de control lineal en el EE y de control no lineal están basadas en ecuaciones de estado. Por este motivo linealizamos la planta utilizando ambos formatos.

Teniendo en cuenta la siguiente notación para las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m} \left( \frac{k_v \cdot u}{x_1} \right)^2 = f_2(x, u)\end{aligned}\quad (25)$$

encontramos las ecuaciones de estado linealizadas para el Maglev realizando el Jacobiano sobre las ecuaciones de estado (en el punto de equilibrio).

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \tilde{u} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2g/h_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \tilde{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2g \cdot k_v / i_0 \end{pmatrix}\quad (26)$$

Donde  $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{10}$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2 - x_{20}$ ,  $\tilde{u} = u - u_0$ , son las variables restando las posiciones de equilibrio.

Utilizando el formato genérico para sistemas lineales e invariantes temporalmente en el espacio de estado podemos escribir la anterior ecuación como

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2g/h_0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2g \cdot k_v / i_0 \end{bmatrix}\quad (27)$$

Para la obtención de la función de transferencia para un sistema SISO se utiliza el gradiente para obtener una ecuación linealizada, y seguidamente se realiza la transformada de Laplace sobre la ecuación obtenida

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= g - \frac{k}{m} \left( \frac{k_v \cdot v}{h} \right)^2 = f(h, v) \\ \tilde{f}(h, u) &= \nabla f(h_0, u_0) \cdot \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}\end{aligned}$$

con  $H = h - h_0$  y  $U = u - u_0$ . Siendo  $h_0$  y  $u_0$  la altura y las tensión de equilibrio.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \tilde{f}(h, u) = \nabla f(h_0, u_0) \cdot \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix} = \frac{2g}{h_0} H - \frac{2g \cdot k_v}{i_0} U$$

Se realiza la transformada de Laplace.

$$s^2 \cdot H(s) = \frac{2g}{h_0} H(s) - \frac{2g \cdot k_v}{i_0} U(s)$$



$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{-K_u}{s^2 - K_h} \quad (28)$$

donde  $K_u = \frac{2g \cdot k_v}{i_0}$  y  $K_h = \frac{2g}{h_0}$ .

Teniendo en cuenta que la salida de la planta es la tensión del sensor ( $V_s = k_s \cdot H$ ), reescribimos la ecuación anterior, y obtenemos la función de transferencia de la planta.

$$G(s) = \frac{V_s(s)}{U(s)} = \frac{-K_u}{s^2 - K_h} \cdot k_s \quad (29)$$

### 2.2.6 Valores físicos del Maglev de Feedback Instruments S.L.

A continuación expresamos los valores físicos para el Maglev de Feedback Instruments S.L.

Tabla 1. Valores físicos del Maglev

Parámetro	Descripción	Valor
m	Masa de la esfera metálica	0.02 Kg
g	Constante gravitacional	9.81m/s <sup>2</sup>
k	Constante de acoplamiento magnético	0.000025 Nm <sup>2</sup> /A <sup>2</sup>
h <sub>0</sub>	Altura de equilibrio	0.01425 m
i <sub>0</sub>	Corriente de equilibrio	1.26 A
k <sub>v</sub>	Ganancia del driver de corriente	1.05
k <sub>s</sub>	Ganancia del fotosensor	143.48

### III. CONTROL

El Maglev es una planta no lineal e inestable por naturaleza, esta inestabilidad hace obligatorio utilizar un controlador para estabilizar la planta. A la hora de realizar el control de la planta existen diferentes tipos de configuración, en nuestro caso utilizaremos un control en lazo cerrado con retroalimentación unitaria, podemos ver el esquema en la figura 5.

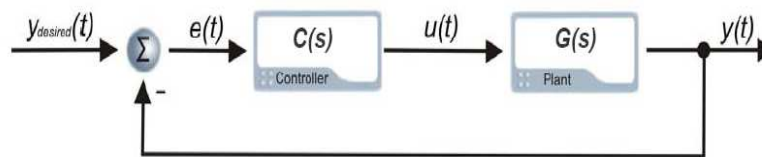


Figura 5. Esquema de control en lazo cerrado con retroalimentación unitaria

Además del tipo de configuración también existen dos modos de trabajo que dividen los sistemas de control en dos, sistemas reguladores y servosistemas.

Los sistemas reguladores son aquellos en los cuales su entrada de referencia es un valor constante. Mientras que los servosistemas o servos son capaces de realizar el seguimiento de una referencia variable temporalmente.

En este capítulo se explican todos los métodos de control utilizados en este proyecto. En primer lugar se explican diferentes técnicas de control lineal clásico, seguidamente se explican diferentes métodos de control lineal en el espacio de estado, y se finaliza con dos métodos de control no lineal.

### 3.1 Control lineal clásico

Como ya se ha comentado en la introducción de este proyecto, la realización de una práctica final de laboratorio para los alumnos de la asignatura Sistemas Electrónicos de Control (extrapolable a cualquier asignatura de grado de control clásico) es uno de los objetivos de este proyecto. Por este motivo empezamos este capítulo con un breve recordatorio sobre controladores PD y PID, en su diseño se utilizarán tanto métodos indirectos (LGR de Evans) como directos (ecuación diofántica). Ambos métodos de diseño deben ser utilizados por los alumnos en la práctica final propuesta (anexo IV), además estos diseños mediante control clásico se utilizarán para realizar las comparativas con el resto de controladores.

#### 3.1.1 Controlador PD

En primer lugar se representa el Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) de Evans utilizando los valores físicos del Maglev, figura 6.

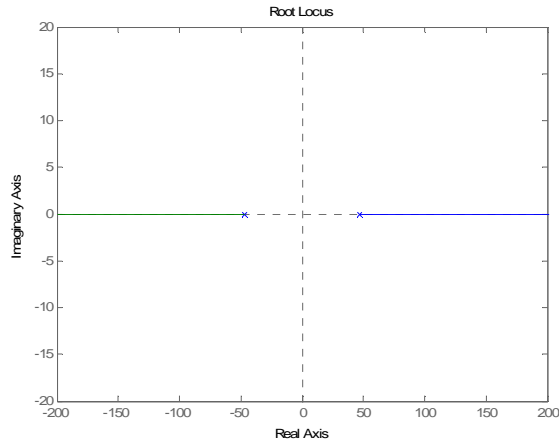


Figura 6. LGR de la función de transferencia del Maglev

Después de observar la posición de los polos de la planta en el LGR de Evans observamos que podemos estabilizar esta planta mediante la colocación de un cero entre el polo estable de la planta y el origen de coordenadas.

Teniendo en cuenta que la transformada de Laplace de un controlador PD es la siguiente

$$C_{PD} = k_p + k_D \cdot s = k_p \left(1 + \frac{k_D}{k_p} s\right) = k \left(1 + \frac{1}{z} \cdot s\right) \quad (30)$$

se puede añadir un cero a la dinámica de la planta añadiendo un controlador PD en el camino directo.

Es necesario sintonizar dos parámetros ( $k_p$  y  $k_D$ ) para tener el controlador PD totalmente ajustado. La posición del cero viene marcada por el valor de  $z$ , escogemos un valor dentro del rango descrito anteriormente y únicamente faltará sintonizar la ganancia  $k$ . Los valores posibles de  $k$  los encontraremos mediante la representación del LGR de Evans del Maglev con un control PD, figura 7.

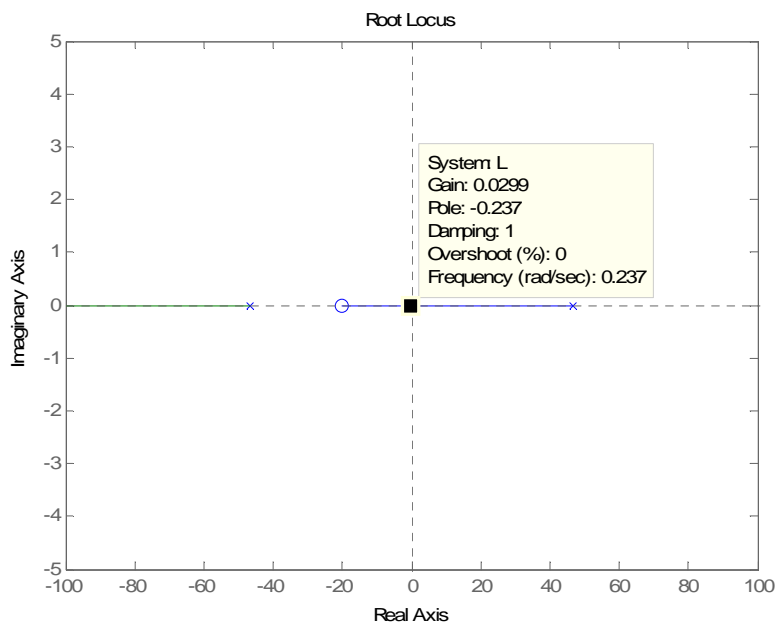


Figura 7. LGR del Maglev con control PD.

Observando el LGR vemos que los polos del Maglev con control PD están en el semiplano izquierdo (es estable) para  $k > 0.0299$ .

Simulamos el comportamiento de este controlador con  $z = 20$  y  $k = 1$

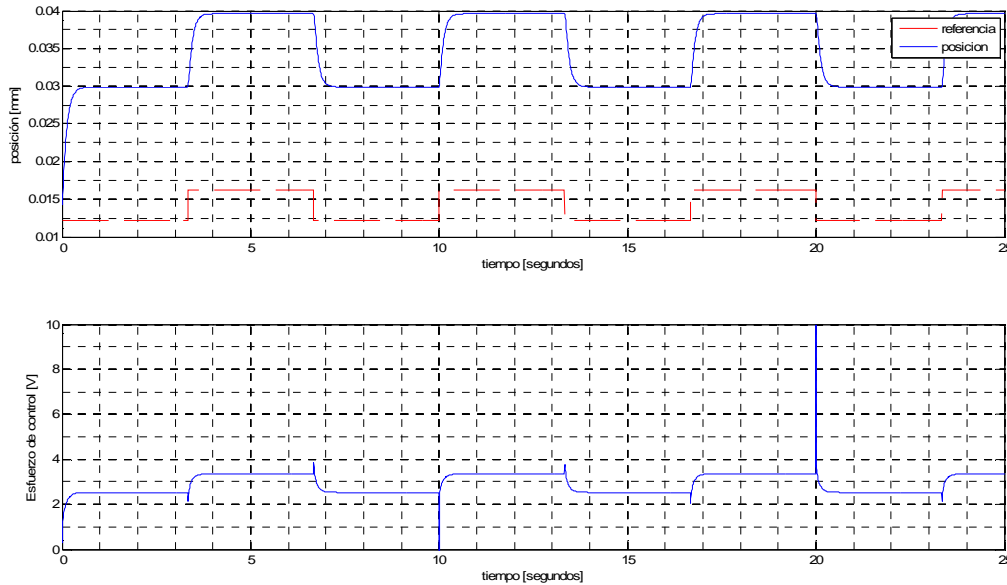


Figura 8. Simulación del Maglev con control PD.

### 3.1.2 Controlador PID

Los controladores PID son los más utilizados en aplicaciones reales, principalmente por su facilidad para sintonizar sus parámetros.

En este proyecto se proponen dos métodos diferentes para realizar el diseño del controlador PID.

El primero es inmediato y consiste en añadir un controlador PI en serie con un PD, y por tanto obtener un controlador PI-PD. La segunda consiste en buscar la función de transferencia del servo  $M(s)$  teniendo en cuenta que el controlador utilizado es un PID.

$$C_{PID} = k_p + k_D \cdot s + \frac{k_I}{s} \quad (31)$$

La función de transferencia del servo se encuentra mediante la siguiente expresión.

$$M(s) = \frac{N_M(s)}{D_M(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{C_{PID}(s) \cdot P(s)}{1+C_{PID}(s) \cdot P(s)} \quad (32)$$

Utilizando la función de transferencia del Maglev ( $P(s)$ ) encontrada en la ecuación (29) se obtiene la siguiente función de transferencia para este servosistema.

$$M(s) = \frac{K_u \cdot k_s \cdot (k_D s^2 + k_p s + k_I)}{s^3 + K_u \cdot k_s \cdot s^2 + (K_u \cdot k_s \cdot k_p - K_h) \cdot s + K_u \cdot k_s \cdot (k_D s^2 + k_p s + k_I)} \quad (33)$$

Esta función de transferencia tiene tres polos, pero en control clásico (sobretudo en

curso de grado) es preferible trabajar con funciones de transferencia de segundo orden. Para solventar este inconveniente forzaremos que uno de los tres polos esté alejado de los otros dos, y de este modo los dos polos restantes serán los polos dominantes en la respuesta de la planta. Esta aproximación no tiene en cuenta la posición de los ceros del servo, pero es suficiente para realizar un primer diseño y adecuar la complejidad del diseño a un curso de grado. Además para facilitar el diseño, escogemos que los dos polos dominantes sean complejos conjugados y de este modo realizaremos el diseño del PID cumpliendo especificaciones de diseño de una función de transferencia de segundo orden. Finalmente, la función de transferencia del servo tendrá el siguiente formato.

$$M(s) = \frac{N(s)}{(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{34}$$

Igualando con la anterior ecuación de M(s) encontramos la relación entre estos tres polos y los parámetros del PID. De este modo podemos sintonizar el PID de forma que cumpla con especificaciones escogidas para una función de transferencia de segundo orden (ancho de banda, rebase máximo, tiempo de subida, error permanente,...).

$$k_I = \frac{\omega_n^2 \cdot p}{K_u \cdot k_s} \tag{35}$$

$$k_D = \frac{2\zeta\omega_n + p}{K_u \cdot k_s} \tag{36}$$

$$k_P = \frac{2\zeta\omega_n \cdot p + \omega_n^2 + K_h}{K_u \cdot k_s} \tag{37}$$

Simulamos el comportamiento del Maglev con un PID asignando el valor  $p = 500$  para el polo lejano,  $\zeta = 0.8$  para el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n = 10$  para la frecuencia natural. Para estos parámetros las ganancias proporcional, integral y derivativa del controlador PID son  $k_p = 4.06$ ,  $k_i = 2.15$  y  $k_d = 0.22$ .

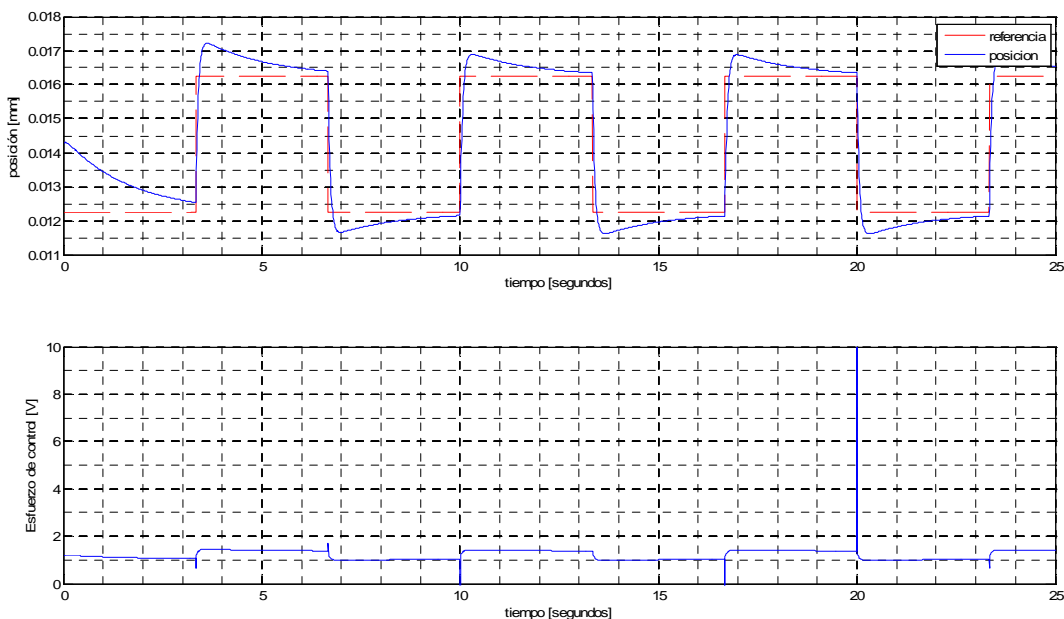


Figura 9. Simulación del Maglev con control PID.

### 3.1.3 Controlador ITAE óptimo

Las especificaciones de diseño para un controlado suelen darse en función de parámetros como el ancho de banda, el tiempo de establecimiento o el error permanente. Pero existen otros criterios que también permiten comprobar la bondad en el comportamiento del controlador. Los criterios más utilizados son la integral del error absoluto (IAE), la integral del cuadrado del error (ISE), la integral de la multiplicación del error absoluto por el tiempo (ITAE) o la integral del error cuadrado y del cuadrado de la señal de esfuerzo (ISEU).

En este apartado realizaremos el diseño de un controlador ITAE óptimo, por lo que describimos a continuación la expresión del índice ITAE.

$$J = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \quad (38)$$

En la realización del controlador ITAE óptimo utilizaremos el diseño por síntesis directa. El primer paso para realizar diseño por síntesis directa es la elección de una función de transferencia global del sistema  $M(s)$  que cumpla con las especificaciones de diseño. En nuestro caso escogemos  $M(s)$  de forma que nos optimice el ITAE para un error de aceleración nulo [3].

$$M(s) = \frac{N_M(s)}{D_M(s)} = \frac{2.97\omega_0 s^2 + 4.94\omega_0^2 s + \omega_0^3}{s^3 + 2.97\omega_0 s^2 + 4.94\omega_0^2 s + \omega_0^3} \quad (39)$$

El objetivo ahora es encontrar un controlador  $C(s)$  del tipo

$$C(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_1 s + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0} \quad (40)$$

que utilizado en el Maglev

$$\text{Maglev} \Rightarrow P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-K_u k_s}{s^2 - K_h} \quad (41)$$

nos dé una respuesta  $M(s)$  como la mostrada anteriormente.

El controlador que buscamos tiene que ser propio y el sistema debe ser bien propuesto e internamente estable. Estas tres características las conseguimos si diseñamos este controlador para que la función de transferencia resultante tenga los polos situados en igual que la función de transferencia objetivo  $M(s)$ , para conseguirlo se debe resolver la siguiente ecuación

$$D(s)A(s) + N(s)B(s) = D_M(s) \quad (42)$$

esta ecuación se denomina *ecuación diofántica*.

Para que la ecuación diofántica tenga solución y sea una solución única se deben cumplir los siguientes requisitos.

- $P(s)$  tiene que ser irreducible y de orden  $n$ .
- $C(s)$  tiene que ser propia y de orden  $m$ .

- El denominador de  $M(s)$  tiene que ser de orden  $m + n - 1$ .

La ecuación diofántica se puede escribir también en formato matricial y de este modo su resolución es directa, es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

$$S(N, D)_{n+m+1 \times 2(m+1)} \cdot C(A, B)_{2(m+1) \times 1} = f(D_M)_{n+m+1 \times 1} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} D_0 & N_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & D_0 & N_0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & D_1 & N_1 & \cdots & 0 & 0 \\ D_n & N_n & \vdots & \vdots & \cdots & D_0 & N_0 \\ 0 & 0 & D_n & N_n & \cdots & D_1 & N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n & N_n \end{bmatrix}_{n+m+1 \times 2(m+1)} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ B_1 \\ \vdots \\ A_m \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{M_0} \\ D_{M_1} \\ D_{M_2} \\ \vdots \\ D_{M_{n+m}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Escogemos un controlador de primer orden, por lo que teniendo en cuenta que la planta del Maglev es de orden dos necesitamos una respuesta global del sistema de orden tres.

$$\begin{bmatrix} -K_h & K_u k_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_h & K_u k_s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^3 \\ 4.94\omega_0^2 \\ 2.97\omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Solucionamos la ecuación diofántica y obtenemos un controlador de primer orden, que en realidad es un compensador de avance de fase.

$$C(s) = \frac{A_1 s + A_0}{B_1 s + B_0} = \frac{s + 2.97\omega_0}{(4.94\omega_0^2 + K_h)s + (\omega_0^3 + 2.97\omega_0 K_h)} \cdot (K_u k_s) \quad (46)$$

Simulamos el comportamiento de la planta con el controlador ITAE óptimo para una frecuencia  $\omega_0 = 100 \text{ rad / seg}$ .

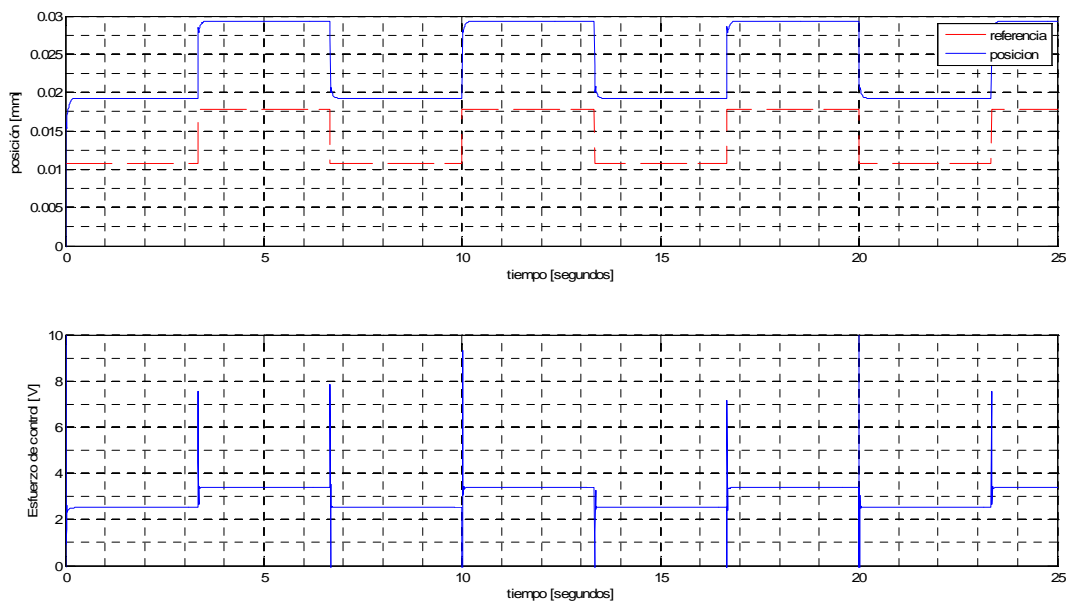


Figura 10. Simulación del Maglev con control ITAE óptimo.

### 3.2 Control lineal en el espacio de estados

La tendencia en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad debido sobre todo a que se requieren tareas más complejas y alta precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo. Debido a la necesidad de cumplir con especificaciones cada vez más exigentes en el comportamiento de los sistemas de control, al aumento en la complejidad del sistema y al fácil acceso a los computadores a gran escala, la teoría de control en el espacio de estados se ha desarrollado desde 1960. Esta nueva aproximación se basa en el concepto de estado, descrito en el capítulo anterior.

Mientras la teoría de control clásico se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, la teoría de control en el EE se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones, y el incremento en el número de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho el análisis de sistemas complejos con múltiples entradas y salidas se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Para un sistema expresado en ecuaciones de estados utilizaremos como señal de control una señal que utilice una ponderación de todas las variables de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{Kx}\end{aligned}\tag{47}$$

donde  $\mathbf{K}$  será la matriz de ganancias de la realimentación de estados.

Mediante esta ponderación conseguiremos que nuestro sistema mantenga siempre la posición de equilibrio deseada, sistema regulador. Pero en el caso del Maglev también se desea que el sistema sea capaz de realizar un seguimiento a señales de referencia variables temporalmente, servosistema.

Dentro de los servosistemas existe una clasificación en función de si la planta incluye o no un integrador. Podemos comprobar a partir de la ecuación (29) del Maglev que nuestra planta no incluye ningún integrador. A la hora de realizar un sistema de control de una planta sin integrador es necesario introducir un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta para realizar el seguimiento de señales de referencia variables, véase la figura 11.



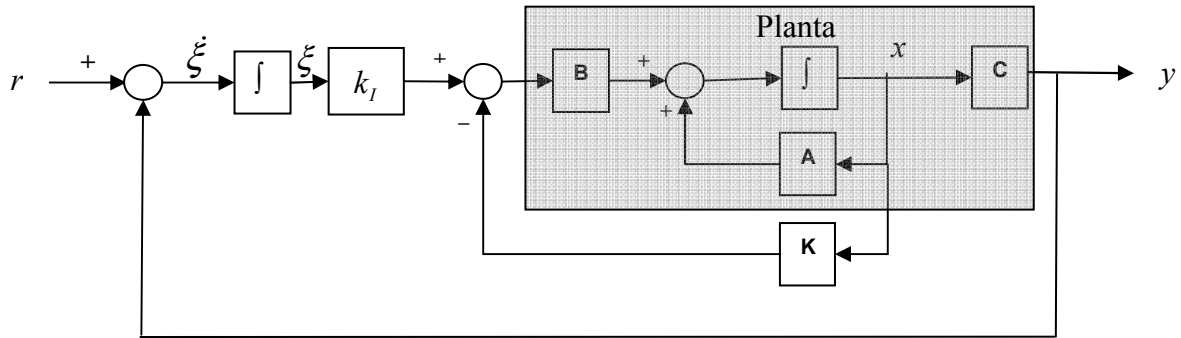


Figura 11. Esquema de control en el EE para plantas sin integrador.

A partir de la figura anterior obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \\
 \mathbf{u} &= -\mathbf{Kx} + k_I \xi \\
 \dot{\xi} &= r - y = r - \mathbf{Cx}
 \end{aligned} \tag{48}$$

las nuevas ecuaciones de estado serían

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{r} \tag{49}$$

Podemos buscar la dinámica del error para una entrada escalón, y siguiendo el procedimiento descrito en [12] encontraríamos

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_e \\
 \mathbf{u}_e &= -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{50}$$

con

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad \vdots \quad -k_I], \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix}$$

El objetivo ahora es encontrar los valores de  $\hat{\mathbf{K}}$  que nos permitan que el error tienda a cero con las especificaciones deseadas. Para ello utilizaremos dos métodos de diseño, fijación de polos y optimización LQ.

### 3.2.1 Fijación de polos

El método de fijación de polos consiste en colocar los polos de un sistema en lazo cerrado en la posición deseada mediante una realimentación de estados. La utilización de este método requiere tener acceso a todas las variables de estado, y que el sistema sea de estado totalmente controlable.

La condición necesaria para que un estado sea totalmente controlable es que el rango de la matriz de controlabilidad sea igual al orden del sistema.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (51)$$

Para el Maglev conocemos las ecuaciones de estado (apartado 2.2.5), esto implica que conocemos el valor de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , además sabemos que la dimensión en el espacio de estados es  $n = 2$ , por tanto tenemos todos los datos para comprobar el rango de la matriz de controlabilidad.

$$\mathbf{M}_{Maglev} = [\mathbf{B} : \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & : & \frac{-2g \cdot k_v}{i_0} \\ \frac{-2g \cdot k_v}{i_0} & : & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\text{rango}(\mathbf{M}_{Maglev}) = 2 = n$$

Debido a que en la configuración de control de la figura 11 se añade un nuevo estado, ecuación (49), tenemos que verificar que el nuevo sistema también es de estado totalmente controlable.

$$\mathbf{M}_{Servosistema} = [\hat{\mathbf{B}} : \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} : \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}]$$

Pero si se ha comprobado que el Maglev es totalmente controlable, comprobar que el servosistema es totalmente controlable es equivalente a confirmar que el rango de

$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$  es igual a  $n+1$  [12].

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{h_0} & 0 & \frac{-2g \cdot k_v}{i_0} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n+1$$

Queda comprobada de esta manera que el servosistema es una planta de estado totalmente controlable y que por tanto podemos utilizar la técnica de fijación de polos para controlar la planta.

La elección de la ubicación de los polos se realiza de forma que cumplamos con las especificaciones del sistema, ya sea en cuanto a velocidad de respuesta, ancho de banda, rebase máximo, respuesta permanente,.... El método más utilizado es escoger los valores de los polos basándose en la propia experiencia, o bien colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado y escoger el resto de forma que estén suficientemente alejados a la izquierda de los polos dominantes en lazo cerrado.

Una vez escogida la ubicación de los polos, se utiliza la fórmula de Ackermann [12] para determinar la matriz de ganancias de la realimentación de estados ( $\mathbf{K}$ ).

### 3.2.2 Control LQ óptimo

Un método alternativo a la fijación de polos es el control óptimo cuadrático. Este método determinará la posición de los polos en lazo cerrado de forma tal que se establece un compromiso entre una respuesta aceptable y la cantidad de energía de control requerida. Para ello minimizaremos la función de coste  $J$

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) dt \quad (53)$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son funciones simétricas reales, que determinan la importancia relativa del error y del esfuerzo de control.

Buscamos la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  óptima que minimiza la función de coste  $J$  teniendo en cuenta que la señal de control óptimo será también del tipo  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ .

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}\mathbf{x}) dt \quad (54)$$

Encontrar la solución a la anterior ecuación, y por tanto la matriz  $\mathbf{K}$  óptima, requiere solucionar la ecuación matricial de Riccati.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (55)$$

Solucionamos esta ecuación para la matriz  $\mathbf{P}$ , y si la matriz  $\mathbf{P}$  resultante es definida positiva entonces el sistema resultante es estable.

Simulamos el comportamiento del Maglev con un controlador LQ óptimo con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = 10$$

Utilizando los anteriores valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  obtenemos la siguiente matriz de ganancias

$$\mathbf{K} = [3.01 \quad 0.32] \quad , \quad k_I = 7.07$$

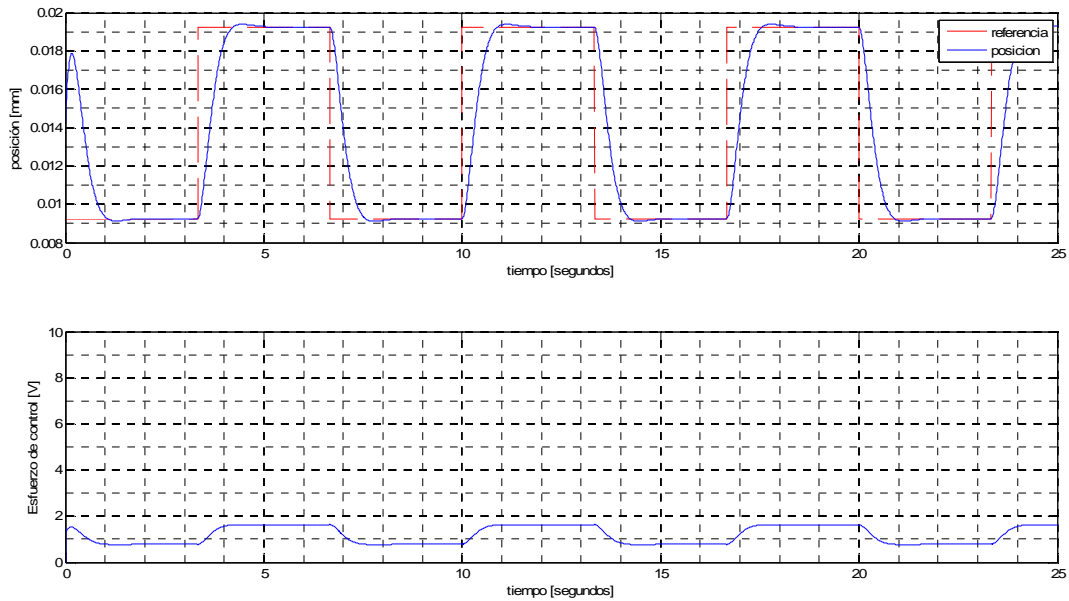


Figura 12. Simulación del Maglev con control LQ óptimo.

### 3.2.3 Observador de estados

Como hemos visto en los anteriores apartados, la utilización de los métodos de diseño de controladores en espacio de estados requiere tener accesibles todos los estados del sistema para su realimentación. Esto en la práctica no siempre es posible, entonces es necesario estimar los valores de todas las variables de estado. Esta estimación de variables de estado no medibles se denomina normalmente observación, y el dispositivo (o programa) que estima u observa estas variables de estado se llama observador de estados.

## 3.3 Control no lineal

A la hora de pensar en control no lineal, lo primero que se debe tener en cuenta es que habitualmente los procesos físicos suelen ser por naturaleza no lineales. Esto implica que en la mayoría de casos en que trabajamos con modelos lineales de plantas, realmente estamos trabajando con aproximaciones del proceso físico real. Estas aproximaciones serán suficientes si recogen toda la información sobre la dinámica de la planta en los rangos de trabajo.

Pero cuando son necesarios unos márgenes de trabajo grandes y/o respuestas a gran velocidad los efectos no lineales de la planta tendrán una importancia mayor en la dinámica y no podrán ser descartados. En este punto es donde se hace necesaria la utilización de sistemas de control no lineal para obtener el comportamiento deseado en la planta.

En el caso de los sistemas de control no lineal no existe una metodología general a seguir para diseñar el controlador. Cada problema, en particular, tiene su mejor técnica aplicable. Entre las posibles técnicas aplicables en control no lineal existen; i) linealización por

retroalimentación, ii) control en modo deslizante, iii) control adaptativo y iv) programación de la ganancia.

En este apartado vamos a desarrollar la técnica de linealización por retroalimentación. Ésta técnica se puede entender como una transformación del modelo del sistema original en un modelo equivalente de mayor simplicidad. Esta transformación consiste en realizar una transformación algebraica de la dinámica del sistema no lineal en una dinámica totalmente (o parcialmente) lineal, de modo que se puedan aplicar las técnicas comunes de control lineal sobre el sistema. En un primer momento, puede parecer que estamos realizando una linealización convencional mediante el Jacobiano (apartado 2.2.5), pero son técnicas totalmente diferentes. En la técnica de linealización por retroalimentación estamos realizando una transformación exacta de las variables de estado y de la retroalimentación, mientras que en la linealización convencional únicamente se realiza una aproximación lineal de la dinámica.

Existen dos metodologías para llevar a cabo la linealización por retroalimentación, la primera la conocemos como linealización exacta entrada-estado, y la segunda es la linealización exacta entrada-salida. Ambas metodologías son equivalentes cuando el grado, y el grado relativo de la planta coinciden. Esto es lo que ocurre en el caso del Maglev, por este motivo únicamente explicaremos la linealización exacta entrada-estado.\*

### 3.3.1 Linealización exacta entrada-estado

Acabamos de explicar la idea principal en la que se basa la linealización exacta entrada-estado, pero también es necesaria una definición formal de ésta técnica. Esta definición la centramos en sistemas SISO, puesto que el Maglev es una planta de este tipo.

Partimos de un sistema representado según las siguientes ecuaciones de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u \quad (56)$$

Donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  son funciones vectoriales continuas y derivables.

En el caso del Maglev habíamos definido sus ecuaciones de estado en el apartado 2.2.4 y podemos adaptarlos a la representación anterior de manera directa. Tomando  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  los siguientes valores

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (x_2 \quad g)^T \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \left( 0 \quad -\frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 \right)^T \end{aligned} \quad (57)$$

Finalmente tendríamos descritas las ecuaciones de estado como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u^2 \quad (58)$$

---

\* Decimos que un sistema SISO tiene grado relativo  $r$  si

$$L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0 \quad 0 \leq i \leq r-1$$

$$L_g L_f^i h(\mathbf{x}) \neq 0$$

La señal de control aparece elevada al cuadrado, cosa que no nos interesa para realizar la linealización exacta entrada-estado, por este motivo a partir de este momento realizaremos el cambio de variable  $u_{LE} = u^2$  y al finalizar el proceso de linealización desharemos este cambio.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u_{LE} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta que los funciones vectoriales  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  existen en  $\mathfrak{R}^n$ , y son funciones vectoriales continuas y derivables, se dice que el sistema es exactamente linealizable para entrada-estado si existe una región  $\Omega$  en  $\mathfrak{R}^n$  con un difeomorfismo  $\phi: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$  y una ley de control no lineal del tipo\*

$$u_{LE} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot v \quad (60)$$

tal que las nuevas variables de estado  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$  y la nueva señal de control  $v$  cumplan la siguiente relación lineal e invariante temporalmente.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v \quad (61)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El nuevo estado  $\mathbf{z}$  se denomina *estado linealizado*, y la ley de control ( $u_{LE}$ ) se denomina *ley de control linealizada*.

Después de conocer la definición formal de la linealización exacta entrada-estado es necesario también conocer las condiciones que debe cumplir el sistema para poder aplicar esta técnica y la metodología a seguir, para ello es necesario aplicar herramientas matemáticas derivadas de la algebra de Lie, que se pueden ver en detalle en el anexo I.

Un sistema como el descrito en este apartado es linealizable exactamente para entrada-estado si, y sólo si, existe una región  $\Omega$  donde se cumplen las siguientes condiciones.

- El conjunto de funciones vectoriales  $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}\}$  son linealmente independientes en  $\Omega$ .\*
- El conjunto  $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$  es involutivo en  $\Omega$ . La propiedad de involución, nos indica que cualquier par del conjunto  $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$  se puede expresar como combinación lineal en  $\Omega$  de los elementos del conjunto de funciones vectoriales originales ( $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ ).

Comprobamos ambas condiciones para el Maglev ( $n = 2$ ). La segunda condición es

\* Decimos que una función  $\phi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es un *difeomorfismo* si es continua y derivable, y su inversa  $\phi^{-1}$  también es continua y derivable.

\* La expresión  $ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$  se refiere al corchete de Lie de  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ , véase Anexo I.

inmediata porque al ser un sistema de orden 2, el conjunto  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-2} \mathbf{g}\}$  únicamente se compone por el elemento  $\{\mathbf{g}\}$ , el cual se puede obtener como combinación lineal de los vectores originales  $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ , puesto que es el segundo elemento de este conjunto. Para comprobar la primera condición debemos escribir el conjunto  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}\}$  y comprobar que el rango de esta matriz es igual a  $n$ .

$$\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 \\ -\frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 & \frac{2kk_v^2 x_2}{mx_1} \end{bmatrix}$$

Esto se cumple en el caso del Maglev y por tanto los elementos de este conjunto son linealmente independientes.

Una vez comprobadas estas dos condiciones el siguiente paso a seguir para realizar la linealización exacta entrada-estado es buscar un primer estado  $z_1$  que cumpla las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \nabla_{z_1} \cdot ad_f^i \mathbf{g} &= 0 & i = 0, \dots, n-2 \\ \nabla_{z_1} \cdot ad_f^{n-1} \mathbf{g} &\neq 0 \end{aligned} \quad (62)$$

En el caso del Maglev, escogemos  $z_1 = x_1 - x_{1equilibrio}$  y comprobamos que cumpla las ecuaciones 62 y 63.

$$\begin{aligned} \nabla_{z_1} \cdot ad_f^0 \mathbf{g} &= \nabla_{z_1} \cdot \mathbf{g} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 \end{pmatrix} = 0 \\ \nabla_{z_1} \cdot ad_f^1 \mathbf{g} &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 \\ \frac{2kk_v^2 x_2}{mx_1} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \left( \frac{k_v}{x_1} \right)^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Con el estado  $z_1$  ya definido, podemos escribir la transformación de estados como

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) = [z_1 \quad L_f z_1 \quad \dots \quad L_f^{n-1} z_1]^T \quad (63)$$

Y la ley de control linealizado (60) utilizando

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad (64)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad (65)$$

Realizamos los dos pasos anteriores para el Maglev y tendremos realizada la linealización exacta entrada-estado para nuestra planta.

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) = [z_1 \quad L_f z_1]^T = [x_1 - x_{1eq} \quad x_2]$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^2 z_1}{L_g L_f^1 z_1} = -\frac{g}{-\frac{k}{m} \left(\frac{k_v}{x_1}\right)^2} = \frac{mg \cdot x_1^2}{kk_v^2}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^1 z_1} = \frac{1}{-\frac{k}{m} \left(\frac{k_v}{x_1}\right)^2} = -\frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2}$$

$$u_{LE} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot v = \frac{mg \cdot x_1^2}{kk_v^2} - \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} \cdot v = \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} (g - v) \quad (66)$$

Finalmente únicamente faltaría por escoger el valor de la señal de control  $v$ , pero teniendo en cuenta que estamos ante un sistema lineal e invariante temporalmente en  $z$ , ecuación 61, podemos escoger una señal de control  $v$  del tipo

$$v = -\mathbf{Kz}$$

y encontramos el valor de  $\mathbf{K}$  utilizando cualquiera de los métodos vistos en el control lineal en el espacio de estado (fijación de polos, optimización LQ).

En el diseño de la señal de control  $v$  también tenemos que añadir un integrador para poder realizar el seguimiento de referencias variables temporalmente. Por lo que el sistema a resolver para encontrar  $\mathbf{K}$  sería igual que el de la ecuación (49), pero cambiando  $\mathbf{x}$  por  $\mathbf{z}$ .

Simulamos el comportamiento del Maglev utilizando la técnica de fijación de polos para escoger el valor de  $v$ . Fijamos los polos en  $[-10 \quad -15 \quad -20]$ , estos polos generan el vector de ganancias  $\mathbf{K} = [650 \quad 45]$ ,  $k_f = 3000$ . Con este vector de ganancias y las ecuaciones (67) y (68) podemos simular el comportamiento del Maglev con un control por linealización exacta entrada-estado.

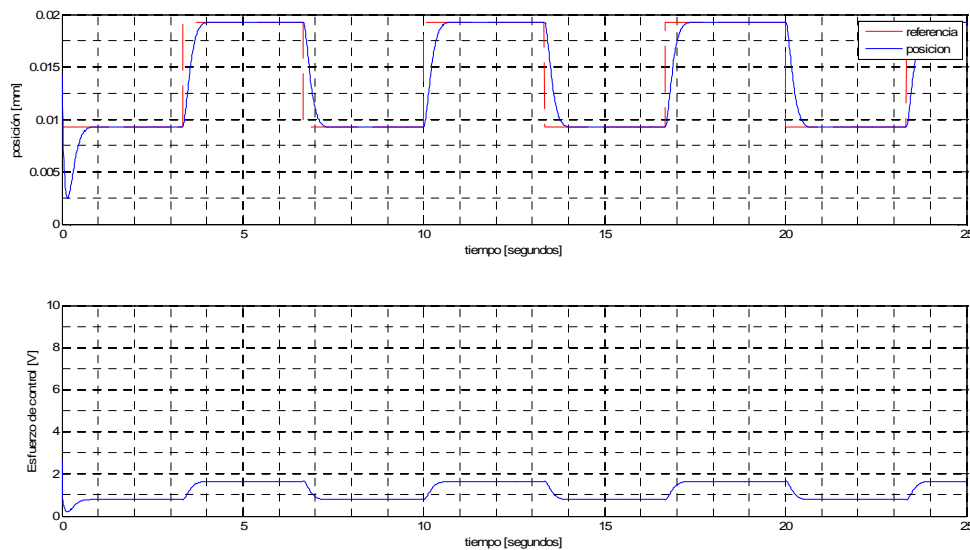


Figura 13. Simulación Maglev con control por LE



### 3.3.2 Control en modo deslizante

La teoría de control en modo deslizante fue creada a finales de 1950 en la antigua URSS, por un grupo liderado por el profesor V.I. Utkin y el profesor S.V. Emelyanov con el objetivo de enfrentarse a los problemas específicos asociados con los sistemas de estructura variable. La problemática asociada con este tipo de sistemas radica en que incluyen señales de control discontinuas, y por tanto las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de estos sistemas son discontinuas.

Actualmente la técnica de control por modos deslizantes es utilizada en multitud de aplicaciones por su versatilidad, puesto que se puede aplicar en muchos tipos de sistemas (lineales, no lineales, SISO, MIMO, discretos, estocásticos,...), y también por su capacidad de añadir robustez en el comportamiento del sistema.

La nomenclatura genérica para desarrollar un sistema de control MIMO en modos deslizantes es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (67)$$

donde el vector de estados  $\mathbf{x}$  es de dimensión  $n$ , el vector de señales de control  $\mathbf{u}$  es de dimensión  $m$  y  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  es de dimensión  $n$ . Esta última función representa todos los factores que influyen en el comportamiento del sistema de control, como pueden ser perturbaciones e incertidumbre en los parámetros del sistema.

Un sistema de control en modos deslizantes se compone de dos fases principales.

- Fase de alcance, en esta fase el sistema de estados es conducido desde cualquier estado inicial hasta alcanzar la superficie deslizante en un tiempo finito.
- Fase de modo deslizante, en esta fase el sistema ya ha alcanzado la superficie deslizante y sigue la dinámica de ésta. Esto es posible gracias a que la superficie deslizante crea una atracción del sistema hacia ella misma.

Estas dos fases se corresponde con los siguiente dos pasos de diseño

- Selección de la superficie deslizante, debemos escoger una superficie cuya dinámica cumpla con especificaciones deseadas para el sistema.
- Diseño de la señal de control discontinua, la estrategia de control discontinuo permite alcanzar la superficie deslizante en un tiempo finito.

En el contexto del sistema descrito por la ecuación (del principio), y siguiendo los pasos principales de diseño la superficie deslizante puede expresarse como  $s(\mathbf{x}) = 0$ , donde  $s(\mathbf{x})$  es un vector de dimensión  $m$  (igual dimensión que el vector de señales de control) escogido teniendo en cuenta las propiedades deseadas para la dinámica del sistema.

La señal de control  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$  está descrita por la siguiente estructura de control

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}) & s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}) & s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

con  $i = 1, \dots, m$

El objetivo del control en modos deslizantes es conseguir que el sistema alcance la superficie deslizante, y una vez sobre ella, conseguiremos que el sistema se comporte siguiendo la dinámica deseada. Para asegurar que en un tiempo finito alcanzaremos la

superficie deslizante podemos utilizar la teoría de estabilidad de Lyapunov.

La teoría de estabilidad (local) de Lyapunov dice que si existe una función escalar  $V(\mathbf{x})$  cuyas primeras derivadas parciales son continuas, de forma que

- $V(\mathbf{x})$  está definida positivamente (en el entorno del punto  $\mathbf{x}_0$ )
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  está definida negativamente (en el entorno del punto  $\mathbf{x}_0$ )

Entonces el punto  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable.

El objetivo es entonces encontrar una señal de control discontinuo que cumpla con la teoría de estabilidad de Lyapunov en toda la superficie deslizante. Algunas estrategias utilizadas para escoger la señal de control discontinuo serían las siguientes

- SMC basado en control equivalente. Escogiendo un control del tipo

$$u = u_0 + u_c \quad (68)$$

donde  $u_c$  es la señal de control conmutado, y habitualmente se escoge con uno de estos dos formatos.

$$\text{a) } u_c = -\alpha \cdot \text{signo}(s_i) \text{ con } \alpha > 0 \quad (69)$$

$$\text{b) } u_c = -\beta(s_i/\|s_i\|) \text{ con } \beta > 0 \quad (70)$$

- SMC tipo Bang-bang. Escogiendo una señal de control directamente de tipo conmutado

$$u = u_c = -M \cdot \text{signo}(s_i) \quad (71)$$

donde  $M > 0$  se escoge suficientemente grande como para eliminar las perturbaciones.

- Elección de la *ley de aproximación*, fijamos mediante una *ley de aproximación* la velocidad con la que el sistema se aproximará a la superficie deslizante. De este modo, podemos encontrar el valor de una señal de control que cumpla el criterio de estabilidad de Lyapunov. Existen principalmente tres tipos de elección.

a) Ley de alcance de tipo proporcional

$$\dot{\mathbf{s}} = -K_0 \cdot \text{signo}(\mathbf{s}) \quad (72)$$

b) Ley de alcance de tipo constante más proporcional

$$\dot{\mathbf{s}} = -K_0 \cdot \text{signo}(\mathbf{s}) + K_4 \mathbf{s} \quad (73)$$

c) Ley de alcance de tipo potencial

$$\dot{\mathbf{s}} = -K_0 |\mathbf{s}|^\alpha \cdot \text{signo}(\mathbf{s}) \quad (74)$$

Una vez asegurado que alcanzaremos el modo deslizante, interesa conocer que dinámica seguirá el sistema. Para ello, podemos definir una señal virtual, la cual se denomina *control equivalente* ( $\mathbf{u}_{eq}$ ), que permite conocer la dinámica del sistema cuando éste se

sitúa sobre la superficie deslizante. Encontramos el valor de  $\mathbf{u}_{eq}$ , teniendo en cuenta que para esta señal de control se cumple  $\dot{s}(\mathbf{x}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{s}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)] = 0 \\ \mathbf{u}_{eq} &= -\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)]\end{aligned}\quad (75)$$

Para que exista la señal virtual de *control equivalente* es necesario que  $\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\right)$  sea invertible.

Además, si la función  $d(\mathbf{x}, t)$  existe dentro del rango de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  podremos definir una señal de control  $\mathbf{u}_d$  tal que

$$d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_d \quad (76)$$

esta condición se conoce como *condición de encaje*.

Si se cumple la *condición de encaje* podemos describir la dinámica del sistema como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_d$$

y sustituyendo  $\mathbf{u}_{eq}$  por la ecuación (75) obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (77)$$

comprobamos como la dinámica sobre la superficie deslizante es inmune a la perturbación  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ , lo cual nos muestra que si se cumple la *condición de encaje* el control en SM es invariante ante perturbaciones paramétricas, y por tanto robusto.

La teoría sobre SM se basa en que la conmutación de la señal de control sea ideal, pero en las aplicaciones reales esto es imposible porque siempre aparecen retrasos. Esta no idealidad en la conmutación induce una oscilación en torno a la superficie deslizante. Este es el principal inconveniente en la utilización de esta técnica.

Una vez explicada brevemente la teoría sobre el control en modos deslizantes para una planta genérica. Pasamos a diseñar dos controladores diferentes para el Maglev bajo estudio (sistema SISO).

### 3.3.2.1 Control en modo deslizante estático

Utilizaremos el control en modo deslizante sobre el modelo de planta linealizado, esto implica que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \quad (78)$$

Siendo  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  las mismas matrices que en la ecuación (27)

Cuando nos referimos a un control en modo deslizante estático estamos indicando que la superficie deslizante escogida será invariante temporalmente. La elección de la superficie deslizante debe ser, por tanto, un hiperplano lineal.

$$s(\mathbf{x}) = S^T \cdot \mathbf{x} = (S_1 \quad S_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S_1 x_1 + S_2 x_2 \quad (79)$$

Una vez definida la superficie deslizante, ahora debemos escoger la señal de control. En nuestro caso escogemos una estrategia de control basada en control equivalente.

$$u = u_0 + u_c$$

Donde  $u_c$  será una señal de control conmutada, variable en función de la posición respecto a la superficie deslizante.

$$u_c = -M \cdot \text{signo}(s(\mathbf{x}))$$

La señal de control equivalente  $u_0$ , la escogemos con el mismo valor que la  $u_{eq}$  de la ecuación (75), pero sin tener en cuenta las perturbaciones

$$u_0 = -(S^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot (S^T \cdot \mathbf{A})$$

Con lo que la señal de control en modo deslizante estático sería

$$u_{SSM} = -(S^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot (S^T \cdot \mathbf{A}) - M \cdot \text{signo}(s(\mathbf{x})) \quad (80)$$

Una vez escogida la señal de control necesaria mientras estamos en el modo deslizante, falta asegurar que el sistema podrá alcanzar la superficie deslizante en un tiempo finito. Para ello utilizaremos el criterio de estabilidad de Lyapunov, escogiendo la siguiente función de Lyapunov  $V$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T \quad (81)$$

es inmediato observar que  $V > 0$  siempre que  $\mathbf{s} \neq 0$ , y ahora faltaría comprobar que  $\dot{V} < 0$

$$\dot{V} = \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}}^T < 0$$

$$\dot{V} = \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{s} \cdot S^T \cdot [\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (u_0 + u_c) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{s} \cdot S^T \cdot [\mathbf{B} \cdot u_c + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)]$$

si suponemos que la perturbación cumple la *condición de encaje*, ecuación (76), entonces

$$\dot{V} = \mathbf{s} \cdot S^T \cdot \mathbf{B} [-M \cdot \text{signo}(\mathbf{s}) + u_d] = S^T \cdot \mathbf{B} \cdot (-M \cdot |\mathbf{s}| + u_d \cdot \mathbf{s})$$

Habitualmente  $S^T \cdot \mathbf{B}$  es positivo y entonces escogiendo  $M > u_{d_{\max}}$  aseguraríamos la estabilidad según Lyapunov. En el caso del Maglev el producto  $S^T \cdot \mathbf{B}$  es negativo y es necesario escoger  $M < 0$  y  $|M| > |u_{d_{\max}}|$ . Con esta elección aseguraríamos que el sistema es estable a pesar de las perturbaciones, y por tanto robusto.

Simulamos el comportamiento del Maglev con un control por SSM, con los siguientes valores  $M = -10$  y  $S = [50 \ 5]$

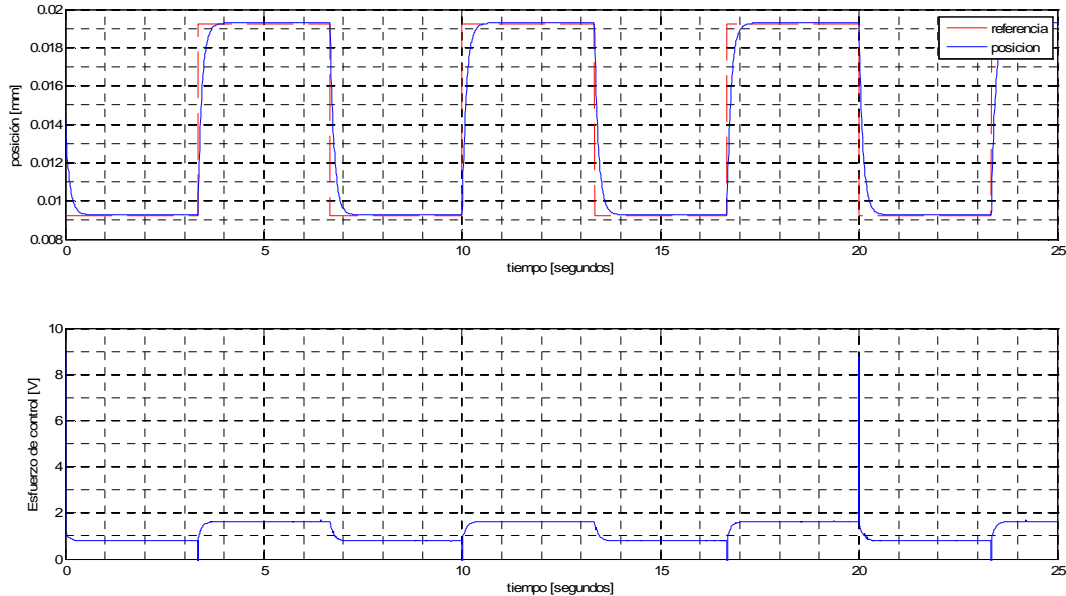


Figura 14. Simulación del Maglev con control en SSM

### 3.3.2.2 Control en modo deslizante integral

En el caso del control en modo integral deslizante partimos también de un sistema como el de la ecuación (78), pero escogiendo una superficie deslizante de tipo integral

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = S^T \cdot \mathbf{x} - S^T \int_0^t (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_0) dt \quad (82)$$

La superficie deslizante utilizada en ISM, tal como su nombre indica, incluye una parte integral que varía temporalmente. Por este motivo, el control en modo integral-deslizante es un control dinámico, además el orden del sistema y de la planta es el mismo, no reducimos el orden como en el caso estático. Eso sí, utilizar una superficie integral permite forzar que el sistema empiece en el instante  $t=0$  sobre la superficie deslizante, gracias a la elección de las siguientes condiciones iniciales para la integral

$$c.i. = -S^T \cdot \mathbf{x}(0)$$

de esta forma eliminamos la fase de alcance y únicamente trabajaremos en modo deslizante.

Se escoge  $u_0$  de forma que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_0$  cumpla con las especificaciones deseadas. Para ello, podemos usar cualquiera de las técnicas de control lineal explicadas anteriormente.

Igual que en el anterior apartado estudiaremos la estabilidad mediante el criterio de Lyapunov, utilizando la función de Lyapunov de la ecuación ( ) y suponiendo también que  $d(\mathbf{x})$  cumple la *condición de encaje*. En este caso fijaremos que la señal de control cumpla la *ley de alcance* de tipo proporcional, ecuación (72).

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T > 0$$

$$\dot{V} = \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot (-K_0 \cdot \text{signo}(\mathbf{s})) = -K_0 |\mathbf{s}|$$

Se cumple el criterio de Lyapunov siempre que  $K_0 > 0$  y  $\mathbf{s} \neq 0$ .

Derivando la ecuación (80) e igualando con la ley de alcance, ecuación (72), encontramos el valor de la señal de control.

$$\dot{\mathbf{s}} = S^T \dot{\mathbf{x}} - S^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_0] = -K_0 \cdot \text{signo}(\mathbf{s})$$

$$S^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u] - S^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_0] = -K_0 \cdot \text{signo}(\mathbf{s})$$

$$u = u_0 - \frac{K_0}{S^T \mathbf{B}} \cdot \text{signo}(\mathbf{s}) \tag{83}$$

Podemos comprobar que mediante este procedimiento también encontramos una señal de control del tipo control equivalente.

Simulamos el comportamiento del Maglev con un control en SM, con los siguientes valores  $K_0 = 12.25$  y  $S = [1 \quad 0.75]$  y tomando como  $u_0$  la señal de control obtenida por el controlador EE.

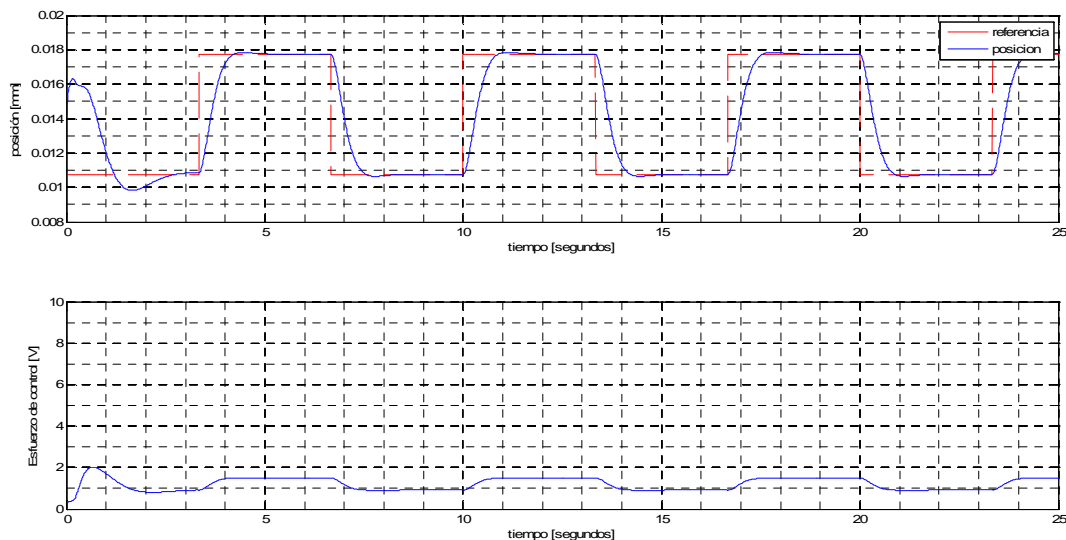


Figura 15. Simulación del Maglev con control en ISM

## IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Una vez diseñados todos los controladores y comprobado su correcto funcionamiento mediante simulación pasamos a comprobar su funcionamiento en el Maglev. Se realizarán una serie de experimentos que permitirán llevar a cabo un estudio comparativo de los controladores diseñados, se verificarán las propiedades de cada método de control y se propondrá cual es más apropiado para el control del Maglev. En este estudio comparativo se incluyen todos los controladores simulados en el capítulo III con excepción del PD.

Este capítulo se divide en cuatro apartados, en el primero de ellos explicaremos las modificaciones realizadas sobre los diseños teóricos para hacer operativos todos los controladores. En el segundo apartado se realiza un estudio de las características de los controladores en régimen permanente, sistema regulador. En el tercer apartado se comprueba la capacidad de cada controlador para realizar el seguimiento de una referencia, servosistema. Y finalmente en el último apartado se estudia la robustez de cada controlador.

### 4.1 Modificaciones

En el capítulo III se ha comprobado mediante simulación el correcto funcionamiento de todos los controladores diseñados. A partir de la simulación se tiene una primera visión del comportamiento de cada controlador, pero esto no asegura que una vez implantados sean operativos.

En primer lugar pueden existir errores en el modelo utilizado, estos errores pueden ser de tipo paramétrico o de tipo no paramétrico. Los errores de tipo paramétrico son los relacionados con las desviaciones en el valor de los parámetros del modelo utilizado con respecto a los valores de la planta real, mientras que los errores no paramétricos están relacionados con una elección inadecuada en el orden del modelo. En segundo lugar, los modelos utilizados para simulación no incluyen ni el ruido de medida introducido por el sensor, ni los retrasos introducidos por el control discreto en tiempo real.

En una planta inestable, como es el caso del Maglev, estos dos puntos hacen complicado que el resultado experimental y el resultado obtenido mediante simulación coincida. Es más, alguno de los controladores diseñados se ha tenido que modificar, a pesar de que su comportamiento en las simulaciones era correcto.

Los controladores por LE, por SSM, por ISM e ITAE óptimo se han modificado para conseguir que fuesen capaces de estabilizar y regular la planta, y de realizar el seguimiento de una referencia. Comentamos a continuación los cambios en el diseño que se han tenido que introducir.

En el caso del controlador por LE reescribimos la ecuación (66)

$$u_{LE} = \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} (g - v) = \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} g - \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} v = u_1 + u_2 \quad (84)$$

después de realizar numerosos experimentos con este controlador se pudo observar como en posiciones cercanas al electroimán ( $x_1 = 0$ ) la planta se desestabilizaba. Observando la ecuación (84) se puede comprobar que en posiciones cercanas al electroimán la señal de control se anula. Si entendemos la ecuación (84) como una señal

de control compuesta por dos señales de control diferentes, la primera se encargaría de ofrecer la tensión necesaria para mantener la posición si no existiese ninguna perturbación y la segunda se encargaría de realizar el control ante perturbaciones. Por este motivo realizamos una pequeña modificación y fijamos en la segunda parte de la señal de control un valor fijo para permitir al controlador poder reaccionar, incluso en posiciones muy cercanas al electroimán. De este modo utilizamos la siguiente señal de control

$$u_{LE2} = \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} (g - v) = \frac{m \cdot x_1^2}{kk_v^2} g - \frac{m \cdot (x_{1\_fija})^2}{kk_v^2} v \quad (85)$$

En el caso del SSM después de realizar los experimentos observamos que era incapaz de estabilizar el sistema, pese a ser un controlador robusto que debería funcionar bajo condiciones diferentes a las ideales. Por este motivo se realizó un cambio en la señal de control y en la superficie deslizante. De modo que se escogió nuevamente una señal de control de tipo equivalente, pero en este caso se utilizó una  $u_0$  del mismo valor que la señal de control en EE. Además también se modificó la superficie deslizante escogiendo una del tipo.

$$s(\hat{\mathbf{x}}) = S^T \cdot \hat{\mathbf{x}} = (S_1 \quad S_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{1ref} \\ x_2 - x_{2ref} \end{pmatrix} = S_1(x_1 - x_{1ref}) + S_2(x_2 - x_{2ref}) \quad (86)$$

En el caso del ISM el comportamiento del controlador tampoco era el idóneo. Después de analizar los valores que tomaba la superficie deslizante observamos que las oscilaciones en la señal de control  $u_0$  hacían que el valor de la superficie deslizante fuese diferente al esperado y por tanto la señal de control conmutada empeorase el comportamiento de la planta, tanto en modo seguimiento de referencia, como en régimen permanente, como al incluir perturbaciones. Por este motivo decidimos no utilizar la señal  $u_0$  en el cálculo de la superficie deslizante, sino que utilizamos una estimación  $\hat{u}_0$  obtenida directamente a partir del modelo de la planta y de la señal de referencia.

En el caso del controlador ITAE óptimo, aunque si que era capaz de estabilizar el sistema, presentaba un offset que impedía realizar los experimentos. Por este motivo decidimos anteponer un controlador PI en serie con el ITAE óptimo para eliminar este offset.

Finalmente hacemos un resumen con todas las señales de control utilizadas en cada controlador y con los valores específicos de cada parámetro.

Tabla 2. Valor parámetros utilizados en los experimentos

Controlador	Valor parámetros
PID	$k_p = 4, k_D = 0.2, k_I = 2$
PI-ITAE	$k_p = 1, k_I = 1, \omega_0 = 100$
EE	$k_1 = 3.01, k_2 = 0.32, k_I = 7.07$
LE	$k_1 = 650, k_2 = 45, k_I = 3000, x_{1\_fija} = 0.009$
SSM	$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, M = -1$
ISM	$S = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \end{bmatrix}, K_0 = 12.25$



## 4.2 Régimen permanente

Los experimentos para comprobar el comportamiento de los diferentes controladores en régimen permanente consisten en fijar una altura deseada para la levitación de la bola magnética, este modo de funcionamiento se conoce como modo regulador. Podemos ver en la siguiente tabla las alturas de referencia utilizadas en cada experimento.

**Tabla 3. Alturas de referencia**

Experimento 1	Altura de referencia $x_{1ref} = 14.25mm$
Experimento 2	Altura de referencia $x_{1ref} = 19.5mm$
Experimento 3	Altura de referencia $x_{1ref} = 16mm$
Experimento 4	Altura de referencia $x_{1ref} = 12.5mm$
Experimento 5	Altura de referencia $x_{1ref} = 9mm$

El primer experimento toma como altura de referencia el valor de la altura de equilibrio, ésta altura es también la utilizada para obtener las aproximaciones lineales de la planta (función de transferencia, y espacio de estados lineal). El resto de alturas se escogen equidistantes por encima y por debajo de la altura de equilibrio.

En la figura 16 observamos el comportamiento de todos los controladores funcionando como reguladores en el experimento 1. Tal y como podemos ver en la leyenda de la figura, la posición de la bola (salida de la planta) está representada en color azul y la posición deseada está representada en color rojo discontinuo, éste código de colores será el utilizado también en el resto de figuras de este capítulo.

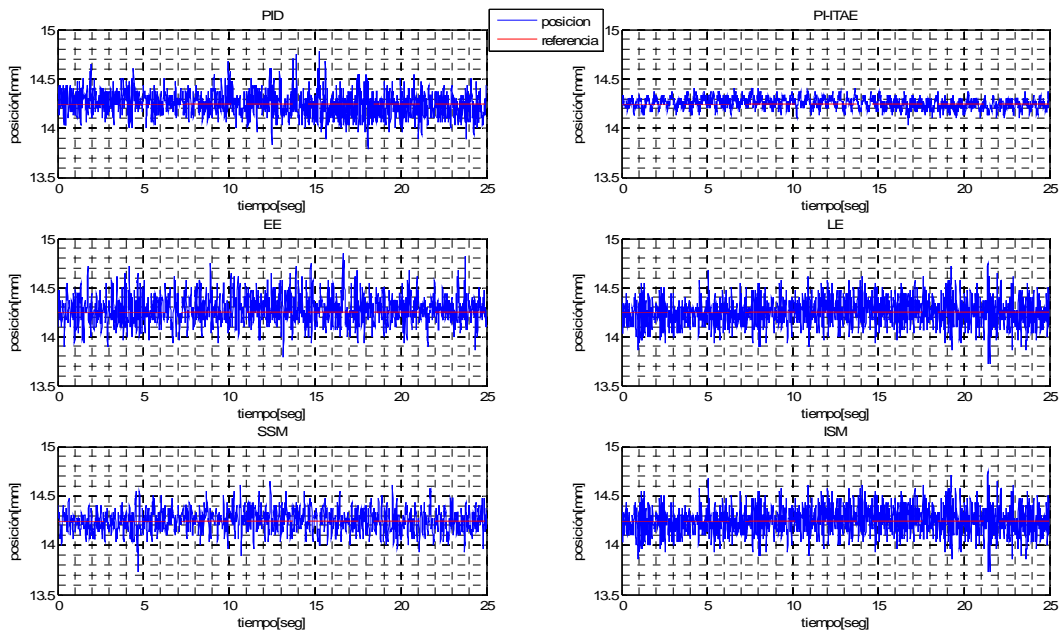


Figura 16. Señal de salida y de referencia para el experimento 1

El criterio utilizado para comparar los diferentes controladores será el IAE (Integral de valor Absoluto del Error), definido por la siguiente ecuación

$$IAE = \int_0^{\infty} |e| \cdot dt$$

En la tabla 4 tenemos el valor del IAE para todos los controladores en las diferentes posiciones utilizadas en el experimento.

Tabla 4. IAE en régimen permanente.

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 1</b>	0.00233	0.00113	0.00283	0.00308	0.00220	0.00262
<b>Experimento 2</b>	0.00379	0.00104	0.00328	0.00261	0.00254	0.00284
<b>Experimento 3</b>	0.00241	0.00084	0.00283	0.00260	0.00246	0.00237
<b>Experimento 4</b>	0.00203	0.00096	0.00287	0.00232	0.00253	0.00272
<b>Experimento 5</b>	0.00337	0.00105	0.00383	0.00255	0.00308	0.00237

Se observa como el controlador que estabiliza la planta con una mayor precisión es el PI-ITAE, después le siguen los dos controladores en modo deslizante (SSM e ISM). Y el peor comportamiento lo tienen el PID y el EE.

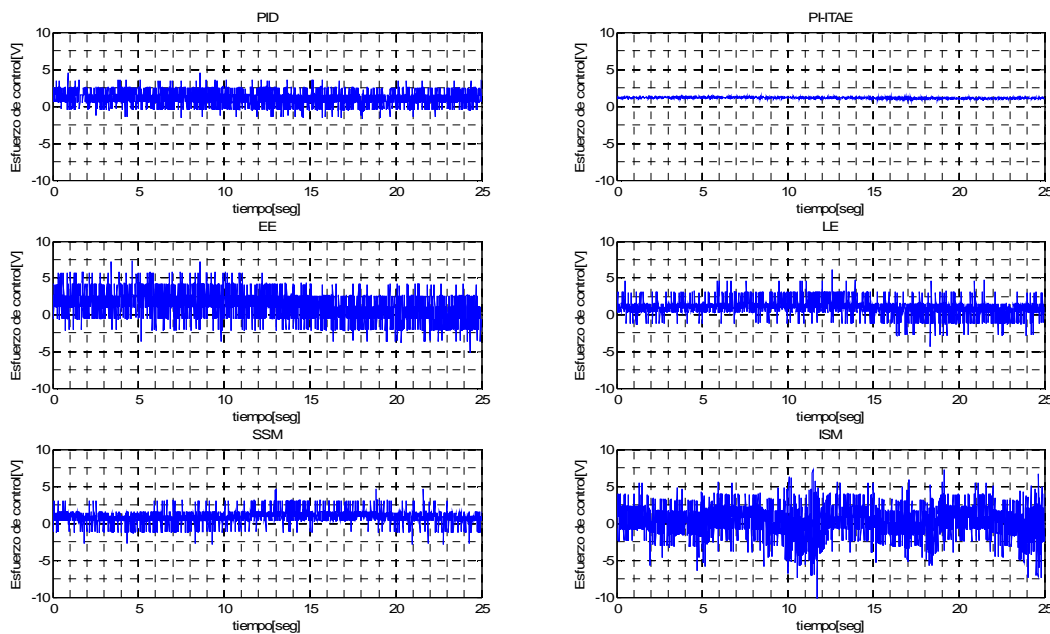
Podemos comprobar de una forma más visual en la tabla 5 la gran precisión de todos los controladores visualizando el error medio de todos ellos.

**Tabla 5. Error medio (mm) en la medida.**

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 1</b>	0.09325	0.04524	0.11318	0.12306	0.08780	0.10497
<b>Experimento 2</b>	0.15143	0.04166	0.13110	0.10445	0.10156	0.11371
<b>Experimento 3</b>	0.09642	0.03365	0.11315	0.10398	0.09839	0.09469
<b>Experimento 4</b>	0.08107	0.03838	0.11471	0.09266	0.10108	0.10875
<b>Experimento 5</b>	0.13469	0.04193	0.15320	0.10202	0.12321	0.09469

Observamos como todos ellos tienen un error medio menor a 0.16mm, e incluso el PI-ITAE tiene un error inferior a 50µm.

En la figura 17 podemos observar la señal de control correspondiente con las salidas observadas en la figura anterior.



**Figura 17. Esfuerzo de control para el experimento 1**

En un controlador no solo es importante el error que comete en modo regulador, sino que también puede ser importante el esfuerzo de control necesario para mantener la altura deseada. Por este motivo también utilizaremos criterio ISEU (Integral del error cuadrado y del esfuerzo de control) para comprobar el funcionamiento de todos los controladores, con este criterio no solo tenemos en cuenta el error cometido sino que el esfuerzo de control necesario también penaliza. La ecuación que define el ISEU la podemos ver a continuación

$$ISEU = \int_0^{\infty} (x^2 + \rho \cdot u^2) \cdot dt$$

en este proyecto siempre utilizaremos  $\rho = 10$  porque fue la utilizada en el diseño del controlador LQ óptimo.

Como en el caso del criterio IAE también utilizaremos una tabla comparativa para diferentes alturas.

Tabla 6. ISEU en régimen permanente

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 1</b>	537.72	316.23	1280.70	268.85	371.61	523.43
<b>Experimento 2</b>	1911.80	461.55	1825.10	466.96	569.99	715.81
<b>Experimento 3</b>	609.66	353.41	1206.40	300.65	364.88	544.15
<b>Experimento 4</b>	279.84	353.37	1079.50	226.16	367.58	552.11
<b>Experimento 5</b>	362.16	64.02	804.70	196.51	201.63	263.77

Teniendo en cuenta el esfuerzo de control necesario para mantener la levitación, el controlador que ofrece un mejor comportamiento es el LE seguido del PI-ITAE, y los que peor comportamiento ofrecen vuelven a ser nuevamente el PID y el EE.

Una vez realizados los experimentos en régimen permanente podemos concluir que el controlador que ofrece en términos generales un mejor comportamiento como regulador es el PI-ITAE. También podemos concluir que el control no lineal por LE mantiene la levitación con un esfuerzo de control menor, y por tanto ofrece un menor consumo de potencia.

### 4.3 Seguimiento de señal

En el modo seguimiento de señal también se van a realizar cinco experimentos, en los cuales el servosistema deberá realizar el seguimiento de una señal cuadrada centrada en diferentes alturas, ver tabla 7. Finalmente se buscará el rango máximo para el cual cada controlador es capaz de realizar el seguimiento de una referencia cuadrada.

Tabla 7. Señal de referencia cuadrada para los diferentes experimentos

Experimento 6	Amplitud de pico a pico, $App = 7mm$ , y centrada en $x_1 = 14.25mm$
Experimento 7	Amplitud de pico a pico, $App = 7mm$ , y centrada en $x_1 = 19.5mm$
Experimento 8	Amplitud de pico a pico, $App = 7mm$ , y centrada en $x_1 = 16mm$
Experimento 9	Amplitud de pico a pico, $App = 7mm$ , y centrada en $x_1 = 12.5mm$
Experimento 10	Amplitud de pico a pico, $App = 7mm$ , y centrada en $x_1 = 9mm$

En estos experimentos no podemos utilizar el criterio IAE para comparar los resultados entre los diferentes controladores porque los controladores se han diseñado para realizar el seguimiento en un rango de trabajo lo mayor posible. En el diseño no se ha tenido cuenta el tiempo de respuesta, esto implica que los controladores con un mayor tiempo de respuesta obtendrán un valor peor de IAE, pero este valor no indicará necesariamente que su comportamiento sea peor. En cualquier caso si que utilizaremos este criterio para comparar la variación en el comportamiento de cada controlador en función de la distancia respecto a la altura de equilibrio.

En la figura 18, podemos observar el comportamiento de todos los controladores para el experimento 6.

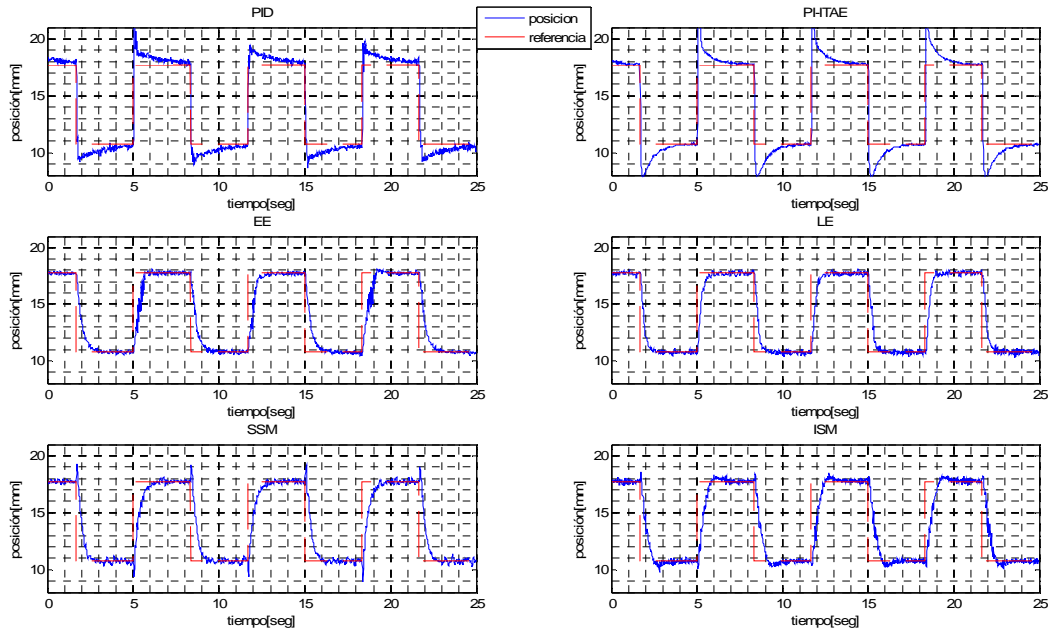


Figura 18. Señal de salida y de referencia para el experimento 6

Después de la realización de todos los experimentos obtenemos el IAE de cada uno de ellos. Este valor obtenido del IAE lo normalizamos con respecto al valor de IAE del experimento 6, de este modo se comprueba el comportamiento de cada controlador por separado.

Tabla 8. IAE normalizado en seguimiento de una señal cuadrada

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 6</b>	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
<b>Experimento 7</b>	1.05128	0.00000	1.02419	0.98708	0.95204	1.01072
<b>Experimento 8</b>	1.58165	1.15803	1.15070	0.99263	1.00993	1.00484
<b>Experimento 9</b>	1.08120	1.11508	1.02069	0.99643	1.01064	1.01636
<b>Experimento 10</b>	1.58165	1.15803	1.15070	1.26695	1.00993	1.08899

Analizando los resultados obtenidos, se observa un primer punto diferenciador entre el funcionamiento en seguimiento de referencia y el funcionamiento en régimen permanente. En régimen permanente el controlador que ofrece un mejor comportamiento global es el PI-ITAE, sin embargo este controlador es el único de todos incapaz de realizar el seguimiento de una señal de referencia cuadrada cuando nos alejamos del punto de equilibrio, y por tanto es el controlador con peor comportamiento en este aspecto. Los controladores con menor variación en su comportamiento independientemente de la altura escogida para la levitación son los dos controladores en modo deslizante, esto no es extraño puesto que son los únicos robustos. Cabe destacar que nuevamente el control por LE ofrece un comportamiento muy cercano al del mejor controlador.

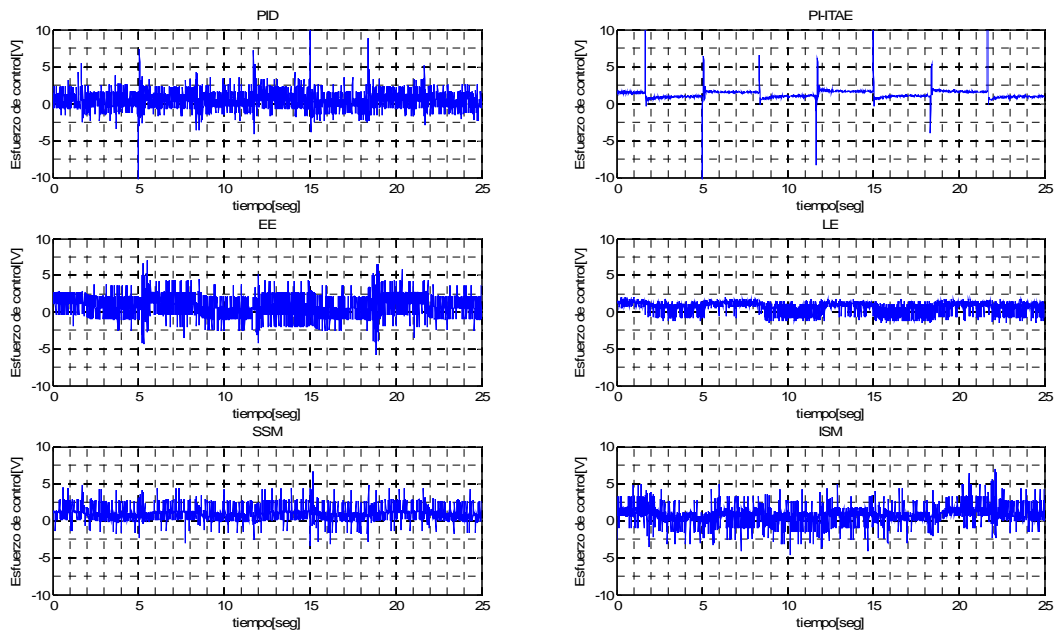


Figura 19. Esfuerzo de control para el experimento 6

En la figura 19 observamos el esfuerzo de control de todos los controladores al realizar el experimento 6. Utilizando el esfuerzo de control para todos los experimentos en modo seguimiento de señal podemos extraer la tabla 9 con el valor del ISEU. Los diferentes valores de ISEU nos muestran como los controladores no lineales ofrecen un menor consumo que los controladores lineales. Cabe destacar el bajo consumo del controlador por LE, igual que ocurre en modo regulador, y también el elevado consumo del PID.

Tabla 9. ISEU en seguimiento de una señal cuadrada

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
Experimento 6	8795.09	607.76	778.83	281.77	445.77	521.45
Experimento 7	9351.89	--	1078.99	460.18	562.37	673.59
Experimento 8	9147.75	718.08	750.38	325.00	658.43	378.29
Experimento 9	8827.93	684.01	829.06	215.24	592.06	465.98
Experimento 10	9186.38	433.64	728.34	283.34	325.56	498.36

Después de realizar los experimentos en modo seguimiento de referencia podemos concluir que los controladores no lineales ofrecen un mejor comportamiento, y un consumo menor. También se observa como los controladores lineales sufren una mayor variación en su comportamiento cuando el rango de trabajo se aleja del punto de equilibrio utilizado en su diseño.

Otro punto interesante es buscar los rangos máximos de trabajo de cada controlador, y comprobar de este modo si tal y como la teoría indica los controladores no lineales ofrecen unos rango de trabajo mayores.

La figura 20 muestra el rango máximo para cada controlador.

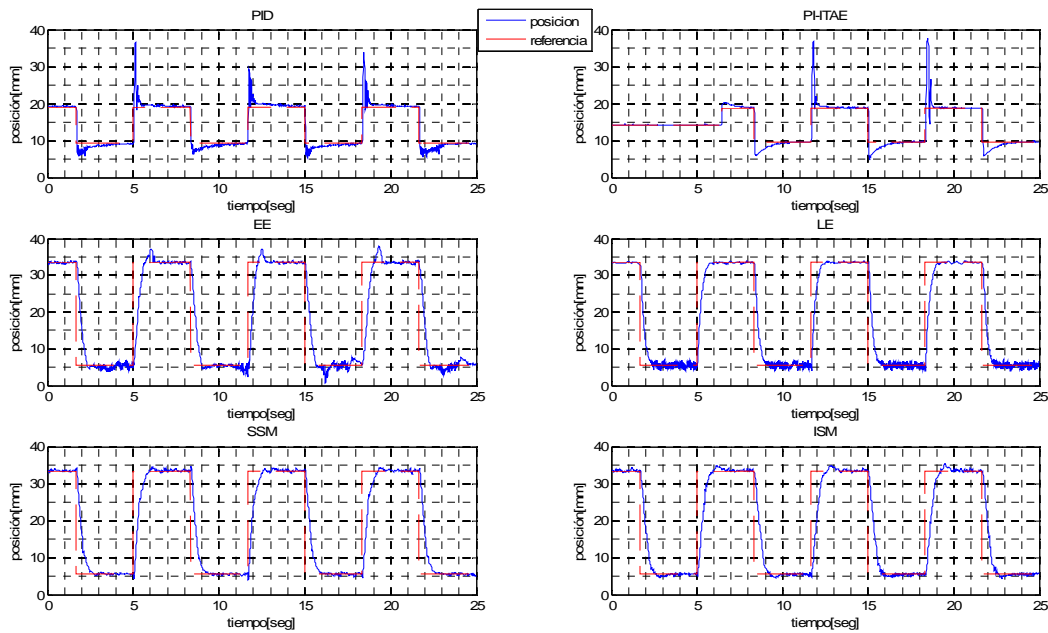


Figura 20. Señal de salida y de referencia en el rango máximo

Observamos como los controladores lineales PID y PI-ITAE tienen un rango de trabajo menor que el resto de controladores. Todos los demás son capaces de mantener la levitación para una amplitud de pico a pico igual al rango máximo del sensor.\*

En la tabla 10 podemos observar el valor del IAE de cada controlador trabajando en su rango máximo normalizado con respecto al IAE del experimento 6.

Tabla 10. IAE normalizado del rango máximo

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
IAE	--	--	3.92778	3.87331	3.18931	3.42559

A partir de los valores de la tabla podemos concluir que aunque todos los controladores con excepción del PID y el PI-ITAE son capaces de levitar la bola en todo el rango del sensor, los controladores no lineales son los que menor variación tienen en su comportamiento.

#### 4.4 Robustez

Comprobaremos la robustez de todos los controladores mediante dos experimentos. Ambos experimentos utilizan los mismos parámetros de entrada que el experimento 6 pero introduciendo una perturbación. En el experimento 11 la perturbación consistirá en doblar el peso de la bola metálica, para ello añadiremos una segunda bola a la levitación tal y como muestra la figura 21. Y en el experimento 12 la perturbación consistirá en

\* Aunque el rango del sensor llega a 0mm se toma la posición 5mm como rango máximo del sensor porque la posición 0mm se corresponde con la posición del electroimán. Y una vez la bola metálica contacta con el electroimán, la bola se pega y únicamente se puede separar de forma manual.

añadir ruido blanco a la entrada de la planta, la señal de ruido tendrá un media de 0 Voltios y una varianza de 1 Voltio.



Figura 21. Experimento 11, levitación de dos esferas

Para comprobar el comportamiento de todos los controladores utilizaremos también los criterios IAE e ISEU normalizados con respecto al experimento 6.

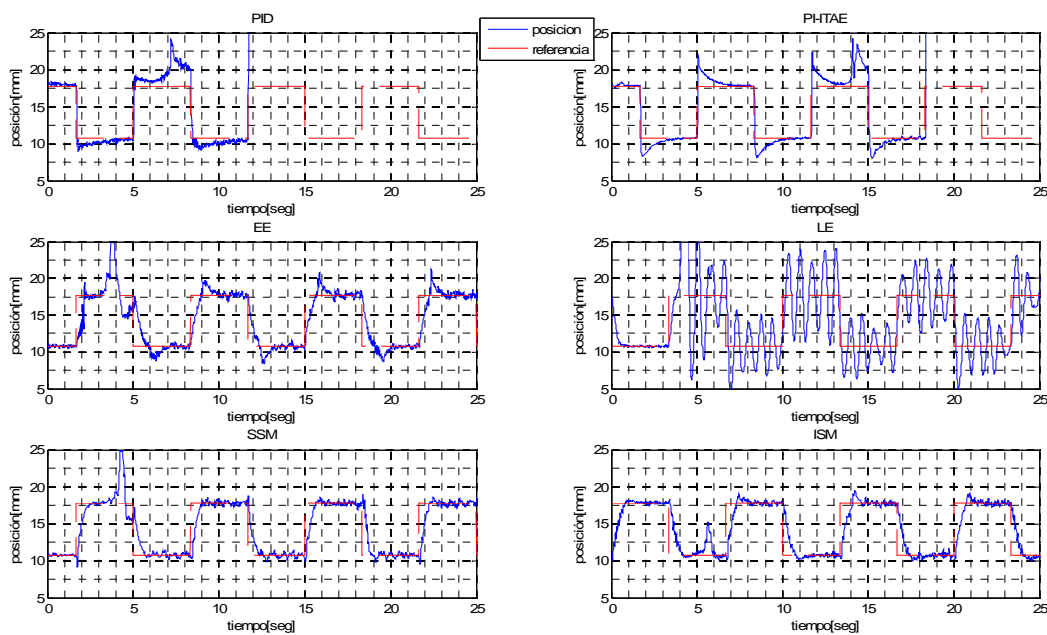


Figura 22. Señal de salida y de referencia para el experimento 11

En la figura 22 se puede ver la respuesta de todos los controladores después de añadir una segunda bola a la levitación, marcado con una flecha en la figura. Los únicos controladores capaces de realizar el seguimiento de la referencia cuadrada después de añadir una segunda bola a la levitación son los dos controladores en modo deslizante y el control lineal en el EE. Utilizaremos el criterio IAE para poder decidir cual de estos tres controladores es capaz de realizar el seguimiento de la señal cuadrada con una menor variación respecto al mismo experimento con una única bola levitando (experimento 6). La tabla 11 muestra el valor del IAE normalizado para el experimento 11.

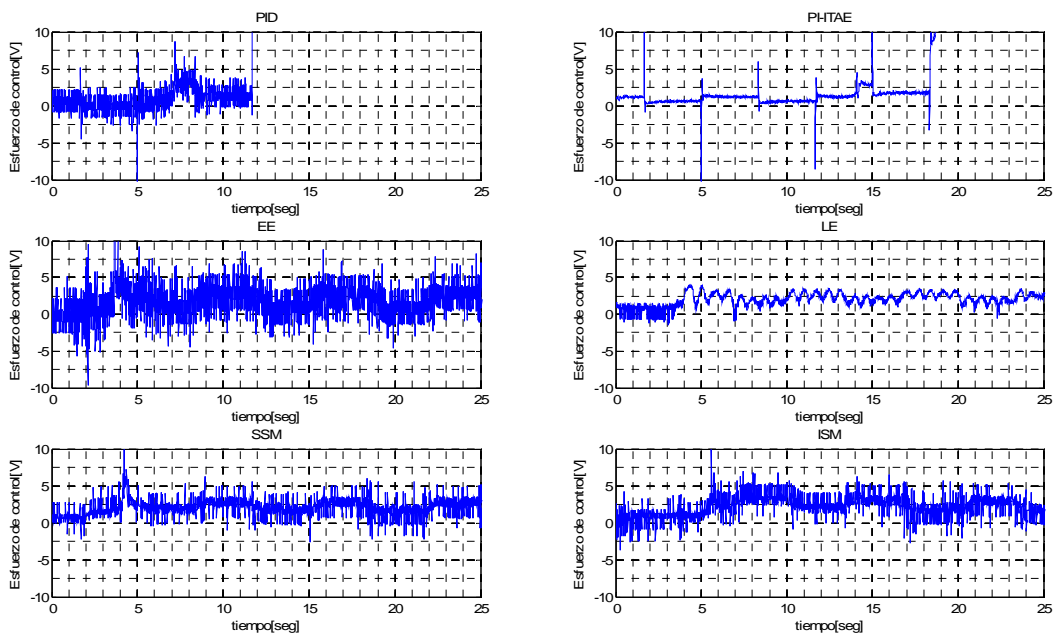


**Tabla 11. IAE normalizado del experimento 11**

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 11</b>	--	--	1.30215	--	0.85774	0.97712

Los resultados de la tabla 11 nos muestran como el control en ISM tiene un comportamiento casi idéntico al que tuvo en el experimento 6 (sin perturbación), esto nos indica la robustez de este controlador. En el caso del control en SSM el comportamiento incluso mejora, esto es debido a que al aumentar el peso los picos que este controlador realiza cuando cambia el valor de la señal de referencia son menores. En el caso del control EE es capaz de realizar el seguimiento de la referencia pero su comportamiento empeora.

Observamos también el esfuerzo de control para el experimento 11 en la figura 23, y comprobamos la variación del valor del ISEU normalizado respecto al experimento con una única bola levitando en la tabla 12.



**Figura 23. Esfuerzo de control para el experimento 11**

**Tabla 12. ISEU normalizado del experimento 11**

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 11</b>	--	--	2.17	--	3.82	5.31

Una vez realizado el experimento de añadir la segunda bola a la levitación podemos concluir que los controladores en SM son los que ofrecen mejor comportamiento, aunque el control en EE también ofrece cierta robustez.

El experimento 12 consiste en añadir una perturbación en la señal de control. Observamos en la figura 24 la respuesta de todos los controladores ante esta perturbación.

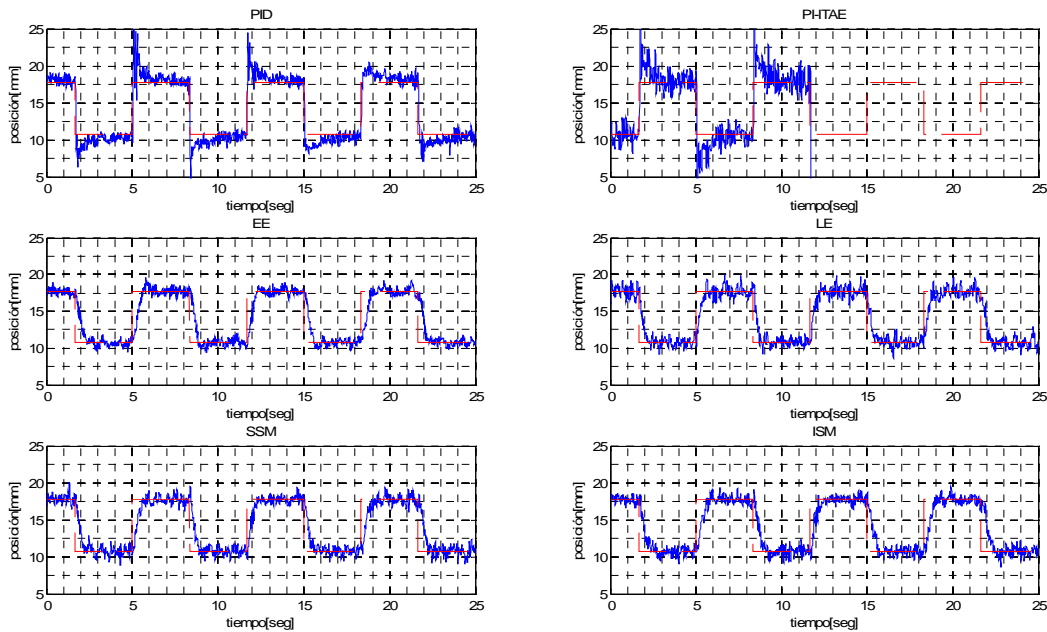


Figura 24. Señal de salida y de referencia para el experimento 12

Todos los controladores con excepción del PI-ITAE son capaces de mantener la levitación a pesar de la perturbación. Encontramos los valores del IAE normalizado respecto al experimento 6 en la tabla 13.

Tabla 13. IAE normalizado del experimento 12

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 12</b>	1.46850	--	1.24938	1.62450	1.13869	1.16977

Nuevamente los controladores en SM son los que sufren una menor variación, por lo que siguen mostrándose los más robustos de todos.

En la figura 25 observamos el esfuerzo de control necesario para mantener la levitación, se puede ver como hay una oscilación mayor debido a que la perturbación que hemos añadido es un ruido blanco de varianza 1V.

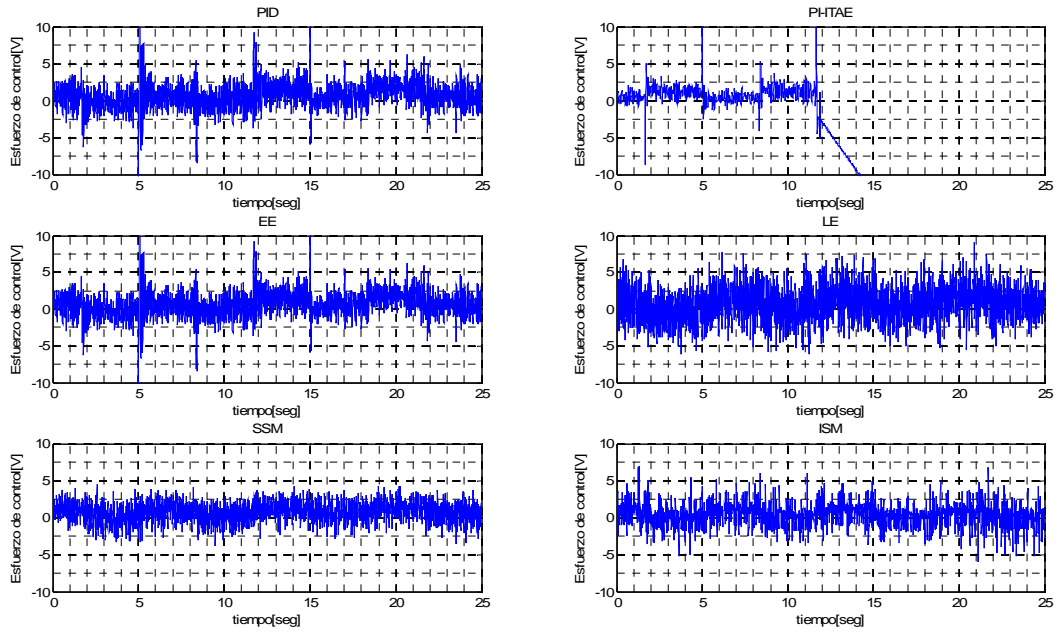


Figura 25. Esfuerzo de control para el experimento 12

Tabla 14. ISEU normalizado del experimento 12

	PID	PI-ITAE	EE	LE	SSM	ISM
<b>Experimento 12</b>	1.06	--	1.90	2.09	1.24	1.42

Finalmente podemos definir al controlador en SSM como el controlador globalmente más robusto, aunque el controlador en ISM ofrece un comportamiento muy similar. Ambos demuestran su propiedad de invariancia ante perturbaciones.

## V. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

### 5.1 Conclusiones

El objetivo principal de este proyecto ha sido la realización de un estudio comparativo entre diferentes controladores lineales y no lineales aplicados a un levitador magnético. Se han realizado experimentos para comprobar el comportamiento de todos los controladores tanto en régimen permanente, como en seguimiento de una referencia, como su respuesta ante perturbaciones. El análisis de estos experimentos nos ha permitido extraer las siguientes conclusiones.

- Los controladores lineales clásicos pierden eficacia conforme el punto de trabajo se aleja del punto de equilibrio utilizado para conseguir el modelo lineal.
- Los controladores no lineales mantienen su comportamiento independientemente del punto de trabajo.
- Existe una relación entre precisión y robustez ante perturbaciones. Los controladores más robustos tienen un comportamiento menos preciso y viceversa.
- El control no lineal permite la levitación con un menor esfuerzo de control.
- El control en modo deslizante responde con mayor robustez ante perturbaciones que el resto.

Finalmente podemos concluir que el control no lineal ofrece un mejor comportamiento global para el Maglev, y acotando más, podemos afirmar que el método de control no lineal en modo deslizante ofrece los mejores resultados de entre todos los controladores probados. Y aún sabiendo que es preferible utilizar un control no lineal para el Maglev, el método de control en el espacio de estados debería ser el escogido en caso de tener que utilizar un control lineal.

Otro objetivo marcado al inicio de este proyecto era la realización de una práctica final para los alumnos de la asignatura SEC, se puede ver en el anexo IV. Esta práctica ya ha sido realizada por los alumnos del cuatrimestre de primavera 2009/2010 de la titulación de Ingeniería Electrónica con muy buena valoración por parte de los mismos. Después de la realización de la práctica final, aprovechando los comentarios y la buena aceptación por parte de los alumnos, se escribió un artículo sobre la utilización docente del levitador magnético, puede verse en el anexo III. Este artículo ha sido aceptado en las XXXI Jornadas de Automática en la categoría de Educación en Control, estas jornadas se celebran anualmente y están promovidas por el Comité Español de Automática (CEA) .

La realización del proyecto también incluía dos objetivos secundarios, pero no por ello exentos de dificultad, y que requerían la dedicación de mucho tiempo. El primero era la puesta en marcha y conocimiento del Maglev, y el segundo la preparación de una base bibliográfica que incluyese el estado del arte de las diferentes técnicas de control utilizadas con levitadores magnéticos.

Es obvio que se ha cumplido con la puesta en marcha del equipo, pero hay que tener en

cuenta que es una planta que necesita mucho tiempo para la asimilación de su comportamiento, principalmente porque al ser una planta inestable hace muy tedioso la repetición de los experimentos, y en segundo lugar porque es una planta variante temporalmente. Este punto de la variabilidad temporal no se ha tenido en cuenta a la hora de diseñar los controladores, pero después de realizar muchos experimentos en diferentes condiciones se ha podido comprobar que existe una dependencia del comportamiento de la planta con la temperatura. Las variaciones de temperatura hacen que el electroimán se comporte de manera diferente, estas variaciones de temperatura podrían ser tanto por diferencias de temperatura en el laboratorio, como por el calentamiento producido por la corriente que circulaba por electroimán.

La elaboración de una base bibliográfica con el estado del arte ha permitido probar tanto los métodos de control más difundidos (PID, EE, LE), como métodos más novedosos (ISM). Además permitirá la realización de más trabajos de investigación con esta planta, puesto que existen artículos con métodos de control no utilizados en este proyecto y artículos con métodos de identificación de planta, siendo la identificación una parte muy importante de la ingeniería de control que tampoco se ha tratado en este proyecto.

## **5.2 Líneas futuras**

Existen numerosas posibilidades de trabajos futuros a poder realizar aprovechando este proyecto, y utilizando el Maglev. Algunas opciones serían

- Centrarse en la parte de identificación de planta. Las mejoras en el modelo de la planta permitirían rediseñar los controladores utilizados en este proyecto y mejorar su comportamiento.
- Diseño de nuevos controladores mediante métodos diferentes a los utilizados en este proyecto. Algunos métodos interesantes podrían ser el control adaptativo, el control por redes neuronales y el control difuso. Esto permitiría tener una comparativa de los métodos de control más utilizados.
- Diseño de observadores de estado. El Maglev únicamente ofrece a la salida la altura de la levitación pero no tenemos una medida de la velocidad de la bola. En todos los métodos de control que trabajan con las ecuaciones de estado es necesario tener también acceso a la medida de la velocidad de la bola, y en caso de no tener una medida se debe tener una estimación. En nuestro proyecto hemos estimado la velocidad de la bola mediante la derivación de la altura, pero de esta forma estamos amplificando el ruido de medida. Diseñar observadores de estado que estimasen la velocidad de la bola permitiría mejorar el comportamiento de todos los controladores.
- Adaptación del Maglev para permitir su utilización como laboratorio remoto. La Ingeniería de Control obliga en muchas ocasiones a utilizar el clásico método de prueba y error para mejorar. Tener un fácil acceso a los laboratorios, sin limitación temporal y sin supervisión debe permitir a los docentes probar sus propias ideas con una mayor libertad y sin temor al error.

## Anexo I - Álgebra de Lie

### Nomenclatura.

Siendo  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  dos funciones vectoriales de dimensión  $n$  con las derivadas parciales de cualquier orden continuas. Y  $h$  una función escalar también con todas las derivadas parciales de cualquier orden continuas.

$$\mathbf{f} : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^n$$

$$\mathbf{g} : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^n$$

$$h : \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{R}$$

El gradiente de una función escalar  $h$  es un vector fila compuesto por las  $m$  derivadas parciales y se denota como  $\nabla h$ .

El Jacobiano de una función vectorial  $\mathbf{f}$  es una matriz de dimensión  $n \times n$  que se denota como  $\nabla \mathbf{f}$  y se compone por

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Definición 1.** Definimos la *derivada de Lie* de  $h$  con respecto a  $\mathbf{f}$  como

$$L_{\mathbf{f}} h = \nabla h \cdot \mathbf{f}$$

La derivada de Lie se puede entender como la derivada direccional de  $h$  sobre  $\mathbf{f}$ .

Las derivadas de Lie se calculan recursivamente teniendo en cuenta que

$$L_{\mathbf{f}}^0 h = h$$

$$L_{\mathbf{f}}^i h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

**Definición 2.** Definimos el *corchete de Lie* de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  como

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$$

Es común escribir el *corchete de Lie*  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$  como  $ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}$  (donde  $ad$  se nombra como adjunto).

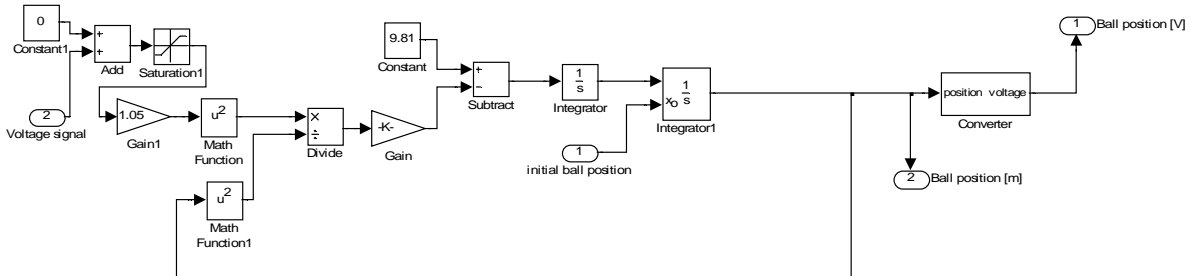
El *corchete de Lie* también se calcula recursivamente teniendo en cuenta que

$$ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$$

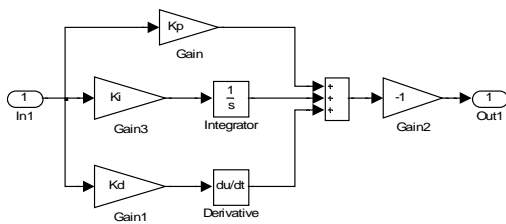
$$ad_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{i-1} \mathbf{g}] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

## Anexo II – Modelos Simulink

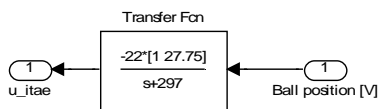
### - Modelo Maglev



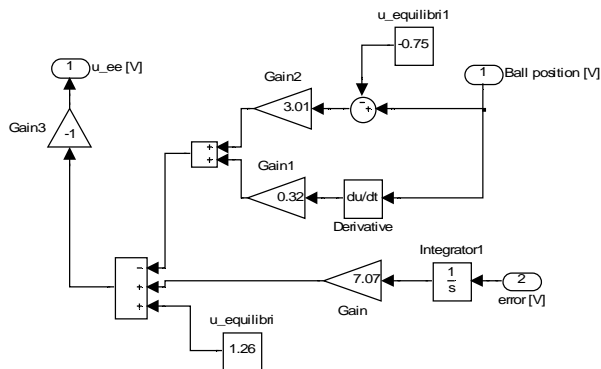
### - Modelo controlador PID



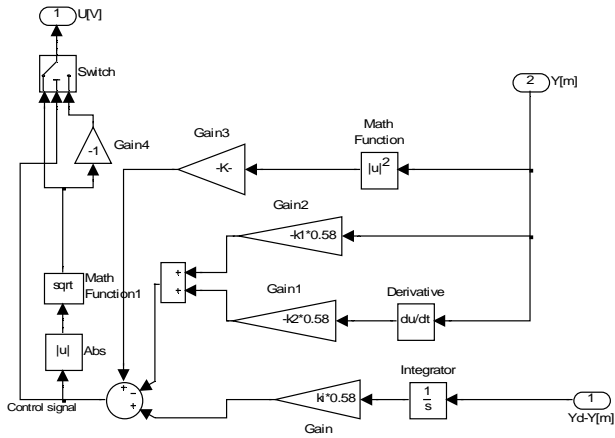
### - Modelo ITAE óptimo



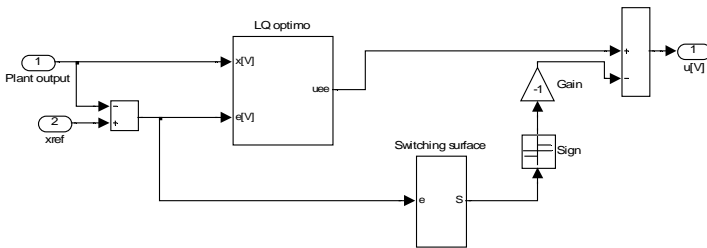
### - Modelo LQ óptimo



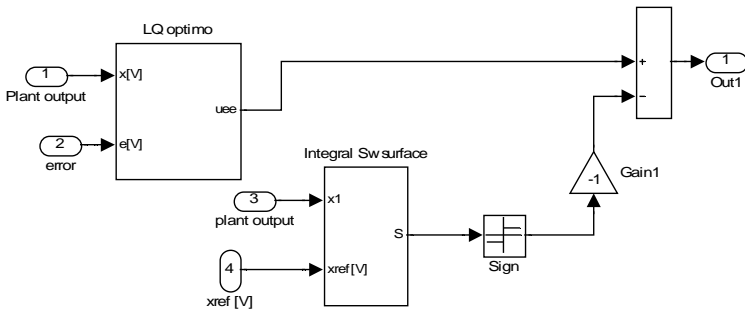
- **Modelo LE modificado**



- **Modelo SSM modificado**



- **Modelo ISM modificado**





## Anexo III – Artículo jornadas automática Jaén

### PRÁCTICAS DE CONTROL PRESENCIALES Y REMOTAS CON LEVITADOR MAGNÉTICO

Juan Carlos Milena

Dpt. Teoría de la Señal y Comunicaciones, UPC, jmil5678@alu-etsetb.upc.edu

Rosa M<sup>a</sup> Fernández-Cantí

Dpt. Teoría de la Señal y Comunicaciones, UPC, rfernandez@tsc.upc.edu

Sergio Zarza Sánchez

Dpt. Teoría de la Señal y Comunicaciones, UPC, szarza@tsc.upc.edu

Tery Caisaguano Vásquez

Dpt. Teoría de la Señal y Comunicaciones, UPC, tery.caisaguano@estudiant.upc.edu

#### Resumen

*En este trabajo se ilustra la versatilidad de un levitador magnético, no lineal e inestable, en la enseñanza de la teoría de control a distintos niveles y tanto en formato presencial como remoto. En concreto se presentan las prácticas presenciales de control clásico para estudiantes de grado y los experimentos de control moderno y no lineal propuestos para cursos de control avanzado. Asimismo, se describen las acciones que se han realizado para la adaptación de las prácticas a un entorno de laboratorio remoto, consistentes en modificar la planta a fin de evitar la caída definitiva de la bola o su contacto permanente con el imán, y el diseño de la interfaz de comunicación.*

**Palabras Clave:** Levitador magnético, control clásico, control no lineal, laboratorio remoto

## 1 INTRODUCCIÓN

El levitador magnético (MagLev) de la Figura 26 constituye uno de los experimentos de control más interesantes y valorados por los estudiantes. El interés radica en que se trata de una planta no lineal e inestable cuyo modelo analítico pueden obtener fácilmente los estudiantes de un curso de grado. A partir del modelo linealizado, el proceso de diseño del controlador lineal ilustra de manera práctica y efectiva los conceptos más importantes vistos en clase: algoritmos de control PID (Proporcional-Integral-Derivativo), el diseño mediante el LGR (Lugar Geométrico de las Raíces) de Evans o el diseño de un control óptimo ITAE (*Integral Time Absolute Error*) mediante la solución de la ecuación diofántica. Los estudiantes diseñan sus controladores en casa y los prueban en el laboratorio. A la vista del comportamiento de la bola, se establece un diálogo muy estimulante entre los estudiantes presentes y, como consecuencia, ellos mismos ven cómo son capaces de ajustar razonadamente sus diseños hasta conseguir el comportamiento deseado. En el repositorio de material docente del CEA (Comité Español de Automática) es posible encontrar otras prácticas realizadas con este mismo equipo en otras universidades, ver por ejemplo [].

En un segundo nivel de dificultad, el MagLev es una planta idónea para los trabajos de investigación realizados por los estudiantes de proyecto final de carrera y en las prácticas de los cursos de control de posgrado y doctorado. En estos experimentos los estudiantes pueden abordar el estudio de estrategias de control avanzado tales como el control robusto, el control *fuzzy* o el control mediante redes neuronales; y estrategias de control no lineal como la linealización exacta por retroacción, modos deslizantes o control adaptativo.

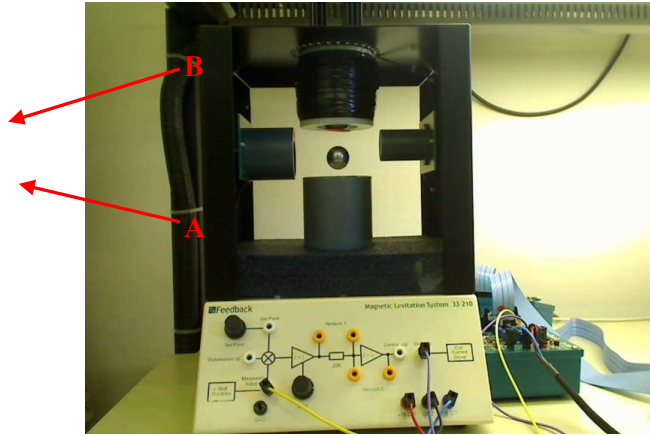


Figura 26: Levitador magnético docente de *Feedback Instruments Ltd.* con los ajustes necesarios (A, B) para la realización de prácticas remotas

Finalmente, y dentro del marco del EEES (Espacio Europeo de Educación Superior), se ha visto la necesidad de adaptar el equipo para la realización de prácticas remotas optando así por un modelo mixto que combina la presencialidad con la posibilidad de realizar los experimentos a distancia [1], [2], [3], [4], [5]. Sin embargo, a diferencia de la planta magnética de [6], consistente en un disco guiado, el levitador de la Figura 26 presenta una dificultad fundamental: cuando el sistema se desestabiliza, la bola o bien cae o bien se queda pegada al electroimán, con lo que el experimento finaliza y la bola no queda en la posición necesaria para iniciar un nuevo experimento. Para resolver este problema hemos diseñado e implementado unos elementos que, cuando esto ocurre, sitúan de nuevo a la bola cerca del punto de operación lineal (ver A y B en Figura 26). Estos ajustes se han revelado muy interesantes también a la hora de realizar los experimentos presenciales ya que hacen más robusto el comportamiento de la planta, sobre todo en los instantes iniciales del experimento.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se describe la planta y se resume el diseño de los controladores clásicos con los que trabajan los estudiantes de grado. En la Sección 3 se presentan algunas de las estrategias de control que se están ensayando como parte de un proyecto final de carrera. En la Sección 4 se describen las acciones que se han tomado para adaptar los experimentos al entorno de laboratorio remoto, ilustrando la mejora obtenida gracias a los ajustes implementados. En todas estas secciones se presentan resultados experimentales. Finalmente en la Sección 5 se extraen unas conclusiones y se valora el grado de satisfacción de los estudiantes.

## 2 CONTROL CLÁSICO

### 2.1 EL PROBLEMA

#### 2.1.1 Objetivo del control

El objetivo es situar la bola a una distancia del electroimán tal que la fuerza magnética anule la fuerza de la gravedad, consiguiendo así el efecto de levitación. Sin embargo, si la bola está demasiado lejos del imán, entonces el campo magnético es demasiado débil y la bola cae. Si la bola está demasiado cerca del imán, el campo magnético es demasiado fuerte y la bola queda pegada al imán. Vemos pues que estamos ante una planta que se puede desestabilizar fácilmente.

#### 2.1.2 Ecuaciones del MagLev

La planta es el levitador magnético de Feedback Instruments, Ltd., modelo 33-210 [7]. La fuerza magnética la genera el electroimán y es función de la tensión  $v(t)$  aplicada a la bobina. La altura  $h(t)$  de la bola se mide mediante un sensor óptico cuya sensibilidad es  $k_s$ .

Las ecuaciones que describen la dinámica de la planta vienen dadas por la segunda ley de Newton y por la ley de Kirchoff de tensión:

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = mg - k \left( \frac{i(t)}{h(t)} \right)^2 \quad (87)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t)$$

donde  $m$  es la masa de la bola,  $g$  es la constante gravitacional,  $L$  es la inductancia de la bobina,  $R$  es la resistencia de la bobina, y  $k$  es el factor de acoplamiento entre el campo magnético y la bola. La entrada a la planta  $u(t)$  es la tensión aplicada a la bobina,  $u(t) = v(t)$ , y la salida  $y(t)$  es la tensión que genera el fotosensor de posición,  $y(t) = k_s \cdot h(t)$ .

El equipo incluye un controlador interno que consigue que la corriente de la bobina sea proporcional a la tensión aplicada,  $i(t) = k_v \cdot v(t)$ . Gracias a esta relación, la dinámica de la planta se puede caracterizar con una única ecuación:

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = mg - k \cdot k_v^2 \left( \frac{v(t)}{h(t)} \right)^2 \quad (88)$$

La Tabla 15 muestra los valores numéricos de los principales parámetros.

Tabla 15: Valores de los parámetros de la planta.

Parámetro	Descripción
$m=0.02\text{Kg}$	Masa de la bola
$k_s=143.48\text{V/m}$	Sensibilidad del fotosensor
$k_v=1.05\text{A/V}$	Cte. controlador interno
$k=2.5 \times 10^{-5} \text{Nm}^2/\text{A}^2$	Cte. acoplamiento magnético
$g=9.81\text{m/s}^2$	Cte. gravitacional

### 2.1.3 Punto de operación y modelo lineal

El primer paso es decidir el punto de operación alrededor del cual obtendremos un modelo lineal de la planta. Este punto se caracteriza por el par  $(h_0, i_0)$ , o bien  $(h_0, v_0)$ , y se denomina punto de equilibrio. En él la atracción gravitatoria se iguala a la fuerza magnética atractiva. Definiendo una posición deseada  $h_0$ , la corriente  $i_0$  que se requiere para que la bola esté esa posición es

$$i_0^2 = \frac{mg}{k} h_0^2 \quad (89)$$

Conociendo el punto de equilibrio, podemos hallar un modelo lineal realizando el desarrollo en serie de Taylor alrededor de él y despreciando los términos de orden 2 y superiores. El modelo linealizado es

$$\frac{d^2 \tilde{h}(t)}{dt^2} = \frac{2g}{h_0} \tilde{h} - \frac{2gk_v}{i_0} \tilde{v} \quad (90)$$

donde  $\tilde{h} = h - h_0$  y  $\tilde{v} = v - v_0$ . La aplicación de la transformada de Laplace a la ecuación anterior nos permite obtener la función de transferencia entre las tensiones de entrada y salida,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-K_v}{s^2 - K_h} \quad (91)$$

donde  $K_v = 2gk_v^2 k_s / i_0$  y  $K_h = 2gk_v / h_0$ . Para una altura y corriente de equilibrio,  $h_0=9\text{mm}$ ,  $i_0=0.8\text{A}$ , tenemos que  $G(s) = -3691/(s^2 - 2178)$ , que corresponde a unos polos en  $\pm 46.67$ . La planta es, pues, inestable.

### 2.1.4 Configuración de control

La Figura 27 muestra la configuración de control escogida para las prácticas de grado, donde  $r$  es la señal de referencia,  $u$  la tensión que se aplica al electroimán,  $d$  son las perturbaciones sobre la posición de la bola e  $y$  el equivalente de la posición de la bola en voltios. El control se implementa digitalmente mediante el *Real Time Workshop* de Simulink/Matlab y una tarjeta Advantech PCI 1711.

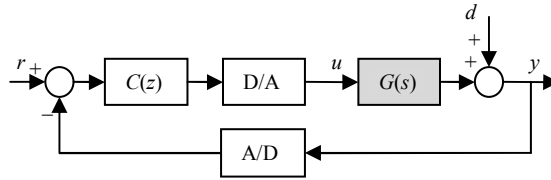


Figura 27: Configuración de control

## 2.2 CONTROL PD y PID

El controlador mínimo que puede estabilizar esta planta es un PD,  $C(s) = k_p + k_d s$ . Para su diseño, se pide a los estudiantes que sitúen el cero entre el polo estable de la planta y el origen, por ejemplo en -20, y a continuación, ajusten la ganancia mediante el Evans (ver Figura 28).

Para el diseño del PID se proponen dos técnicas diferentes. En primer lugar, diseñar un PI y ponerlo en serie con el PD diseñado anteriormente y, en segundo lugar, diseñar el PID,  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$ , según la posición deseada para los polos dominantes del servo. Puesto que la función de transferencia del servo con PID tiene tres polos, se escoge uno de los polos lejano y los dos restantes serán los dominantes.

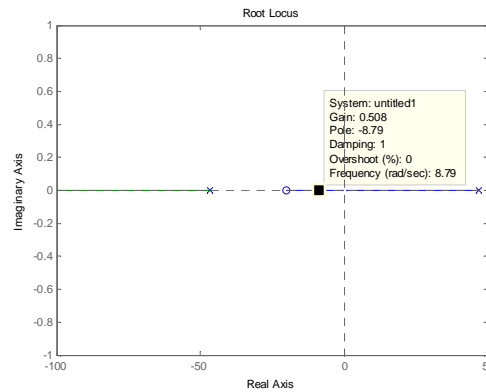


Figura 28: Control PD: Lugar Geométrico de las Raíces de Evans. Planta (inestable) y cero en -20.

La Figura 29 muestra los resultados experimentales para un PD y un PID. La consigna es una señal cuadrada de frecuencia  $f=0.15\text{Hz}$ , amplitud de pico  $A=0.4\text{V}$  y nivel de continua -1V. En los primeros 25s del experimento el controlador que está actuando es el PD. A los 25s entra en juego la acción integral, por lo que puede observarse cómo el error permanente a este tipo de señal de consigna tiende a cero. El PD escogido es  $k_p=2$ ,  $k_d=0.1$ . El PID es  $k_p=2$ ,  $k_i=1$  y  $k_d=0.1$ . El periodo de muestreo en todos los casos es  $T_s=1\text{ms}$ .

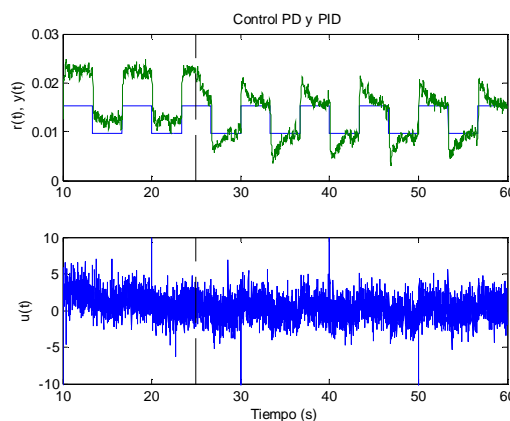


Figura 29: Seguimiento a consigna y esfuerzo de control para un PD y un PID

### 2.3 CONTROL ÓPTIMO ITAE

En este caso los estudiantes deben obtener un controlador óptimo por síntesis directa [1]. El objetivo del diseño es que la función de transferencia del servo minimice el ITAE (con error de aceleración nulo). Puesto que la planta (91) es de orden  $n=2$ , se escoge un denominador para el servo  $D_M(s)$  de orden  $2n-1=3$ ,

$$D_M(s) = s^3 + 2.97\omega_0 s^2 + 4.94\omega_0^2 s + \omega_0^3 \quad (92)$$

con  $\omega_0=100\text{rad/s}$ . El controlador resultante  $C(s) = B(s) / A(s)$  será de orden  $n-1=1$ . La solución de la ecuación diofántica

$$D_M(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) \quad (93)$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son el numerador y el denominador de la planta respectivamente, da como resultado el siguiente compensador de avance de fase:

$$C(s) = 14 \frac{s + 32}{s + 297} \quad (94)$$

cuyo comportamiento se muestra en la Figura 30. En el instante  $t=25\text{s}$  se añade acción integral al lazo mediante la inclusión de un PI ( $k_p = k_i = 1$ ) en serie con  $C(s)$ . A los estudiantes les resulta muy llamativo cómo esta respuesta es mucho más “limpia” que la obtenida con los diseños clásicos PD y PID.

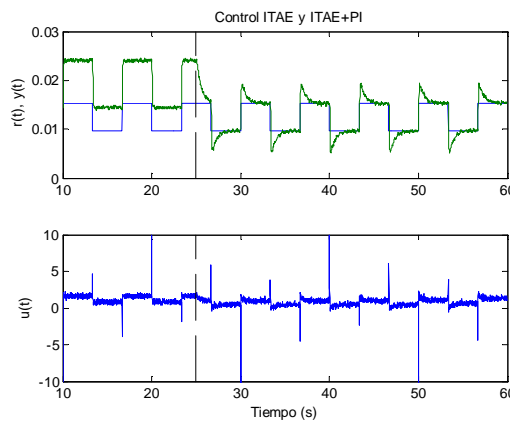


Figura 30: Seguimiento a consigna y esfuerzo de control para un controlador ITAE y un ITAE+PI

## 3 CONTROL MODERNO Y NO LINEAL

### 3.1 CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS

La representación de un sistema en el espacio de estados nos permite expresar un sistema de orden  $n$ , en  $n$  ecuaciones de orden 1 [1]. Las ecuaciones de estado del modelo linealizado del levitador, tomando  $x_1(t) = h(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{h}(t)$ , son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_h & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -K_v \end{pmatrix}}_b u \\ y &= \underbrace{(1 \quad 0)}_c \mathbf{x} \end{aligned} \quad (95)$$

En este apartado ilustraremos el comportamiento del control por retroacción del estado  $\mathbf{x}^T = (x_1 \quad x_2)$  de la planta. Como la planta no incluye ningún integrador, introducimos acción integral en el lazo definiendo un nuevo estado  $\xi = r - y$  tal y como se muestra en la Figura 31. Así, la ley de control total es:

$$u = -\mathbf{k}_x \mathbf{x} + k_i \xi \quad (96)$$

y la planta “aumentada” resultante es:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad (97)$$

$$y = (\mathbf{c} \quad 0) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix}$$

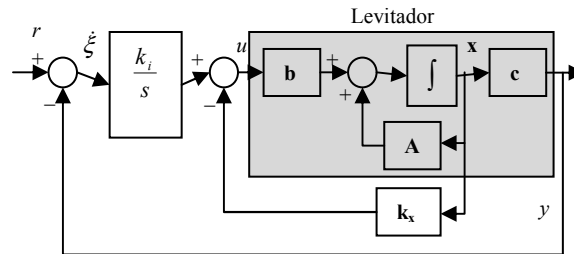


Figura 31: Retroacción de estados con acción integral

Existen diversas posibilidades para seleccionar los valores de  $\mathbf{k}_x$  y  $k_i$ . Una opción es fijar los polos del servo mediante la fórmula de Ackermann (ver apartado 3.2). Aquí se ilustra la obtención de los valores de  $\mathbf{k}_x$  y  $k_i$  que minimizan la siguiente función de coste con horizonte infinito:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \rho \cdot u^2) dt \quad (98)$$

donde la penalización del error viene dada por la matriz  $\mathbf{Q}$  y la penalización del esfuerzo de control por el factor  $\rho$ . Para el caso

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad \rho = 10 \quad (99)$$

el resultado es  $\mathbf{k}_x = (3.01 \quad 0.32)$  y  $k_i = -7.07$ .

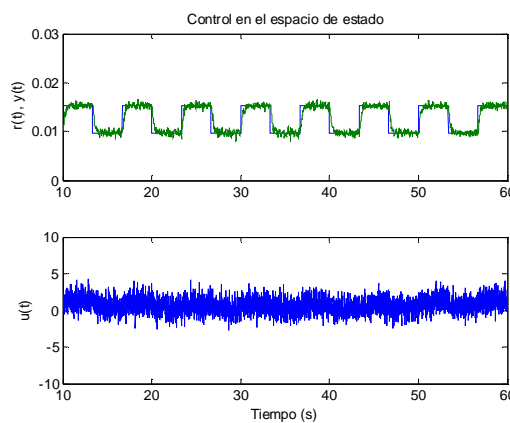


Figura 32: Seguimiento a consigna y esfuerzo de control de un regulador de estado óptimo con acción integral

### 3.2 CONTROL NO LINEAL

Existen diferentes técnicas no lineales que pueden servir para controlar el levitador magnético, siendo las de mayor interés docente la “linealización exacta”, los “modos deslizantes” y el “control adaptativo” [1]. En este apartado ilustraremos la primera de ellas.

El procedimiento es el siguiente: Se considera el sistema SISO (*Single Input Single Output*) no lineal descrito por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (100)$$

con  $f(\mathbf{x}) = g$ ,  $g(\mathbf{x}) = -\frac{k \cdot k_v^2}{m \cdot h^2}$  y  $h(\mathbf{x}) = x_1$ .

El sistema de ecuaciones (100) se dice que es linealizable para estado-entrada de forma exacta si existe una región

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , en la que existe un difeomorfismo  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$  y una ley de control no lineal

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot w \quad (101)$$

tal que las nuevas variables de estado y la nueva entrada satisfacen la siguiente relación lineal e invariante con el tiempo,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}w \quad (102)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (103)$$

El nuevo estado  $\mathbf{z}$  se denomina estado linealizado. Ahora el problema se reduce a hallar, por cualquier método lineal, la ley de control  $w$  que cumpla con nuestros requisitos para, a continuación, calcular la ley de control no lineal (101) a partir de  $w$  y  $\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\beta(\mathbf{x})$ .

La elección del difeomorfismo  $\phi(\mathbf{x})$  y de  $\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\beta(\mathbf{x})$ , se realiza mediante el álgebra de Lie (ver el procedimiento completo en []). Para el levitador bajo estudio esta elección es  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) = (x_1 \quad \dot{x}_1)$ ,  $\alpha(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$  y  $\beta(\mathbf{x}) = 1/g(\mathbf{x})$ . Las ecuaciones de estado son

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w \quad (104)$$

Añadimos acción integral al lazo mediante la definición de un nuevo estado,  $\xi = r - z_1$  y obtenemos las ganancias de controlador de forma análoga al apartado 3.1. Pero, en este caso, forzaremos los polos del servo a [-10 -15 -20] y calcularemos las ganancias mediante la fórmula de Ackermann. El resultado es  $\mathbf{k}_x = (650 \quad 45)$  y  $k_i = -3000$ . El comportamiento experimental del levitador se muestra en la Figura 33.

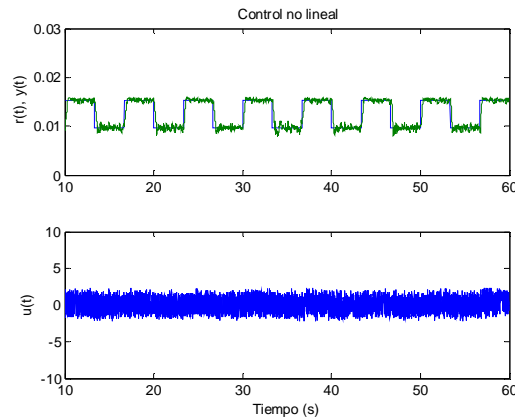


Figura 33: Seguimiento a consigna y esfuerzo de control para un controlador no lineal

## 4 ADAPTACIÓN DEL LEVITADOR AL LABORATORIO REMOTO

### 4.1 NECESIDAD E INTERÉS DEL LABORATORIO REMOTO

La posibilidad de realizar prácticas remotas se enmarca totalmente dentro de la filosofía EEES, donde el trabajo del estudiante fuera de clase es un aspecto fundamental. Desde el punto de vista educativo, reemplazar un laboratorio real por otro remoto no es solamente una cuestión de desarrollar un sistema utilizando una tecnología u otra, sino que su utilización requiere un enfoque pedagógico completamente distinto y en el cual las prácticas deben ser intuitivas y fáciles en el ámbito funcional, para que de esta manera, se pueda focalizar el aprendizaje del alumno en la parte educativa de la práctica.

La gran ventaja de poder realizar unas prácticas remotas es que nos permite sacar mayor rendimiento al material didáctico disponible del laboratorio, el cual por norma suele ser muy caro. Con estos cambios se consigue abaratar el precio a la hora de equipar los laboratorios y a su vez, ampliar el abanico de prácticas. La ganancia es sustancial, tanto en tiempo como en la variedad de prácticas que se pueden realizar. Además, los alumnos pueden realizar dichas prácticas desde cualquier lugar y en cualquier franja horaria, con tan solo disponer de conexión a Internet, lo que supone una gran flexibilidad y tener un laboratorio disponible las 24 horas los 365 días del año.

### 4.2 LA PROBLEMÁTICA DE LOS LEVITADORES DE BOLA

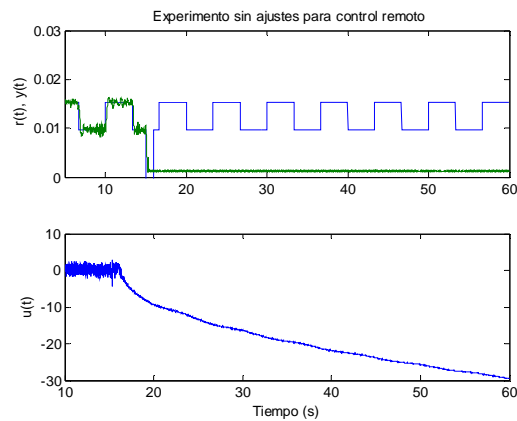
A nivel práctico, los levitadores de bola no parecen *a priori* una buena opción para un laboratorio remoto puesto que cuando el sistema de desestabiliza la bola se pierde (o se cae o queda pegada al imán). Sin embargo, los estudiantes prefieren ver una bola “flotar en el aire” antes que controlar el movimiento de subida y bajada de un disco guiado como el de []. Después de buscar y no encontrar ningún centro docente que haya realizado prácticas remotas con el equipo objeto del presente artículo, nos planteamos buscar una solución y diseñar nuestros propios ajustes a fin de ofrecer la posibilidad de trabajar remotamente.

Los problemas más graves a los que hemos tenido que dar solución son los derivados de la desestabilización del sistema: (a) el evitar que, al caer la bola, quede tan lejos del punto de operación que el sistema no pueda volver a levantarla; y (b) el conseguir que, cuando la bola entra en contacto con el imán, no se quede pegada permanentemente.

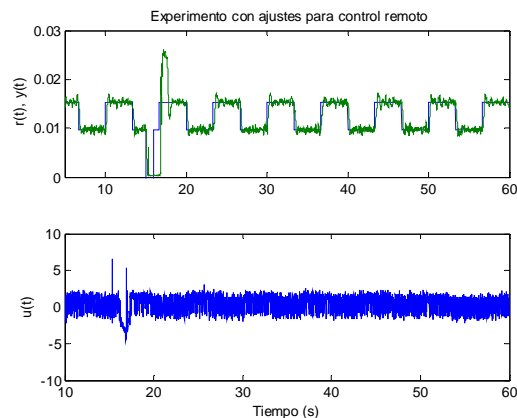
Después de probar diferentes materiales y de configurar distintas plataformas a la vez que se garantizaba que las propiedades magnéticas de la planta no se veían afectadas por las modificaciones, se ha implementado la solución mostrada en la Figura 26. Para evitar la caída de la bola fuera del alcance del campo magnético del imán se ha confeccionado la plataforma de PVC mostrada en A. Para evitar el contacto con el imán, y puesto que el equipo, por razones de protección, no permite cambiar la polaridad del mismo a fin de liberar la bola, se ha debido de adoptar una solución mecánica (ver B en Figura 26) que, sin cambiar la dinámica de la planta, impide que la bola esté atrapada arriba demasiado tiempo.

El excelente comportamiento de estos ajustes queda ilustrado en la Figura 34. Con el sistema funcionando en régimen permanente, se aplica un pulso de consigna desestabilizador de amplitud -1.5V y duración 1s en el instante 15s.





(a) Sin ajustes para control remoto



(b) Con los ajustes para control remoto

Figura 34: Recuperación de la bola en un experimento remoto “fallido”, sin y con los ajustes implementados

Vemos como en el caso sin ajustes (Figura 34(a)) la bola queda pegada al imán (y por ello su posición ya no se modifica) y, lo que es peor, a no ser que alguien quite la bola del imán ya no es posible realizar un nuevo experimento. En cambio, con los ajustes implementados (Figura 34(b)), vemos que efectivamente el sistema se ha desestabilizado pero, pasados algunos segundos, el sistema ha recuperado la bola y se puede tanto terminar el experimento en curso como realizar otros nuevos.

Finalmente, cabe comentar que estos ajustes se han revelado útiles también en los experimentos presenciales. En concreto, el hecho de que el imán recoja la bola de la plataforma y no de una mano humana hace mucho más robusto el comportamiento del sistema, sobre todo en los instantes iniciales donde, a menudo e inadvertidamente, la mano imprime un cierto momento de inercia a la bola, capaz, a veces, de desestabilizar por completo al sistema.

### 4.3 IMPLEMENTACIÓN DE LAS PRÁCTICAS REMOTAS

La comunicación remota con la planta supone (a) poder descargar el algoritmo de control al levitador, (b) poder iniciar y finalizar el experimento, y (c) poder monitorizar el comportamiento, no sólo mediante la recepción de los datos de tensión (de entrada y salida) sino también visualmente por medio de una cámara.

Tal y como se ha comentado en el apartado 4.1 es fundamental que el entorno sea sencillo y amigable para el usuario. Por ello las pantallas contienen la información imprescindible, ni más ni menos, para seleccionar el algoritmo de control y ajustar sus parámetros (ver Figura 35).

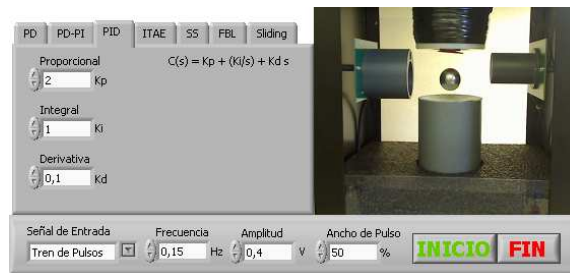


Figura 35: Pantalla de acceso a los diversos algoritmos de control y sintonización de los parámetros

En estos momentos se está llevando a cabo la fase de desarrollo de la interfaz para las prácticas remotas las cuales entrarán en funcionamiento en el curso 2010/2011 en la ETSETB (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de Barcelona). En un primer momento serán accesibles desde la red de área local del departamento pero está previsto que, a final de curso ya sean accesibles desde la página web del grupo de Sistemas Electrónicos de Control, [www.control.upc.edu](http://www.control.upc.edu).

## 5 CONCLUSIONES

El levitador magnético de suspensión de bola de FEEDBACK se revela como una planta muy versátil en la enseñanza de la teoría de control, tanto clásica como avanzada y tanto en formato presencial como remoto. Las prácticas y proyectos que pueden llevarse a cabo con él son muy variados y abarcan multitud de aspectos de la teoría de control. A fin de poder adaptar las prácticas a un entorno de experimentación remoto hemos tenido que realizar unos ajustes en el equipo original. Con estos ajustes hemos conseguido que, aunque el experimento remoto resulte fallido, la bola quede situada rápidamente en posición de volver a iniciar otro experimento.

Nuestra experiencia con los estudiantes es muy positiva, siendo el levitador uno de los equipos de prácticas más valorados. Además, una vez realizadas las prácticas presenciales, la posibilidad de realizar experimentos remotos adicionales les puede animar a probar otras estrategias de control y a ser más atrevidos en sus diseños al no estar el profesor presente.

### Agradecimientos

Nuestro más sincero agradecimiento a Josep Ramon Casas quien, en su cargo de subdirector de infraestructuras y laboratorios del departamento de TSC, aprobó la adquisición de este equipamiento por parte del grupo de Sistemas Electrónicos de Control.

### Referencias


- [1] Aliane, N., (2008) “Limitaciones Pedagógicas de los Laboratorios Remotos de Control”, XXIX Jornadas de Automática, CEA-IFAC.
- [2] Casini, M., D. Prattichizzo, A. Vicino, (2003), “The Automatic Control Telelab: A User-Friendly Interface for Distance Learning”, *IEEE Trans. on Education*, 46(2).
- [3] Chen, C.-T., (1993), *Analog and Digital Control System Design. Transfer Function, State-Space, and Algebraic Methods*, Saunders College Publishing.
- [4] Dormido, S., (2004), “Control Learning: Present and Future”, *Annual Review in Control*, 18(1), pp.115-136.
- [5] Guzmán, J.L., F. Rodríguez, M. Berenguel, S. Dormido, (2005), “Laboratorio Virtual para la Enseñanza de Control Climático de Invernaderos”, *RIAI*, 2(2), pp. 82-92.
- [6] Laboratorio 4 Sistemas: Levitación Magnética. Prácticas de la asignatura de Teoría de Circuitos y Sistemas, de 2º curso de Ingeniería Industrial. Universidad Miguel Hernández. (<http://www.cea-ifac.es/w3grupos/educontrol/>)
- [7] *Magnetic Levitation Installation & Commissioning*, 33-9421C, Feedback Instruments Ltd., 2006.
- [8] Ogata K., (1997), *Modern Control Engineering*, 3ª ed., Prentice Hall.

- [9] Santana, I., M. Ferre, L. Hernández, R. Aracil, Y. Rodríguez, E. Pinto, (2010), “Aplicación del Sistema de Laboratorios a Distancia en Asignaturas de Regulación Automática”, *RIAI*, 7(1), pp.46-53.
- [10] Slotine, J.-J. E., W. Li, (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.

## Anexo IV – Práctica Final de la asignatura SEC

### Práctica 6. Control de un levitador magnético

Asignatura: Sistemas Electrónicos de Control  
 Curso: 2009/2010-2  
 Realización: D4-211, 28/5/10 (g12 y g17), 18h-20h

Nota: Para la realización de la práctica es imprescindible traer el estudio previo hecho individualmente. El estudio previo consiste en resolver los ejercicios marcados con el símbolo  y se recogerá a final de la sesión.

#### 1. Modelo de la planta

Considerar el sistema de suspensión magnética de la figura 1.

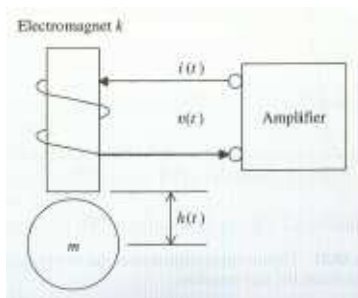


Fig1. Esquema planta.

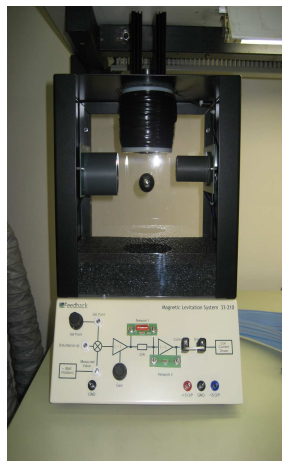


Fig 2. Fotografía planta real.

Ref.: B. Friedland, *Advanced Control System Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996. Magrab, 2005

El objetivo es mantener la bola flotando a una altura deseada aunque existan perturbaciones externas. La altura de la bola es  $h(t)$ , y la corriente en la bobina  $i(t)$ . Las ecuaciones que describen la dinámica de este sistema vienen dadas por la segunda ley de Newton y por la ley de Kirchhoff:

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = mg - k \left( \frac{i(t)}{h(t)} \right)^2$$

$$L \frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t)$$

donde  $m$  es la masa de la bola,  $g$  es la constante gravitacional,  $L$  es la inductancia de la bobina,  $R$  es la resistencia de la bobina, y  $k$  es el factor de acoplamiento entre los campos magnéticos y la bola.

La entrada al sistema es la tensión aplicada a la bobina y la salida medida es la altura de la pelota  $h(t)$ . Las ecuaciones son no lineales.

Los campos magnéticos son más fuertes cuanto más cerca está la bola del electroimán, lo que tiende a desestabilizar el sistema. Idealmente, la bola se encuentra lo suficientemente lejos para que la fuerza magnética anule la fuerza de gravedad. Si la bola está demasiado lejos del imán, entonces el campo magnético es más débil y la bola cae. Si la bola está demasiado cerca del imán, el campo magnético es más fuerte y la bola queda pegada al imán.

El primer paso es calcular el punto donde la atracción gravitatoria es igual a la fuerza magnética atractiva. Este punto se denomina punto de equilibrio. Teniendo en cuenta una posición deseada  $h_0$ , la corriente que se requiere para mantener esa posición puede ser calculada haciendo la aceleración igual a cero. Por lo tanto,

$$i_0^2 = \frac{mg}{k} h_0^2$$

Conociendo el punto de equilibrio, podemos hallar un modelo lineal alrededor de él mediante el desarrollo en series de Taylor.

Recordatorio series de Taylor.

$$z = f(x, y)$$

$$z \approx f(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \right] + \dots$$

Para esta planta no tomaremos en consideración las derivadas de segundo orden o superior. Esta linealización simplifica las ecuaciones.

En esta planta vamos a realizar un control en lazo cerrado, tal y como muestra la figura 3.

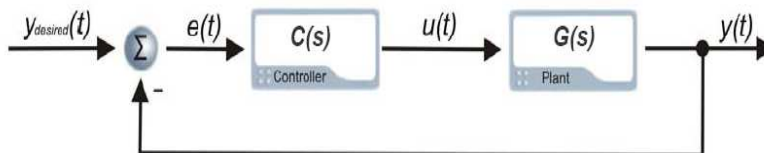


Figura 3.

Para ello nuestro objetivo será realizar el diseño del controlador necesario para que la bola metálica siga el movimiento indicado por la entrada ( $y_{desired}$ ). La salida de nuestro controlador será la señal de esfuerzo de control ( $u(t)$ ), que a su vez, es la entrada a la planta. La salida de la planta nos vendrá determinada por un fotosensor de posición mediante infrarojos. Este sensor nos ofrecerá un valor de tensión ( $y(t)$ ) dependiendo de la posición de la bola metálica ( $h(t)$ ) y sigue esta ecuación lineal (dentro del rango en el que vamos a trabajar).

$$\Delta y = k_s \cdot \Delta h$$

**Ejercicio 1. Ecuaciones de estado de la planta.** Suponer que definimos las siguientes variables de estado:  $x_1=h$ ,  $x_2 = \frac{dh}{dt}$ ,  $x_3=i$ . Se pide:

- Obtener las ecuaciones de estado de la planta.

**Ejercicio 2. Función de transferencia de la planta.** Para simplificar el estudio de la planta aproximaremos, de aquí en adelante, que la corriente que pasa por la bobina, y que por tanto genera la fuerza electromagnética es proporcional a la tensión aplicada en la planta.

$$i = k_v \cdot u$$

- 1) Calcular la función de transferencia del sistema linealizado.  $L(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)}$
- 2) Calcular los polos de la planta. ¿es estable?

**Datos:** Masa de la bola  $m=0.02\text{Kg}$ , constante gravitacional  $g=9.81\text{m/s}^2$ , constante de acoplamiento magnético  $k=0.000025\text{Nm}^2/\text{A}^2$ . Altura equilibrio  $h_0=0.009\text{m}$ . Corriente equilibrio  $i_0=0.8\text{A}$ . Factor conversión del fotosensor  $k_s=143.48$ .

**Ejercicio 3. Control PD.** A fin de estabilizar el sistema se propone añadir un cero con, por ejemplo, un control PD:

$$C_1(s) = k_p + sk_d = k_p \cdot \left(1 + \frac{k_d}{k_p} \cdot s\right)$$

Colocaremos el cero en  $-20$  ( $\frac{k_d}{k_p} = -\frac{1}{0.05}$ ).

Se pide:

- Representar el LGR del lazo y seleccionar una ganancia  $k_p$  que estabilice al sistema.
- Representar la respuesta indicial resultante.

**Ejercicio 4. Compensador de avance.** Utilizar un controlador PD implica realizar la derivada de la entrada, pero ello es difícil de realizar debido al ruido de alta frecuencia. Típicamente la derivada es aproximada y después filtrada a fin de eliminar el ruido, resultando:

$$C_1(s) = k_p + k_d \frac{s}{\tau_f s + 1} = k_p \frac{(\tau_f s + k_d / k_p) s + 1}{\tau_f s + 1}$$

Esta función de transferencia es equivalente a un compensador de avance (puesto que el cero es siempre más lento que el polo).

Para encontrar los valores de  $A_0, A_1, B_0, B_1$  utilizaremos la ecuación diofántica.

Se pide:

- Buscar los valores de  $A_0, A_1, B_0, B_1$  para la DM propuesta.
- Representar la respuesta indicial resultante.

**Ejercicio 5. Control PI.** El control PD y el compensador de fase estabilizan y conforman el transitorio, pero si queremos eliminar el offset necesitamos acción integral. Considerar ahora el siguiente controlador:

$$C_2(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

donde  $k_p=k_i=1$ . Se pide:

Poner este controlador en cascada con los anteriores y representar el nuevo LGR.

Representar la respuesta indicial del sistema resultante (tomar la kc del ejercicio anterior)

**Ejercicio 6. Simulación de la planta no lineal.** Simular el comportamiento del controlador anterior sobre la planta no lineal con ayuda del simulink. Utilizaremos el fichero “*Maglev\_PID\_Nonlinmodel.mdl*”. En caso de ser necesario, sintonizar los valores  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  del PID para obtener un comportamiento aceptable.

**Ejercicio 7. Simulación con la planta real.**

Disponemos en el laboratorio de un Levitador Magnético del fabricante Feedback en el que podremos comprobar el funcionamiento de los controladores PID diseñados en los anteriores ejercicios. El Maglev (**M**agnetic **L**evitator) será controlado en tiempo real mediante una tarjeta de adquisición de datos de Advantech y el paquete RTW (Real Time Workshop) de Matlab.

En primer lugar debemos clicar sobre el icono *Maglev Simulink Models* (aparece en el Escritorio), este icono nos abrirá Simulink y aparecerá una ventana de selección (figura 3). En esta ventana debemos escoger la opción *Maglev Real-Time Models* (figura 4) y en la nueva ventana (figura 5) seleccionamos *Maglev\_PID*.

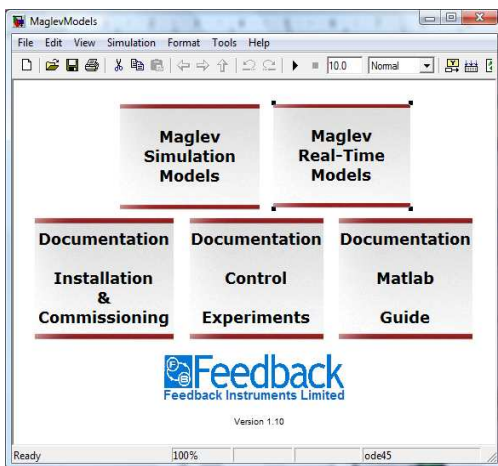


Figura 3.

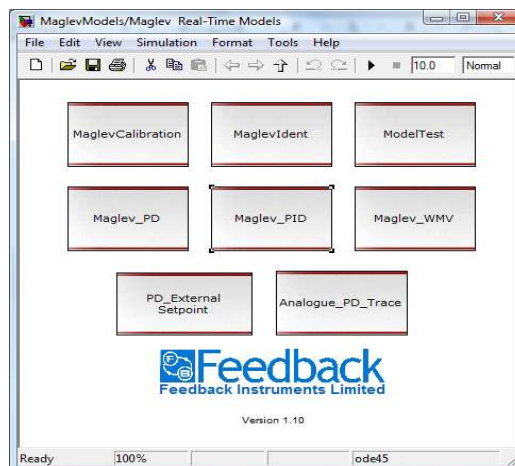


Figura 4.

Aparecerá el modelo de la figura 6, en él podemos observar dos bloques que nos enlazan en tiempo real con la tarjeta de adquisición de datos, el primero (Feedback ADC Ch1) nos ofrece señal de salida de la planta ( $y(t)$ ), y el segundo (Feedback DAC Ch1) introduce la señal de control en la planta ( $u(t)$ ), las señales  $y(t)$  e  $u(t)$  siguen la notación de la figura 7. Los bloques Step, Sinus, Square son las señales de entrada en la planta que utilizaremos como referencia para comprobar el correcto funcionamiento del controlador. Existen dos bloques Converter que se utilizan para realizar la





## Referencias

- [ 1 ] Bandal V.S., (2009), A New Approach to a Sliding Mode Controller design for a Magnetic Levitation System, Asia-Pacific Conf. On Computational Intelligence and Industrial Applications, pp 326-329.
- [ 2 ] Barie W., (1996), Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation, Int. Journal of Systems Science, 27(11), pp 1153-1163.
- [ 3 ] Chen, C.-T., (1993), Analog and Digital Control System Design. Transfer Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing.
- [ 4 ] Dan C. et al., (1993), Sliding Mode and Classical Control for Magnetic Levitation System, IEEE control Systems.
- [ 5 ] DeCarlo R.A et al., (1988), Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A tutorial, Proc. of the IEEE, 76(3), pp 212-232
- [ 6 ] El Hajjaji A., (2001), Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation Systems, IEEE Trans. on Industrial Electronics, 48(4), pp 831-838.
- [ 7 ] Filho M.R. et al., (2001), A Design Methodology of Tracking Controllers for Magnetic Levitation Systems, IEEE Int. Conf. on Control and Applications, pp 47-51.
- [ 8 ] Golob M., (2003), Modeling and control of the magnetic suspension system, ISA Transactions, 42, pp 89-100.
- [ 9 ] Jalili-Kharaajo M. et al., (2003), Sliding mode control of voltage-controlled magnetic levitation system, IEEE.
- [ 10 ] Munaro C.J. et al., (2002), Modeling and Observed-Based Nonlinear Control for a Magnetic Levitation System, IEEE Int. Conf. on Control Applications.
- [ 11 ] Palis S., (2007), Nonlinear adaptive control of magnetic bearings, IEEE.
- [ 12 ] Ogata K., (1997), Modern Control Engineering, 3<sup>a</sup> ed., Prentice Hall.
- [ 13 ] Samiappan C. et al., (2008), Maglev Apparatus for Power Minimization and Control of Artificial Hearts, IEEE Trans. on Control Systems Tech., 16(1), pp 13-18.
- [ 14 ] Shen J-C, (2002), H $\infty$  Control and Sliding Mode Control of Magnetic Levitation System, Asian Journal of Control, 4(3), pp 333-340.
- [ 15 ] Slotine, J.-J. E., W. Li, (1991), Applied Nonlinear Control, Prentice Hall.
- [ 16 ] Sun Z.G. et al., (2009), Integral Sliding Mode Control with Integral Switching Gain for Magnetic Levitation Apparatus, Int. Conf. on Power Elect. Sys. and Applications.
- [ 17 ] Utkin V., (1996), Integral Sliding Mode in Systems Operating under Uncertainty Conditions, Proc. Of the 35th conf. on Decision and Control, pp 4591-4596.
- [ 18 ] Xinghuo Y., (2009), Sliding-Mode Control With Soft Computing: A Survey, IEEE Trans. on Ind. Elec., 56(9), pp 3275-3285.