



HEAVEN AND HELL TILINGS

**Andreas W. M. Dress &
Daniel H. Huson**

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld 1
Germany

ABSTRACT

The method of Delaney symbols is used to classify by a computer program all periodic tilings of the Euclidean plane up to equivariant homeomorphisms for which the tiles can be coloured by black and white such that tiles sharing an edge have different colours, the symmetry group acts transitively on the black tiles, every tile has at least three edges and from every vertex at least three edges originate. ...

As many other papers concerning periodic tilings the following note was inspired by the ingenious examples of such tilings which can be found in the graphic work of M.C. Escher. More precisely, it continues the analysis of a certain class of such tilings — the Heaven and Hell tilings — which has begun in [6] and which is based on the general theory of tilings explained in [10]. According to [6] a Heaven and Hell tiling T is a periodic tiling of the Euclidean plane E^2 , whose (2-dimensional) tiles or faces are coloured by either black or white, such that — as in the case of the famous Heaven and Hell tiling, designed by M.C. Escher (**Figure 1**) — the following conditions hold:

- (i) tiles of the same colour never share an edge;
- (ii) the symmetry group $\Gamma = \Gamma_T$ of T acts transitively on black tiles;
- (iii) Γ acts also transitively on the white tiles;
- (iv) each tile has at least three edges;
- (v) from each vertex at least three edges originate.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond



LES PAVAGES D'ANGES ET DE DIABLES

RÉSUMÉ

On utilise la méthode des symboles de Delaney pour classifier à l'aide de l'ordinateur, à homéomorphisme équivariant près, tous les pavages périodiques du plan dont les pavés peuvent être coloriés de noir et de blanc de telle manière que les pavés se partageant une arête soient de couleurs différentes, que le groupe de symétrie agisse de façon transitive sur les pavés noirs, que tout pavé possède au moins trois arêtes et que de chaque sommet soient issues au moins trois arêtes. ...

Comme plusieurs autres articles sur les pavages périodiques, celui-ci s'inspire des ingénieux exemples de tels pavages qu'on trouve dans l'oeuvre graphique de M.C. Escher. Plus exactement, on y poursuit l'analyse d'une certaine classe de pavages, les pavages d'anges et de diables. Cette étude avait débuté dans [6] et se fondait sur la théorie générale des pavages exposée dans [10]. Selon [6], un pavage d'anges et de diables T est un pavage périodique du plan euclidien E^2 , dont les pavés ou les faces (bidimensionnelles) sont coloriés de noir ou de blanc, de telle façon que — comme c'est le cas pour les célèbres pavages d'anges et de diables créés par M.C. Escher (**figure 1**) — les conditions suivantes soient respectées :

- (i) des pavés de même couleur ne se partagent jamais une arête ;
- (ii) le groupe de symétrie $\Gamma = \Gamma_T$ de T agit de façon transitive sur les pavés noirs ;

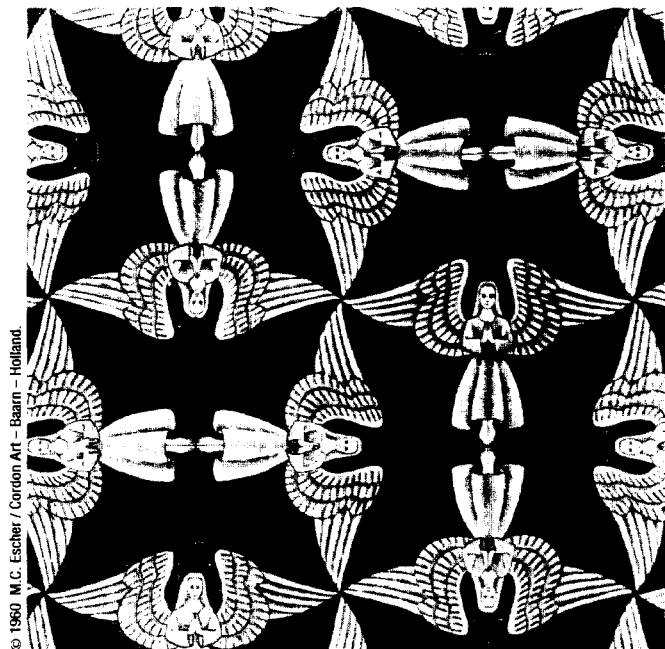


FIGURE 1

M.C. Escher, Heaven and Hell, 1960.

M.C. Escher, Étude d'un remplissage périodique d'un plan avec des anges et des diables (1960).

In [6] a complete list of precisely 37 types of such tilings (up to equivariant homeomorphisms) and an additional complete list of 20 further tilings, satisfying (i), (ii), (iii) and (v), but not (iv), was given. From the list of the 37 types it followed immediately that there were precisely 5 "maximal ones", i.e. those for which the symmetry group realized the full combinatorial automorphism group, while the remaining ones could be described as tilings derived by specific ways of symmetry breaking from the maximal ones.

In this note we want to describe how to obtain a complete list of all types of periodic tilings satisfying (i), (ii), (iv) and (v), but not necessarily (iii). As already indicated in [6], there can only be a finite number of types of such tilings and, with the aid of a computer program (cf. [18] or [13] for details) based on

the symbolism described below, one can derive a complete list of altogether 117 different types (cf. **Table 1**). Exactly 23 of these consist of maximal tilings and realizations of them are given in **Figure 2**.

In addition, we'll give a recipe of how to derive realizations of the remaining ones by applying the mechanism of "symmetry-breaking" to the symbols produced by our computer programs.

Hence we start by explaining this symbolism. It associates to any periodic tessellation T of the plane \mathbb{E}^2 (or of any other simply connected n -dimensional manifold, X^n) with symmetry group Γ (or discrete group Γ of homeomorphisms of X^n) a unique symbol, its so-called "Delaney symbol" (\mathcal{D}, M) . This symbol consists of a set \mathcal{D} on which three (or $n+1$) involutions act in a well defined way (and which is finite if and only if the orbit space $\Gamma \backslash X^n$ is compact), and a map $M: \mathcal{D} \rightarrow (\mathbb{N})_{3 \times 3}$ (or $(\mathbb{N}_0)_{(n+1) \times (n+1)}$) from \mathcal{D} into the set of 3×3 -matrices (or $(n+1) \times (n+1)$ -matrices) with entries from \mathbb{N} (or \mathbb{N}_0). Not every such pair (\mathcal{D}, M) will be the Delaney symbol of a tiling; on the contrary, to be eligible for actually coding a tiling it must satisfy a number of compatibility conditions. But at least, if it encodes a

- (iii) Γ agit aussi de façon transitive sur les pavés blancs ;
- (iv) chaque pavé possède au moins trois arêtes ;
- (v) au moins trois arêtes sont issues de chaque sommet.

On donnait dans [6] une liste complète d'exactly 37 types de tels pavages (à homéomorphisme équivariant près) ; on y donnait aussi une liste complète de 20 autres pavages satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii) et (v), mais ne satisfaisant pas la condition (iv). À l'examen de la liste des 37 types, il apparaissait immédiatement qu'il existait exactement 5 types « maximaux », c'est-à-dire ceux pour lesquels le groupe de symétrie réalisait le groupe d'automorphisme combinatoire complet, les autres types pouvant être décrits comme des pavages dérivés de manières spécifiques par des coupures de symétrie dans les types maximaux.

Dans cet article, nous voulons montrer comment dresser une liste complète de tous les types de pavages périodiques satisfaisant (i), (ii), (iv) et (v), mais pas nécessairement (iii). Comme c'était déjà noté dans [6], il ne peut y avoir qu'un nombre fini de tels pavages et, à l'aide d'un programme d'ordinateur (voir [18] ou [13] pour plus de détails) fondé sur la notation décrite plus loin, on peut déduire une liste complète des 117 types de pavages en question (cf. **tableau 1**). De ceux-là, 23 sont maximaux et la **figure 2** montre leur réalisation.

De plus, nous donnerons une recette pour déduire des réalisations des autres types de pavages par des mécanismes appropriés de « bris de symétrie » appliqués aux symboles produits par nos programmes d'ordinateur.

Nous débuterons donc par une explication de ce symbolism. On associe à tout pavage T du plan \mathbb{E}^2 (ou de tout autre variété simplement connexe de dimension n , X^n) de groupe de symétrie Γ (ou de groupe discret Γ des homéomorphismes de X^n) un symbole unique, son « symbole de Delaney » (\mathcal{D}, M) . Ce symbole est constitué d'un ensemble \mathcal{D} sur lequel trois (ou $n+1$) involutions agissent de manière bien définie (et lequel est fini si et seulement si l'espace des orbites $\Gamma \backslash X^n$ est compact), et une application $M: \mathcal{D} \rightarrow (\mathbb{N})_{3 \times 3}$ (ou $(\mathbb{N}_0)_{(n+1) \times (n+1)}$) de \mathcal{D} sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 (ou les matrices carrées d'ordre $(n+1)$) d'éléments dans \mathbb{N} (ou \mathbb{N}_0). Toutes les paires (\mathcal{D}, M) ne seront pas le symbole de Delaney d'un

tiling, this tiling will be determined by the pair (\mathcal{D}, M) uniquely up to equivariant homeomorphisms.

Since the theory of Delaney symbols has been explained in some detail already in a number of papers (cf. [6], [7], [8], [10], [11], [12], and [3]) we will restrict ourselves in this note to just illustrating the method by a particular example.

To this end let us consider the tiling HH5 from **Figure 2**. In **Figure 3a** the edges of the tiling are drawn in an enlarged scale together with a barycentric subdivision. Such a subdivision is constructed by choosing one point somewhere in the middle of each edge and one point somewhere in the middle of each tile or face of the tiling. Then one connects by additional edges in a non-intersecting way the chosen point inside a given face with the vertices and the chosen points along the edges of this face. To keep track of the kind of points which are connected by the new edges, the edges connecting face midpoints with vertices are drawn by a broken line (---) while the edges connecting face midpoints with edge midpoints are drawn by a dotted line (.....). The result is a proper triangulation such that any of its triangles has precisely three types of edges, an unbroken edge (—), a broken edge (---) and a dotted edge (.....). Moreover, it is no problem to construct the barycentric subdivision in an equivariant fashion so that the symmetry group Γ of the original tiling still acts as a group of symmetries on its barycentric subdivision. In this case Γ will act as group of permutations on the set \mathcal{C} of triangles of the barycentric subdivision. Actually, Γ will act freely on \mathcal{C} .

We let $\mathcal{D} := \Gamma \backslash \mathcal{C}$ denote the set of Γ -orbits of Γ on \mathcal{C} . If two triangles C_1 and C_2 in \mathcal{C} are in the same Γ -orbit, say $C_1 = \gamma C_2$ for some $\gamma \in \Gamma$, and if for $i = 1, 2$ and for $j = 0, 1, 2$ we denote by $C_i \sigma_j$ the unique triangle in $\mathcal{C} - \{C_i\}$ which shares with C_i its dotted ($j=0$), broken ($j=1$) or unbroken ($j=2$) edge, then $(C_i \sigma_j) \sigma_j = C_i$ and $\gamma(C_2 \sigma_j) = (\gamma C_2) \sigma_j = C_1 \sigma_j$. Hence for $j = 0, 1, 2$, the "pasting operators" σ_j act in a well defined way as involutions on \mathcal{C} and on $\mathcal{D} = \Gamma \backslash \mathcal{C}$. Finally, for $D = \Gamma C \in \mathcal{D} = \Gamma \backslash \mathcal{C}$ we define $M(D) = (m_{ij}(D))_{i,j=0,1,2}$ by $m_{ij}(D) := \min\{r \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \mid C(\sigma_r \sigma_j)^r = C\}$, thus completing the definition of the Delaney symbol. In the particular case, depicted in **Figure 3b**, we have numbered the Γ -orbits in \mathcal{C} by 1, 2, 3, 4.

pavage ; au contraire, pour être éligible à la codification réelle d'un pavage, une paire doit satisfaire un certain nombre de conditions de compatibilité. Mais au moins, si elle représente un pavage, ce pavage est déterminé de façon unique, à homéomorphisme équivariant près, par la paire (\mathcal{D}, M) .

Puisqu'on retrouve dans plusieurs articles (cf. [6], [7], [8], [10], [11], [12], et [3]) une présentation détaillée de la théorie des symboles de Delaney, nous nous limiterons ici à une illustration de la méthode par un exemple particulier.

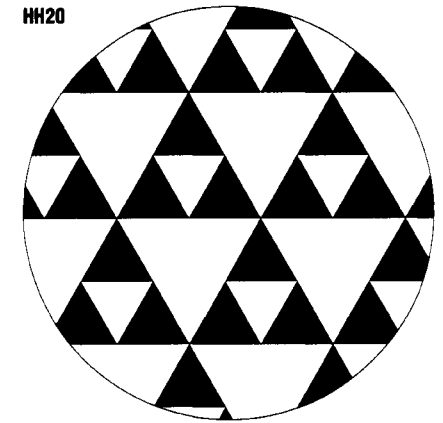
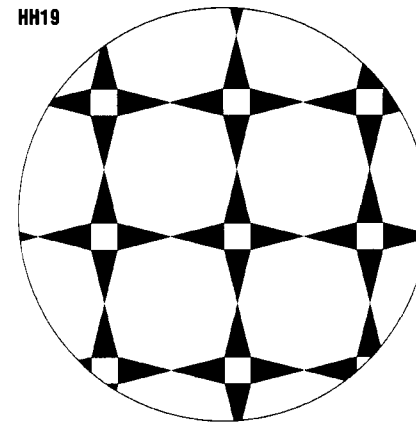
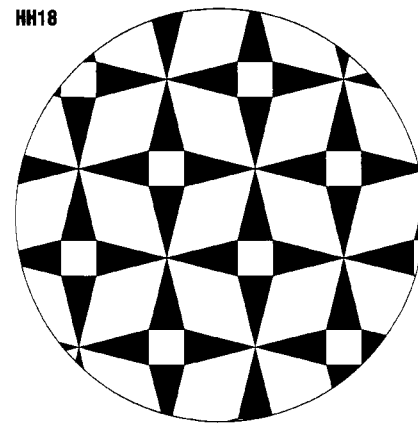
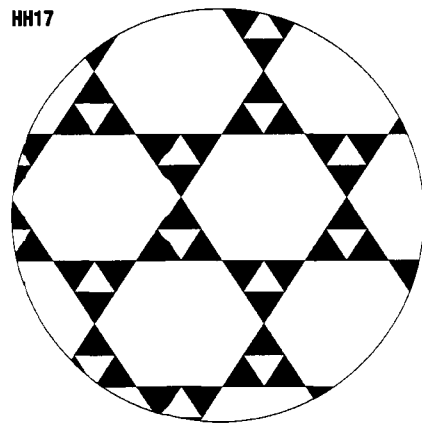
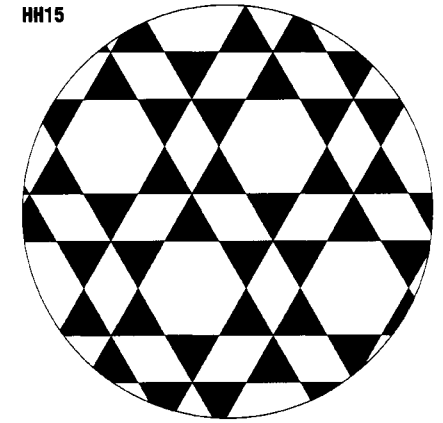
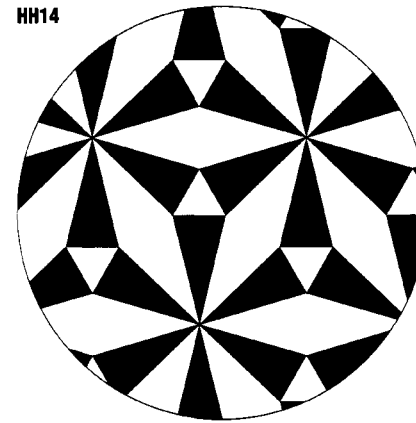
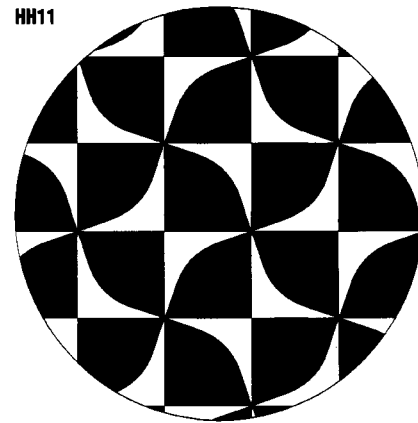
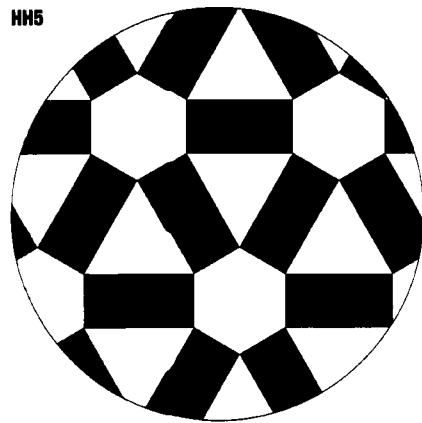
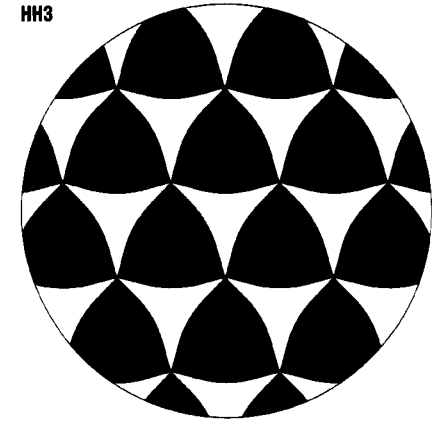
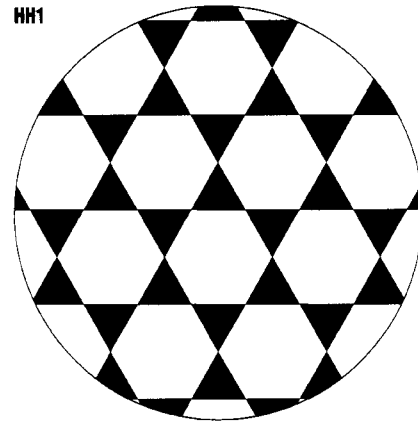
À cette fin, considérons le pavage HH5 de la **figure 2**. Dans la **figure 3a**, on a tracé les arêtes du pavage à l'aide d'une plus grande échelle et on a ajouté une subdivision barycentrique. On construit une telle subdivision en choisissant un point au milieu de chaque arête et un point au centre de chaque pavé ou face du pavage. On relie alors, par des arêtes additionnelles tracées de façon à ne pas se croiser, le point central d'une face donnée avec les sommets et les points choisis sur les arêtes de cette face. Afin d'identifier les types de points qui sont reliés par les nouvelles arêtes, les arêtes reliant les centres des faces avec les sommets sont tracées en lignes brisées (---) tandis que les arêtes reliant les centres des faces aux milieux des arêtes sont tracées en pointillés (.....). Il en résulte une triangulation propre telle que chacun de ses triangles possède trois types d'arêtes : une ligne continue (—), une ligne brisée (---) et une ligne pointillée (.....). De plus, on peut simplement construire la subdivision barycentrique d'une manière équivariante de telle sorte que le groupe de symétrie Γ du pavage initial agisse encore comme un groupe de symétrie sur sa subdivision barycentrique. Dans ce cas, Γ agira à titre de groupe de permutations sur l'ensemble \mathcal{C} des triangles de la subdivision barycentrique. En fait, Γ agira librement sur \mathcal{C} .

Posons $\mathcal{D} := \Gamma \backslash \mathcal{C}$, l'ensemble des Γ -orbites de Γ sur \mathcal{C} . Si deux triangles C_1 et C_2 dans \mathcal{C} appartiennent à la même Γ -orbite, disons $C_1 = \gamma C_2$ pour un certain $\gamma \in \Gamma$, et si $C_i \sigma_j$ (pour $i=1, 2$ et pour $j=0, 1, 2$) représente l'unique triangle de $\mathcal{C} - \{C_i\}$ qui partage avec C_i son arête en ligne pointillée ($j=0$), son arête en ligne brisée ($j=1$) ou son arête en ligne continue ($j=2$), alors $(C_i \sigma_j) \sigma_j = C_i$ et $\gamma(C_2 \sigma_j) = (\gamma C_2) \sigma_j = C_1 \sigma_j$. Ainsi, pour $j = 0, 1, 2$, les « opérateurs liants » σ_j agissent de manière bien définie comme des involutions sur \mathcal{C} et sur $\mathcal{D} = \Gamma \backslash \mathcal{C}$.

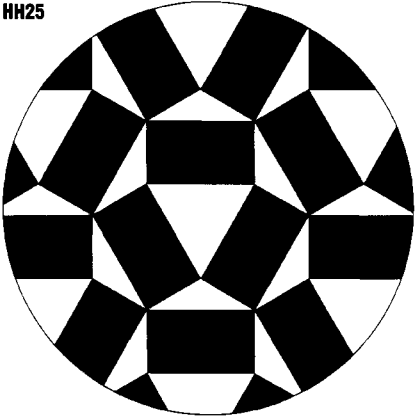
FIGURE 2

The 23 maximal
Heaven and Hell
tilings.

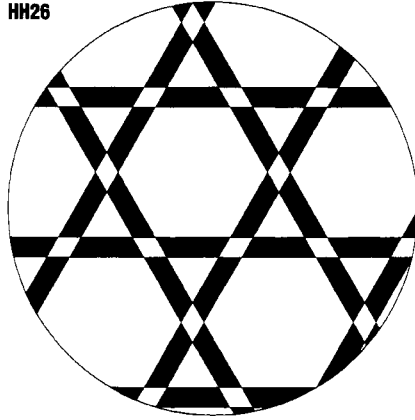
Les 23 pavages
d'anges et de diables
maximaux.



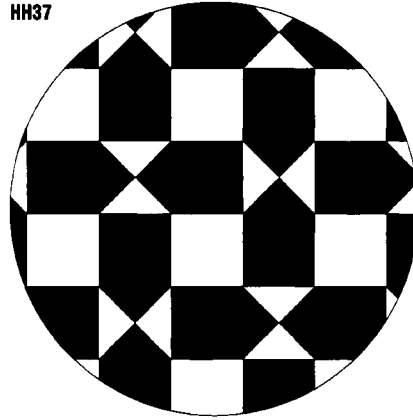
HH25



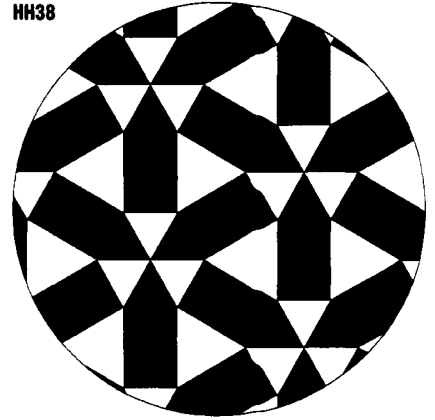
HH26



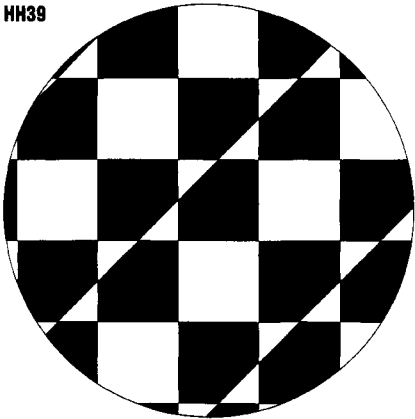
HH37



HH38



HH39



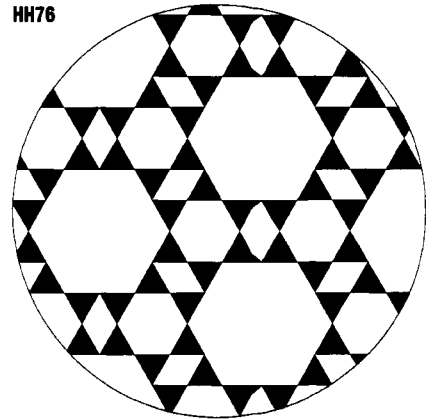
HH62



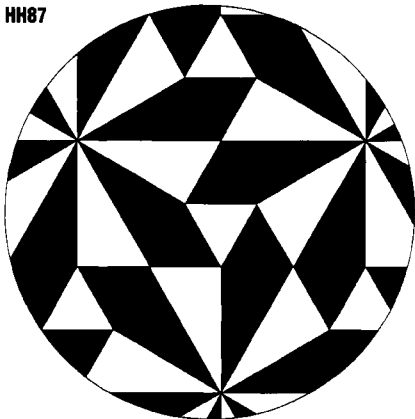
HH75



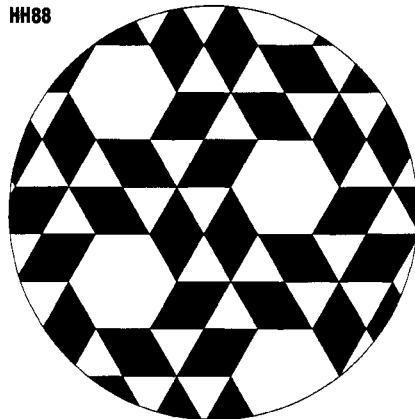
HH76



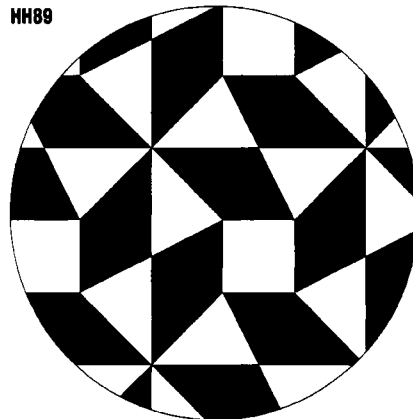
HH87



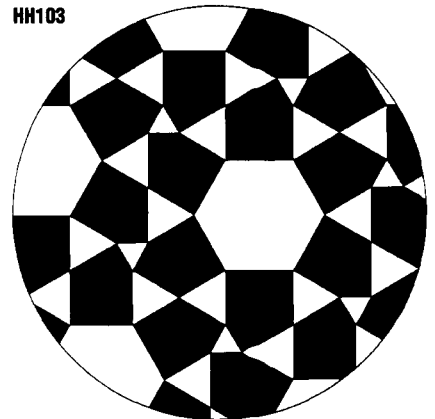
HH88



HH89



HH103



So \mathcal{D} is identified with the set $\{1,2,3,4\}$. One checks immediately that σ_0, σ_1 and σ_2 act on \mathcal{D} in the way indicated in **Figure 3c**. There, the elements of \mathcal{D} are represented by circles labelled 1,2,3,4. Two such circles, representing $D, D' \in \mathcal{D}$, are connected by a dotted, broken or unbroken line, if and only if $D\sigma_0 = D', D\sigma_1 = D'$ or $D\sigma_2 = D'$, respectively. If $D\sigma_i = D$ for $i \in \{0,1,2\}$, then the corresponding "loop" is omitted. Furthermore, one can easily verify that the values of m_{01} and m_{12} obtained from the tiling coincide with the values given for each $D \in \mathcal{D}$ in the corresponding circle.

It is an easy exercise in algebraic topology, based on the standard procedures for computing the fundamental groups of a CW-complex from its 2-skeleton, to show that (\mathcal{D}, M) characterizes the manifold X^n , the tessellation of X^n and its symmetry group up to equivariant homeomorphisms.

From the matrices $M(D)$ in our example one observes easily that the following relations hold for all $D \in \mathcal{D}$ and $i, j \in \{0,1,2\}$:

- (DS1) $m_{ij}(D) = 1$;
- (DS2) $m_{ij}(D) = m_{ji}(D) = m_{ij}(D\sigma_j)$;

Enfin, pour $D = \Gamma C \in \mathcal{D} = \Gamma \backslash C$, on définit $M(D) = (m_{ij}(D))_{i,j=0,1,2}$ par $m_{ij}(D) := \min(r \in \mathbb{N} := \{1,2,3, \dots\} \mid C(\sigma_i, \sigma_j)^r = C)$, complétant ainsi la définition du symbole de Delaney. Dans le cas particulier illustré à la **figure 3b**, on a numéroté les Γ -orbites dans C par 1,2,3,4 .

Ainsi \mathcal{D} est identifié à l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. On peut immédiatement vérifier que σ_0, σ_1 et σ_2 agissent sur \mathcal{D} de la façon indiquée dans la **figure 3c**. Les éléments de \mathcal{D} y sont représentés par des cercles étiquetés 1, 2, 3, 4. Deux de ces cercles, représentant $D, D' \in \mathcal{D}$, sont reliés par une ligne pointillée, une ligne brisée ou une ligne continue si et seulement si $D\sigma_0 = D', D\sigma_1 = D'$ ou $D\sigma_2 = D'$, respectivement. Si $D\sigma_i = D$ pour $i \in \{0,1,2\}$, alors la «boucle» correspondante est omise. De plus, on peut aisément vérifier que les valeurs de m_{01} et de m_{12} obtenues par le pavage coïncident avec les valeurs données pour chaque $D \in \mathcal{D}$ dans le cercle correspondant.

On peut montrer que (\mathcal{D}, M) caractérise la variété X^n , le pavage de X^n et son groupe de symétrie à homéomorphisme équivariant près; il s'agit d'un simple exercice de topologie algébrique utilisant la procédure normale pour calculer les groupes fondamentaux d'un com-

FIGURE 3a

The barycentric subdivision of HH5. La subdivision barycentrique de HH5.

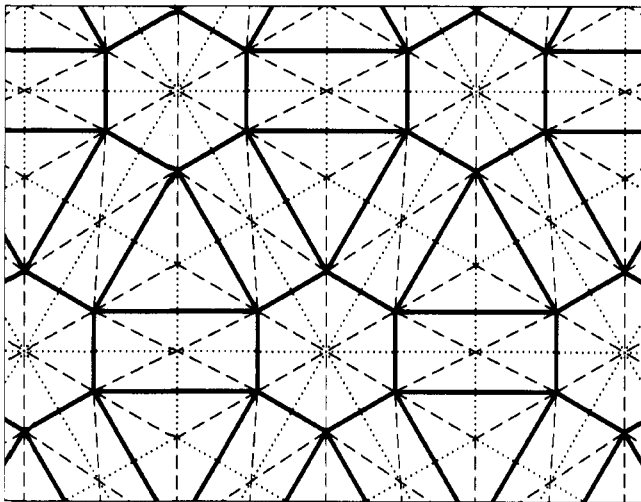


FIGURE 3b

The corresponding Γ -orbits. Les Γ -orbites correspondantes.

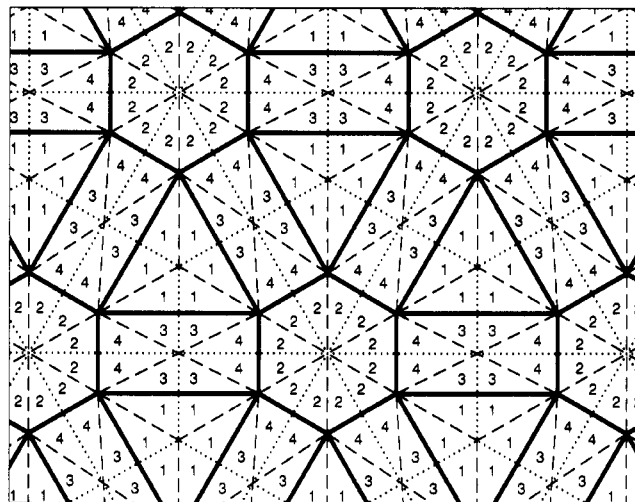
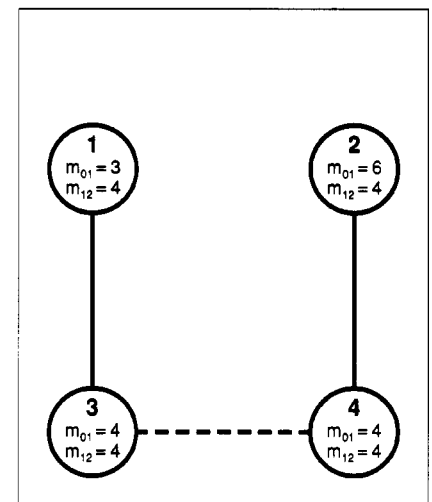


FIGURE 3c

The Delaney symbol of HH5. Le symbole de Delaney de HH5.



(DS3) $m_{02}(D) = 2$; $m_{01}(D) \geq 3$; $m_{12}(D) \geq 3$;

(DS4) $D(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}(D)} = D$.

Hence the only interesting two numbers, associated with some $D \in \mathcal{D}$ via M are the numbers $m_{01}(D) = m_{10}(D)$, the number of edges of the face of the original tiling in which a given representative $C \in D = \Gamma C$ is contained, and $m_{12}(D) = m_{21}(D)$, the number of edges, originating from the only vertex of the original tiling contained in some $C \in D$.

Moreover, as one may check easily from the numbers given in **Figure 3c**, (\mathcal{D}, M) satisfies in addition the relation

$$(DS5) \quad K_{(\mathcal{D}, M)} := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{02}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - 1 \right) = 0.$$

It is a remarkable, but easily established fact that the above construction of a Delaney symbol, applied with respect to a periodic tiling of the Euclidean plane, satisfying the conditions (iv) and (v) above, always leads to a symbol (\mathcal{D}, M) satisfying (DS1) – (DS5) as well as

(DS0) \mathcal{D} is finite and the group $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, generated by σ_0, σ_1 and σ_2 , acts transitively on \mathcal{D} .

It is not so obvious, but still true, and it will be proved in some other paper, that vice versa any system (\mathcal{D}, M) satisfying (DS0) – (DS5) actually comes from such a periodic tiling of the plane. This fact is, of course, the basis for our computer enumeration program.

All we need in addition, to handle the specific case of Heaven and Hell tilings as described above, is contained in the following:

Theorem 1: There is a 1-1-correspondance between (equivalence classes relative to equivariant homeomorphisms of) periodic tilings of the plane satisfying the conditions (i), (ii), (iv) and (v) above and (isomorphism classes of) Delaney symbols (\mathcal{D}, M) satisfying (DS0)–(DS5) together with a partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ such that the group $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ generated by σ_0 and σ_1 , acts transitively on \mathcal{D}_b and σ_2 maps \mathcal{D}_b bijectively onto \mathcal{D}_w .

Proof: This follows immediately from the definition and the general

plexe CW (complexe de fermeture finie et admettant la topologie la moins fine) à partir de son 2-squelette.

On peut remarquer facilement, à partir des matrice $M(D)$ de notre exemple, que les relations suivantes sont valides pour tout $D \in \mathcal{D}$ et $i, j \in \{0, 1, 2\}$:

(DS1) $m_{jj}(D) = 1$;

(DS2) $m_{ij}(D) = m_{ji}(D) = m_{ij}(D\sigma_i)$;

(DS3) $m_{02}(D) = 2$; $m_{01}(D) \geq 3$; $m_{12}(D) \geq 3$;

(DS4) $D(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}(D)} = D$.

Ainsi, les seuls deux nombres intéressants associés à un $D \in \mathcal{D}$ par M sont les nombres $m_{01}(D) = m_{10}(D)$, le nombre d'arêtes de la face du pavage original dans lequel un représentant donné $C \in D = \Gamma C$ est contenu, et $m_{12}(D) = m_{21}(D)$, le nombre d'arêtes issues du seul sommet du pavage original contenu dans un $C \in D$.

De plus, comme on peut facilement le vérifier à l'aide des nombres donnés à la **figure 3c**, (\mathcal{D}, M) satisfait aussi la relation

$$(DS5) \quad K_{(\mathcal{D}, M)} := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{02}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - 1 \right) = 0.$$

C'est un résultat remarquable, mais on peut établir facilement que la précédente construction d'un symbole de Delaney, appliqué à un pavage périodique du plan euclidien, satisfaisant les conditions (iv) et (v) déjà citées, mène toujours à un symbole (\mathcal{D}, M) vérifiant (DS1)–(DS5) ainsi que

(DS0) \mathcal{D} est fini et le groupe $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, engendré par σ_0, σ_1 et σ_2 , agit de façon transitive sur \mathcal{D} .

Ce n'est pas aussi évident, mais l'inverse demeure vrai (ce sera démontré dans un autre article) : tout système (\mathcal{D}, M) satisfaisant (DS0) – (DS5) provient d'un tel pavage périodique du plan. Ce fait constitue évidemment la base de notre programme d'énumération par ordinateur.

Afin de pouvoir manipuler le cas particulier des pavages d'anges et de diables décrits précédemment, nous avons aussi besoin des

theory of Delaney symbols once one defines the partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ for the Delaney symbol (\mathcal{D}, M) of a Heaven and Hell tiling by:

$\mathcal{D}_b := \{D \in \mathcal{D} = \Gamma \backslash \mathcal{D} \mid \text{any } C \in D \text{ is contained in a black tile}\}$ and
 $\mathcal{D}_w := \mathcal{D} - \mathcal{D}_b = \{D \in \mathcal{D} \mid \text{any } C \in D \text{ is contained in a white tile}\}.$

More generally, we may consider periodic tilings of the plane, satisfying

- (i') two white tiles never have an edge in common;
- (ii_N) the number of orbits of the symmetry group Γ on the black tiles does not exceed N ;
- (iv') every white tile has at least three edges;
- and (v).

In analogy to the above theorem, such tilings are characterized by Delaney symbols (\mathcal{D}, M) together with a partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ as above such that \mathcal{D}_b consists of a disjoint union of at most N $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbits, σ_2 maps \mathcal{D}_w into \mathcal{D}_b and $m_{\sigma_1}(D) \geq 3$ is requested only for $D \in \mathcal{D}_w$.

Generalizing the remark in [6] we claim:

Theorem 2: Up to equivariant homeomorphisms, there are only finitely many periodic tilings of the plane, satisfying (i'), (ii_N), (iv') and (v).

Proof: It is obviously enough to show that there are only finitely many possibilities for the corresponding Delaney symbols $(\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w, M)$. To this end let us recall the well-known fact that for any rational number $p/q \in \mathbb{Q}$ and any $k \in \mathbb{N}$ there are only finitely many k -tuples $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ of natural numbers such that

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q}.$$

Hence, in view of (DS5), it is enough to show that our conditions imply a fixed upper bound for the cardinality $\#\mathcal{D}$ of \mathcal{D} . More precisely, we claim

$$\#\mathcal{D} \leq 36N.$$

To prove this inequality we observe at first that (DS2) together with

résultats énoncés dans le théorème suivant.

Théorème 1: Il existe une correspondance biunivoque entre les (classes d'équivalence selon les homéomorphismes équivariants des) pavages périodiques du plan satisfaisant les conditions (i), (ii), (iv) et (v) ci-dessus et les (classes d'isomorphismes des) symboles de Delaney (\mathcal{D}, M) satisfaisant les énoncés (DS0)–(DS5) ainsi qu'une partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ tel que le groupe $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$, engendré par σ_0 et σ_1 , agit de façon transitive sur \mathcal{D}_b et σ_2 envoie \mathcal{D}_b sur \mathcal{D}_w de façon bijective.

Démonstration: Ce résultat se déduit immédiatement de la définition et de la théorie générale des symboles de Delaney aussitôt qu'on définit la partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ pour le symbole de Delaney (\mathcal{D}, M) d'un pavage d'anges et de diables de la façon suivante:

$\mathcal{D}_b := \{D \in \mathcal{D} = \Gamma \backslash \mathcal{D} \mid \text{tout } C \in D \text{ est contenu dans un pavé noir}\}$ et
 $\mathcal{D}_w := \mathcal{D} - \mathcal{D}_b = \{D \in \mathcal{D} \mid \text{tout } C \in D \text{ est contenu dans un pavé blanc}\}.$

De façon plus générale, on peut considérer des pavages périodiques du plan qui satisfont

- (i') deux pavés blancs ne possèdent jamais une arête commune;
- (ii_N) le nombre d'orbites du groupe de symétrie Γ sur les pavés noirs n'excède pas N ;
- (iv') tout pavé blanc possède au moins trois arêtes;
- et (v).

Par analogie avec le théorème précédent, les pavages considérés sont caractérisés par les symboles de Delaney (\mathcal{D}, M) ainsi qu'une partition $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$ comme ci-haut, telle que \mathcal{D}_b consiste en une union disjointe d'au plus N $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbites, σ_2 est une injection de \mathcal{D}_w dans \mathcal{D}_b et $m_{\sigma_1}(D) \geq 3$ n'est requis que pour $D \in \mathcal{D}_w$.

En généralisant la remarque de [6], on énonce :

Théorème 2: À homéomorphisme équivariant près, il n'y a qu'un nombre fini de pavages périodiques du plan satisfaisant (i'), (ii_N), (iv') et (v).

Démonstration: Il est évidemment suffisant de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les symboles de Delaney cor-

(DS4) implies

$$\sum'_{D \in \mathcal{D}_b} \frac{1}{m_{01}(D)} \leq \#(\mathcal{D}_b / \langle (\sigma_0, \sigma_1) \rangle) \leq 2 \cdot \#(\mathcal{D}_b / \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle) \leq 2N.$$

Next let us consider

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &:= \{D \in \mathcal{D} \mid m_{12}(D) = 3\}, \\ \mathcal{D}_4 &:= \mathcal{D} - \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{D}_{w,3} &:= \mathcal{D}_w \cap \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{D}_{w,4} &:= \mathcal{D}_w \cap \mathcal{D}_4. \end{aligned}$$

We claim:

$$\#\mathcal{D}_{w,3} \leq \frac{1}{3} \cdot \#\mathcal{D}_3$$

and

$$\#\mathcal{D}_{w,4} \leq \frac{1}{2} \cdot \#\mathcal{D}_4.$$

Once these inequalities are established, the rest follows easily: from

$$0 = K_{(\mathcal{D}, M)} := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right)$$

we get

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_{12}(D)} \right) &= \sum_{D \in \mathcal{D}} \frac{1}{m_{01}(D)} = \sum_{D \in \mathcal{D}_b} \frac{1}{m_{01}(D)} + \sum_{D \in \mathcal{D}_w} \frac{1}{m_{01}(D)} \\ &\leq 2N + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_w = 2N + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_{w,3} + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_{w,4} \leq 2N + \frac{1}{9} \#\mathcal{D}_3 + \frac{1}{6} \#\mathcal{D}_4 \end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned} 2N &\geq -\frac{1}{9} \#\mathcal{D}_3 - \frac{1}{6} \#\mathcal{D}_4 + \frac{1}{2} \#\mathcal{D} - \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_3 - \frac{1}{4} \#\mathcal{D}_4 = \\ &= \frac{1}{18} \#\mathcal{D}_3 + \frac{1}{12} \#\mathcal{D}_4 \geq \frac{1}{18} \#\mathcal{D}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\#\mathcal{D} \leq 36N.$$

Finally, to prove

$$\#\mathcal{D}_{w,4} \leq \frac{1}{2} \#\mathcal{D}_4,$$

it is enough to observe that $\mathcal{D}_{w,4}$ and $\mathcal{D}_{w,4}\sigma_2 \subseteq \mathcal{D}_s$ are disjoint subsets of \mathcal{D}_4 of cardinality $\#\mathcal{D}_{w,4}$, while

$$\#\mathcal{D}_{w,3} \leq \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_3,$$

follows from the fact that $\mathcal{D}_{w,3}$, $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2$ and $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2\sigma_1$ are pairwise disjoint subsets of \mathcal{D}_3 of cardinality $\#\mathcal{D}_{w,3}$, the disjointness of $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2$

respondants ($\mathcal{D} = \mathcal{D}_b \cup \mathcal{D}_w$, M). À cette fin, rappelons le fait bien connu que pour tout nombre rationnel $p/q \in \mathbb{Q}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il n'existe qu'un nombre fini de k -tuplets $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ de nombres naturels tels que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q}.$$

Donc, par rapport à (DS5), il est suffisant de montrer que nos conditions induisent une limite supérieure fixée pour la cardinalité $\#\mathcal{D}$. Plus précisément, on affirme que

$$\#\mathcal{D} \leq 36N.$$

Dans le but de démontrer cette inégalité, on remarque en premier lieu que de (DS2) et (DS4) on peut déduire

$$\sum'_{D \in \mathcal{D}_b} \frac{1}{m_{01}(D)} \leq \#(\mathcal{D}_b / \langle (\sigma_0, \sigma_1) \rangle) \leq 2 \cdot \#(\mathcal{D}_b / \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle) \leq 2N.$$

On considère ensuite

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &:= \{D \in \mathcal{D} \mid m_{12}(D) = 3\}, \\ \mathcal{D}_4 &:= \mathcal{D} - \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{D}_{w,3} &:= \mathcal{D}_w \cap \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{D}_{w,4} &:= \mathcal{D}_w \cap \mathcal{D}_4. \end{aligned}$$

On affirme que :

$$\#\mathcal{D}_{w,3} \leq \frac{1}{3} \cdot \#\mathcal{D}_3$$

et

$$\#\mathcal{D}_{w,4} \leq \frac{1}{2} \cdot \#\mathcal{D}_4.$$

Une fois que ces inégalités sont établies, le reste suit facilement : de

$$0 = K_{(\mathcal{D}, M)} = \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_{12}(D)} \right) &= \sum_{D \in \mathcal{D}} \frac{1}{m_{01}(D)} = \sum_{D \in \mathcal{D}_b} \frac{1}{m_{01}(D)} + \sum_{D \in \mathcal{D}_w} \frac{1}{m_{01}(D)} \\ &\leq 2N + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_w = 2N + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_{w,3} + \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_{w,4} \leq 2N + \frac{1}{9} \#\mathcal{D}_3 + \frac{1}{6} \#\mathcal{D}_4 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} 2N &\geq -\frac{1}{9} \#\mathcal{D}_3 - \frac{1}{6} \#\mathcal{D}_4 + \frac{1}{2} \#\mathcal{D} - \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_3 - \frac{1}{4} \#\mathcal{D}_4 = \\ &= \frac{1}{18} \#\mathcal{D}_3 + \frac{1}{12} \#\mathcal{D}_4 \geq \frac{1}{18} \#\mathcal{D}, \end{aligned}$$

and $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2\sigma_1$ being a consequence of the fact that $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{w,3}$ and $D_1\sigma_2 = D_2\sigma_2\sigma_1$ implies $D_1 = D_1(\sigma_2\sigma_1)^3 = D_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \in \mathcal{D}_w\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \mathcal{D}_w\sigma_2\sigma_1 \subseteq \mathcal{D}_b\sigma_1 = \mathcal{D}_b$, a contradiction.

Note that Theorem 2 implies in particular the finiteness of the number of (types up to equivariant homeomorphisms of) periodic tilings of \mathbb{E}^2 with at most N inequivalent tiles, satisfying (v), which is included in our considerations by choosing $\mathcal{D}_w = \emptyset$. It implies also the finiteness of the number of (types of) Heaven and Hell tilings satisfying (i), (ii), (iv) and (v). A complete list of the Delaney symbols of such tilings, as produced by an appropriate computer program based on Theorem 1 and Theorem 2, is given in **Table 1**. As mentioned already above, the symmetry group of some of these tilings is “as large as possible”, i.e. it coincides with the full combinatorial automorphism group, respecting the colouring, while all other tilings can be derived from those by appropriate procedures of symmetry breaking. Hence, it seems worthwhile to find out how one can decide from the corresponding Delaney symbols whether or not one tiling can be derived from another one by symmetry breaking, i.e. by restricting the action of the symmetry group of the second tiling to some appropriate subgroup. The answer to this question follows directly from the construction of Delaney symbols explained above and is summarized in:

Theorem 3: A periodic tiling of the Euclidean plane with Delaney symbol (\mathcal{D}, M) can be derived — up to equivariant homeomorphism — from a periodic tiling with Delaney symbol (\mathcal{D}', M') by symmetry breaking if and only if there exists a map $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ such that $\varphi(D\sigma_j) = \varphi(D)\sigma_j$ and $M(D) = M'(\varphi(D))$ for all $D \in \mathcal{D}$ and $j \in \{0, 1, 2\}$.

Therefore, given (\mathcal{D}, M) and (\mathcal{D}', M') it is easy to check whether or not the corresponding tilings are related to each other by symmetry breaking: for a fixed, but arbitrary $D \in \mathcal{D}$ and every $D' \in \mathcal{D}'$ one has to check whether the prescription $D\tau \mapsto D'\tau$ ($\tau \in \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$) defines a well-defined map $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ and, if it does, whether for this uniquely determined map the relation $M(D_1) = M'(\varphi(D_1))$ holds for all $D_1 \in \mathcal{D}$. Moreover, it is easily verified that the existence of such a map φ implies that $\#\mathcal{D}'$ divides $\#\mathcal{D}$ and that the quotient $\#\mathcal{D}/\#\mathcal{D}'$ coincides with the cardinality of the preimage $\varphi^{-1}(D')$ for all $D' \in \mathcal{D}'$ which gives valuable additional restrictions for the search of tilings

c'est-à-dire

$$\#\mathcal{D} \leq 36N.$$

Enfin, pour prouver

$$\#\mathcal{D}_{w,4} \leq \frac{1}{2} \#\mathcal{D}_4,$$

il est suffisant d'observer que $\mathcal{D}_{w,4}$ et $\mathcal{D}_{w,4}\sigma_2 \subseteq \mathcal{D}_s$ sont des sous-ensembles disjoints de \mathcal{D}_4 de cardinalité $\#\mathcal{D}_{w,4}$, tandis que

$$\#\mathcal{D}_{w,3} \leq \frac{1}{3} \#\mathcal{D}_3,$$

provient du fait que $\mathcal{D}_{w,3}$, $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2$ et $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2\sigma_1$ sont des sous-ensembles disjoints deux à deux de \mathcal{D}_3 de cardinalité $\#\mathcal{D}_{w,3}$, la disjonction de $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2$ et $\mathcal{D}_{w,3}\sigma_2\sigma_1$ étant une conséquence du fait que $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{w,3}$ et $D_1\sigma_2 = D_2\sigma_2\sigma_1$ implique que $D_1 = D_1(\sigma_2\sigma_1)^3 = D_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \in \mathcal{D}_w\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \mathcal{D}_w\sigma_2\sigma_1 \subseteq \mathcal{D}_b\sigma_1 = \mathcal{D}_b$, ce qui est une contradiction.

On note que le théorème 2 entraîne en particulier la finitude du nombre de (types à homéomorphisme équivariant près de) pavages périodiques de \mathbb{E}^2 ayant au plus N pavés non-équivalents, satisfaisant (v), ce qui est déjà considéré par le choix $\mathcal{D}_w = \emptyset$. Il entraîne aussi la finitude du nombre de (types de) pavages d'anges et de diables satisfaisant (i), (ii), (iv) et (v). Le **tableau 1** présente une liste complète des symboles de Delaney de ces pavages. Cette liste a été produite à l'aide d'un logiciel se basant sur le théorème 1 et le théorème 2. Comme on l'a soulevé plus haut, le groupe de symétrie de certains de ces pavages est « aussi grand que possible », c'est-à-dire qu'il coïncide avec le groupe d'automorphisme combinatoire en entier, en respectant le coloriage, tandis que tous les autres pavages peuvent en être déduits par des procédures appropriées de coupures de symétrie. Ainsi, il semble naturel de chercher une méthode qui, à la connaissance des symboles de Delaney correspondants, permettrait d'établir si un pavage peut être dérivé d'un autre par une coupure de symétrie, c'est-à-dire en restreignant l'action du groupe de symétrie du second pavage à un certain sous-groupe. La réponse à cette question est une conséquence directe de la construction des symboles de Delaney expliquée précédemment. Le théorème suivant la résume.

Théorème 3: Un pavage périodique du plan euclidien de symbole de Delaney (\mathcal{D}, M) peut être dérivé — à homéomorphisme équivariant près — d'un pavage périodique de symbole de Delaney (\mathcal{D}', M')

which are related to each other by symmetry breaking.

In **Table 2** the Hasse graph of the partial order is depicted which, according to Theorem 3, is defined on the set $\{HH1, \dots, HH117\}$ of Delaney symbols, by “ $(\mathcal{D}, M) \leq (\mathcal{D}', M') \Leftrightarrow$ there exists a map $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ with $\varphi(D\sigma_j) = \varphi(D)\sigma_j$ and $M(D) = M'(\varphi(D))$ for all $D \in \mathcal{D}$ and $j \in \{0, 1, 2\}$ ”. Moreover, if \mathcal{D} and \mathcal{D}' are identified with $\{1, \dots, k\}$ and $\{1, \dots, k'\}$ according to **Table 1** and if $\varphi(i) = 1$ for some such φ and $i \in \{1, \dots, k\}$, then the edge connecting (\mathcal{D}, M) and (\mathcal{D}', M') is marked by “i”.

We will now explain by discussing an appropriate example how from this information one can construct a realization of a tiling associated with (\mathcal{D}, M) from a realization of (\mathcal{D}', M') . Together with the realizations given in **Figure 2** this will be enough to enable any interested reader to construct realizations of all 117 Heaven and Hell tilings. As an example we choose the 4 tilings $HH23 = (\mathcal{D}_1, M_1)$, $HH28 = (\mathcal{D}_2, M_2)$, $HH43 = (\mathcal{D}_3, M_3)$ et $HH82 = (\mathcal{D}_4, M_4)$ derived from $HH5$ by symmetry breaking. We start by redrawing the tiling associated with $HH5 = (\mathcal{D}', M')$ as given in **Figure 2** and marking one of the triangles of its barycentric subdivision which is associated with $1 \in \mathcal{D}'$ (cf. **Figure 4a**). Then we take a copy of this drawing, mark the same triangle by $2 \in \varphi^{-1}(1) \subseteq \mathcal{D}_1$, and use the action of σ_0 , σ_1 and σ_2 on D_1 to mark the three neighbouring triangles by $2 \cdot \sigma_0 = 3$, $2 \cdot \sigma_1 = 3$ and $2 \cdot \sigma_2 = 6$, respectively (**Figure 4b**). Continuing this way, we get **Figure 4c** which shows already the admissible symmetries of the tiling associated with (\mathcal{D}_1, M_1) and a fundamental domain, depicted in detail in **Figure 4d**. Finally, by applying “Escher’s trick”, i.e. by deforming the system of edges in the fundamental domain continuously in a way, which respects the identifications along the boundary, but can be arbitrary in any other respect, and extending a fixed deformation all over the plane according to the specified group of symmetries one gets realizations of tilings of type (\mathcal{D}_1, M_1) (cf. **Figure 4e and 4f**).

The same procedure, applied with respect to (\mathcal{D}_2, M_2) , (\mathcal{D}_3, M_3) and (\mathcal{D}_4, M_4) , is illustrated in **Figures 5, 6 and 7**. The corresponding black and white tilings are depicted in **Figure 8**.

As mentioned already, combining the information contained in the **Tables 1 and 2** and in **Figure 2** and using this procedure one can

par une coupure de symétrie si, et seulement si, il existe une application $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ telle que $\varphi(D\sigma_j) = \varphi(D)\sigma_j$ et $M(D) = M'(\varphi(D))$ pour tout $D \in \mathcal{D}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$.

Ainsi, étant donnés (\mathcal{D}, M) et (\mathcal{D}', M') , on peut vérifier aisément si les pavages correspondants sont liés l'un à l'autre par une coupure de symétrie : pour un $D \in \mathcal{D}$, fixé mais choisi arbitrairement, et pour tout $D' \in \mathcal{D}'$, on a à vérifier si l'énoncé $D\tau \mapsto D'\tau$ ($\tau \in \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$) définit une application bien définie $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ et, si c'est le cas, si pour cette application uniquement déterminée la relation $M(D_i) = M'(\varphi(D_i))$ est vérifiée pour tout $D_i \in \mathcal{D}$. De plus, on peut facilement vérifier que l'existence d'une telle application φ implique que $\#\mathcal{D}'$ divise $\#\mathcal{D}$ et que le quotient $\#\mathcal{D}'/\#\mathcal{D}$ coïncide avec la cardinalité de la préimage $\varphi^{-1}(D')$ pour tout $D' \in \mathcal{D}'$ ce qui entraîne des restrictions additionnelles d'importance à la recherche de pavages liés par des coupures de symétrie.

Dans le **tableau 2**, on présente le graphe Hasse de l'ordre partiel qui, selon le théorème 3, est défini sur l'ensemble $\{HH1, \dots, HH117\}$ des symboles de Delaney, par “ $(\mathcal{D}, M) \leq (\mathcal{D}', M') \Leftrightarrow$ il existe une application $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ telle que $\varphi(D\sigma_j) = \varphi(D)\sigma_j$ et $M(D) = M'(\varphi(D))$ pour tout $D \in \mathcal{D}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$ ”. De plus, si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont représentés par $\{1, \dots, k\}$ et $\{1, \dots, k'\}$ selon le **tableau 1** et si $\varphi(i) = 1$ pour un certain φ et un certain $i \in \{1, \dots, k\}$, alors l'arête joignant (\mathcal{D}, M) et (\mathcal{D}', M') est identifiée «i».

Nous allons maintenant expliquer à l'aide d'un exemple approprié comment on peut par cette information construire une réalisation d'un pavage associé à (\mathcal{D}, M) à partir d'une réalisation de (\mathcal{D}', M') . Cette explication, accompagnée des réalisations de la **figure 2**, sera suffisante pour rendre possible à tout lecteur intéressé la construction des 117 pavages d'anges et de diables. À titre d'exemple, on a choisi les 4 pavages $HH23 = (\mathcal{D}_1, M_1)$, $HH28 = (\mathcal{D}_2, M_2)$, $HH43 = (\mathcal{D}_3, M_3)$ et $HH82 = (\mathcal{D}_4, M_4)$ dérivés de $HH5$ par bris de symétrie. On commence en retraçant le pavage associé à $HH5 = (\mathcal{D}', M')$ comme à la **figure 2** et on marque l'un des triangles de sa subdivision barycentrique qui est associée à $1 \in \mathcal{D}'$ (voir **figure 4a**). On prends alors une copie de ce dessin, on marque le même triangle par $2 \in \varphi^{-1}(1) \subseteq \mathcal{D}_1$ et on utilise l'action de σ_0 , σ_1 et σ_2 sur D_1 pour marquer les trois triangles voisins par $2 \cdot \sigma_0 = 3$, $2 \cdot \sigma_1 = 3$ et

produce realizations of all Heaven and Hell tilings satisfying (i), (ii), (iv) and (v).

Another seemingly rather different approach to the same problem is the following one: given a Heaven and Hell tiling satisfying (i), (ii), (iv) and (v) one may construct an associated isohedral tiling (i.e. one with a symmetry group acting transitively on its tiles, cf. [14], [15]) by

- (i) equivariantly choosing one point in every white tile and connecting it in a non-intersecting way to each of its vertices, thereby generating many white triangles,
- and
- (ii) replacing every black tile by its union with those of the generated white triangles with which it shares an edge (cf. **Figure 9**).

Of course, vertices of the old tiling of degree 4 will become vertices of degree 2 in the new tiling, but as long as they are still taken into account as vertices, the vertices and edges of the resulting new isohedral tiling form a bipartite graph relative to the partition of its vertices into old vertices, which may be now of degree 2, and new vertices, all of which are necessarily of degree larger than 2. The corresponding isohedral tilings are listed in **Table 3**.

$2 \cdot \sigma_2 = 6$, respectivement (**figure 4b**). En poursuivant de cette façon, on obtient la **figure 4c** qui montre à la fois les symétries admissibles du pavage associé à (\mathcal{D}_1, M_1) et un domaine fondamental dessiné en détail à la **figure 4d**. Enfin, en appliquant le « truc d'Escher », c'est-à-dire en déformant de façon continue le système d'arêtes dans le domaine fondamental de telle sorte que les identificateurs qui se trouvent sur la frontière soient respectés, mais, à d'autres égards, de façon arbitraire. En étendant une déformation donnée sur tout le plan selon le groupe de symétries précisé, on obtient les réalisations de pavages de type (\mathcal{D}_1, M_1) (**figure 4e et 4f**).

Les **figures 5, 6 et 7** illustrent l'utilisation de la même procédure appliquée à (\mathcal{D}_2, M_2) , (\mathcal{D}_3, M_3) et (\mathcal{D}_4, M_4) . Les pavages noirs et blancs correspondants sont dessinés à la **figure 8**.

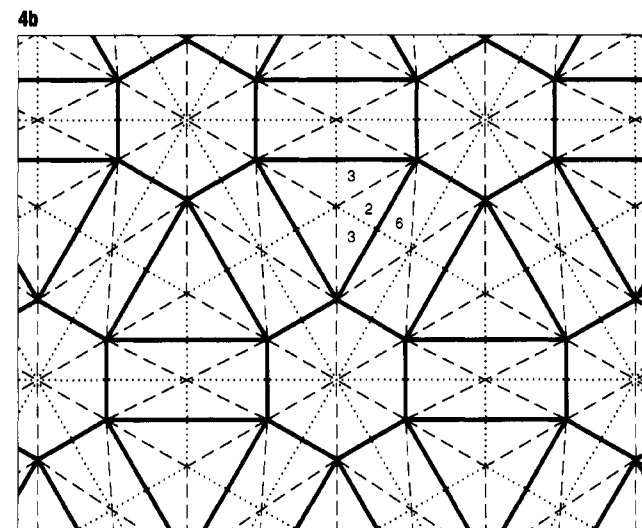
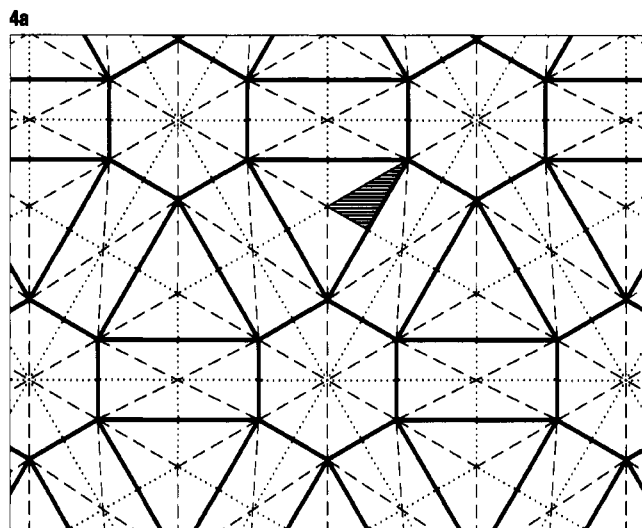
Comme on l'a noté plus haut, en combinant les informations contenues dans les **tableaux 1 et 2** et à la **figure 2** et en utilisant cette procédure, on pourra construire les réalisations de tous les pavages d'anges et de diables satisfaisant (i), (ii), (iv) et (v).

On peut donner une approche légèrement différente du même problème: étant donné un pavage d'anges et de diables satisfaisant (i),

FIGURE 4

For an explanation see the text.

Pour une explication, voir le texte.

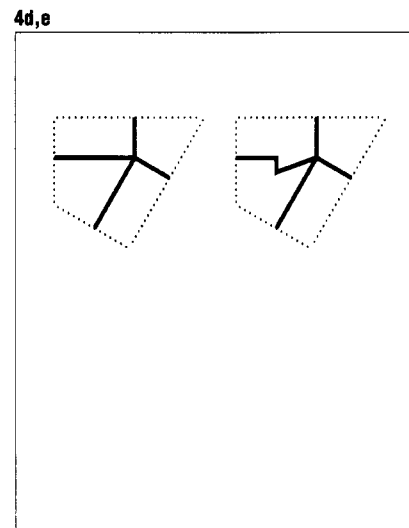
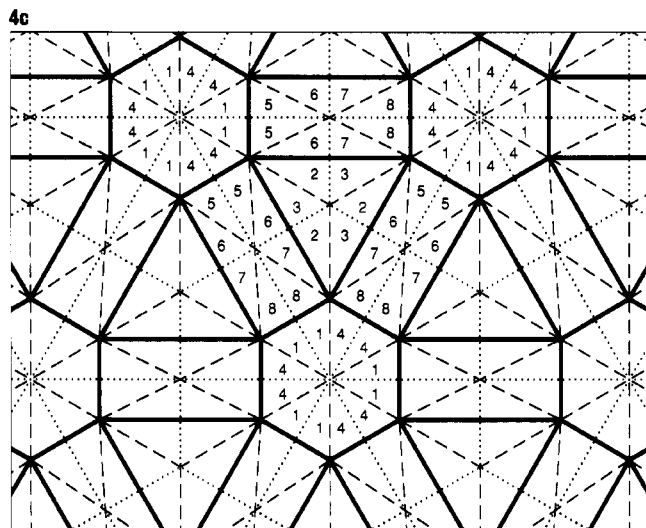


Vice versa, given an isohedral tiling, possibly with vertices of degree 2, such that its vertices and edges form a bipartite graph, each face has at least 6 vertices and edges and such that the vertices of at least one of the resulting two classes of vertices have a degree larger than 2, then one can easily construct from these data a corresponding Heaven and Hell pattern satisfying the conditions (i), (ii), (iv) and (v).

Hence, it is also possible to construct such patterns from the well-known lists of isohedral tilings (cf. [17], [4], [14], [15], [11], ...). Of course, one can easily translate this geometric procedure into the language of Delaney symbols. Since the resulting insight into the kinds of manipulations which can be applied in sensible ways to Delaney symbols appear to be only a first glimpse of a rather rich structure of possible operations on Delaney symbols (cf. also [20], [9] and [3]), we will refrain from going into these matters in detail here.

Let us rather conclude by expressing our hope that the method presented in this note to study Heaven and Hell tilings may not only be useful to analyse quite generally the work of M.C. Escher concerning regular tilings of the plane, in particular the work contained in his still unpublished note book on these matters, but that it can also be used to continue and to extend his explorations of the artistic potential of this subject.

.ilii.

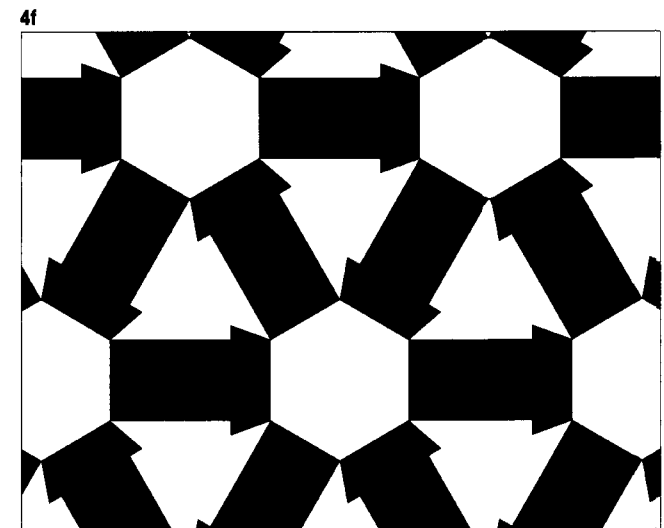


(ii), (iv) et (v), il est possible de construire un pavage isoédrique associé (c'est-à-dire un pavage dont le groupe de symétrie agit de façon transitive sur ses pavés, voir [14] et [15]) par

- (i) le choix équivariant d'un point dans tout pavé blanc et le lien sans croisement de celui-ci avec chacun de ses sommets, générant ainsi plusieurs triangles blancs, et
- (ii) le remplacement de tout pavé noir par son union avec les triangles blancs qui ont une arête en commun avec lui (voir **figure 9**).

Évidemment, les sommets de degré 4 dans l'ancien pavage deviendront des sommets de degré 2 dans le nouveau pavage, mais tant qu'il demeureront considérés à titre de sommets, les sommets et les arêtes du nouveau pavage isoédrique qui en résulte forment un graphe biparti selon la partition de ses sommets entre anciens sommets, qui sont maintenant de degré 2, et nouveaux sommets, qui sont tous nécessairement de degré supérieur à 2. La liste des pavages isoédriques correspondants est donnée au **tableau 3**.

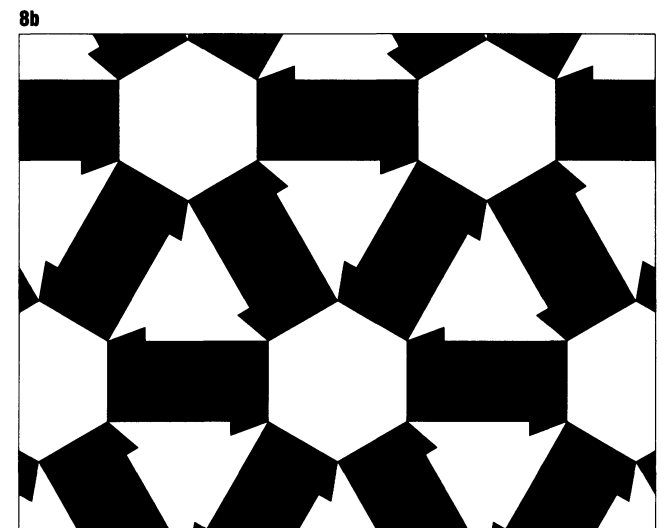
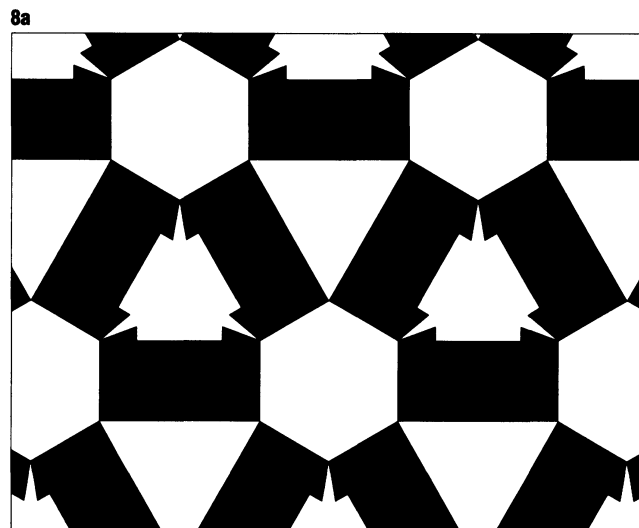
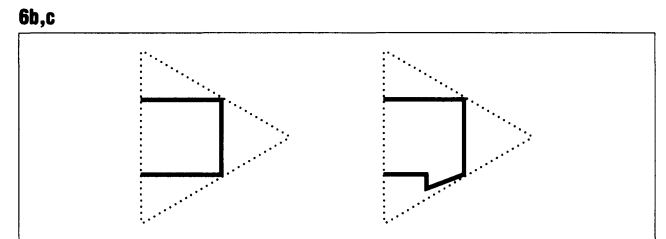
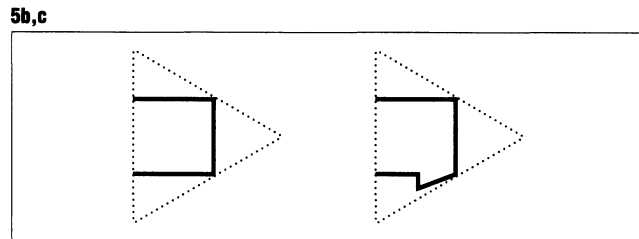
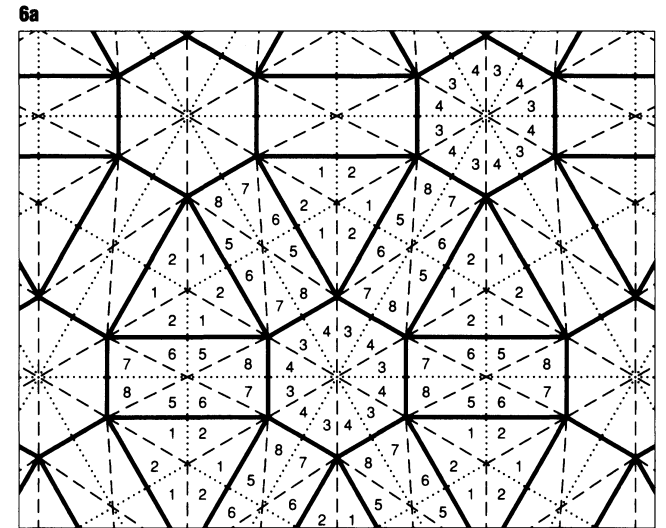
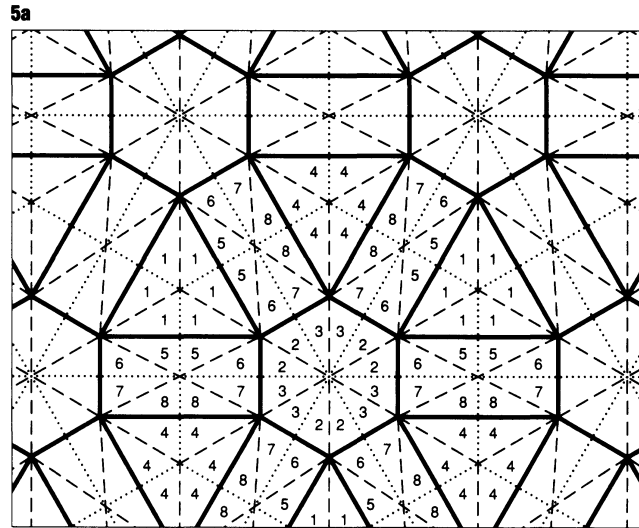
Inversement, étant donné un pavage isoédrique, contenant possiblement des sommets de degré 2, tel que ses sommets et ses arêtes constituent un graphe biparti, que chaque face possède au moins 6 sommets et arêtes et tel que les sommets d'au moins une des deux



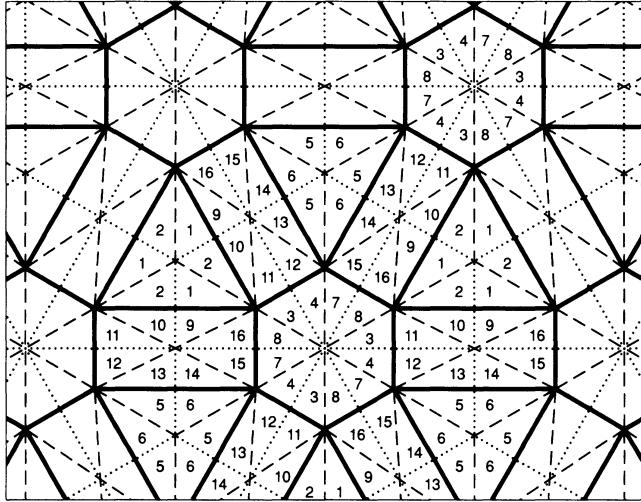
FIGURES 5-8

For an explanation see the text.

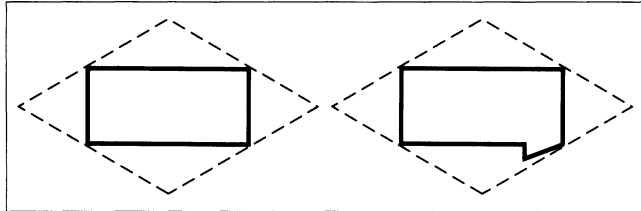
Pour une explication, voir le texte.



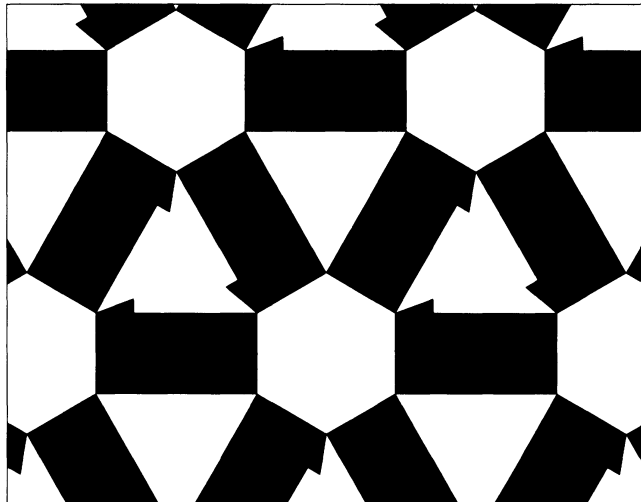
7a



7b,c



8c



classes résultantes de sommets ait un degré supérieur à 2, alors on peut facilement, à l'aide de ces données, construire le motif d'anges et de diables correspondant satisfaisant les conditions (i), (ii), (iv) et (v).

Donc, il est aussi possible de construire de tels motifs à partir de la liste bien connue des pavages isoédriques (voir [17], [4], [14], [15], [11], ...). Évidemment, il est possible et simple de traduire cette procédure géométrique dans le langage des symboles de Delaney. Puisque la compréhension des types de manipulations qu'on peut appliquer de façon judicieuse aux symboles de Delaney n'est ici qu'un aperçu de la structure plus riche contenue dans les opérations possibles sur les symboles de Delaney (voir aussi [20], [9] et [3]), nous nous abstenons ici d'une analyse plus approfondie de ces questions.

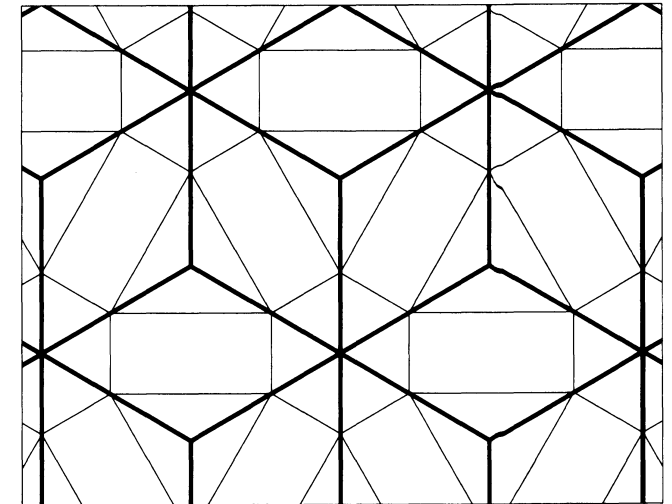
Concluons plutôt en exprimant notre espoir que la méthode présentée dans cet article pour étudier les pavages d'anges et de diables ne soit pas seulement utile à une analyse générale de l'oeuvre de M.C. Escher concernant les pavages réguliers du plan, en particulier l'oeuvre contenue dans ses cahiers de notes encore non publiés sur ces questions, mais qu'on puisse aussi l'utiliser pour poursuivre et étendre ses recherches du potentiel artistique de ce sujet.

.iii.

FIGURE 9

The isohedral tiling IH37 (heavy lines) corresponding to HH5.

Le pavage isoédrique IH37 (lignes épaisses) correspondant à HH5.



REFERENCES / RÉFÉRENCES

- [1] M.S. Delaney
"Quasisymmetries of space group orbits".
Match, 9 (1980), 73–80.
- [2] Olaf Delgado Friedrichs
"Die Automatische Konstruktion Periodischer Pflasterungen".
Diplomarbeit, Bielefeld, 1990.
- [3] O. Delgado Friedrichs, D.H. Huson & E. Zamorzaeva
"The classification of 2-isohedral tilings of the plane".
To appear in: Geometriae Dedicata.
- [4] B.N. Delone
"Teoriya planigonov".
Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. Matem., 23 (1959), 365–386.
- [5] B.N. Delone, N.P. Dolbilin & M.I. Stogrin
"Combinatorial and metrical theory of planigons".
In Russian: Tr. Mat. Inst. Steklov Akad. Nauk SSSR, 148 (1978), 109–140.
English translation: Proc. of the Steklov Inst. of Math., 4 (1980), 111–141.
- [6] A.W.M. Dress
"The 37 types of regular "Heaven and Hell" patterns in the Euclidean plane".
In "M.C. Escher: Art and Science", H.S.M. Coxeter et al. (Eds), North Holland, 1986.
- [7] A.W.M. Dress
"Regular polytopes and equivariant tessellations from a combinatorial point of view".
In "Algebraic Topology, Göttingen 1984", SLN 1172, 1986, pp.56–72.
- [8] A.W.M. Dress
"Presentations of discrete groups, Acting on simply connected manifolds".
Adv. in Math., 63 No. 2 (1987), 196–212.
- [9] A.W.M. Dress & R. Franz
"Recursion formulas for the number of periodic tilings with prescribed transitivity properties".
In preparation.
- [10] A.W.M. Dress & D.H. Huson
"On tilings of the plane".
Geometriae Dedicata, 24 (1987), 295–310.
- [11] A.W.M. Dress & R. Scharlau
"Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen".
Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen, 164, Coxeter-Festschrift (1984).
- [12] A.W.M. Dress & R. Scharlau
"The 37 combinatorial types of minimal non-transitive, equivariant tilings of the Euclidean plane".
Disc. Math., 60 (1984), 121–138.
- [13] R. Franz & D.H. Huson
"The classification of quasi-regular polyhedra of genus 2".
To appear in: The Journal of Discrete and Computational Geometry.
- [14] Branko Grünbaum & G.C. Shephard
"The eighty-one types of isohedral tilings of the plane".
Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 177–196.
- [15] Branko Grünbaum & G.C. Shephard
"Tilings and Patterns".
W.H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [16] Branko Grünbaum, H.D. Löckenhoff, G.C. Shephard & A. Temesvari
"The enumeration of normal 2-homeohedral tilings".
Geometriae Dedicata, 19 (1985), 177–196.
- [17] H. Heesch
"Reguläres Parkettierungsproblem".
Westdeutscher Verlag, Cologne, 1968.
- [18] D.H. Huson
"Die Klassifikation 2-isohedraler Pflasterungen der euklidischen Ebene".
Diplomarbeit, Bielefeld, 1986.
- [19] D.H. Huson
"Patches, Stripes and Net-Like Tilings".
Dissertation, Bielefeld, 1989.
- [20] R. Scharlau
"Geometrical realizations of shadow geometries".
Proc. London Math. Soc., 3 (1990), 615–656.

TABLE 1

Here we list, in a compact way, all 117 classes of Heaven and Hell tilings. Each line i encodes precisely one type of tiling, HHi . In such a line, the letter M indicates that the encoded tiling is maximal. If switching the colors black and white leads to a new Heaven and Hell tiling, then the line is marked C if the tiling is equivalent to the original one and S if it is not. We also indicate the crystallographic type of the symmetry group of the tiling. Each line contains a list of numbers encoding the corresponding Delaney symbol.

Consider the following example, line 11 encoding $HH11$: 11 MC p4g 2 3 5 6, 1 3 4 6, 4 5 6:3 3, 4 8

The tiling is maximal (M) and switching colors leads to the same type of tiling (C). The symmetry group is of type $p4g$. The numbers up to the first comma, 2 3 5 6, define σ_0 , the second set of numbers 1 3 4 6, defines σ_1 and the third set 4 5 6, defines σ_2 . The highest number that appears in the three sets determines $\#D$, hence in this example $D = \{1, 2, \dots, 6\}$. We define σ_0 by going through the numbers 1, 2, ..., 6 and defining σ_0 on the next number i , which has not yet been considered, as the next number in the list 2 3 5 6, which has not yet been considered. In the example, $\sigma_0(1) = 2$, $\sigma_0(3) = 3$, $\sigma_0(4) = 5$ and $\sigma_0(6) = 6$. Similarly: $\sigma_1(1) = 1$, $\sigma_1(2) = 3$, $\sigma_1(4) = 4$, $\sigma_1(5) = 6$, $\sigma_2(1) = 4$, $\sigma_2(2) = 5$ and $\sigma_2(3) = 6$.

The numbers between the colon and the comma define the values of m_{01} on the $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbits of D (in lexicographical order) and the numbers following the comma define m_{12} on the different $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbits. In the example m_{01} equals 3 on the elements of both $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbits, whereas m_{12} equals 4 on the two elements of the $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbit $\{1, 4\}$ and equals 8 on the four elements of the second $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbit.

TABLEAU 1

Nous dressons ici une liste concise des 117 classes de pavages d'anges et de diables. Chaque ligne i représente précisément un type de pavage, HHi . Dans une telle ligne, la lettre M indique que le pavage encodé est maximal. Si l'inversion des couleurs noire et blanche produit un nouveau pavage d'anges et de diables, la ligne est alors marquée d'un C si le pavage est équivalent au pavage original et d'un S si ce n'est pas le cas. On indique également le type cristallographique du groupe de symétrie du pavage. Chaque ligne contient une liste de nombres encodant le symbole de Delaney correspondant.

Considérons, par exemple, la ligne 11 encodant $HH11$: 11 MC p4g 2 3 5 6, 1 3 4 6, 4 5 6:3 3, 4 8

Le pavage est maximal (M) et l'inversion des couleurs mène au même type de pavage (C). Le groupe de symétrie est du type $p4g$. Les nombres apparaissant avant la première virgule, 2 3 5 6, définissent σ_0 , le deuxième ensemble de nombres, 1 3 4 6, définit σ_1 et le troisième ensemble, 4 5 6, définit σ_2 . Le nombre le plus élevé apparaissant dans les trois ensembles détermine $\#D$; ainsi, dans cet exemple, $D = \{1, 2, \dots, 6\}$. On définit σ_0 en parcourant les nombres 1, 2, ..., 6 et en définissant σ_0 sur le nombre suivant i qui n'a pas déjà été considéré, comme le nombre suivant dans la liste 2 3 5 6, non déjà considéré. Dans notre exemple, $\sigma_0(1) = 2$, $\sigma_0(3) = 3$, $\sigma_0(4) = 5$ et $\sigma_0(6) = 6$. De façon similaire: $\sigma_1(1) = 1$, $\sigma_1(2) = 3$, $\sigma_1(4) = 4$, $\sigma_1(5) = 6$, $\sigma_2(1) = 4$, $\sigma_2(2) = 5$ et $\sigma_2(3) = 6$.

Les nombres se situant entre les deux-points et la virgule définissent les valeurs de m_{01} sur les $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbites de D (en ordre lexicographique) et les nombres suivant la virgule définissent m_{12} sur les différentes $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbites. Dans l'exemple, m_{01} est égal à 3 sur les éléments des deux $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ -orbites, tandis que m_{12} est égal à 4 sur les deux éléments de la $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbite $\{1, 4\}$ et est égal à 8 sur les quatre éléments de la seconde $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ -orbite.

TABLE 2

The partially ordered set (Delaney symbols of) Heaven and Hell tilings corresponding to the relation of symmetry breaking.

TABLEAU 2

L'ensemble partiellement ordonné de (symboles de Delaney de) pavages d'anges et de diables selon la relation de bris de symétrie.

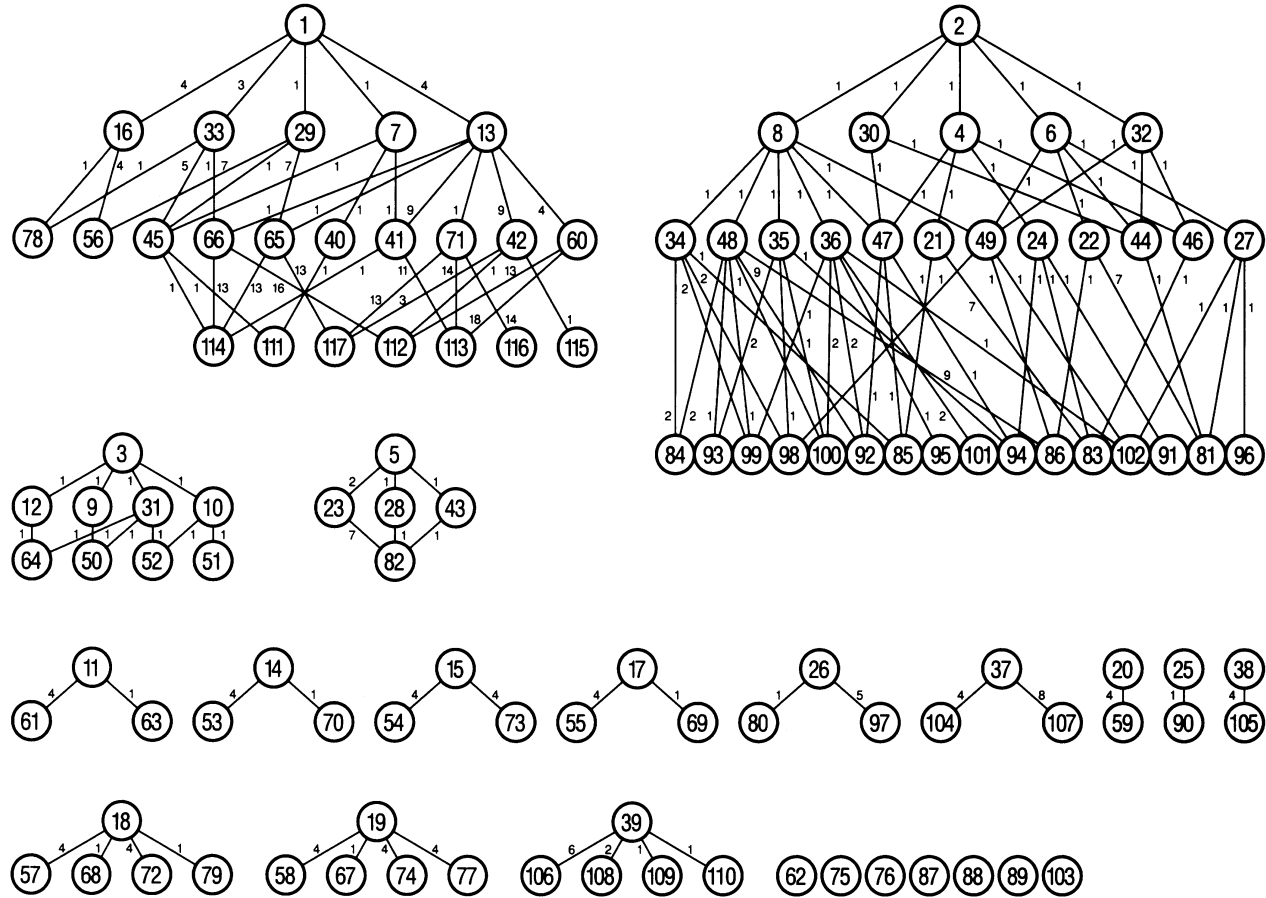


TABLE 3

For each type of isohedral tiling IH_n ($1 \leq n \leq 93$, c.f. [14]), we list the types of Heaven and Hell tilings HH_x that are derivable from it.

TABLEAU 3

Pour chaque pavage isoédrique IH_n ($1 \leq n \leq 93$, voir [14]), on énumère tous les types de pavages d'anges et de diables HH_x qu'on peut déduire de celui-ci.

IH	H & H	IH	H & H	IH	H & H	IH	H & H	IH	H & H	IH	H & H
1	52 114	17	13	33	59 82	49	100	65	36	81	67
2	112	18	33	34	43	50	95	66	48	82	19
3	51 113	19	3 7	35	20 28	51	93	67	35	83	66
4	117	20	1	36	23	52	86	68	21	84	65
5	115	21	62 87 88 103	37	5	53	91	69	24	85	71
6	116	22	109	38	69	54	75 101	70	18 27	86	60
7	50 64 90 105 111	23	108	39	55	55	57 81	71	22	87	78
8	65	24	110	40	17	56	68 72 96	72	8	88	56
9	60	25	106	41	85	57	47	73	32	89	33
10	31 45	26	39	42	99	58	48	74	4	90	29
11	29	27	61 107	43	84	59	46	75	6	91	13
12	66	28	63 89 104	44	83	60	49	76	2	92	16
13	71	29	11 37	45	98	61	44	77	76	93	1
14	10 41	30	70 73 97	46	94	62	30	78	74		
15	42	31	53 54 80	47	92	63	32	79	58		
16	9 12 25 38 40	32	14 15 28	48	79 102	64	34	80	77		