ON THE COHOMOLOGY OF IMPOSSIBLE FIGURES

LA COHOMOLOGIE DES FIGURES IMPOSSIBLES

Roger Penrose
Mathematical Institute
Oxford, U.K.

ABSTRACT

The close relationship between certain types of impossible figure and the mathematical idea of cohomology is explained in relation to the tribar and to another type of impossible figure related to the Necker cube.

RÉSUMÉ

On explique ici le lien étroit entre certains types de figures impossibles et la notion mathématique de cohomologie en relation avec la tripoutre et avec un autre type de figures impossibles lié au cube de Necker.

In a recent article [3], presented in honour of M.C. Escher, I hinted at a relationship between cohomology and certain types of impossible figure. It is the purpose of this note to explain this relationship more fully.

I shall be concerned with the concept of **first** cohomology group

$$H^1(Q,G)\,; \qquad (1)$$

the basic meaning of this concept should emerge during the course of the discussion. Here Q is some (non-simply-connected) region of the plane—which I shall take to contain the "support" (i.e. the region of the plane where the drawing occurs) of some impossible figure—and G is a (normally Abelian) group which I shall refer to as the **ambiguity group** of the figure. (For those readers not familiar

Dans un récent article [3], dédié à la mémoire de M.C. Escher, j'avais fait allusion à un lien entre la cohomologie et certains types de figure impossible. Je compte expliquer ici ce lien plus en détail.

Je m'intéresserai au concept de **première** cohomologie

$$H^1(Q,G)\,; \qquad (1)$$

la signification fondamentale de ce concept devrait émerger à la lecture du texte. Ici, Q est une certaine région (non simplement connexe) du plan — qui contiendra le «support» (c'est-à-dire, la région du plan où le dessin apparaît) d'une figure impossible — et G est un groupe (normalement abélien) que je nommerai **groupe d'ambiguïté** de la figure. (Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers avec la notion mathématique de groupe, on peut spécifier que G est tout

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

with the mathematical concept of a group, it may be taken that G is just some set of numbers closed under multiplication and division. Thus if a and b belong to G, then so do ab and a/b.) To fix ideas, let us consider two examples. The first is the tribar, illustrated in **Figure 1**. Here, Q can be taken to be, say, the region of the plane (paper) on which the tribar is actually drawn, or else some slightly larger region such as the annular region depicted in **Figure 2**. In the second example, illustrated in **Figure 3**, I have drawn a version of the impossible figure that I introduced in my earlier article.

Consider first the tribar. We may regard the region Q as being pasted together from three smaller regions Q_1, Q_2, Q_3, as indicated in **Figure 4**. There are overlapping parts of Q_1, Q_2, Q_3, which are to be pasted together.

The drawing on each of Q_1, Q_2, Q_3, is a perfectly consistent rendering of a three-dimensional structure which is unambiguous in its natural interpretation—except for the essential ambiguity present in

simplement un certain ensemble de nombres fermé sous la multiplication et la division. Ainsi, si a et b appartiennent à G, alors il en va de même de ab et de a/b.). Pour y voir plus clair, considérons deux exemples. Le premier est la tripoutre dont l'illustration est à la **figure 1**. Ici, Q peut être considéré comme, disons, la région du plan (papier) sur laquelle la tripoutre est réellement dessinée, ou une région légèrement plus grande comme la région annulaire décrite à la **figure 2**. Dans le second exemple, illustré à la **figure 3**, j'ai dessiné une version d'une figure impossible déjà présentée dans mon article précédent.

Considérons, tout d'abord, la tripoutre. On peut considérer la région Q comme le résultat du collage de trois régions plus petites, Q_1, Q_2, Q_3, comme l'indique la **figure 4**. On doit coller les parties de Q_1, Q_2 et de Q_3 qui se chevauchent. Les dessins apparaissant sur Q_1, Q_2 et Q_3 sont des reflets parfaitement logiques de structures tridimensionnelles et sont vides d'ambiguïté dans leur interprétation naturelle — sauf, en ce qui concerne l'ambiguïté essentielle présente

FIGURE 1

An impossible figure—the tribar—drawn with perspective.

Une figure impossible–la tripoutre–dessinée en perspective.

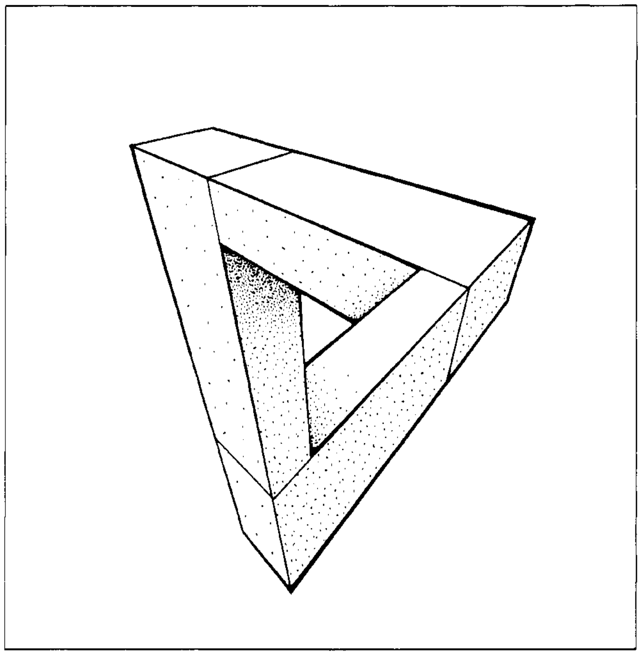
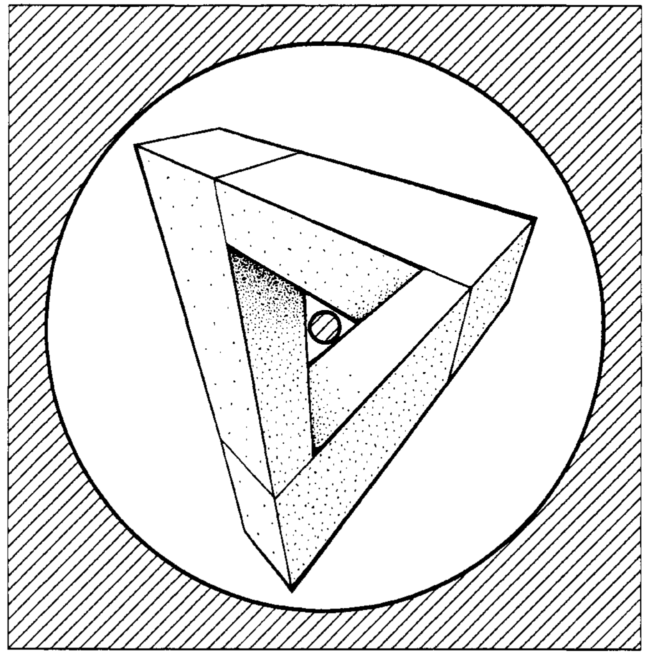


FIGURE 2

The tribar can be drawn on an annular region of the plane, having non-trivial topology.

La tripoutre peut être dessinée dans une région annulaire du plan, possédant une topologie non-triviale.



all pictures: one does not know the **distance** away from the observer's eye that the object being depicted is supposed to be situated (**Figure 5**). Of course there are always other ambiguities, such as the fact that the picture could be depicting a **picture** of another picture, for example, rather than a three-dimensional object (a feature that Escher often put to paradoxical use. See, for example in his lithograph 'Drawing Hands' or woodcut 'Three Spheres I'). I am excluding this and other possible ambiguities here by my use of the phrase "natural interpretation". This distance can be described in terms of positive real numbers d, the set of all positive real numbers being denoted by $\mathbb{R}^+$. I am thinking of $\mathbb{R}^+$ as a multiplicative (Abelian) group, so in this case we have the ambiguity group $G = \mathbb{R}^+$. Let us see how this comes about.

Consider the portion of the figure drawn in region Q_1, and fix a point A_{12} on this portion where it overlaps with Q_2 and a point A_{13} on it where it overlaps with Q_3. Let A_{21} be that point of the figure, as drawn on Q_2, which is to be matched with the point A_{12} on Q_1, and

dans toute représentation graphique : on ne connaît pas la **distance** entre l'oeil de l'observateur et l'objet à représenter (**figure 5**). Naturellement, il y a toujours d'autres ambiguïtés, telles le fait que le dessin peut représenter, par exemple, le **dessin** d'un autre dessin plutôt qu'un objet tridimensionnel (un artifice qu'Escher pousse souvent jusqu'à une utilisation paradoxale, par exemple dans sa lithographie «Mains dessinant» et sa gravure sur bois «Trois sphères I»). J'exclus ceci, ainsi que toute autre ambiguïté possible, par l'utilisation de la périphrase «interprétation naturelle». Cette distance peut être décrite en termes de nombres positifs réels d ; l'ensemble de tous les nombres réels positifs étant noté par $\mathbb{R}^+$. On peut considérer $\mathbb{R}^+$ comme un groupe (abélien) multiplicatif ; ainsi, dans ce cas, nous avons le groupe d'ambiguïté $G = \mathbb{R}^+$. Voyons comment cela se produit.

Considérons la portion de figure dessinée dans la région Q_1, et déterminons sur cette portion un point A_{12} où elle chevauche Q_2 et un point A_{13} où elle chevauche Q_3. Soit A_{21} le point de la figure, telle que

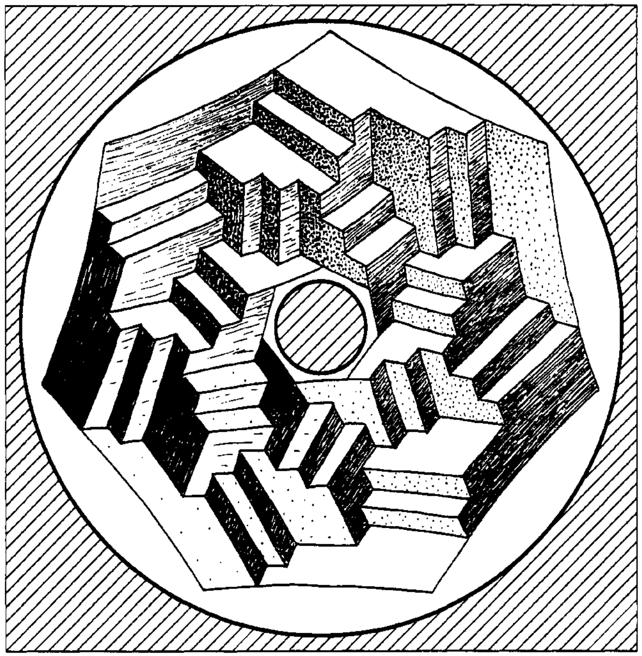


FIGURE 3

A more subtle impossible figure, with local $\mathbb{Z}_2$ ambiguity—again drawn on an annular region of the plane.

Une figure impossible plus subtile, avec ambiguïté locale $\mathbb{Z}_2$ — encore tracée sur une région annulaire du plan.

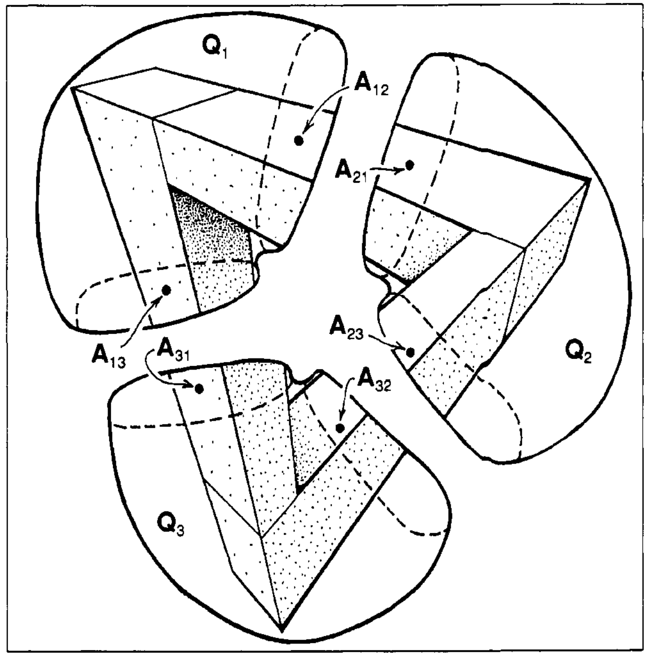


FIGURE 4

The tribar can be pieced together out of overlapping smaller drawings, each of which depicts a possible structure.

La tripoutre peut être reconstituée à partir de plus petits dessins se chevauchant, chacun de ces dessins représentant une structure possible.

similarly let A_{31} be the point on Q_3 which is to be matched with A_{13}. Finally, fix a point A_{23} on the part of the figure on Q_2 which is to be pasted to Q_3, and the corresponding point A_{32} on Q_3 which is to be matched with it. See **Figure 4** for the entire arrangement of points.

Let us suppose that there is an actual three-dimensional object O_1, which the drawing on Q_1 depicts and, similarly, actual objects O_2 and O_3 which the drawings on Q_2 and Q_3 depict (cf. **Figure 5**). The point on O_1 which is depicted by A_{12} may not be the same distance from the observer's eye E as the corresponding point on O_2, depicted by A_{21}. Let the ratio of these distances be d_{12}, and similarly for other pairs of matched points. Thus we have

$$d_{ij} = \frac{\text{distance from E to point on } O_i \text{ depicted by } A_{ij}}{\text{distance from E to point on } O_j \text{ depicted by } A_{ji}} \tag{2}$$

We note first that d_{ij} does not actually depend on the particular matched pair of points A_{ij}, A_{ji} that are chosen on the overlap between Q_i and Q_j. We get the same d_{ij} whichever such matching pair we choose. This d_{ij} represents the factor that we must move out by when we pass from O_j to O_i at the region of overlap. Note also that

$$d_{ij} = 1/d_{ji} \tag{3}$$

and that if we change our minds about the object O_i that is being depicted in Q_i —i.e. if we change its chosen distance from the observer's eye—then the pair (d_{ij},d_{ik}) is replaced according to

$$(d_{ij},d_{ik}) \rightarrow (\lambda d_{ij},\lambda d_{ik}), \tag{4}$$

for some positive number λ.

If, instead of the tribar, we had had some drawing of a figure which could be consistently realized in three-dimensional space, then we could move the objects O_1, O_2 and O_3 in and out until they all came together as one consistent structure. This amounts to the fact that by rescalings of the above type we can reduce the three ratios d_{12}, d_{23} and d_{31} simultaneously to 1. Another way of saying this is that there exist three (positive) numbers q_1, q_2, q_3 such that

$$d_{ij} = q_i/q_j \tag{5}$$

dessinée sur Q_2, qui s'ajustera au point A_{12} sur Q_1, et, de façon similaire, soit A_{31} le point sur Q_3 qui s'ajustera au point A_{13}. Finalement, déterminons un point A_{23} sur la partie de la figure de Q_2 qui doit être collé à Q_3, et le point correspondant A_{32} sur Q_3 qui doit lui être ajusté. Consultez la **figure 4** pour la disposition générale des points.

Supposons qu'il existe un réel objet tridimensionnel O_1, qui est représenté par le dessin sur Q_1 et, de façon semblable, de réels objets O_2 et O_3 représentés par les dessins sur Q_2 et Q_3 (voir **figure 5**). Le point de O_1 qui est représenté par A_{12} peut ne pas être à la même distance de l'oeil de l'observateur E que le point correspondant de O_2, représenté par A_{21}. Appelons d_{12}, le quotient de ces distances, et procédons de la même façon pour les autres paires de points correspondants. Ainsi, nous avons

$$d_{ij} = \frac{\text{distance de E au point de } O_i \text{ représenté par } A_{ij}}{\text{distance de E au point de } O_j \text{ représenté par } A_{ji}} \tag{2}$$

On remarque, tout d'abord, que d_{ij} ne dépend pas du choix de la paire particulière A_{ij}, A_{ji} de points correspondants qui appartiennent au chevauchement de Q_i et Q_j. On obtiendra la même valeur de d_{ij} quelle que soit la paire correspondante choisie. Ce d_{ij} représente le facteur de déplacement nécessaire lorsqu'on passe de O_j à O_i dans la région du chevauchement. On note aussi que

$$d_{ij} = 1/d_{ji} \tag{3}$$

et que si l'on change d'idée au sujet de l'objet O_i qui est dépeint sur Q_i — c'est-à-dire, si l'on modifie sa distance choisie à partir de l'oeil de l'observateur — alors la paire (d_{ij},d_{ik}) est remplacée selon

$$(d_{ij},d_{ik}) \rightarrow (\lambda d_{ij},\lambda d_{ik}), \tag{4}$$

pour un certain nombre positif λ.

Si, au lieu de la tripoutre, nous avions eu le dessin d'une figure pouvant être réalisée de façon conséquente dans l'espace tridimensionnel, alors nous aurions pu déplacer les objets O_1, O_2 et O_3 jusqu'à ce qu'ils se confondent en une structure logique. Cela se ramène au fait for each different i,j. In the terminology of cohomology theory, a collection $\{d_{ij}\}$ is, in the general case, referred to as a **cocycle**. If (5) holds, the cocycle is called a **coboundary**. The replacement (4) provides the **coboundary freedom**, and we regard two cocycles as **equivalent** if one can be converted to the another under this freedom. Under this equivalence, we obtain the **cohomology group elements**, i.e. the elements of

$$H^1(Q,\mathbb{R}^+). \qquad (6)$$

The coboundaries provide the **unit** element of (6), and we see from the above discussion that the test for whether or not the figure depicted in Q is "impossible" is whether or not the resulting element of (6) is indeed the unit element.

I have been discussing impossible figures of the kind which I described earlier [3] as "pure", i.e. for which the only local ambiguity in the figure is the **distance** from the observer's eye of the object being depicted. Often there are other relevant ambiguities. For the type of impossible figure depicted in **Figure 3**, the relevant ambigu-

qu'à l'aide de réduction d'échelle du type ci-dessus on puisse diminuer simultanément les trois rapports d_{12}, d_{23} et d_{31} à 1. On peut dire aussi qu'il existe trois nombres (positifs) q_1, q_2 et q_3 tels que

$$d_{ij} = q_i/q_j \qquad (5)$$

pour chaque paire i,j. Si on utilise la terminologie de la théorie de la cohomologie, la collection $\{d_{ij}\}$ est généralement associée à un **cocycle**. Si l'énoncé (5) est vérifié, le cocycle est appelé une **cofrontière**. La transformation (4) fournit la **liberté de cofrontière**, et on considère les cocycles comme **équivalents** s'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre sous cette liberté. Sous cette équivalence, on obtient les **éléments du groupe de cohomologie**, c'est-à-dire, les éléments de

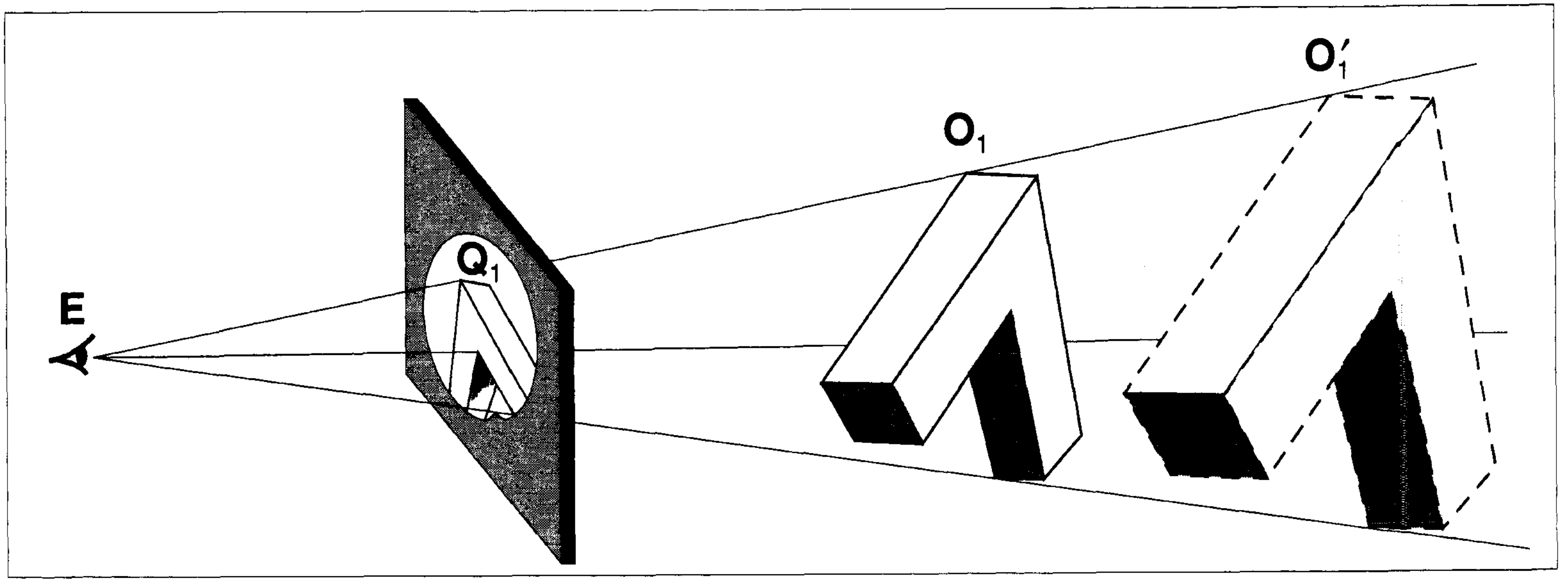
$$H^1(Q,\mathbb{R}^+). \qquad (6)$$

Les cofrontières fournissent l'élément **unité** de (6), et on peut comprendre de la présentation précédente que le test permettant de déterminer si la figure représentée en Q est «impossible» ou non est basé sur le fait que l'élément résultant de (6) est en réalité l'élément unité ou non.

FIGURE 5

There is a local $\mathbb{R}^+$ ambiguity, in any plane drawing, in the uncertainty as to the distance away of the object depicted.

Dans toute représentation plane, il y a une ambiguïté locale $\mathbb{R}^+$ en raison de l'incertitude concernant la distance de l'objet représenté.



RÉFÉRENCES
REFERENCES

[1] P. Griffiths and J. Harris
Principles of Algebraic Geometry.
John Wiley & Sons Inc., New York (1978).

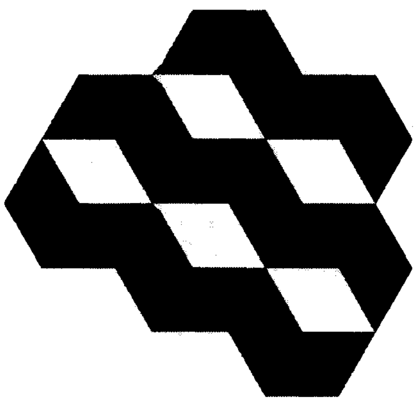
[2] L.S. Penrose and R. Penrose
"Impossible objects: a special type of visual illusion".
Brit. J. Psych. 49 (1958), 31–33.

[3] R. Penrose
"Escher and the visual representation of mathematical ideas".
In "M.C. Escher: Art and Science", (Eds. H.S.M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose and M.L. Teuber; North Holland, Amsterdam (1986), 143–157.

FIGURE 6

The Necker cubes, with $\mathbb{Z}_2$ ambiguity.

Les cubes de Necker, avec une ambiguïté $\mathbb{Z}_2$.



ity is that of the "Necker cube", see **Figure 6**. Here the ambiguity is just a twofold one, and we can use the numbers +1 and −1 in place of the distance ratios d_{ij} defined in (2), where +1 means that the depicted three-dimensional object O_i **agrees** with O_j where the drawings overlap, and −1 means that the objects **disagree**. The discussion proceeds exactly as before, except that d_{ij}, λ and q_i now all belong to $\mathbb{Z}_2$ (the multiplicative group consisting of +1 and −1 alone), and the cohomology group element we obtain belongs to

$$H^1(Q,\mathbb{Z}_2). \tag{7}$$

If we cut **Figure 3** into three pieces analogous to those of **Figure 4** and follow the corresponding procedure through, we indeed find an element of (7) which is **not** the unit element, whereas if **Figure 3** has been drawn "consistently". (With a hexagon—or, indeed, an octagon—at the centre of **Figure 3**, rather than a heptagon, the unit element would have been obtained.) I leave the detailed verification of these facts to the interested reader.

More complicated figures with "multiple impossibilities" (see, e.g. [2]) can also be analyzed in this way, but for this we should require a more complete description of what a (Cech) cohomology group actually is. In general, the figure would need to be divided up into more than three pieces, but the essential idea is the same as before. (The reader is referred to [1], p.34, for further information.) I believe that considerations such as these may open up intriguing possibilities for further exotic types of impossible figure. I hope to be able to consider such matters at a later date.

Nous avons discuté des figures impossibles d'un type que j'ai précédemment [3] décrit comme «pur», c'est-à-dire pour lequel la seule ambiguïté locale dans la figure est la **distance** entre l'oeil de l'observateur et l'objet représenté. Souvent d'autres ambiguïtés sont présentes. Pour le type de figure impossible représentée par la **figure 3**, l'ambiguïté est celle du «cube de Necker», voir la **figure 6**. Ici, l'ambiguïté est double, et on peut utiliser les nombres +1 et −1 en lieu et place des quotients de distances d_{ij} définis en (2), où +1 signifie que l'objet tridimensionnel représenté O_i est en **accord** avec O_j où les dessins se chevauchent, et −1 signifie que les objets sont en **désaccord**. L'argumentation se déroule exactement comme plus haut, sauf que d_{ij}, λ et q_i appartiennent tous ici à $\mathbb{Z}_2$ (le groupe multiplicatif constitué des seuls éléments +1 et −1), et l'élément du groupe de cohomologie que l'on obtient appartient à

$$H^1(Q,\mathbb{Z}_2). \tag{7}$$

Si l'on coupe la **figure 3** en trois parties analogues à celles de la **figure 4** et qu'on suive jusqu'au bout la procédure correspondante, on trouve en effet un élément de (7) qui n'est **pas** l'élément unité, alors que si la **figure 3** avait été dessinée de façon «logique». (Avec un hexagone — ou encore, un octogone — au centre de la **figure 3**, au lieu d'un heptagone, alors on aurait obtenu l'élément unité). Je laisse la vérification détaillée de ces faits au lecteur intéressé.

On peut également de cette façon procéder à l'analyse de figures plus complexes comportant de «multiples impossibilités» (voir [2]), mais, pour cela, on a besoin d'une description plus complète de ce qu'est réellement un groupe de cohomologie (de Cech). En général, il est nécessaire de diviser la figure en plus de trois pièces, mais l'idée essentielle demeure la même. (Le lecteur pourra consulter [1] pour plus d'informations.) Je crois que de telles considérations peuvent ouvrir la voie à de fascinantes possibilités pour des types de figures impossibles encore plus exotiques. J'espère être en mesure d'aborder de tels sujets plus tard.