

模糊排序的次序逆轉機率之衡量

陳垣瀆*

摘 要

關鍵詞：模糊排序、次序逆轉、 α -cut、三角模糊數

本文主要貢獻在於提出模糊排序的次序逆轉機率(Rank Reversal Probabilities)衡量方法，解決評估結果排序穩定度(Ranking Stability)的衡量問題。針對三角模糊數(Triangular Fuzzy Numbers, TFN)嘗試利用 α -cut 排序法推導出次序逆轉機率的衡量公式，並建立次序穩定矩陣(Rank Stable Matrix)，用以衡量評估排序結果的穩定程度。本研究發現三角模糊數的成對比較有 27 種可能的排列組合，其中僅有 10 種組合會發生次序逆轉現象，並依其特性將之區分為左邊逆轉型(left-side rank reversal type)、右邊逆轉型(right-side rank reversal type)及雙邊逆轉型(both-side rank reversal type)三種類型，且其次序逆轉機率衡量公式各異。最後，本研究再以實例分析，以應證本方法確具一般性及可應用性。

* 作者係中興大學應用經濟學系博士班研究生。

模糊排序的次序逆轉機率之衡量

陳垣瀉

壹、前言

政府部門的公共投資計畫執行績效的評估，係一多目標、多準則、多方案、多人參與的決策評估問題。基於評估層面的複雜性與資訊的不完全性，因此自從 1965 年 Zadeh 提出模糊集合理論(Fuzzy sets theory)以來，已有相當多的學者將模糊理論應用在多準則決策方法(Multi-criteria Decision Making, MCDM)來進行計畫績效之評估，使其評估結果能做更周延的表達。

惟由於以模糊績效值不易比較各計畫的相對優勢，在考量決策環境變化的情況下，以 α -cut 解模糊化並比較模糊集合(fuzzy sets)或模糊數(fuzzy numbers)，以進行方案的排序(Ranking)，是相當普遍的一種解模糊化(defuzzication)方法。而在解模糊並進行比較的過程中，隨著各計畫方案間相對優勢的變化，可能會發生次序逆轉(Rank Reversal)的情況，惟其次序逆轉發生的條件為何？次序逆轉的機率如何衡量？是一個相當有趣的問題，迄待學者進一步深入探討。

由於多方案的排序結果涉及資源分配與決策選擇，因此排序結果的可信賴程度為何是相當重要的參考依據。當次序逆轉機率很高時，表示該排序結果可能是不穩定的，決策者應審慎解讀，因其中可能隱含高的排序錯誤可能性；反之，當排序穩定度很高時，則表示其排序結果是可信賴的。

本文主要研究目的在於發展計畫模方案的糊績效值之次序逆轉衡量方法，解決評估結果穩定度的衡量問題。針對三角模糊數(Triangular Fuzzy Numbers, TFN)嚐試利用 α -cut 排序法推導出次序逆轉機率的衡量公式，並建立次序穩定矩陣，用以衡量評估結果的穩定程度。



貳、相關研究

模糊理論以隸屬函數(membership function)表示事件的模糊集合，較傳統的二值邏輯(Two-value Logic)更能表現出事件的特性，但某些情況之下，學者仍希望能得到模糊集合的明確值，以方便計算及比較，而將模糊集轉換成一個明確值有許多不同的方法，較常使用的包括：1.重心法(center of gravity method)；2.面積中心法(center of area method)；3.最大值平均法(mean of maxima method)，及4. α 截線法(α -cut method)等四種。由於前三種方法僅能獲得有限的資訊，而第四種方法可藉 α 值的設定以進行敏感性分析(Sensitivity Analysis)，故為學者所樂於採用。

Adamo(1980)利用 α -cut的概念，對模糊集合提出 α -偏好指標(α -preference index)，以 α 值為可接受門檻(acceptance threshold)，將決策者對於模糊集合最小可接受的程度設定為 α ， α -cut值越高，代表可接受的程度越高。惟其研究並未能得到合理的排序結果，例如計畫的績效值以模糊集合表示時，當 $\alpha > 0.5$ ，計畫A $>$ 計畫B， $\alpha = 0.5$ ，計畫A = 計畫B， $\alpha < 0.5$ ，計畫A $<$ 計畫B，由於其評估結果不具一致性(inconsistency)，因此，Buckley & Chanas(1987)修正Adamo的方法，提出更嚴格的條件來界定計畫模糊集合的大小排序，即在 α 水準(α level)下，若方案A大於方案B，則方案A的左限值(即最小值)必須大於方案B的右限值(即最大值)。

Buckley & Chanas提出的方法，在某些例子中仍會有不一致的問題產生，而缺乏排序的識別能力，例如在 $\alpha = 0.5$ ，A計畫的最小值大於B計畫的最大值，但在 $\alpha = 0.3$ 時，卻變成B計畫的最小值大於A計畫的最大值，因此我們仍然無法獲知那個計畫的模糊績效值較佳。

Mabuchi(1988)有鑑於利用單一 α 值會造成排序的不一致結果，因此認為應以多個 α -cut值來進行排序，將模糊集合的比較轉換成函數型態的指標 $J_{AB}(\alpha)$ ，俾以說明計畫

間的優勢程度(degree of dominance)。其做法是將兩個模糊數相減，就其在 α 水準時所得的模糊集合區間上限與下限的和(為分母)與差(為分子)加以運算，所得到的 $J_{AB}(\alpha)$ ，即為計畫 A 優於計畫 B 的程度，越高的 $J_{AB}(\alpha)$ 值代表越強的優勢程度，由多個 α 與 $J_{AB}(\alpha)$ 共同構成的 $\alpha - J_{AB}$ 曲線，即可進行計畫相對優勢排序。惟雖然其排序結果具一致性，但對於次序逆轉的內涵與決策者的態度影響仍未能有效解釋。

Mon *et al.*(1994)利用 α -cut的概念，更進一步提出樂觀指標 λ (index of optimism)，整合模糊區間(fuzzy interval)的左右極限值，使模糊運算變的更為容易，並模擬不同的樂觀程度對計畫排序的影響。徐村和(1998)與張有恆(1998)，除將 λ 值設定為悲觀指標(index of pessimism)外，亦利用 α 及 λ 兩個參數整合評估者的意見，進行敏感性分析，並發現不同的 α 及 λ 之參數值，會有不同的排序結果及次序逆轉的現象。顯示計畫評估結果所得的模糊數，在進行排序比較前，本身即隱含著次序逆轉的可能性，但對於次序逆轉的機率尚無法確切得知。

由上述相關研究可知，Mabuchi 已知 α -cut 解模糊化會發生次序逆轉的現象，而 Mon 等學者更考量到評估者的態度傾向會影響排序，惟在何種情況下會發生次序逆轉，其條件為何？次序逆轉的類型有那些？計畫間發生次序逆轉的機率為何？甚至整個評估排序結果的穩定度如何？由於窺之相關研究皆未見深入探討，故本研究將針對這些問題，以三角模糊數為對象，利用 α -cut 法逐步推導出上述答案，冀期能有所突破，並對決策者提供更完整資訊。

參、理論推導

假設有 m 個計畫方案的模糊績效值擬進行相對優勢比較，並以 α -cut 法進行績效排序。為能了解次序逆轉可能發生的情況，以及如何判斷與衡量次序逆轉發生的機率，本節將分成 α -cut 的解模糊化、計畫績效的比較與次序逆轉的條件、次序逆轉的類型、次

序逆轉機率的衡量，以及評估結果穩定度與排序等五部份來說明。

一、 α -cut 的解模糊化

當計畫方案的績效值以三角模糊數 $\tilde{v} = (v_L, v_M, v_R)$ 表示時，該三角模糊數的隸屬函數 (membership function) 可表示為¹：

$$\mu_{\tilde{v}}(x) = \begin{cases} 0, & x < v_L \\ \frac{x - v_L}{v_M - v_L}, & v_L \leq x \leq v_M \\ \frac{v_R - x}{v_R - v_M}, & v_M \leq x \leq v_R \\ 0, & x > v_R \end{cases} \quad (1)$$

在計畫方案的模糊績效值以三角模糊數表示的情況下，由於無法直接從三角模糊數比較計畫之間的相對優勢情形，以及為了讓決策者了解不同的模糊水準及樂觀水準之下，各項計畫績效的排序情形，因此，本研究乃採取 α -cut 法，進行計畫方案績效值的解模糊化。

為能以 α -cut 進行計畫的模糊績效值的排序，首先，可定義一個計畫方案的模糊績效值 \tilde{v} 集合，其 α 水準的集合 (α -level set)² 為：

$$\tilde{v} = \{v \in \tilde{v} \mid \mu(v) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1] \quad (2)$$

¹ 參閱 Mon, D.L., Chang, C.H. and Lin, J.C., 1994, P.128.

² 參考 Chen & Hwang, 1992, P.166。

(2)式中的 α 可定義為模糊參數(fuzzy parameter)，表示群體評估意見的不確定程度³，且 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。而在 α 水準以上的 \tilde{v} 集合，即代表該計畫績效值可能的數值空間集合。

針對每項計畫的模糊績效值 \tilde{v} ，依據(3)式及(4)式，可找出不同 α 水準下的左端點值 $v_L(\alpha)$ 及右端點值 $v_R(\alpha)$ ：

$$v_L(\alpha) = v_L + \alpha(v_M - v_L) \tag{3}$$

$$v_R(\alpha) = v_R - \alpha(v_R - v_M) \tag{4}$$

圖 1 即為該三角模糊數與 α -cut 下的左右端點關係之示意圖⁴。當 α 值等於 1 時，左端點值等於右端點值，隨著 α 值的改變，其左右端點值均將隨之而異。

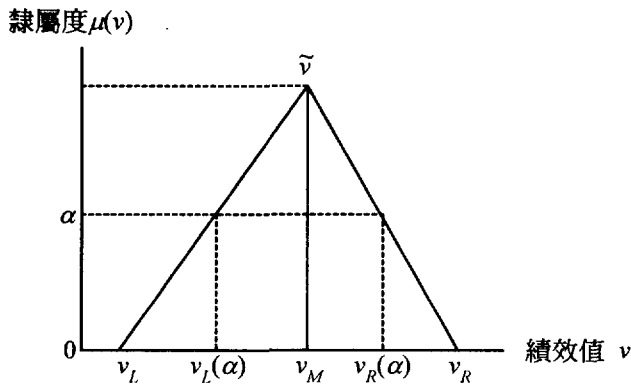


圖 1 三角模糊數與 α -cut 之關係

因此，對於上述三角模糊數 α -cut 的信賴區間可定義為：

³ 參閱張有恆，民國 87 年，第 189 頁。

⁴ 參閱 Liou & Wang, 1994, P.157.



$$\tilde{v}(\alpha) = [v_L(\alpha), v_R(\alpha)] = [v_R + \alpha(v_M - v_L), v_R - \alpha(v_R - v_M)] \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (5)$$

其次，由於無法直接從區間值進行比較，故本研究再考慮群體決策的樂觀指標 λ ，採用線性凸集合組合(convex combination)方式進行解模糊化，如(6)式所示：

$$\tilde{v}(\alpha, \lambda) = (1 - \lambda)v_L(\alpha) + \lambda v_R(\alpha) \quad (6)$$

(6)式中 λ 為樂觀指數(index of optimism)，表示決策者的樂觀程度，且 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。將(5)式代入(6)式中，經整理可得計畫績效值函數⁵：

$$v(\alpha, \lambda) = (1 - \alpha)(1 - \lambda)v_L + \alpha v_M + (1 - \alpha)\lambda v_R \quad (7)$$

由(7)式可知，當 $\alpha = 0$ 時，即 $\tilde{v}(\alpha = 0, \lambda) = (1 - \lambda)v_L + \lambda v_R$ ，此時為高度模糊的完全不確定性情況；當 $\alpha = 1$ 時，即 $\tilde{v}(\alpha = 1, \lambda) = v_M$ ，此時為不具模糊性的完全確定情況；當 $\lambda = 0$ 時，為完全悲觀狀態，則 $\tilde{v}(\lambda = 0) = v_L(\alpha)$ ，此時相當採用 *min* 原則；當 $\lambda = 1$ 時，為完全樂觀狀態，則 $\tilde{v}(\lambda = 1) = v_R(\alpha)$ ，此時相當採用 *max* 原則。

依據(7)式，本研究即可求出在不同樂觀程度 λ 與不同模糊水準 α 下各項計畫的績效值，以明確值進行各計畫績效優勢排序。

二、計畫績效的比較與次序逆轉的條件

依(7)式亦可知，第 i 計畫 $\tilde{v}_i = (v_{iL}, v_{iM}, v_{iR})$ 的績效值函數可表示為：

$$v_i(\alpha, \lambda) = (1 - \alpha)(1 - \lambda)v_{iL} + \alpha v_{iM} + (1 - \alpha)\lambda v_{iR} \quad (8)$$

第 j 計畫 $\tilde{v}_j = (v_{jL}, v_{jM}, v_{jR})$ 的績效值函數可表示為：

⁵ 從(7)式起至(45)式皆為本研究所新推導之公式。

$$v_j(\alpha, \lambda) = (1 - \alpha)(1 - \lambda)v_{jL} + \alpha v_{jL} + (1 - \alpha)\lambda v_{jR} \tag{9}$$

當 $\alpha = 1$ 時， i 計畫與 j 計畫的績效值即為其三角模糊數之端點，分別為：

$$v_i(\alpha = 1, \lambda) = v_{iM} \tag{10}$$

$$v_j(\alpha = 1, \lambda) = v_{jM} \tag{11}$$

i 計畫與 j 計畫的常化解(Normalized Solution)為：

$$\hat{v}_i(\alpha = 1, \lambda) = \frac{v_{iM}}{v_{1M} + v_{2M} \cdots + v_{iM} \cdots + v_{jM} \cdots + v_{mM}} \tag{12}$$

$$\hat{v}_j(\alpha = 1, \lambda) = \frac{v_{jM}}{v_{1M} + v_{2M} \cdots + v_{iM} \cdots + v_{jM} \cdots + v_{mM}} \tag{13}$$

(12)式與(13)式即為 i 計畫與 j 計畫分別在全部 m 計畫中的績效相對優勢值。同理，當 $\alpha = 0$ 時， i 與 j 計畫的績效值即為兩極端值的線性組合，分別為：

$$v_i(\alpha = 0, \lambda) = (1 - \lambda)v_{iL} + \lambda v_{iR} \tag{14}$$

$$v_j(\alpha = 0, \lambda) = (1 - \lambda)v_{jL} + \lambda v_{jR} \tag{15}$$

此時， i 與 j 計畫在全部 m 計畫中的績效相對優勢值分別為：

$$\hat{v}_i(\alpha = 0, \lambda) = \frac{(1 - \lambda)v_{iL} + \lambda v_{iR}}{(1 - \lambda)(v_{1L} + v_{2L} \cdots + v_{iL} \cdots + v_{jL} \cdots + v_{mL}) + \lambda(v_{1R} + v_{2R} \cdots + v_{iR} \cdots + v_{jR} \cdots + v_{mR})} \tag{16}$$



$$\hat{v}_j(\alpha = 0, \lambda) = \frac{(1 - \lambda)v_{iL} + \lambda v_{iR}}{(1 - \lambda)(v_{1L} + v_{2L} \cdots + v_{iL} \cdots + v_{jL} \cdots + v_{mL}) + \lambda(v_{1R} + v_{2R} \cdots + v_{iR} \cdots + v_{jR} \cdots + v_{mR})} \quad (17)$$

在某一特定 $\bar{\lambda}$ 值下，若 $\alpha = 1$ 時， $\hat{v}_i(\alpha = 1, \bar{\lambda}) > \hat{v}_j(\alpha = 1, \bar{\lambda})$ ，且 $\alpha = 0$ 時， $\hat{v}_i(\alpha = 0, \bar{\lambda}) < \hat{v}_j(\alpha = 0, \bar{\lambda})$ ，其相對優勢排序未因 α -cut 解模糊過程而產生變化，初始排序與最終排序一致，並未發生次序逆轉現象，表示 $v_i > v_j$ ，即 i 計畫的績效值恆大於 j 計畫，反之亦然。

惟若在 $\alpha = 1$ 時， i 計畫的績效值大於 j 計畫，但在 $\alpha = 0$ 時， i 計畫的績效值卻小於或等於 j 計畫，顯示此時發生次序逆轉現象，亦即：

$$\hat{v}_i(\alpha = 1, \lambda) > \hat{v}_j(\alpha = 1, \lambda) \text{ 且 } \hat{v}_i(\alpha = 0, \lambda) \leq \hat{v}_j(\alpha = 0, \lambda) \quad (18)$$

上述情況可藉圖 2 說明如下⁶：

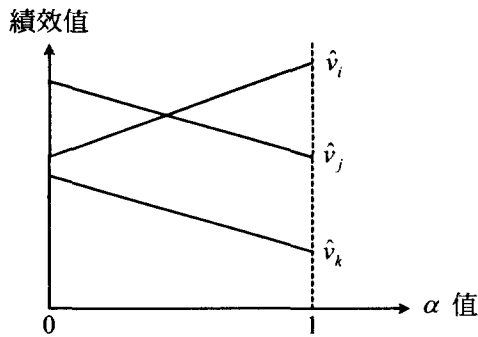


圖 2 α -cut 與計畫績效次序逆轉

⁶ 圖 2 至圖 9 資料來源：本研究整理。

圖 2 顯示 i 、 j 及 k 三個計畫績效的相對優勢值 \hat{v}_i 、 \hat{v}_j 及 \hat{v}_k ，隨著 α -cut 解模糊過程而產生相對優勢值的變化及排序上的變化。在 $\alpha = 1$ 時， $\hat{v}_i > \hat{v}_j > \hat{v}_k$ ，但在 $\alpha = 0$ 時， $\hat{v}_i < \hat{v}_j$ ，亦即 i 計畫與 j 計畫間發生次序逆轉現象，而 k 計畫與該兩項計畫間為次序穩定關係。

將(12)、(13)、(16)及(17)式代入(18)式，經計算整理後，其次序逆轉的條件可重新簡化表示為(分母部份略)：

$$v_{iM} > v_{jM} \text{ 且 } (1-\lambda)(v_{iL} - v_{jL}) + \lambda(v_{iR} - v_{jR}) \leq 0 \tag{19}$$

或

$$v_{iM} < v_{jM} \text{ 且 } (1-\lambda)(v_{iL} - v_{jL}) + \lambda(v_{iR} - v_{jR}) \geq 0 \tag{20}$$

三、次序逆轉發生的類型

由(19)式及(20)式可得到兩個重點，第一，在進行兩個計畫相對優勢比較時，雖然考慮 m 個計畫的情形，但在判斷條件中可清楚的看出其他計畫對該兩個計畫的交互影響因素已被排除。第二，計畫績效的次序逆轉與否可由兩個三角模糊數的相減結果來判斷。

依三角模糊數的運算法則可知，兩個模糊數的相減如(21)式所示：

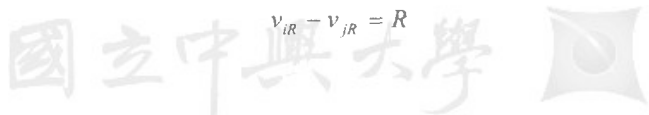
$$\tilde{v}_i - \tilde{v}_j = (v_{iL} - v_{jL}, v_{iM} - v_{jM}, v_{iR} - v_{jR}) \tag{21}$$

為方便表示，吾人可令

$$v_{iL} - v_{jL} = L \tag{22}$$

$$v_{iM} - v_{jM} = M \tag{23}$$

$$v_{iR} - v_{jR} = R \tag{24}$$



則(19)式與(20)式可再簡化為：

$$M > 0 \text{ 且 } (1 - \lambda)L + \lambda R \leq 0 \tag{25}$$

或

$$M < 0 \text{ 且 } (1 - \lambda)L + \lambda R \geq 0 \tag{26}$$

而 λ 在(25)式及(26)式的極限值如(27)式所示：

$$\bar{\lambda} = \frac{L}{L - R} \tag{27}$$

根據(25)~(27)式的條件，我們即可判斷在 α -cut 解模糊的過程中，計畫績效的相對優勢排序是否穩定，或是隱藏著次序逆轉的可能性。

由(22)~(24)式可知 L, M, R 有可能大於 0，等於 0，或小於 0，共有 27 種不同的排列組合，經檢核符合(25)式及(26)式條件的次序逆轉情形共有 10 種，分類整理如表 1 所示：

表 1 次序逆轉類型一覽表

左邊逆轉	右邊逆轉	雙邊逆轉
(+, -, -)	(+, +, -)	(+, -, +)
(-, +, +)	(-, -, +)	(-, +, -)
(+, -, 0)	(0, +, -)	
(-, +, 0)	(0, -, +)	

資料來源：本研究整理

表 1 顯示當 $L \leftrightarrow M \leftrightarrow R$ 三者之間的正負符號順序產生變化，表示必然存在次序逆轉。此種情形可分成三種類型分析說明：(如圖 3、圖 4 及圖 5)

1. 左邊逆轉： $L \leftrightarrow M$ 之間逆轉，則 $\bar{\lambda}$ 為下限。

2. 右邊逆轉： $M \leftrightarrow R$ 之間逆轉，則 $\bar{\lambda}$ 為上限。
3. 雙邊逆轉： $L \leftrightarrow M \leftrightarrow R$ 之間逆轉。

由上述說明可知，要判斷計畫之間是否存在著次序逆轉的可能，最簡單直覺的判斷方法就是檢查 L 、 M 、 R 之間的正負符號是否一致，當不一致時，就是存在次序逆轉的可能性。

四、次序逆轉機率的衡量

若發生次序逆轉，則逆轉點為 i 計畫函數與 j 計畫函數相交點，亦即(8)式減(9)式等於零，經整理可得：

$$(1-\alpha)(1-\lambda)(v_{iL} - v_{jL}) + \alpha(v_{iM} - v_{jM}) + (1-\alpha)\lambda(v_{iR} - v_{jR}) = 0 \quad (28)$$

(28)式可簡化表示為：

$$(1-\alpha)(1-\lambda)L + \alpha M + (1-\alpha)\lambda R = 0 \quad (29)$$

將(29)式分解開並重新整理得：

$$\alpha = 1 - \frac{M}{L-R} \left(\lambda - \frac{L-M}{L-R} \right)^{-1} \quad (30)$$

將(27)式所導出的 $\bar{\lambda}$ 值代入(30)式，即可求出相對應的 $\bar{\alpha}$ 值。此 $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ 即為次序逆轉點，且隨著 λ 值與相對應 α 值的變動，可得到系列的次序逆轉曲線，亦即(30)式可定義為次序逆轉機率函數⁷。故積分(30)式即是以 λ 為橫軸，以 α 為縱軸，求取在 $0 \leq \lambda \leq 1$ 範圍

⁷ 當 L 、 M 、 R 之正負符號關係符合表 1 的次序逆轉條件時，可証得 $\alpha > 0$ 。另外，令(30)式 $f(\lambda) = \alpha$ ，則在符合次序逆轉的條件下，可証得 $\int_0^1 f(\lambda) d\lambda = 1$ 。

內的面積值，該值即為次序逆轉機率。

三種不同類型的次序逆轉，其逆轉機率推導結果各異。以下輔以圖解說明其逆轉機率之推導：

(一)左逆轉型

左邊逆轉時，其次序逆轉區域如圖 3 所示， $R_L R_L$ 部份即為次序逆轉區域。

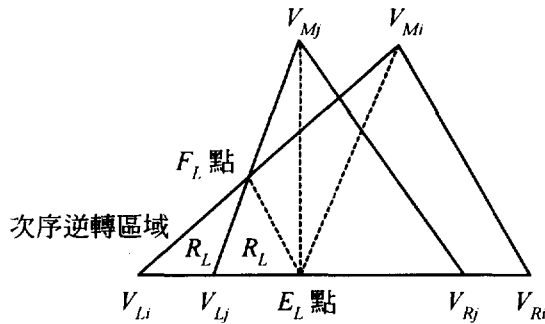


圖 3 左邊次序逆轉區域

圖 3 的 E_L 點表示 $v_{ij}(\alpha = 0, \bar{\lambda})$ ， F_L 點表示 $v_{ij}(\alpha, \lambda = 0)$ 。令(30)式 $f(\lambda) = \alpha$ ，由於左逆轉型 $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}_L$ ，故 $\int_0^{\bar{\lambda}_L} f(\lambda) d\lambda$ 可得逆轉機率：

$$R_{ij}^L = \left(L - M \cdot \ln \left| \frac{M}{L - M} \right| \right) (L - R)^{-1} \quad (31)$$

R_{ij}^L 即為 i 計畫與 j 計畫的左邊逆轉機率值，相對的，次序穩定機率為：

$$S_{ij}^L = 1 - R_{ij}^L \quad (32)$$

(31)式與(32)式的值如圖 4 所示(由於 λ 、 λ 皆小於等於 1，故 R_L 面積與 S_L 面積的和為 1)， R_L 區域面積即為次序逆轉機率值，反之， S_L 區域面積即為次序穩定機率值。

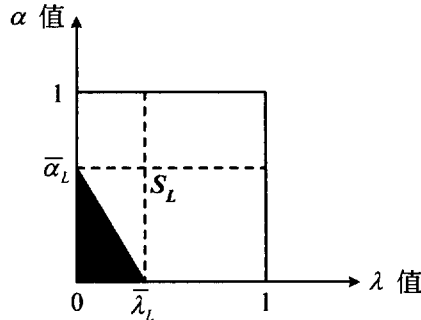


圖 4 左邊次序逆轉機率圖

(二)右逆轉型

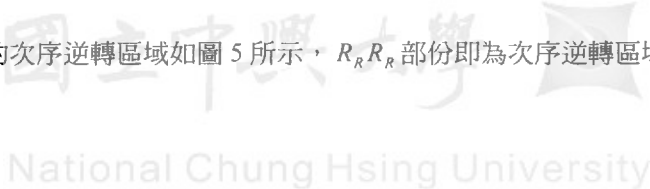
圖 5 的 E_R 點表示 $v_{ij}(\alpha = 0, \bar{\lambda})$ ， F_R 點表示 $v_{ij}(\bar{\alpha}, \lambda = 0)$ 。同上述作法，右逆轉型 $\bar{\lambda}_R \leq \lambda \leq 1$ ，可推知其次序逆轉機率 $\int_{\bar{\lambda}_R}^1 f(\lambda)d\lambda$ 為：

$$R_{ij}^R = \left(R + M \cdot \ln \left| \frac{M - R}{M} \right| \right) (R - L)^{-1} \tag{33}$$

R_{ij}^R 即為 i 計畫與 j 計畫的右逆轉機率值，相對的，次序穩定機率为：

$$S_{ij}^R = 1 - R_{ij}^R \tag{34}$$

右邊逆轉的次序逆轉區域如圖 5 所示， $R_R R_R$ 部份即為次序逆轉區域。



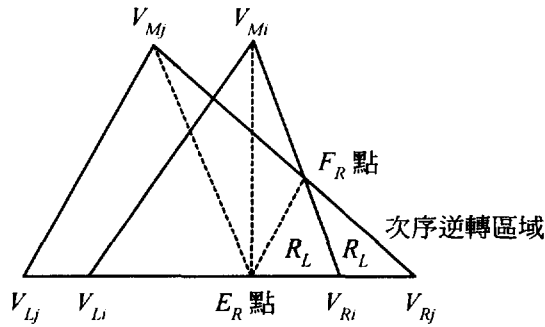


圖 5 右邊次序逆轉區域

其次序逆轉機率如圖 6 所示：

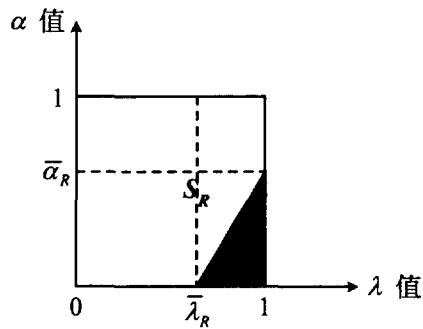


圖 6 右邊次序逆轉機率圖

(三)雙邊逆轉型

所謂雙邊逆轉即兩邊的排序與端點不一致，係三種類型中較為複雜與特殊的一種。從其 $R - L = 0$ 與否，又可分為「不對稱型雙邊逆轉」與「對稱型雙邊逆轉」兩種，以下分別說明之。



National Chung Hsing University

1. 不對稱型雙邊逆轉

即其 $R-L \neq 0$ ，其逆轉機率係分別計算兩邊的逆轉情形，然後再予加總，如(35)式所示：

$$R_{ij} = R_{ij}^L + R_{ij}^R \tag{35}$$

其次序穩定機率為：

$$S_{ij} = 1 - R_{ij} \tag{36}$$

雙邊逆轉的次序逆轉區域如圖 7 所示，RR 部份即為次序逆轉區域。

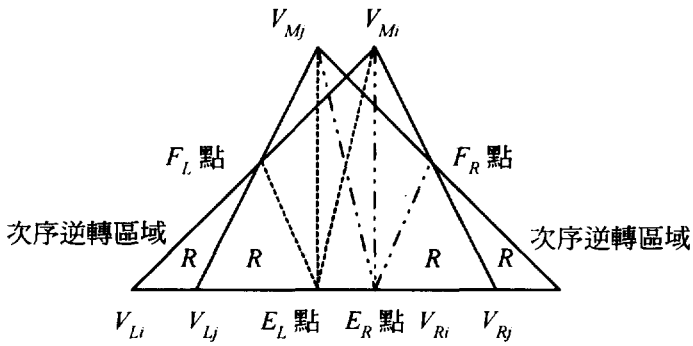


圖 7 雙邊次序逆轉區域

其次序逆轉機率如圖 8 所示：

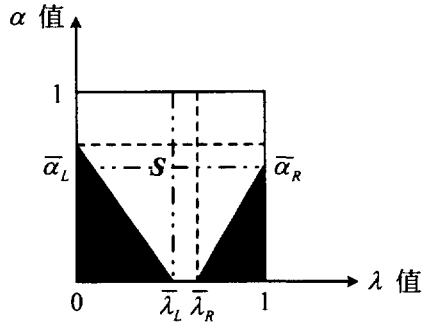


圖 8 次序逆轉機率圖

2. 對稱型雙邊逆轉

其 $R - L = 0$ ，將之代入(29)式，經整理可得：

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_L = \bar{\alpha}_R = \frac{R}{R - M} = \frac{L}{L - M} \tag{37}$$

其逆轉機率為：

$$R_{ij} = \frac{R}{R - M} \text{ 或 } R_{ij} = \frac{L}{L - M} \tag{38}$$

其穩定機率為：

$$S_{ij} = \frac{M}{M - R} \text{ 或 } S_{ij} = \frac{M}{M - L} \tag{39}$$

其次序逆轉機率如圖 9 所示：

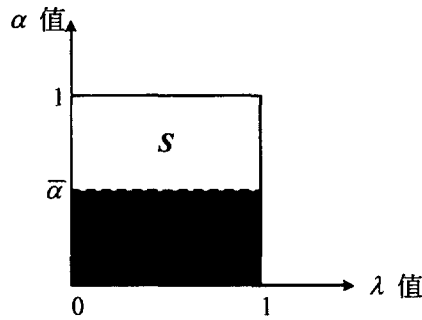


圖 9 次序逆轉機率圖

根據以上推導出之公式，我們將很容易就計畫績效評估結果所得到的模糊數，進行次序逆轉的檢定與逆轉機率的衡量。

五、評估結果的穩定度及排序

將評估體系內所有的計畫成對比較其次序逆轉情形，並求得其逆轉機率之後，我們可再進一步瞭解整個評估群體意見的穩定情形。關於次序逆轉及次序穩定的對稱性條件(symmetric condition)與反身性條件(reflexive condition)，可表示如(40)式：

$$R_{ij} = R_{ji} , S_{ij} = S_{ji} , R_{ii} = R_{jj} = 1 , S_{ii} = S_{jj} = 1 \tag{40}$$

且

$$0 \leq R_{ij} \leq 1 , 0 \leq S_{ij} \leq 1 \tag{41}$$

由前述說明可知，在 m 個計畫下，各計畫間的次序穩定機率為 S_{ij} ，則所有的計畫成對比較結果彙整如矩陣 S 所示：



$$S = \begin{pmatrix} 1 & S_{12} & S_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{1m} \\ S_{21} & 1 & & & & & S_{2m} \\ S_{31} & & 1 & & & & S_{3m} \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ S_{m1} & S_{m2} & S_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

根據矩陣 S ，我們可定義整個評估群體意見的排序穩定度(ranking stability)為：

$$RS = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m (S_{ij})^{\frac{1}{m(m-1)}} \quad (43)$$

計算群體意見的排序穩定度時，因計畫本身的自我比較並無所謂的排序逆轉問題，故(43)式將之排除掉，以免造成 RS 的低估。

最後，計畫模糊績效的排序原則可歸納如(44)式及(45)式所示：

$$M > 0 \text{ 且 } S_{ij} \geq 0.5, \text{ 則 } v_i > v_j \quad (44)$$

$$M > 0 \text{ 且 } S_{ij} < 0.5, \text{ 則 } v_i < v_j \quad (45)$$

綜合以上推論，吾人即可進行計畫模糊績效值的解模糊化，並進行優勢比較，除可得知計畫之間發生次序逆轉的機率(即可確知 i 計畫大於或小於 j 計畫的機率)，並可得到整個評估結果的穩定情形，而能掌握更完整的決策資訊。



肆、實例分析

假設某政府機關為評估其執行的五項重大建設之執行績效，經以 MCDM 方法，運用模糊理論計算得到其計畫模糊績效值如表 2 所示。

表 2 各計畫之模糊績效值

計 畫	模 糊 績 效 值
P1	(0.162, 0.668, 2.440)
P2	(0.184, 0.620, 2.136)
P3	(0.139, 0.672, 2.434)
P4	(0.171, 0.635, 2.449)
P5	(0.132, 0.630, 2.444)

由於各項計畫的績效值皆以三角模糊數的型態表示，因此難以直接判斷何者為佳。例如 P1 與 P2 計畫比較，以 *min* 原則來看係 $P1 < P2$ ，以 *max* 原則來看係 $P1 > P2$ ，就中間值來看亦同，那麼，何者為佳？如何判斷？其間隱藏的次序逆轉機率為何？其優勢排序結果是否足以信賴？其評估排序結果的穩定度如何？這些問題將可利用本文推導出來的方法迅速有效的獲得解答。

首先，可直接判斷計畫模糊績效值間是否存在著次序逆轉的可能。此可利用(19)~(27)式計算得知，或可直接根據模糊數相減法則，對照表 1 來予以判斷。例如 P1 與 P2 計畫比較相減結果，根據(22)~(24)式可得 $L = -0.022$ ， $M = 0.048$ ， $R = 0.304$ ，可知 $L \leftrightarrow M$ 之間逆轉，此時可判斷其係屬左邊逆轉類型。

其次為計算次序逆轉機率。其作法係將上述結果代入(27)式，得到 $\bar{\lambda} = 0.067$ ，又由(30)式得知此時 $\bar{\alpha} = 0$ (如圖 3 的 E_L 點所示)；當 $\bar{\lambda} = 0$ 時， $\bar{\alpha} = 0.314$ (如圖 3 的 F_L 點所示)。



因此可得由 F_L 、 V_{L1} 及 E_L 三點所構成的次序逆轉區域。其次序逆轉機率由(31)式可得到 $R_{12}^L = 0.012$ ，由(32)式可得到次序穩定機率 $S_{12}^L = 0.988$ 。同理，可得知其他計畫模糊績效值的比較結果，經整理如表3所示。

表3 次序逆轉一覽表

比較	相減結果	逆轉類型	逆轉機率
P1-P2	(-++)	左	0.012
P1-P3	(+ - +)	雙	0.766
P1-P4	(- + -)	雙(對稱)	0.214
P1-P5	(+ + -)	右	0.006
P2-P3	(+ - -)	左	0.037
P2-P4	(+ - -)	左	0.011
P2-P5	(+ - -)	左	0.094
P3-P4	(- + -)	雙	0.384
P3-P5	(+ + -)	右	0.061
P4-P5	(+ + +)	無	0

最後的步驟係計算所有計畫的排序穩定度。此可利用表3資料，根據(40)~(42)式，可得次序穩定矩陣 S ：

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0.988 & 0.234 & 0.786 & 0.994 \\ & 1 & 0.963 & 0.989 & 0.906 \\ & & 1 & 0.616 & 0.939 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

根據(43)式計算結果，此五項計畫模糊績效值排序結果的次序穩度為： $RS = 0.918$ 。綜合上述說明，當考量所有可能的模糊狀況及決策樂觀程度後，根據(44)及(45)式的排序

原則可知，最理想的排序(ideal ranking)應為 $P_1 > P_3 > P_4 > P_5 > P_2$ ，因其次序穩定度甚高，故此排序結果應足以令人信賴的。

伍、結論

本文發展計畫模糊績效值的次序逆轉衡量方法，解決評估結果排序穩定度的衡量問題。針對三角模糊數(Triangular Fuzzy Numbers, TFN)以 α -cut 排序法推導出次序逆轉機率的衡量方法，發現次序逆轉可分成左邊逆轉型、右邊逆轉型及雙邊逆轉型三種類型，且在 27 種可能的排列組合中僅有 10 種組合會發生次序逆轉現象。而不同類型的次序逆轉，其次序逆轉機率的推導結果各異。本研究並建立次序穩定矩陣，用以衡量評估結果的穩定程度。最後，簡潔的應用實例，顯示本研究提出的方法確具一般性及可應用性。

參考文獻

一、中文部分

1. 徐村和，「模糊德菲層級分析法」，*模糊系統學刊*，民國87年，4(1)：59-72。
2. 張有恆，*運輸計畫評估與決策－模糊理論之探討與決策*，華泰書局，民國87年。

二、英文部分

1. Adamo, J.M., 1980, "fuzzy decision trees", *Fuzzy Set and System*, 4(3): 207-220.
2. Buckley, J.J., & S. Chanas, 1989, "A fast method of ranking alternative using fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, 30:337-338.
3. Buckley, J.J., 1987, "Fuzzy programming and the multicriteria decision problem", *Optimization Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, 226-244.
4. Buckley, J.J., Y. Qu, 1990, "On using alpha-cuts to evaluate fuzzy functions," *Fuzzy Sets and Systems*, 38:309-312.
5. Chen, S.J. & Hwang, C.L., 1992, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications*, Springer-Verlag, New York.
6. Liou, T.S., M.U. Wang, 1994, "Subjective assessment of mental workload – A fuzzy linguistic multi-criteria approach", *Fuzzy Sets and System*, 62:155-165.
7. Mabuchi, S., 1988, "An approach to the comparison of fuzzy subsets with a α -cut dependent index," *IEEE Trans. On System, Man, and Cybernetics*, 18(2): 264-272.
8. Mon, D.L., C.H. Chang, and J.C. Lin, 1994, "Evaluation Weapon System using Fuzzy Analytic Hierarchy Process Based on Entropy Weight," *Fuzzy Sets and Systems*,

62:127-134.

9. Zadeh, L.A., 1965, "Fuzzy sets," Information and Control, 8:338-353.

Fuzzy Ranking: The Measurement of Rank Reversal Probabilities

Yuan-Hao Chen*

Abstract

Keywords: fuzzy ranking, rank reversal, α -cut, triangular fuzzy numbers

The contribution of this study is presenting the measurement of the rank reversal possibilities on the fuzzy ranking, and solving the results of assessment on the measurement of ranking stability. Based on the triangular fuzzy number, we use the α -cut to derive the measurement formula of rank reversal probabilities, and besides, build up the rank stable matrix, for measuring the stability of rank results. This research finds that there are 27 possibilities for the comparatives on the pairs of triangular fuzzy numbers; only 10 pairs among them will form the rank reversal situation. This research classifies all pairs into three different types as left-side rank reversal type, right-side rank reversal type and both-side rank reversal type by the characteristics, and that the formula of measure of rank reversal possibilities also varies. Finally, which also bring the case study to verify the generalization and applicability of this method of measurement.

* The author is a graduate student of the Ph.D Program in the Department of Applied Economics National Chung Hsing University.