# 機率邊界生產函數推估之理論與實證

彭 作 奎*

## 壹、緒 論

在一般生產經濟學上，將生產過程中之投入因素分爲土地(land)、勞動(labor)、資本(capital)及管理(management)等四大項。因此，生產函數乃設定爲產出(Y)與土地(A)、勞動(L)、資本(K)及管理(M)等四種投入因素間之函數關係，即Y＝f(A,L,K,M)。有關推估生產函數之文獻不勝枚舉，然大部份的文獻由於管理因素缺乏衡量的方法，因此僅就土地、勞力、資本三項投入因素推估生產函數，而將管理因素對產出之影響效果歸入殘差項(residuals)。事實上，管理因素如同土地、勞力及資本等因素。在利潤最大化之生產情況下，管理是促成最佳分配之因素之一，故忽略管理因素之生產函數，所求出之生產彈性，必將導致高估(upward biased)之現象〔Dawson, 1985〕，故在分析上將導致錯誤不精確的結論。

依據一般之定義，生產函數是定量之一組生產因素，其所能生產之最大產量。同樣地，在固定的生產因素價格下，成本函數爲某一產出水準之最低成本；而利潤函數爲固定產出與因素價格下之最大利潤。易言之，在解釋及推估生產函數、成本函數及利潤函數時，最大化(maximization)及最小化(minimization)之概念極爲重要，故在某一範圍內之觀察值，以邊界(frontier)觀念應用至此等函數上是具有相當的意義。例如：在邊界生產函數(frontier production function)觀念下，僅可找出低於此函數之觀察值，而無法高於邊界生產函數之觀察值。就計量經濟觀點言，邊界之推估變得十分受到重視，主要是因爲內生變數(endogenous variable)受到最大化觀念之限制，因此需假設殘差項(residual)爲單邊〔註一〕，始能求出邊界函數，其將面臨若干統計推估上

*現任國立中興大學農經研究所所長。

〔註一〕：在計量經濟學上，推估迴歸方程式時，通常假設殘差項(u)爲常態分配，即$u \sim N(0, \sigma^2 I)$；換言之，u是以平均數爲零，變異數爲固定之常態分配。但在推估邊界函數時，u已不再是常態分配，假設$Q^*(x, \theta)$爲生產因素所能生產最大之產量，$\theta$爲生產函數中之參

之問題。目前計量經濟學上已有若干推估方法，可資推估。

本文研究之主要目的在於介紹邊界函數之觀念，並利用 Aigner & Chu ( 1968 )所提出之方法，推估台灣最大宗作物——水稻之機率邊界生產函數。本文所採用之資料係糧食局之七十二年一期( 820 戶)及二期( 814 戶)稻米生產成本調查之原始資料爲分析基礎。此資料之樣本地區包括台北、宜蘭、桃園、新竹、苗栗、台中、彰化、南投、台南、雲林、嘉義、高雄、屏東、台東、花蓮等縣。

## 貳、邊界函數推估之方法

### 一、方法之種類

自 Leibenstein 在 1966 年提出 X 效率理論之後，許多學者紛紛提出測定技術效率的方法，依據對邊界( frontier )設定及估計的方法，大致有下列四種情況〔 Førsund et al , 1980 〕:

(一)確定無參數邊界( deterministic nonparametric frontier ):此方法係假設邊界爲確定性，惟在函數中並不推估參數值，如 Farrell 的方法即屬之〔註二〕。

(二)確定性參數邊界( deterministic parametric frontier ):此方法主要是先設立一確定性生產函數(多爲 Cobb-Douglas 型態之生產函數)，並假設殘差項爲正値，然後利用規劃法( programming approach )使觀察値與推估値間之絕對離差( absolute deviation )爲最小，以求出函數中之參數値。Aigner & Chu ( 1968 )及 Timmer ( 1971 )等即屬此類。

(三)確定性統計邊界( deterministic statistical frontier ):此方法係對殘差項之分配作適切之假設〔註三〕，然後利用觀察點的產量與生產因素間之關係，設定適當的概 似函數( likelihood function )，並以最大概似法(maximum likelihood method )求出邊界之參數値。過去利用此原理推估邊界函數者計有

---

數，因此，實際廠商或農場所生產之產量爲 $Q = Q^*(x, \theta) - u$；其中 u 爲殘差項，必須爲正値，故以 Q 及 x 推估 $Q^*$ 時，u 已非常態殘差項( non-normal residual )。

〔註二〕:事實上，Farrell 在 1957 年即已提出以「非預設生產函數」來推估生產效率，但在 1960 年代中，一直未受到重視。

〔註三〕:由於邊界函數推估時之殘差項並非常態分配，但可假設爲半常態分配( half - normal distribution )，指數分配( exponential distribution )，或對數常態分配( log- normal distribution )等〔 Judge et al, 1982 〕。

Afriat（1972）、Richmond（1974）、Schmidt（1976）以及 Greene（1980）等。

(4)隨機邊界（stochastic frontier）：此方法主要係假設每一農場（或廠商）擁有其自身之邊界，即邊界為一隨機性；換言之，此假設係因農場間之效率差異，並非完全可由農場本身所能控制，故每一農場之邊界不盡相同〔註四〕。在推估過程中，係以組合誤差（composed error）方式來進行；換言之，一部份誤差是由於衡量誤差、其他統計干擾及非產業所能控制的外在影響所造成，其分配為對稱；另一部份則是衡量農場（或廠商）相對於隨機邊界所造成的技術無效率的單邊成分（one-side component）〔註五〕，然後以最大概似法推估參數值。Meeusen & Broeck（1977）即為此方法。

綜上所述，許多學者推出之推估方法雖有不同，但基本的觀念仍建立在生產函數為一定量投入因素的組合所能得到的最大產量之關係上；換言之，如欲測定個別廠商生產之技術信息，不宜用普通最小平方法（OLS）求出樣本廠商之「平均生產函數」為基礎，蓋以此「平均」觀念為主之生產函數，實已排除廠商間「技術效率」差異之問題。

## 二、機率邊界生產函數之推估方法

依前節之定義，生產函數是定量之一組生產因素，其所能生產之最大產量。因此，欲了解生產之技術狀態，實應以邊界生產函數（frontier production function）觀念予以衡量，本文擬採 Aigner & Chu 之方法推估邊界生產函數，茲將此方法說明如下：

Aigner & Chu 之方法為先預設生產函數之形式（form），再利用線型規劃法推估預設生產函數之參數。一般而言，預設生產函數形式常假設為 Cobb-Douglas 函數，即

$$y_i = \prod_{j=0}^{m} x_{ji}^{a_j} e_i \quad \cdots\cdots (1)$$

其中，$y_i$ 為 i 農家之產出，$x_{ji}$ 為 i 農家第 j 種生產因素投入量，$a_j$ 為 j 生產因素之生產彈性，$e_i$ 為殘差項。式（1）取其對數形式後，表示如下：

〔註四〕：確定性邊界（deterministic frontier）係假設所有農場擁有同一邊界，各農場技術效率之衡量即以此邊界為基準。

〔註五〕：事實上，生產函數之型態為 $Y = f(x)\exp(v-u)$，$u>0$。其中，隨機生產函數部份為 $f(x)\exp(v)$，而 v 為對稱性誤差，而 $\exp(-u)$ 為單邊誤差成份，且 $u \geq 0$，以衡量技術效率之差異。

$$\ln y_i = \sum_{j=0}^{m} a_j \ln x_{ji} + \ln e_i \quad \cdots\cdots (2)$$

爲滿足邊界生產函數之定義，所有觀察值必須不能超過生產邊界，即所有 $\ln e_i$ 必須大於或等於零，$\ln e_i \geq 0$，則由式(2)推估之邊界生產函數必須滿足

$$\sum_{j=0}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji} = \ln \hat{y}_i \geq \ln y_i \ , \ i=1, 2, \cdots, n \quad \cdots\cdots (3)$$

其中 $\ln y_i + \ln e_i = \ln \hat{y}_i$，$\ln \hat{e}_i \geq 0$。然滿足式(3)之 $\hat{a}_j$ 可有無限多組，爲使所推估之生產邊界儘可能接近樣本觀察值，則須給 $\hat{a}_i$ 進一步之限制條件，即加入殘差項加總函數極小化的限制；如 $\Sigma \ln e_i$ 或 $\Sigma \ln e_i^2$ 之極小化〔Timmer 1970, P.113〕。

爲減輕極端觀察值之影響，可選擇殘差項之線型加總和爲極小，即 $\Sigma \ln e_i$ 之極小化，因此推估邊界生產函數之問題爲推估一組參數 $\hat{a}_j$，非但能滿足(1) $\sum_{y=0}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji} \geq \ln y_i$；(2) $\hat{a}_j \geq 0$，且能使 $\Sigma \ln e_i$ 爲極小，此問題可藉 LP ( linear programming ) 求解。爲能應用 LP，則 $\Sigma \ln e_i$ 必須爲 $\hat{a}_j$ 及 $\ln x_{ji}$ 之線型函數；由式(3)知：

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji} - \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

則 $\sum_{i=1}^{n} \ln \hat{e}_i$ 確爲 $\hat{a}_j$ 及 $\ln x_{ji}$ 之線型函數，在樣本中，$\sum_{i=1}^{n} \ln y_i$ 一項爲常數，故 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji}$ 之極小化亦能滿足 $\sum_{i=1}^{n} \ln \hat{e}_i$ 之極小化。又根據 Timmer 之建議，爲使問題簡化，可以 $\ln \bar{x}_j$ ( j 投入因素之平均投入量 ) 取代 $\sum_{i=1}^{n} \ln x_{ji}$ ( j 投入因素之總投入量 )，如此推估 $\hat{a}_j$ 之線型規劃問題成爲：

目標函數：Min ：$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln \bar{x}_1 + \hat{a}_2 \ln \bar{x}_2 + \cdots + \hat{a}_m \ln \bar{x}_m$

限制式：S.t.：
$$\begin{array}{l} \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln x_{11} + \hat{a}_2 \ln x_{21} + \cdots + \hat{a}_m \ln x_{m1} \geq \ln y_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln x_{1n} + \hat{a}_2 \ln x_{2n} + \cdots + \hat{a}_m^m \ln x_{mn} \geq \ln y_n \end{array} \quad \cdots\cdots (4)$$

及 $\hat{a}_j \geq 0$

求得 $\hat{a}_j$ 之最適解後，$\ln \hat{y}_i = \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji}$ 即爲邊界生產函數。

上述所求得之邊界生產函數爲確定型邊界（ deterministic frontier ），爲避免極端樣本觀察值對生產邊界推估之影響，可採機率型邊界生產函數（ probabilistic frontier production function ）〔 Timmer, 1971, P. 781 〕，則式（3）變爲機率形式，即

$$P_r\left(\sum_{j=0}^{m} \hat{a}_j \ln x_{ji} \geq \ln y_i\right) > P \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

其中，P爲預設機率值，例如 98 %。在實際推估生產邊界時， Timmer 提出兩種處理方式：(1)去除（ 100 — P ）%之技術效率點；(2)逐一去除技術效率點直到推估而得之係數 $\hat{a}_j$ 穩定爲止。此兩種方式均能克服極端值造成之資料問題。

由此可見， $\ln \hat{e}_i$ 爲 i 農場之實際產量（ $\ln y_i$ ）與最大產量（ $\ln \hat{y}_i$ ）之差距，一般可視爲各別農場主管理能力之差異〔 Dawson, 1985 〕。因此，求 $\hat{a}_j$ 值使 $\sum_{i=1}^{n} \ln \hat{e}_i$ 爲最小，實已隱含農場管理因素在內。故以邊界函數觀念推估生產函數，實已將土地、勞力、資本及管理等四大因素均包涵在內，可正確了解農業生產之技術與管理狀態〔 Aigner & Chu, 1968 〕。

# 叁、台灣水稻機率邊界生產函數之推估

## 一、機率邊界函數之推估

依據 Aigner & Chu 線型規劃之推估方法，先預設Cobb-Douglas 生產函數，利用糧食局所調查七十二年一、二期水稻生產成本之原始資料，推估水稻一、二期之機率邊界生產函數。生產因素包括土地、勞力、變動資本、固定資本等四項，而樣本數一期水稻爲 820 戶，二期水稻爲 814 戶。爲減少線型規劃求解時間及成本，在求解時，將式（3）及式（4）之原始問題（ primal problem ）改爲對偶問題（ dual problem ），既可節省成本，且可得相同之 $\hat{a}_j$ 值。實證推估之結果如下所述：

㈠七十二年一期水稻之機率邊界生產函數：

利用一期水稻 820 戶農家之生產成本資料，去除 26 戶極端樣本點後，以線性規劃方法即可求得穩定係數值，其機率爲 96 %之機率邊界生產函數，如表 1 所示：

由表 1 可知，一期水稻之機率邊界生產函數爲：

$$Y_{96\%} = 6.3446 A^{0.5324} \cdot L^{0.0894} \cdot VC^{0.2742} \cdot FC^{0.1647} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

表 1　一期水稻生產彈性值（ $LP_{96}$ ）

| | 常數項 | 土地*(A) | 勞力*(L) | 變動資本*（VC） | 固定資本*（FC） | 係數和 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 係數值 | 6.3446 | 0.5324 | 0.0394 | 0.2742 | 0.1647 | 1.0107 |

說明： *：土地項目為水稻耕作面積；勞力項目包括人工費、人機工費、人畜工費等三項；變動資本包括種（籽）苗費、材料費、農藥費及其他藥品費、肥料費及抽水費等五項；固定資本則包括農舍、農具折舊及修理費、水利費及農事生產指導費、田賦及其他稅捐及設算資金利息。
資料來源：依糧食局提供資料計算而得。

由此可見，土地之生產彈性為 0.5324 ，勞力生產彈性為 0.0394 ，變動資本之生產彈性為0.2742，固定資本之生產彈性為 0.1647 ，而生產彈性和為 1.0107 ，趨近於 1 ，屬於固定規模報酬（ constant return to scale ）；換言之，當生產因素同時增加 1 %，產出亦增加 1 %，其中土地得到之相對份額為 0.5342 ，勞力僅得 0.0394 ，變動資本為 0.2742 ，而固定資本為 0.1647 。因此，為提高產出，增進生產效率，以擴大種植面積為最有效之措施。

(二)七十二年二期水稻之機率邊界生產函數：

利用二期水稻 814 戶農家之生產成本資料，以線性規劃法計算逐一去除極端樣本點後之係數值，直到去除 27 戶極端樣本點後係數值開始呈現穩定，故所推估出的邊界生產函數之機率為 96 %，其係數值如表 2 所示：

表 2　二期水稻生產彈性值（ $LP_{96}$ ）

| | 係數值 | 土地*(A) | 勞力*(L) | 變動資本*（VC） | 固定資本*（FC） | 係數和 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 係數值 | 4.9318 | 0.4864 | 0.0932 | 0.2684 | 0.1527 | 1.0007 |

說明： *　如表 1 說明。
資料來源：同表 1 。

故二期水稻之機率邊界生產函數為：

$$Y_{96\%} = 4.9318 \cdot A^{0.4864} \cdot L^{0.0932} \cdot VC^{0.2684} \cdot FC^{0.1527} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$



由此可見，土地之生產彈性為 0.4864 ，勞力之生產彈性為 0.0932 ，變動

資本生產彈性爲 0.2684 ，固定資本生產彈性爲0.1527，而生產彈性和爲 1.0007，趨近於 1，亦屬於固定規模報酬。土地因素之相對份額爲 0.4864 ，勞力僅得 0.0932 ，變動資本得 0.2684 ，固定資本得 0.1527 。

由上述一、二期水稻機率邊界生產函數之推估結果加以比較，二者之係數值相當一致，均以土地之生產彈性最高（一期爲 0.5324 ，二期爲 0.4864 ），而以勞力之生產彈性最低（一期爲 0.0394 ，二期爲 0.0932 ），因此就水稻生產而言，擴大規模實爲提高生產效率之有效途徑。勞力成本項目中包括人機工及人畜工成本在內，此二項成本之計算爲現行代耕費爲準，由勞力生產彈性偏低現象，可知人機工及人畜工代耕收費有偏高之嫌，使得勞力成本不論在一期或二期均佔總成本之 50 ％以上，促成生產成本之提高，因此，機械化之推行非但無法降低水稻生產成本，反而提高無機械農家之生產成本，對於農家所得具負面的影響。因此，未來如何有效減少勞力之投入，發展省工栽培，改變因素投入組合實爲提高生產效率之重要課題。

## 二、平均生產函數之推估

爲瞭解Aigner 及Chu 方法之信賴度，本文利用過去傳統推估生產函數方法，即最小平方法（ ordinary least square method ）來推估一、二期水稻之平均生產函數，如表 3 所示：

表 3　一期及二期水稻平均生產函數

| 期　別 | 常數項 | 土地(A) | 勞力(L) | 變動資本（VC） | 固定資本（FC） | $R^2$ | $\bar{R}^2$ | F | 係數和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 一　期 | 1.2198 | 0.38947 | 0.09580 | 0.31162 | 0.20016 | 0.936 | 0.936 | 2,997.66 | 1.000 |
| （t值） | (6.86)* | (9.80)* | (3.11)* | (25.21)* | (12.30)* | | | | |
| 二　期 | 2.7861 | 0.41966 | 0.09136 | 0.30882 | 0.18231 | 0.919 | 0.919 | 2,303.29 | 1.002 |
| （t值） | (6.67)* | (10.31)* | (5.37)* | (20.83)* | (7.19)* | | | | |

註： t 值均在 1 ％之顯著水準下顯著，F 值亦在 1 ％顯著水準下顯著。

由表3 之推估結果得知，$R^2$ 均在0.91以上，且 t 值及 F 值均爲顯著，故一期及二期之平均生產函數爲：

一期水稻： $Y = 1.2198A^{0.38947} \cdot L^{0.09580} \cdot VC^{0.31162} \cdot FC^{0.20016}$ ……………(8)

二期水稻： $Y = 2.7861A^{0.41966} \cdot L^{0.09136} \cdot VC^{0.30882} \cdot FC^{0.18231}$ ……………(9)

上述結果顯示，土地之生產彈性仍爲最大，勞力之生產彈性爲最小，而一期及二期之生產彈性和均爲1，屬固定規模報酬，與前節所求得之邊界生產函數相同，由此可見，水稻生產技術已相當成熟，故以平均生產函數與邊界生產函數代表當前我國水稻生產之技術狀態相近；換言之，水稻生產技術水準在農家間之差異不大，故水稻被稱爲「電話作物」，亦可由此平均與邊界生產函數相近予以證明。

## 肆、結　　語

依據一般生產經濟學上之定義，生產函數是定量之一組生產因素，其所能生產之最大產量。而一般所謂之生產因素包括土地、勞動、資本及管理等四項，管理因素到目前而言，尙不能予以適當之數量化置入生產函數中予以推估，在此限制下，一般從事生產函數之分析者，大抵以可數量化之土地、勞動、資本等三項生產因素，利用最小平方法（ OLS ）推估生產函數，所推估而得之生產函數僅爲平均之生產函數，不具有上述生產函數定義中所隱含之「邊界」概念，且忽略管理因素對生產函數之影響，因此，爲克服此一缺失，邊界生產函數之應用是必要的。本文所介紹Aigner & Chu 利用線型規劃之推估法，是較簡捷、計算容易之方法，此方法爲先預設生產函數之形式，一般均預設爲C－D函數形式，此函數雖然具計算容易之優點，亦承襲C－D 函數之缺點，但此缺點不掩此方法之實用性，有興趣研究生產函數者，可就不同之生產函數形式，利用此方法以推估邊界生產函數，從事生產面之分析。

就水稻生產函數實證分析結果發現，土地之生產彈性較高，而勞力之生產彈性甚低，因此就水稻產業而言，爲使資源有效利用及提高水稻生產效率，實應由擴大生產規模，減少勞動數量方面著手，並加速農業機械化之推行，降低機械代耕收取之費用，使得水稻生產之機械化，確能達到提高生產效率，降低生產成本之實質效果。

## 參考文獻


1. Afriat, S. N., “Efficiency Estimation of Production Function”, I.E.R., Vol. 13, Oct. 1972, PP. 568-598.
2. Aigner, D. J. & S. F. Chu, “On Estimating the Industry Production Function”, A. E. R., Vol. 58, Sept. 1968, PP. 826-839.
3. Christensen, Laurits R., Dale W. Jorgenson and Lawrence J. Lau, “Transcendental Logarithmic Production Frontiers”, Review of Eco-

nomics and Statistics, Vol. 55: 1, 1973, P.P. 28-45.

4. Dawson, P. J., "Measuring Technical Efficiency from Production Functions: Some Further Estimates" Journal of Agricultural Economics, Vol. 36, No. 1, 1985, PP. 31-40.
5. Farrell, M. J., "The Measurement of Productive Efficiency", J. R. S., A120, Part 3, 1957, PP. 253-292.
6. Førsund, F. R., C. A. K. Lovell, P. Schmidt, "A Survey of Frontier Production Functions and Their Relationship to Efficiency Measurement", J. Econometrics, Vol. 13, 1980, PP. 294-315.
7. Greene, W. H., "On the Estimation of A Flexible Frontier Production Model", J. Econometrics, Vol. 13, 1980, PP. 101-115.
8. Henderson, J. H. & R. E. Quandt, Microeconomic Theory: A Mathematical Approch, Third-Edition, 1980.
9. Judge, G. G. W. E. Griffiths, R. C. Hill, and T. C. Lee, The Theory and Practice of Econometrics, 双業書局, 1981.
10. Meeusen, W. & J. van den Broeck, "Efficiency Estimation From Cobb-Douglas Production Function With Composed Error", I. E. R., Vol. 18, June 1973, PP. 435-444.
11. Richmond, J., "Estimating the Efficiency of Production", I. E. R., Vol. 15, June 1974, PP. 515-521.
12. Schmidt, P., "On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions", Review of Economics and Statistics, Vol. 58, No. 2, May 1976, PP. 238-239.
13. Timmer, C. P., "Using a Probablistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency", J. P. E., Vol. 79, July/Aug 1971, PP. 764-794.

# Probabilistic Frontier Production Function for Taiwan's Rice Farming

Tso-Kwei Peng*

## Summary

This paper uses linear programming technique to estimate a frontier Cobb-Douglas production for Taiwan's rice farming in 1984. Probabilistic frontier is generated and the results compared with ordinary least square production function. The values of production elasticity for various inputs from those two production functions show a similar ranking, that is, land production elasticity is highest, and labor production elasticity is lowest among the inputs. The constant return to scale for rice farming is also found.



* The author is the director of Research Institute of Agricultural Economics, National Chung Hsing University, Taichung, Taiwan, R. O. C.