第 29 卷　第 1 期　　福建师范大学学报（自然科学版）　　Vol. 29　No. 1
2013 年 1 月　　Journal of Fujian Normal University（Natural Science Edition）　　Jan. 2013

文章编号：1000-5277(2013)01-0005-04

关于 k-Abel 范畴的一点注记

陈建辉[1]，陈清华[1]，周振强[2]

(1. 福建师范大学数学与计算机科学学院，福建 福州　350007；2. 厦门大学数学科学学院，福建 厦门　361005)

摘要： 以一个例子为导入，给出 Abel 范畴中的 Fitting 引理、Krull-Schmidt 定理的简单证明，进而得出 k-Abel 范畴中有限长度的不可分解对象的自同态环的计算公式.

关键词： k-Abel 范畴；不可分解对象；自同态环

中图分类号： O154. 1　　　**文献标志码：** A

A Note on k-Abelian Categories

CHEN Jian-hui[1], CHEN Qing-hua[1], ZHOU Zhen-qiang[2]

(1. *School of Mathematics and Computer Science*, *Fujian Normal University*, *Fuzhou* 350007, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *Xiamen University*, *Xiamen* 361005, *China*)

Abstract: Start with one interesting example, and then put forward and prove in brief the Fitting lemma and the Krull-Schmidt theorem for Abelian categories. Finally, the calculation formula for endomorphism rings of finite length indecomposable objects in k-Abelian categories is presented.

Key words: k-Abelian category; indecomposable object; endomorphism ring

为方便讨论，本文所涉及的域均为代数闭域且记为 k. 箭图 $\vec{Q}$(具有关系 $\mathscr{T}$) 上的箭图代数 $k\vec{Q}/\mathscr{T}$ 记为 A，其上的重复代数设为 $\hat{A}$. 考虑箭图 $\vec{Q}$(图 1) 具有关系 $\mathscr{T} = \langle \alpha\beta\gamma \rangle$，则代数 $\hat{A}$ 的箭图 $\hat{\vec{Q}}$(图 2) 具有关系 $\mathscr{T} = \langle \alpha\beta\gamma, \xi - \gamma\eta, \zeta - \eta\alpha \rangle$.

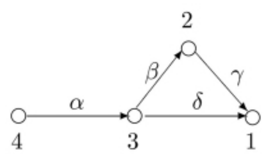

图 1　箭图 $\vec{Q}$
Fig. 1　Quiver $\vec{Q}$

设 M 是箭图 $\hat{\vec{Q}}$ 上的一个表示，令 $M = (M_i)$，$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = k^2$，$i = 1, 2, 3, 4$，并且

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，M 是局部有限维左 $\hat{A}$-模，经简单计算可知其自同态环为局部环，从而 M 是不可分解表示. 设 f 是 M 上的自同态，则 $f = (f_i)(1 \leqslant i \leqslant 4)$，其中 $f_i \in \mathrm{End}(M_i)$，此时可设

$$f_1 = \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t \end{pmatrix},\quad f_2 = \begin{pmatrix} t & b \\ 0 & t \end{pmatrix},\quad f_3 = \begin{pmatrix} t & c \\ 0 & t \end{pmatrix},\quad f_4 = \begin{pmatrix} t & d \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

其中 $t, a, b, c, d \in k$. 容易验证对任意箭 $\lambda: i \to j$，有 $f_j \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot f_i$，因此有 $f = t \cdot 1_M + g$，这里 $t \in k$ 且 $g \in \mathrm{End}(M)$ 是幂零的.

事实上，对于代数闭域 k 上一般的有限箭图的有限维表示范畴而言，其上每一个不可分解对象的自

收稿日期：2012-01-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11071040）；福建省自然科学基金资助项目（2010J01001）；福建省教育厅资助项目（JA10297）
通信作者：陈建辉（1988－　），男，研究方向为代数表示论. ptchenjh@163. com

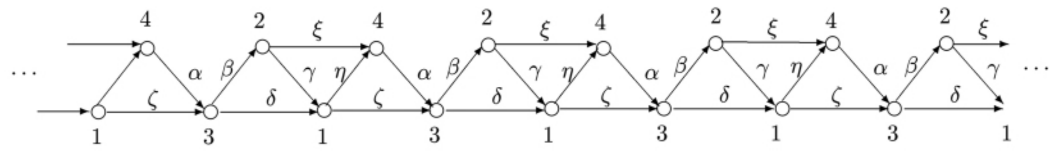

图 2 箭图 $\vec{Q}$

Fig. 2 Quiver $\vec{Q}$

同态环都可以写成

$$\mathrm{End}(M) = k \cdot 1_M + \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M)). \qquad (*)$$

(*)式对于计算自同态环的维数,判断一个不可分解对象 M 是否是 birck(即 $\mathrm{End}(M) \simeq k$)等是至关重要的.

k 范畴是一类重要的范畴,Ringel 在文[1]中给出 k 范畴的定义(见定义 11),并引入一系列表示理论的重要概念,如不可分解对象的源射、汇射等. 陈小伍等在文[2]中对 k-Abel 范畴作了相关总结. 本文证明了若 $\mathscr{A}$ 为有限维 k-Abel 范畴,则对于有限长度的不可分解对象 M,其自同态环有 $\mathrm{End}(M) = k \cdot 1_M + \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M))$.

先回顾 Abel 范畴上的相关定义,更多的概念和记号参见[3-6].

定义 1 设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴,M 为 $\mathscr{A}$ 的一个对象,如果 M 的每个子对象降链 $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ 都是稳定的,即存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$,则称对象 M 为 Artin 对象.

定义 2 设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴,M 为 $\mathscr{A}$ 的一个对象,如果 M 的每个子对象升链 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ 都是稳定的,即存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$,则称对象 M 为 Noether 对象.

定义 3 设 M 为范畴 $\mathscr{A}$ 中非零对象,如果 M 没有非平凡的子对象,即除了 0 和 M 之外没有其它子对象,则称 M 是范畴 $\mathscr{A}$ 中一个单对象.

定义 4 在范畴 $\mathscr{A}$ 中,设 M 为 $\mathscr{A}$ 中的一个非零对象,如果 M 中存在一个子对象降链,$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0$ 使得 M_i/M_{i+1} 是单对象($i = 0,1,2,\cdots,n-1$),则称该链是 M 的一个合成列,n 称为这个链的长度.

引理 5 在 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 中,非零对象 M 有合成列当且仅当 M 是 Artin 对象也是 Noether 对象.

引理 6 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴,对任意态射 $f: M \longrightarrow N$,有如下同构:

1) $\forall X \in \mathscr{A}$,$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f)) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\mathrm{Im}\,f)$;

2) $\forall X \in \mathscr{A}$,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\mathrm{Ker}\,f) \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f))$.

证明 1) 在 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 中,对态射 $f: M \longrightarrow N$ 作单满分解(图 3),注意到 $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f)) = \{f\beta \mid f: M \longrightarrow N\}$,建立映射

$$\Psi: \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\mathrm{Im}\,f),$$
$$f\beta \longmapsto \pi\beta,$$

易知 Ψ 为单射. 2) 的证明只需注意到 Hom 函子与张量函子 $\_\otimes\_$ 是伴随对,故 Hom 函子保持任意的极限,因此与 Kernel 可交换.

引理 7 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴,$M \in \mathscr{A}$,$f \in \mathrm{End}(M)$,则

1) 若 M 是 Artin 的,有 $\mathrm{Im}\,f^n + \mathrm{Ker}\,f^n = M$. 进一步,若 f 是自同构当且仅当 f 是单态射;

2) 若 M 是 Noether 的,有 $\mathrm{Im}\,f^n \cap \mathrm{Ker}\,f^n = 0$. 进一步,若 f 是自同构当且仅当 f 是满态射.

证明 1) 考察如图 4,显然有子对象链:

$\mathrm{Im}\,f \supseteq \mathrm{Im}\,f^2 \supseteq \mathrm{Im}\,f^3 \supseteq \cdots$,

由 M 为 Artin 对象知存在 $n \in \mathbf{N}$,有 $\mathrm{Im}\,f^n = \mathrm{Im}\,f^{n+1} = \cdots$. 特别地有 $\mathrm{Im}\,f^n = \mathrm{Im}\,f^{2n}$.

考虑 Yoneda 嵌入,$\mathscr{A}$ 等价

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Im} f \arrow[dr, "i"] & \\ M \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f)) \arrow[dr] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,N) \\ \beta \arrow[rr, mapsto] & & f\beta \end{tikzcd}$$

图 3 f 的单满分解

Fig. 3 Monic-epic facterization of f

于 $\mathscr{A}b^{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}$ 中所有可表函子构成的同构闭的满子范畴，显然

$$M = \mathrm{Im}\, f^n + \mathrm{Ker}\, f^n$$

当且仅当

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{Im}\, f^n) + \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{Ker}\, f^n).$$

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{Im}\, f^n) + \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{Ker}\, f^n)$ 当且仅当 $\forall X \in \mathscr{A}$，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\mathrm{Im}\, f^n) + \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\mathrm{Ker}\, f^n), \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f^2 \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Im}f^2 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varepsilon"] \arrow[ddl, "i_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, "k_1"] & M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Im}f \arrow[r] \arrow[dl, "i_1"] & 0 \\
 & & M & &
\end{tikzcd}$$

图 4　f 诱导的正合交换图

Fig. 4　Diagram of exact commutative induced by f

据引理 6，若有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f^n)) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f^n)), \tag{2}$$

便可知(1)式成立. 由于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M)$，$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f^n))$，$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f^n))$ 皆是 Abel 群，故可用文[7]的元素方法证明，即知(2)式成立. 故

$$f\text{ 单射} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,f)\text{ 单射} \Longleftrightarrow$$
$$\forall X \in \mathscr{A}, \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,f^n)) \Longleftrightarrow$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,f)\text{ 满射} \Longleftrightarrow f\text{ 满射}.$$

至此 1) 得证. 类似可证 2).

文[8]给出 Fitting 引理的一种证明方法，利用引理 7，本文给出另一种证明.

定理 8(Fitting 引理)　设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴，M 是长度为 n 的对象，$f \in \mathrm{End}(M)$，则 $M = \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n$.

证明　由引理 5 知，M 既是 Artin 对象又是 Noether 对象，再由引理 7 知，存在 $m \in \mathbf{N}$ 使得 $M = \mathrm{Im}\, f^m \oplus \mathrm{Ker}\, f^m$，但因为 M 是合成列长度为 n，所以 $\mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^m$，$\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^m$，因此 $M = \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n$.

推论 9　设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴，$M \in \mathscr{A}$ 是有限长度的不可分解对象，$f \in \mathrm{End}(M)$，则下述条件等价:

1) f 单射;

2) f 满射;

3) f 同构;

4) f 非幂零.

有了 Abel 范畴的 Fitting 引理，易证 Abel 范畴的 Krull-Schmidt 定理.

定理 10[8] (Krull-Schmidt 定理)　设在 Abel 范畴中，M 是非零对象且具有有限长度 n，则 M 可分解成有限个不可分解对象的直和，即 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$，除直和项的排列顺序以外，在同构意义下 M 的分解是唯一的.

先回顾 k 范畴的定义，其它相关概念及记号参见[7,9-10].

定义 11[1]　设 $\mathscr{K}$ 是一个范畴，如果范畴 $\mathscr{K}$ 有有限直和，对于 $\mathscr{K}$ 中任意的两个对象 $X, Y \in \mathrm{Obj}\mathscr{K}$，它们的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X,Y)$ 是一个有限维的 k-向量空间，并且态射合成是 k 双线性的，即

$$\forall f,f',f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(X,Y),\quad \forall g,g',g'' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(Y,Z),\ k',k'' \in k,$$

有

$$g(k'f' + k''f'') = k'(gf') + k''(gf''),\quad (k'g' + k''g'')f = k'(g'f) + k''(g''f),$$

则称范畴 $\mathscr{K}$ 是(有限维) k 加法的，简称为 k 范畴.

定理 12　设 $\mathscr{A}$ 为有限维 k-Abel 范畴，则对于有限长度的不可分解对象 M，其自同态环有

$$\mathrm{End}(M) = k \cdot 1_M + \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M)).$$

证明　据 Fitting 引理以及 M 不可分解知 $\mathrm{End}(M)$ 为局部环.

设 $\mathrm{End}(M) = R$，有环同构 $R \simeq \mathrm{Hom}_R(R,R)$，即

$$\mathrm{End}(M) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{End}(M),\mathrm{End}(M)).$$

由于End(M)是有限维向量空间,且End(M)作为自身的左正则模是不可分解的,这是因为M不可分解当且仅当End(M)无0,1以外的幂等元当且仅当End(M)作为左正则模不可分解.

故任意$f \in \mathrm{End}(M)$视为End(M)到End(M)的左模同态,首先必是k上的线性变换.由Jordan标准形理论,存在End(M)上的基,使得f为Jordan矩阵,不妨设为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = \dim(\mathrm{End}(M))$. 于是有

$$f = \lambda_i \cdot 1_{\mathrm{End}(M)} + g,\ (g = f - \lambda_i \cdot 1_{\mathrm{End}(M)}) \Longleftrightarrow f = \lambda_i \cdot 1_M + g.$$

显然g是不可逆的(行列式为0),故

$$g \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M)) = \{h \mid h\ \text{不可逆}\}.$$

从而 $\forall f \in \mathrm{End}(M)$,有$k$以及$g \in \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M))$,使得

$$f = k \cdot 1_M + g,$$

即 $\mathrm{End}(M) = k \cdot 1_M + \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M))$.

由定理12立得以下推论.

推论13 设$\mathscr{A}$是有限维k-Abel范畴,则对于k-Abel范畴$\mathscr{A}$中的任意有限长度对象M,有$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$,其中$M_i$不可分解,且对于每一个$M_i$,都有$\mathrm{End}(M_i) = 1_{M_i} + \mathrm{Rad}(\mathrm{End}(M_i))$为局部环.

参考文献:

[1] Ringel C M. Tame algebras and integral quadratic forms [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Veriag, 1984.

[2] Chen Xiaowu, Ye Yu, Zhang Pu. Algebras of derived dimension zero [J]. Communications in Algebra, 2008, 36(1): 1-10.

[3] Pareigis B. Categories and fuctors [M]. New York: Academic Press, 1970.

[4] Freyd P. Abelian categories: an introduction to the theory of functors [M]. New York: Harper and Row, 1964.

[5] 林秋林. Abelian范畴中的Jordan-Hölder定理 [J]. 数学研究, 2008, 41(3): 295-300.

[6] 丁胜斌. Abel范畴若干代数性质及其应用 [D]. 福州: 福建师范大学, 2010.

[7] Anderson F W, Fuller K R. Ring and categories of modules [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[8] Krause H. Krull-Remak-Schmidt categories and projective covers [EB/OL]. http://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/AG-Krause/publications_krause/krs.pdf.

[9] 陈家鼎. 环与模 [M]. 北京: 北京师范学院出版社, 1989.

[10] 周伯壎. 同调代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.

(责任编辑:林 敏)