学校编号： 10384　　分类号：_____ 密级：_____

学号： B200423009　　UDC: ________________________

学　位　论　文

含 Riesz(-Feller) 位势算子的分数阶偏微分方程的基本解与数值解

Fundamental Solution and Numerical Solution of Fractional Partial Differential Equation with Riesz(-Feller) Potential Operator

章　红　梅

指导教师姓名： 刘发旺　教授

申请学位级别： 博　士　学　位

专　业　名　称： 计　算　数　学

论文提交日期： 2007 年 4 月

论文答辩日期： 2007 年 6 月

学位授予单位： 厦　门　大　学

学位授予日期： 2007 年　月

答辩委员会主席：________________________________

评阅人：____

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（ ），在年解密后适用本授权书。

2. 不保密（ ）

（请在以上相应括号内打 " √ " ）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目　录

Contents

摘　　要

早在 17 世纪末整数阶微积分还处于发展时期， Leibniz 和 L'Hospital 就曾以书信的方式探讨过分数阶微积分和简单的分数阶微分方程。但初期由于分数阶算子没有物理、力学背景的支持，又与经典的 Newton 整数阶体系相左，故发展极其缓慢。直到 20 世纪，许多学者发现 FC 和 FDE 在分形动力学、扩散和输运、物种传播与繁衍、混沌与湍流、随机游走、金融、随机过程、粘弹性力学及非牛顿流体力学等诸多领域里有着广泛的应用，分数阶微积分和微分方程才得到迅速的发展，目前已成为当前国际上的一个热点研究课题。

Podlubny 总结道“只有在同时使用左侧导数和右侧导数时，分数阶微分方程的理论尤其是分数阶微分方程的边值问题才能得到较好的发展”。故本文所考虑的方程的空间导数均是 Riesz 位势算子或 Riesz-Feller 位势算子，即含有双侧的 Riemann-Liouville(R-L) 分数阶导数。

本文第一章首先简要介绍了分数阶微积分的发展历程和前人的工作，其次给出目前常用的几种分数阶算子的定义、性质及这些算子之间的关系。

第二章我们分别考虑了空间 Riesz 分数阶偏微分方程和时间 - 空间 Riesz 分数阶偏微分方程的基本解。在假设函数关于空间变量具有周期性的前提下，利用 Fourier 级数展开及 Laplace 积分变换求解这两类方程的 Cauchy 问题，得到可显式表示成级数形式的基本解，从而易于近似计算。

把古典扩散方程中关于空间变量的二阶导数用 $\alpha \in (0,2](\alpha \neq 1)$ 阶且含偏斜度 $\theta(\mid \theta \mid \leq min\{\alpha, 2-\alpha\})$ 的 Riesz-Feller 位势算子代替就得到空间分数阶 Lévy-Feller 扩散方程 (SFLFDE) 。本文第三章分别从概率和数值近似计算的角度研究了 SFLFDE 。首先对于无限区间上 SFLFDE 的柯西问题我们分别就 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha \leq 2$ 情形利用数值积分构造了两个差分离散格式，证明了此二离散格式可用于模拟随机游走模型，进一步地给出了与 Lévy-Feller 扩散对应的稳定 Lévy 分布的吸收域问题。其次，从实际应用的角度考虑了在有限区间上 SFLFDE 的初边值问题的数值逼近，构造了一个条件稳定和收敛的显式差分离散格式。最后给出一个数值例子说明上述离散格式的计算有效性和数值分析的准确性。

第四章讨论了含非线性源项的空间 Riesz 分数阶扩散方程的数值近似。借助于 R-L 分数阶导数与 Grünwald-Letnikov(G-L) 分数阶导数的等价性，我们利用移位 G-L 技巧对 Riesz 位势算子进行离散。此外，再利用向后差商近似时间导数，得到一个隐式有限差分离散格式。进一步在假设非线性源项满足 Lipschitz 条件的情形

下，证明了该格式是无条件稳定和收敛的。最后给出两个数值例子，并用分数阶行方法（ MOL ）与之比较，所得的数值结果与理论分析是非常吻合的。

用有限差分技巧（即数值积分技巧或移位 G-L 技巧）离散分数阶偏微分方程时，对于 R-L 导数算子的数值近似的收敛阶都不超过一阶，故寻求高阶收敛的数值离散格式是非常必要的。第五章我们采用两种数值方法：有限差分法和 Galerkin 有限元法数值逼近空间 Riesz 分数阶对流 - 扩散方程。首先利用数值积分技巧离散 Riesz 位势算子、向后差商近似时间导数，构造了一个隐式有限差分离散格式，证明了该格式是无条件稳定和收敛的，但遗憾的是该数值格式关于空间变量的收敛阶小于一阶。为了得到更高收敛阶的数值离散格式，进而采用 Galerkin 有限元法对方程进行数值近似。把方程变成等价的弱形式，证明了该弱形式的解是存在唯一的。进一步地，借助于向后差商近似时间导数、 Galerkin 有限元逼近空间 Riesz 导数，得到一个隐式 Galerkin 有限元完全离散格式，该格式也是无条件稳定和收敛的，且当方程的解满足一定正则性时关于空间变量的收敛阶可达到高阶。最后分别用这两种方法进行数值实现，比较了两种方法的收敛阶，它们与理论分析是吻合的。

第六章对本文的工作做了一个总结。

关键词： Riesz 位势； Riesz-Feller 位势； Caputo 导数；分数阶偏微分方程；稳定性；收敛性

ABSTRACT

In the end of 17th century the integral calculus were on the seedtime, Leibniz and L'Hospital discussed the fractional calculus and simple fractional differential equations by letters. In the earlist time, since the fractional calculus were short of physical and mechanical background and were contradiction with the classical Newtonian intergral system, the development of fractional calculus was very slow. Till the 20th century, many academicians find that the fractional calculus are used widely to simulate some special phenominon in fractal kinetics, diffusion and transportation, spread and multiply of population biology, chaos and overfall, random walks, finance, viscoelastic materials and non-Newtonian fluid mechanics, etc. Since then fractional calculus obtain rapid development. Now the fractional theories and applications become a pop reseach subject in the world.

Podlubny concludes that "the complete theory of fractional differential equations, especially the theory of boundary value problems for fractional differential euqtions, can be developed only with the use of both left and right derivatives." So the spatial derivatives discussed in the paper are all Riesz potential operator or Riesz-Feller potential operator, which include the left and right Riemann-Liouville fractional derivatives.

In Chapter 1, the developmental history of fractional calculus and the previous works about fractional calculs are introduced, then we present the definiens and properties of some common fractional operators and their relationship.

In Chapter 2, The fundamental solutions of the space Riesz fractional partial differential equation(SRFPDE) and the time-space Riesz fractional partial differential equation(TSRFPDE) are discussed, respectively. Under the condition of periodicity of function about the spatial variable, we solve the Cauchy problems of the SRFPDE and TSRFPDE by the expansion of Fourier series and Laplace integral transform. The obtained fundamental solutions can be expressed in the form of series, then computed easily.

The space fractional Lévy-Feller diffusion equations(SFLFDE) are obtained from the standard diffusion equation by replacing the second-order space derivative with a Riesz-Feller derivative D_θ^α of order $\alpha \in (0,2]$ $(\alpha \neq 1)$ and skewness θ $(|\theta| \leq \min\{\alpha, 2-\alpha\})$. In Chapter 3 we consider the Cauchy problem of SFLFDE in the sense of probability and numerical approximate computation, respectively. Firstly, two difference discrete schemes are constructed using numerical integral technique for the case $0 < \alpha < 1$ and $1 < \alpha \leq 2$ in infinite interval, which can be simulated the random walk's models. Furthermore, we discuss the domain of attraction of the stable Lévy distribution corresponding to Lévy-Feller diffusion. Secondly, in view of practical significance, numerical approximation of the initial and boundary values problem of SFLFDE is discussed for $1 < \alpha \leq 2$ in a finite interval. A conditionally stable and convergent explicit difference discrete scheme is presented. Finally, a numerical example is given to confirm our theoretical analysis.

In Chapter 4, space Riesz fractional diffusion equation with nonlinear source term is discussed. Due to the equivalence of R-L fractional derivative and G-L fractional derivative, we discretize the Riesz potential operator by the shifted G-L technique. Moreover, discretizing the time derivative by the backward difference quotient deduces a implicit finite difference discrete scheme(IFDDS). Furthermore, if the nonlinear source term satisfies the Lipschitz's condition, the IFDDS is unconditionally stable and convergent. To evaluate the efficiency of the above obtained IFDDS, a comparison with Method of Lines(MOL) is used. Finally, two numerical examples are presented to show that the numerical results are in good agreement with our theoretical analysis.

Discretizing the fractional partial differential equations by finite difference technique(i.e. numerical integral technique or the shifted G-L technique), the convergence order of the numerical approximation of R-L fractional derivative is no more than one order, so it is necessary to find other numerical discrete scheme with higher convergence order. In Chapter 5, we use two numerical methods: finite difference method and Galerkin finite element method to approximate the space Riesz fractional advection-diffusion equation. Firstly, discretizing the Riesz potential operator by numerical integral technique and time derivative by the backward difference quotient deduce to a implicit finite difference discrete scheme, which is unconditionally stable and convergent. But it is pity that the convergence order of the numerical scheme about spatial variable is less than one order. In order to obtain higher convergence order we moreover approximate the space Riesz fractional advection-diffusion equation by Galerkin finite element method. We transform the equation into a equavilent weak form, which is proven that the solution is existent and unique.

Approximating time derivative by the backward difference quotient and the space Riesz derivative by Galerkin finite element deduce a implicit Galerkin finite element fully discrete scheme, which is also unconditionally stable and convergent. Furthermore, if the solution of the equation satisfies some regularity, the convergence order about spatial variable can reach high order. At the end of Chapter 5 we compare the convergence order of numerical examples computed by the above two numerical approximate schemes, which are good agreement with the theoretical analysis.

In Chapter 6 we conclude the works in this thesis.

Key Words: Riesz Potential, Riesz-Feller Potential, Caputo derivative, Fractional-Order Partial Differential Equation, Stability, Convergence.

第一章　绪论

§1.1　引言

早在 17 世纪末整数阶微积分还处在发展时期，Leibniz 和 L'Hospital 就曾以书信的方式探讨过分数阶微积分 (fractional calculus， FC) 和最简单的分数阶微分方程 (fractional differential equations, FDEs) 问题。在 1695 年 Hospital 致信给 Leibniz 询问若 n 为分数时， $D^n f$ 该如何描述，有怎样的含义？ Leibniz 在给 Hospital 的回信 [40](p.301-302) 以及在 1697 年给 Wallis 的信 [41](p.25) 中对 $\frac{1}{2}$ 阶导数与微分算子的可能性做了一些注解。此后，分数阶微积分逐渐地引起了一些著名学者的关注。 1738 年 Euler[16](p.56) 观察到幂函数 x^a 的非整数阶 p 阶导数 $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ 是有意义的。 Laplace[39](pp.85,156) 在 1812 年提出了对可用积分 $\int T(t)t^{-x}dt$ 表示的函数进行非整数阶微分的思想。其后 1820 年 Lacroix 在其论文 [38](pp.409-410) 中再次提到 Euler 的思想并得到了 $\frac{d^{1/2}x^a}{dx^{1/2}}$ 的准确表达式。 1822 年 Fourier[20] 建议用公式

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda x - t\lambda + p\pi/2)dt$$

来定义非整数阶导数，这是最早出现的对任意具有充分好条件的函数 (不必是幂函数) 的任意正数阶导数的定义。此后漫长的岁月里，经过许多数学家的努力，基于各种不同的基础和目的，形成了多种形式的分数阶算子的定义，如 Grünwald-Letnikov(G-L)， Riemann-Liouville(R-L)， Marchaud， Caputo， Erdélyi-Kober 型分数阶算子， Riesz 位势算子等等 [72, 82, 68, 74] 。初期由于分数阶微积分没有物理、力学等应用背景，又由于 FC 在物理上与经典的 Newton 整数阶体系相左，故发展极其缓慢。直至 20 世纪 70 年代末美国耶鲁大学 Mandelbrot 教授 [60] 首次提出，在自然界和许多科学技术中存在着大量分数维的事实，并在整体与部分之间存在自相似的现象以及分数阶 Brown 运动与 R-L 分数阶微积分之间存在紧密联系，此后，作为分形集合和分形动力学的基础，分数阶算子理论特别是分数阶微积分和分数阶微分方程理论及其应用研究 [6, 78, 79] 在国际上才得到迅速的发展。 1974 年 Ross 在美国组织召开了分数阶计算与应用的首届国际会议，并以 Lecture Notes in Mathematics 系列丛书形式发表了第一部关于分数阶算子理论与应用的会议文集 [81] 。随着对

自然界认识的加深，人们发现分数阶微积分或微分方程除了在分形动力学上的应用外，在松弛与振荡 [21, 57] 、扩散和输运理论 [84, 66, 3, 73, 44, 67] 、生物组织 [92, 89]，物种传播与繁衍 [1] 、混沌与湍流 [87, 96, 93] 、随机游走 [26, 66, 27, 67, 49] 、金融、统计与随机过程 [26, 58, 2] 、粘弹性力学及非牛顿流体力学 [93, 83] 等诸多领域也有广泛的应用，而它们在自然界和各个科学领域的广泛应用背景反过来又促进了其理论研究的进一步发展。 1998 年， Fractional Calculus & Applied Analysis 首期学术杂志正式发行，主要发表基于分数阶计算的数学方法，及分数阶方程在应用科学（物理、化学、金融、生物化学、水文、生态环境等）方面的模拟过程。目前分数阶微积分或微分方程的研究已成为当前国际上的一个热点研究课题。

在最近几十年，许多研究者指出，由于分数阶积分和导数是拟微分算子，具有非局部性，从而为描述具有记忆与遗传性质的材料，及由反常扩散控制的复杂系统的动力传送过程提供了极有价值的方法，并证实了分数阶模型比整数阶模型更适合于模拟具有这些性质的材料和反常动力传送过程，故如何求解分数阶方程必然成为一个紧迫而重要的研究课题，吸引了大量研究者的兴趣。

1995 年白俄罗斯的 Luchko 和加拿大的 Srivastava 在文献 [54] 中借助于分数阶 R-L 算子的关系和性质给出了一类含 R-L 分数阶导数的常微分方程边值问题的解，随后 Luchko 和德国的 Gorenflo 在 1999 年 [55] 还类似地求解了一类含 Caputo 分数阶导数的常微分方程初值问题。杨光俊在 1997 年 [94] 利用 Laplace 变换和 Mellin 变换给出了与分数阶常微分方程初值问题对应的分数阶积分方程的解析解。 2000 年墨西哥的 Elizarraraz 和 Star[14] 提出用分数阶差商算子和有理函数法求解含 R-L 分数阶导数的齐次常微分方程 Cauchy 问题，此方法是在线性代数结构的基础上构造出来的。同年以色列的 Metzler 和 Klafter 在文献 [65] 中利用积分变换对时间分数阶扩散方程（即分数阶 Fokker-Planck 方程）在不同边值条件下进行求解，所得的结果表明分数阶扩散模型所描述的是自然界复杂系统中的非正常扩散现象。在 2001 年，意大利的 Mainardi 等 [59] 借助于各种积分变换给出了空间 - 时间分数阶扩散方程 Cauchy 问题的基本解，并把得到的各种形式的基本解解释成包含时间在内的空间概率密度函数。 2003 年 Duan 和 Xu[12] 借助于 Laplace 变换和 Fourier 正、余弦变换得到了半无界区域上的分数阶扩散方程的解，随后他们 [13] 在 2004 年利用 Laplace 变换和有限正弦变换研究了有界区域上的时间分数阶扩散 - 波动方程的解析解。 2004 年山东大学的徐明瑜教授和他的博士生在他们的博士毕业论文里分

别讨论了药物控释系统、非牛顿流体力学、粘弹性材料等的应用问题，建立了分数阶数学模型并利用积分变换和特殊函数求出模型的解 [35, 52] 。 Huang 和 Liu 在 2005 年把时间 - 空间分数阶扩散方程推广到时间、时间 - 空间分数阶对流 - 弥散方程，利用积分变换得到方程的基本解 [32, 33] 。印度的 Gejji 和 Jafari[8] 在 2005 年利用分离变量法考虑了一维非齐次和二维齐次时间分数阶扩散 - 波动方程在齐次混合边值问题下的解析解。随后， 2006 年王学彬 [91] 在他的硕士论文中把 [8] 的结果推广到三维的情形。

至于分数阶微分方程的数值近似方法和理论分析的研究方面，人们首先开始于分数阶常微分方程的数值近似。奥地利的 Lubich 教授在 1986 年提出了用分数阶的线性多步法解分数阶常微分方程 [53] 。德国的 Diethelm 教授等从二十世纪末以来一直致力于对分数阶常微分方程数值近似的研究，提出了用外推法 [9] 、预估 - 校正法 [10] 、分数阶 Adams 法 [11] 数值求解分数阶常微分方程。2005 年埃及的 Mesiry 等 [64] 考虑了含多项分数阶导数的非线性常微分方程的数值解，比较了分别用积梯形求积公式 (Product traoezoidal quadrature formula) 与积矩形法则 (Product rectangle rule) 近似分数阶积分的误差。 2007 年 Lin 和 Liu[42] 利用分数阶线性多步法给出了非线性分数阶常微分方程的高阶收敛的数值离散格式。对于分数阶偏微分方程数值近似的研究起步相对要晚一些。从 20 世纪末开始 Gorenflo 等 [25-29] 陆续考虑了时间导数为整数阶或 Caputo 分数阶，空间导数为 Riesz-Feller 位势算子的时间、空间、时间 - 空间分数阶扩散方程，借助于一定条件下 R-L 分数阶导数与 G-L 分数阶导数的等价性，用移位的 G-L 技巧逼近 R-L 分数阶导数 (即用移位的 G-L 分数阶导数级数表达式中有限项级数和来近似 R-L 分数阶导数)，得到方程的有限差分离散近似格式，进而把相应的离散格式解释成时间、空间、时间 - 空间上的离散随机游走模型。此外，在文献 [26] 中，作者还进一步证明了离散格式在分布意义上的收敛性。文献 [25-29] 都是从概率和随机游走的角度对基于移位 G-L 技巧得到的离散格式做了分析和解释，而没有从数值计算的角度对其进行讨论。 2002 年刘发旺 (Liu) 教授等在海水浸入地下水层的研究项目中发现，具有长尾运动的地下水传送过程与分数阶导数的性态非常相似 [44] ，首次提出了一种计算有效的分数阶行方法 (即把空间分数阶偏微分方程转换成常微分方程，然后对时间一阶导数用向后差分技巧离散的一种自适应迭代算法) 用于近似求解空间分数阶偏微分方程，成功地描述了示踪剂在地下水层的运动，证实了分数阶偏微分方程能更精确地模拟

具有长尾性态的溶质运动过程 [46-49] 。 2003 年美国的 Lynch 等 [56] 利用了两种方法：三点和四点差商对输送方程中的左侧 R-L 分数阶导数进行数值积分，得到输送方程的显式和半隐式近似离散格式，但并没有给出这两种格式的收敛性和稳定性分析。 2004 年新西兰的 Meerschaert 和 Tadjeran[61] 考虑了空间分数阶对流 - 弥散方程，利用 Fourier 变换法对移位 G-L 算子近似 R-L 导数的误差做了估计，得到一阶收敛的结论，并指出若用标准的 G-L 算子对 R-L 导数进行数值逼近所得的数值离散格式无论是显式还是隐式格式都是不稳定的，而用移位的 G-L 算子进行逼近时显式是条件稳定，隐式则是无条件稳定的，且收敛阶为一阶。随后在 2006 年他们 [62] 用同样的方法考虑了双侧空间分数阶扩散方程的显式离散和数值分析，同时还讨论了二维变系数分数阶弥散方程的有限差分逼近 [63] ，提出了一种计算有效的算法（交替方向法），给出了详细的稳定性和收敛性分析。 2005 年 Shen 和 Liu [86] 利用数值积分法研究了带绝缘终端的空间分数阶扩散方程的显式有限差分近似，给出了稳定性和收敛性分析。在 2006 年，美国的 Tadjeran 等 [90] 考虑了变系数空间分数阶扩散方程，借助于移位 G-L 技巧和 Crank-Nicholson 方法得到关于空间步长一阶、时间步长二阶收敛的无条件稳定的数值离散格式，进一步对空间变量采用外推技巧使得关于空间步长的收敛阶也达到二阶；约旦的 Rawashdeh[76] 借助于多项式样条函数，利用配置法给出了一类分数阶积微分方程的数值解，但没有给出数值分析； Zhuang 和 Liu [98] 考虑了时间分数阶扩散方程的隐式差分近似，采用数学归纳法对差分格式进行稳定性与收敛性分析；同时 F.Liu 和 P.Zhuang[50] 还进一步考虑了更为复杂的时间 - 空间分数阶对流 - 扩散方程的隐式差分近似格式，并用数学归纳法给出了此差分格式的稳定性与收敛性分析； Liu 和 Liu [51] 把文献 [26] 中考虑的分数阶扩散方程推广到分数阶对流 - 扩散方程，用移位 G-L 技巧逼近 Lévy-Feller 算子，得到的离散格式可用于模拟随机游走现象，进一步还讨论了方程在有限区间上的数值解。上述这些文献都仅限于有限差分离散 (包括数值积分和移位 G-L 技巧) ，凡是涉及到 R-L 分数阶算子的数值近似格式的收敛阶都不超过 1 阶，只有进一步采用外推技巧才能使得收敛阶达到 2 阶。

此外，一类比较特殊的数值近似方法 (即无需对方程进行离散却可以得到级数形式的近似解) ，如变分迭代法、 Adomian 分解法、 Lagrange 特征法等，也被人们应用到分数阶微分方程的数值近似上来。 1998 年上海的 He[30] 借助于变分迭代的思想考虑了用分数阶导数模拟的多孔介质中的渗流模型的近似解析解。 2002 年，