学校编码：10384
学号：19020071152088

分类号__密级__
UDC___

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

主观期望效用理论在随机占优中应用

Rank-dependent expected utility applied to stochastic dominance

指导教师姓名： 张顺明 教授
专 业 名 称： 应用数学
论文提交日期： 2010 年 4 月
论文答辩时间： 2010 年 5 月
学位授予日期： 2010 年 月

答辩委员会主席：__
评 阅 人：__

2010 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外，该学位论文为(　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得(　　　　　　　　　)课题(组)经费或实验室的资助，在(　　　　　　　　　)实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。)

声明人(签名)：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文(包括纸质版和电子版)，允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

(　　)1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

(　　)2.不保密，适用上述授权。

(请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。)

声明人(签名)：

年　　月　　日

摘 要

众所周知 EU 理论虽然得到广泛应用，但是 Allais paradox 使其独立性公理方面出现了问题，Quiggin 在 1982 年通过扭曲未来收益的概率解决了这个问题。本文将对对 Quiggin（1982）理论进行介绍。然后，给出它的数学建模，使其能够像 EU 一样用数学公式进行表达。最后将 Quiggin（1982）的 RDEU 理论延拓到随机占优。

本文主要利用 Quiggin 的理论对随机占优进行分析，得出以下结论：

首先，对一阶随机占优进行分析，我们得出：

$X_1 \succ_1 X_2$ 的充分必要条件是对于任意 $x \in [m, M], F_1(x) \le F_2(x)$

然后，对二阶随机占优进行分析，同样得出随机占优定理：

$A \succ_2 B$ 的充分必要条件对于任意 $x \in [m, M]$ $\int_m^z F_1(x) - F_2(x) dx \le 0$

最后，我们考虑 N 阶随机占优的情况。

引理 如果效用函数 u 有 N 阶连续可微导数，那么

$$RDEU(\tilde{R}_1) - RDEU(\tilde{R}_2) = \sum_{n=2}^{N} (-1)^{n-1} u^{n-1}(M) H_n(M) + (-1)^N \int_m^M H_N(z) du^{(N-1)}(z)$$

定理 $A \succ_N B$ 的充分必要条件是 $n = 2 \ldots N$， $S_n(M) \le 0$

并且对于任意 $x \in [m, M]$ $S_N(z) \le 0$

关键词:期望效用，扭曲函数，阿莱悖论，随机占优

Abstract

It is generally known that EU theory is widely used, unfortunately, Allais paradox makes its Independence axiom violated .because of this, Quiggin in 1982 solved this problem by means of the distorted function. We will simply introduce the theory of Quiggin and then provide its mathematic model to be shown in the way of mathematic formula like EU. Finally, RDEU may be extended to stochastic dominance.

According to the theory of Quiggin ,we shall analyze stochastic dominance with great care。

First，analyzing the first degree stochastic dominance , we can obtain the following theorem:

定理 1 A necessary and sufficient condition for $X_1 \succ_{1} X_2$ is established to

$$\forall x \in [m, M], F_1(x) \le F_2(x)$$

Second，we are likely to get the second theorem by the analysis of the second degree stochastic dominance :

定理 2 $A \succ_{2} B \iff \forall x \in [m, M] \quad \int_m^z F_1(x) - F_2(x) dx \le 0$

Finally, we might consider N degree stochastic dominance。

Lemma 3 If the utility function u is continuously differentiable, we may get :

$$RDEU(\tilde{R}_1) - RDEU(\tilde{R}_2) = \sum_{n=2}^{N} (-1)^{n-1} u^{n-1}(M) H_n(M) + (-1)^N \int_m^M H_N(z) du^{(N-1)}(z)$$

Theorem 4 $A \succ_{N} B \iff n = 2 \ldots N$, $S_n(M) \le 0$ and $\iff x \in [m, M]$, $S_N(z) \le 0$

Keywords: Expected utility，Rank-dependent expected utility，Distorted function，The Allais paradox，Stochastic dominance.

目 录

Contents

第一章 RDEU 理论介绍

1.1 RDEU 理论介绍

假设有两个时期，时期 0 和时期 1，比如今天和明天，现在和未来。由于未来收益不确定性，因此理性经济人会在时期 0 进行理性投资。由于大部分理性经济人都是风险厌恶者，所以在对风险资产进行投资时都希望自己的未来收益最大化。因此发展成 EU（期望收益），但是此理论的独立性公理在某些特殊情况下应用时会出现问题，例如 1952 年 Allais 在一次关于 EU 的讨论会中提出责难（也就是著名的阿莱悖论），使得人们不得不进一步深思。Quiggin 在 1982 年创造出了 RDEU 理论，也就是对 EU 理论中的概率进行扭曲，形成扭曲函数。扭曲函数的每一个元素都是对未来结果概率的扭曲而形成的函数，并不是仅仅依赖于此对应的未来收益的概率。下面我们将详细介绍 RDEU 理论。

我们考虑未来收益在闭区间$[m,M]$中的情况，N 表示$[m,M]$上的概率测度，N_0 表示 N 中的有限离散子集，对任意 $X\in N$，X 的累积分布函数 $F_X(x)=p\{X\le x\}$，对 $X\in[m,M]$，现在我们将在 N_0 上建立 RDEU 理论。

对任意的自然序列 $N=1,2\cdots$，$X^N=(x_1^N,p_1^N;\cdots x_N^N,p_N^N)$ 是一个未来收益，表示在未来 1 期获得 x_n^N 元收益的概率为 p_n^N，且 $x_1^N\le x_2^N\le\cdots\le x_N^N$，$p_n^N\ge 0$，对 $\forall n=1,2\cdots N$，且 $\sum_{n=1}^{N}p_n^N=1$。则 RDEU 函数可表示为：

$$RDEU(X^N)=\sum_{n=1}^{N}H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)u(x_n^N)$$

$H_n^N:[0,1]^N\to[0,1]$ 是一个连续函数对 $\forall n=1,2\cdots N$,，$\sum_{n=1}^{N}H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)=1$。$u$ 是一个连续递增的 NM 效用函数，$(H_1^N,\cdots,H_N^N)$ 是未来收益概率转化后而产生的新的概率。

Quiggin（1982）假定对任意$n=1,2\cdots N$，$H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)$是$(p_1^N,\cdots p_N^N)$的函数，在 RDEU 理论中，将对这个函数进行推导，对任意$n=1,2\cdots N$，$X^N=(x_1^N,p_1^N;\cdots x_N^N,p_N^N)$且$\sum_{n=1}^{N}p_n^N=1$，有

$$H_1^N(p_1^N,\cdots p_N^N)=g(p_1^N)$$

$$\cdots\cdots\cdots..$$

$$H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)=g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^N)-g(\sum_{n'=1}^{n-1}p_{n'}^N)\text{。}\qquad\textbf{(1.1)}$$

这里$g(p)=H_1^2(p,1-p)$，对任意$p\in[0,1]$。

定理 1 （Quiggin 1982）在函数$RDEU(X^N)=\sum_{n=1}^{N}H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)u(x_n^N)$中，$H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)$可以完全用$g$函数来表示。

从此定理可以看出，RDEU 在N_0中，对$X^N=(x_1^N,p_1^N;\cdots x_N^N,p_N^N)$，

$$RDEU(X^N)=g(p_1^N)u(x_1^N)+\sum_{n=2}^{N}[g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^N)-g(\sum_{n'=1}^{n-1}p_{n'}^N)]u(x_n^N)\qquad\textbf{(1.2)}$$

下面我们证明此定理。

证明：

我们将用数学归纳法证明此定理。令$g(p)=H(p,1-p)$

N=1 是显然成立。当 N=2，$H_1(p_1,p_2)u(x_1)+H_2(p_1,p_2)u(x_2)=RDEU(x_1,p_1;x_2,p_2)$

因为$g(p)=H(p,1-p)$

所以$g(p_1)u(x_1)+[1-g(p_1)]u(x_2)=RDEU(x_1,p_1;x_2,p_2)$

当$p_1\to 1$，$(x_1,p_1;x_2,p_2)\to(x_2,p_1+p_2)$。

$g(p_1)u(x_1)+[1-g(p_1)]u(x_2)\to u(x_2)$

故，$g(p_1)\to 0,(p_1\to 0)$

所以，$g(0)=0$。同理可得，$g(1)=1$

当 N=3，

$RDEU(x_1,p_1;x_2,p_2;x_3,p_3)=H_1^3(p_1,p_2,p_3)u(x_1)+H_2^3(p_1,p_2,p_3)u(x_2)+H_3^3(p_1,p_2,p_3)u(x_3)$

当 $x_1 \to x_2$ 时， $H_1^2(p_1+p_2;p_3)u(x_2)+H_2^2(p_1+p_2;p_3)u(x_3)$

令 $H_1^2(p_1+p_2;p_3)=H_1^3+H_2^3=g(p_1+p_2)$

$H_3^3=H_2^2=1-g(p_1+p_2)$

当 $x_2 \to x_3$ 时， $H_1^{2'}(p_1;p_2+p_3)u(x_1)+H_2^{2'}(p_1;p_2+p_3)u(x_3)$

$H_1^3=H_1^{2'}=g(p_1)$， $H_2^{2'}=H_2^3+H_3^3=1-g(p_1)$

$$
\begin{aligned}
H_2^3(p_1,p_2,p_3)&=1-H_1^3-H_3^3\\
&=1-g(p_1)-[1-g(p_1+p_2)]\\
&=g(p_1+p_2)-g(p_1)
\end{aligned}
$$

因此可得

$RDEU(x_1,p_1;x_2,p_2;x_3,p_3)=g(p_1)u(x_1)+[g(p_1+p_2)-g(p_1)]u(x_2)+[1-g(p_1+p_2)]u(x_3)$

因此当 N=1，2，3 时成立，假设 N 是成立，下面证明 $N+1$ 是成立。

对于 $N+1$， $X^{N+1}=(x_1^{N+1},p_1^{N+1};\cdots;x_{N+1}^{N+1},p_{N+1}^{N+1})$ 且 $\sum_{n=1}^{N+1}p_n^{N+1}=1$。 $RDEU(X^{N+1})=$

$\sum_{n=1}^{N+1}H_n^{N+1}(p_1^{N+1},\cdots p_{N+1}^{N+1})u(x_n^{N+1})$ 和 $\sum_{n=1}^{N+1}H_n^{N+1}(p_1^{N+1},\cdots p_{N+1}^{N+1})=1$

当 $x_1^{N+1} \to x_2^{N+1}$，有 $u(x_1^{N+1}) \to u(x_2^{N+1})$，

因此， $RDEU(X^{N+1}) \to RDEU(X^N)$ 且 $x_2^{N+1}=x_1^N, x_n^{N+1}=x_{n-1}^N$， $n=3,\cdots,N+1$， 和

$p_n^{N+1}=p_{n-1}^N$， $n=3,\cdots,N+1$，（ $p_1^{N+1}+p_2^{N+1}=p_1^N$ ）。

故，我们可得 $RDEU(X^{N+1})=RDEU(X^N)$，

即

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)u(x_n^N)&=[H_1^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_2^N\cdots p_N^N)+H_2^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_2^N\cdots p_N^N)]u(x_1^N)\\
&+\sum_{n=3}^{N+1}H_n^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_2^N\cdots p_N^N)u(x_{n-1}^N)
\end{aligned}
$$

因为 $x_1^N,\cdots,x_N^N$ 选取是任意的，且 $(H_1^{N+1},\cdots,H_{N+1}^{N+1})$ 与 $(x_1^N,\cdots,x_N^N)$ 没有必然的关系，

因此就有，

$$H_1^N(p_1^N,p_2^N,p_3^N\cdots p_N^N)=H_1^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_3^N\cdots p_N^N)+H_2^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_3^N\cdots p_N^N)$$
$$H_n^N(p_1^N,p_2^N,p_3^N\cdots p_N^N)=H_{n+1}^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_3^N\cdots p_N^N),\text{对 } n=2,\cdots N$$

故可得

$$H_n^{N+1}(p_1^{N+1},p_2^{N+1},p_3^N\cdots p_N^N)=H_n^N(p_1^N,p_2^N,p_3^N\cdots p_N^N)$$
$$=g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^N)-g(\sum_{n'=1}^{n-1}p_{n'}^N)$$
$$=g(\sum_{n'=1}^{n+1}p_{n'}^{N+1})-g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^{N+1})$$

下面我们考虑$\mathrm{k}=2,\cdots \mathrm{N}\text{-}1$。

当$x_{\mathrm{k}}^{N+1}\to x_{\mathrm{k+1}}^{N+1}$时，有$u(x_{\mathrm{k}}^{N+1})\to u(x_{\mathrm{k+1}}^{N+1})$，故$RDEU(X^{N+1})\to RDEU(X^N)$。

当$x_{\mathrm{k}}^{N+1}=x_{\mathrm{k+1}}^{N+1}$时，因此对$\mathrm{n}=1,\cdots,\mathrm{k}\text{-}1$，$x_{\mathrm{k+1}}^{N+1}=x_{\mathrm{k}}^N$，对$\mathrm{n}=\mathrm{k}+2,\cdots,\mathrm{N}+1$，$x_{\mathrm{n}}^{N+1}=x_{\mathrm{n-1}}^N$

对$\mathrm{n}=1,\cdots,\mathrm{k}\text{-}1$，有$p_{\mathrm{n}}^{N+1}=p_{\mathrm{n}}^N$，和$\mathrm{n}=\mathrm{k}+2,\cdots,\mathrm{N}+1$，有$p_{\mathrm{n}}^{N+1}=p_{\mathrm{n-1}}^N$，（$p_{\mathrm{k}}^{N+1}+p_{\mathrm{k+1}}^{N+1}$

$=p_{\mathrm{k}}^N$），因此可得：

$$\sum_{n=1}^{N}H_n^N(p_1^N,\cdots p_N^N)u(x_n^N)=\sum_{n=1}^{\mathrm{k}-1}H_n^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^N)u(x_n^N)$$
$$+[H_{\mathrm{k}}^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})+H_{\mathrm{k+1}}^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})]u(x_{\mathrm{k}}^N)$$
$$+\sum_{n=\mathrm{k}+2}^{N+1}H_n^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})u(x_{n-1}^N)$$

所以 $H_n^N(p_1^N,\cdots,\ p_N^N)=H_n^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^N)$，$\mathrm{n}=1,\cdots,\mathrm{k}\text{-}1$

$$H_k^N(p_1^N,\cdots,\ p_N^N)=H_{\mathrm{k}}^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})+H_{\mathrm{k+1}}^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})$$

$H_n^N(p_1^N,\cdots,\ p_N^N)=H_n^{N+1}(p_1^N,\cdots p_{\mathrm{k-1}}^N,\ p_{\mathrm{k}}^{N+1},\cdots,\ p_N^{N+1})$，$n=k+1,\cdots N$。

且

$$H_1^{N+1}(p_1^{N+1},\cdots,\ p_{N+1}^{N+1})=H_1^N(p_1^N,\cdots,\ p_N^N)=g(p_1^N)=g(p_1^{N+1})$$

对$\mathrm{n}=2,\cdots,\mathrm{k}\text{-}1$

$$H_n^{N+1}(p_1^{N+1},\cdots,\ p_{N+1}^{N+1})=H_n^N(p_1^N,\cdots,\ p_N^N)$$

$$=g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^N)-g(\sum_{n'=1}^{n-1}p_{n'}^N)=g(\sum_{n'=1}^{n+1}p_{n'}^{N+1})-g(\sum_{n'=1}^{n}p_{n'}^{N+1})$$

对$n = k+1, L\ ,\ N$

$H_{n+1}^{N+1}(p_1^{N+1}, L\ ,\ p_{N+1}^{N+1}) = H_n^N(p_1^N, L\ ,\ p_N^N)$

$= g(\sum_{n'=1}^{n} p_{n'}^N) - g(\sum_{n'=1}^{n-1} p_{n'}^N) = g(\sum_{n'=1}^{n+1} p_{n'}^{N+1}) - g(\sum_{n'=1}^{n} p_{n'}^{N+1})$

当$x_{\mathrm{N}}^{N+1} \to x_{\mathrm{N+1}}^{N+1}$，应用以上方法同样可得：

$H_1^{N+1}(p_1^{N+1}, L\ ,\ p_{N+1}^{N+1}) = H_1^N(p_1^N, L\ ,\ p_N^N) = g(p_1^N) = g(p_1^{N+1})$

对$n = 2, L\ ,\ N\text{-}1$

$H_n^{N+1}(p_1^{N+1}, L\ ,\ p_{N+1}^{N+1}) = H_n^N(p_1^N, L\ ,\ p_N^N) =$

$g(\sum_{n'=1}^{n} p_{n'}^N) - g(\sum_{n'=1}^{n-1} p_{n'}^N) = g(\sum_{n'=1}^{n+1} p_{n'}^{N+1}) - g(\sum_{n'=1}^{n} p_{n'}^{N+1})$

$H_{\mathrm{N}}^N(p_1^N, L\ ,\ p_N^N) = H_N^{N+1}(p_1^N, L\ \ p_N^{N+1},\ p_{N+1}^{N+1}) + H_{N+1}^{N+1}(p_1^N, L\ \ p_N^{N+1},\ p_{N+1}^{N+1})$

□

当X是连续时，根据 Stieltjes 积分可得：

$$RDEU(X\ ) = \int_{[m,M]} u(x)dg(F_X(x))$$

性质 1 函数g是一个连续递增的函数且$g(0) = 0, g(1) = 1$。

定理 2 在 N 中的 RDEU 函数为

$$RDEU(X\ ) = \int_{[m,M]} u(x)dg(F_X(x)) = u(M) - \int_m^M u(x)dg(F_X(x))$$

第二章 RDEU 的表示定理

2.1 EU 的表示定理

本节将要简单介绍 RDEU 表示的理论，也就是将 RDEU 理论公理化。我们已经了解 Neumann 和 Morgenstern 的 EU 理论的本质是三个等价公理，偏好表示公理，独立性公理，阿基米德公理。Fishburn（1982）使用五个公理使用公理化方法证明出 EU 的表示定理。下面我们就介绍这五个公理以及 EU 表示定理，我们将使用同样的思想来对 RDEU 进行公理化表示。

公理 1 取 N 中的任意两个元素 X_1，X_2，并且他们各自的累积分布函数为 F_{X_1}, F_{X_2}，如果 $F_{X_1} = F_{X_2}$，那么 $X_1 \sim X_2$。

我们用 $\aleph$ 表示一族累积分布函数 $\aleph = \{F : [m, M] \to [0,1] \mid F\text{是累积分布函数}\}$。在 $\aleph$ 中定义 $\succ$，$F_1 \succ F_2$ 当且仅当 $X_1 \succ X_2$，其中 $F_1 = F_{X_1}$，$F_2 = F_{X_2}$。

公理 2 $\succ$ 是非对称且负传递。

公理 3 取 $\aleph$ 中的元素 F_1，F_2，F_1'，F_2'，假设 $F_1 \succ F_2$。存在 $\forall \varepsilon > 0$，有 $\| F_1 - F_1' \| < \varepsilon$ 和 $\| F_2 - F_2' \| < \varepsilon$，从而可得 $F_1' \succ F_2'$，这里 $\| \cdots \|$ 是 L_1 范数，即 $\| F \| = \int_{[m,M]} | F(x) | dx$。

公理 4 如果 $F_{X_1} \le F_{X_2}$ 对所有 $x \in [m, M]$，那么 $F_{X_1} \succsim F_{X_2}$。

公理 5 若 F_1, F_2, F 都是 $\aleph$ 中的元素，α 是实数且满足 $0 < \alpha < 1$，$F_1 \succ F_2$ 可得 $\alpha F_1 + (1-\alpha) F \succ \alpha F_2 + (1-\alpha) F$。

通过以上五个定理 Yaari 证明了下面 EU 表示定理，此定理是 Fishburn 的改进型。

定理 3 偏好关系 $\succsim$ 满足公理 1-4 和公理 5，EU 当且仅当存在连续非减的实函数 u，定义域为区间 $[m, M]$，有 $\aleph$ 中的元素 X_1, X_2

$$X_1 \succ X_2 \Leftrightarrow E[u(X_1)] > E[u(X_2)]$$

从定理 3 ，期望效用函数可以表示成

$$EU(X)=E[U(X)]=\int_{[m,M]}u(x)dF_X(x)$$

2.2 RDEU 的表示定理

我们现在介绍扭曲独立定理（DIA）和 RDEU（rank-dependent expected utility）的表示定理。

Quiggin 表示 RDEU 为 $RDEU(X)=\int_{[m,M]}u(x)dg(F_X(x))=\int_{[m,M]}u(x)d[g\circ F_X](x)$。在上节中我们知道 $g(p)=H_1^2(p,1-p)$ 对任意 $p\in[0,1]$ 可以表示（H_1^2，H_2^2）。其中，可知道 $g:[0,1]\to[0,1]$ 是概率装换形式

因为 g 满足性质 1，所以 g 是可逆的。此函数的逆函数 $g:[0,1]\to[0,1]$ 也满足性质 1.我们假定 $g:[0,1]\to[0,1]$ 和逆函数 $g^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ 满足 lipschitz 条件，从性质 1 中，我们可以得到 $g:[0,1]\to[0,1]$ 满足累积分布函数的条件，故存在随机变量 $\xi\in[0,1]$ 有 $g(p)=p(\xi\le p)$。

性质 2 $X\in N$ 是一个随机变量，那么 $F_X(x)$ 是 $[0,1]$ 上的均匀分布。若随机变量 θ 是 $[0,1]$ 上的均匀分布，则对任意累积分布函数 F，$F^{-1}(\theta)$ 也是累积分布函数。

若随机变量 θ 是 $[0,1]$ 上的均匀分布，由性质 2 可知存在随机变量 $\xi=g^{-1}(\theta)$，$p(\xi\le p)=p(g^{-1}(\theta)\le p)=p(\theta\le g(p))=g(p)$。$g\circ F$ 满足累积分布函数的所有条件，$g\circ F:[m,M]\to[0,1]$ 是一个累积分布函数。

对任意累积分布函数 F，我们可得：

$g(F(x))=p(\xi\le F(x))=p(F^{-1}(\xi)\le x)=F_{F^{-1}(\xi)}(x)$ 且 $F^{-1}(\xi)=F^{-1}(g^{-1}(\theta))=[g\circ F]^{-1}(\theta)$。

令 $\aleph^0=\{g\circ F\in\aleph\mid F\in\aleph\}=\{F_{F^{-1}(\xi)}\in\aleph\mid F\in\aleph\}$，即 $\aleph^0=g(\aleph)$。

现在我们定义 $\aleph^0$ 中线性运算，如果对于 $\forall g\circ F_1\in\aleph,\forall g\circ F_2\in\aleph$ 和 $0\le\alpha\le1$ 从而我们得到

$\alpha[g\circ F_1]\oplus(1-\alpha)[g\circ F_2]\in\aleph^0$，即 $\alpha[g\circ F_1]\oplus(1-\alpha)[g\circ F_2]=g[\alpha F_1+(1-\alpha)F_2]$。

公理 6 对$\forall g \circ F_1, g \circ F_2, g \circ F \in \aleph^0$，$\alpha$是实数且$0<\alpha<1$，$g \circ F_1 \succ g \circ F_2$，那么我们可得：

$$\alpha[g \circ F_1] \oplus (1-\alpha)[g \circ F] \succ \alpha[g \circ F_2] \oplus (1-\alpha)[g \circ F]$$

定理 4 假定扭曲函数g和它的逆函数为g^{-1}都满足 lipschitz 条件，偏好关系$\succ_{o}$满足公理 1-4 和公理 6 当且仅当存在一个连续非递减实函数 u，定义域为$[m, M]$，对于N中任意两个元素X_1, X_2有：

$$X_1 \succ X_2 \Leftrightarrow \int_{[m,M]} u(x) dg(F_1(x)) > \int_{[m,M]} u(x) dg(F_2(x))$$