

M. DELEST

J. M. FEDOU

## **Introduction aux polyèdres en combinatoire d'après E. Ehrhart et R. Stanley**

*Informatique théorique et applications*, tome 25, n° 3 (1991),  
p. 273-292

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1991\\_\\_25\\_3\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1991__25_3_273_0)

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## INTRODUCTION AUX POLYÈDRES EN COMBINATOIRE D'APRÈS E. EHRHART ET R. STANLEY (\*)

par M. DELEST et J. M. FEDOU (<sup>1</sup>)

---

Résumé. – *Cet article est une introduction à la théorie des polyèdres en Combinatoire. Loin d'être un exposé exhaustif de tous les théorèmes et toutes les preuves concernant ce sujet, il s'agit plus simplement d'un recueil des principales définitions et résultats permettant de calculer la fonction génératrice des nombres de points à coordonnées entières dans un polyèdre. En particulier, les exemples et les idées de preuves sont donnés en dimension au plus trois. Nous donnons une utilisation de cette théorie dans le dénombrement de chemins de Dyck suivant le nombre de « pics ».*

Abstract. – *This paper is an introduction to the polytope theory in Combinatorics. It is not an exhaustive review of all the features. It is only an abstract of the principal definitions and results in computing the number of integer points in a polytope. At the final, we give an application of this theory to Dyck path.*

### INTRODUCTION

Un polyèdre convexe rationnel de  $\mathbb{R}^m$  est un polyèdre dont tous les sommets sont à coordonnées rationnelles. Si  $n$  est un entier positif, on considère le nombre de points  $\alpha$  du polyèdre tels que  $n\alpha$  soit un point de  $\mathbb{Z}^m$ . Les fonctions génératrices de ces nombres ont été étudiées par Ehrhart [4], Macdonald [6], McMullen [7] et plus récemment par Stanley [9, 10]. La « méthode des polyèdres convexes » permet de résoudre de manière élégante toute une classe de problèmes combinatoires : problèmes d'échange, de distribution, de partition, de graphes valués... On trouvera de nombreux exemples dus à Ehrhart dans [4].

---

(\*) Reçu en septembre 1989, accepté en avril 1990.

Ce travail a été en partie financé par le P.R.C. de Mathématiques et Informatique.

(<sup>1</sup>) L.A.B.R.I. (Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 1304), Département de Mathématiques, U.E.R. de Mathématique et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33400 Talence Cedex, France.

Adresse Electronique : maylis @ geocub. greco-prog. fr ou fedou @ geocub. greco-prog. fr.

Le travail présenté ici est en deux parties, la première est une synthèse des définitions et des théorèmes permettant le calcul effectif des nombres de points à coordonnées entières dans un polyèdre, la seconde est une application de cette méthode au dénombrement d'objets combinatoires liés à nos études sur des nouveaux  $q$ -analogues de Bessel que nous avons défini dans [2].

Les objets combinatoires sont les chemins de Dyck ayant  $k$  pics et tels que la somme des hauteurs des pics est  $n$ . En fait, les chemins de Dyck étant naturellement en relation avec les arbres binaires, il s'agit d'énumérer les arbres binaires ayant  $k$  feuilles et pondérés par un poids dépendant de la distribution des feuilles dans l'arbre. On trouvera une explication détaillée dans [2].

Après quelques définitions et notations, nous énonçons les théorèmes permettant de ramener le calcul des fonctions sur un polyèdre à celles sur des simplexes formant une triangulation du polyèdre. Puis nous donnons les résultats concernant le calcul dans le cas d'un simplexe. Enfin nous donnons une expression plus simple, due à R. Stanley, dans le cas où la triangulation est effeuillable. Dans le dernier paragraphe nous montrons que notre problème sur les chemins de Dyck se ramène effectivement à une énumération dans les polyèdres et nous effectuons le calcul pour les premières valeurs, donnant ainsi de nouvelles classes d'objets combinatoires énumérés par cette méthode. Ce dernier point était une question de R. Stanley dans [9].

## 1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous donnons dans ce paragraphe les principales définitions permettant d'extraire les principales méthodes de calcul sur les polyèdres. Nous avons reconstitué toutes les définitions à partir de [11].

**DÉFINITION 1 :** *L'enveloppe convexe  $\text{conv}(S)$  d'une partie  $S$  de  $\mathbb{R}^m$  est l'intersection des parties convexes de  $\mathbb{R}^m$  contenant  $S$ .*

**DÉFINITION 2 :** *Un polyèdre convexe  $P$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini.*

*Remarque :* Soit  $d$  la dimension de  $P$ . On peut définir  $P$  comme un espace homéomorphe à

$$B^d = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d), \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

NOTATION : Soient  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^m$ , on notera  $x \cdot y$  le produit scalaire de  $x$  avec  $y$ .

DÉFINITION 3 : Soient  $y \in \mathbb{R}^m, \alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $H$  un hyperplan

$$H_{y, \alpha} = \{ x \in \mathbb{R}^m / x \cdot y = \alpha \},$$

$H_{y, \alpha}$  est un hyperplan adjacent à  $P$  si

$$H_{y, \alpha} \cap P \neq \emptyset$$

et l'une des deux conditions est vérifiée,

$$(1) \forall x \in P, \quad x \cdot y \geq \alpha,$$

$$(2) \forall x \in P, \quad x \cdot y \leq \alpha.$$

On peut dire intuitivement que «  $P$  est sur un côté de  $H$  ».

DÉFINITION 4 : Une face  $F$  de  $P$  est un ensemble  $F = H \cap P$  (éventuellement vide), où  $H$  est un hyperplan adjacent à  $P$ . La frontière  $\partial$  de  $P$  est

$$\partial P = \bigcup_{\substack{F \text{ face de } P \\ \dim(F) = d-1}} F.$$

Chaque face de  $P$  est un polyèdre convexe. Chaque face d'une face de  $P$  est une face de  $P$ . Toute face de  $P$  contenue dans une face  $F$  de  $P$  est une face de  $F$ . Si on ordonne les faces par inclusion on obtient un ensemble partiellement ordonné.

DÉFINITION 5 : Un polyèdre convexe de dimension  $d$  ayant  $d+1$  sommets est un simplexe.

Soit  $P$  un polyèdre, on définit les nombres suivants :

$$i(P, n) = \text{card} \{ \alpha \in P, n \alpha \in \mathbb{Z}^m \},$$

$$j(P, n) = \text{card} \{ \alpha \in P \setminus \partial P, n \alpha \in \mathbb{Z}^m \}.$$

DÉFINITION 6 : Soit  $P$  un polyèdre. On définit les séries génératrices suivantes :

$$J(P, \lambda) = \sum_{n \geq 1} i(P, n) \lambda^n + 1,$$

$$\bar{J}(P, \lambda) = \sum_{n \geq 1} j(P, n) \lambda^n.$$

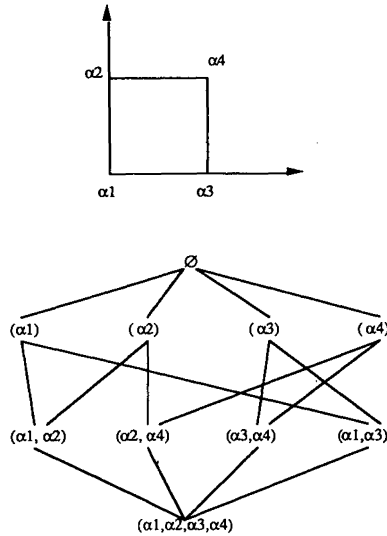


Figure 1. – Polyèdre de l'exemple 1 et son poset des faces.

Soit  $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_v\}$  l'ensemble des sommets de  $P$ . On munit  $V$  d'un ordre total, par exemple l'ordre lexicographique sur les composantes. Soit  $W \subset V$ , on note  $\delta(W)$  le plus petit sommet de  $W$  pour cet ordre.

Exemple 1 : Un exemple très simple.

Soit  $P$  le polyèdre de  $\mathbb{R}^2$  défini par les inéquations :

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq x_2 \leq 1.$$

L'ensemble des sommets est

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 0), \\ \alpha_2 &= (0, 1), \\ \alpha_3 &= (1, 0), \\ \alpha_4 &= (1, 1). \end{aligned}$$

Ce polyèdre et l'ensemble partiellement ordonné des faces sont dessinés figure 1.

Exemple 2. – Une pyramide.

Soit  $P$  le polyèdre de  $\mathbb{R}^3$  défini par le système d'inéquations :

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \tag{1}$$

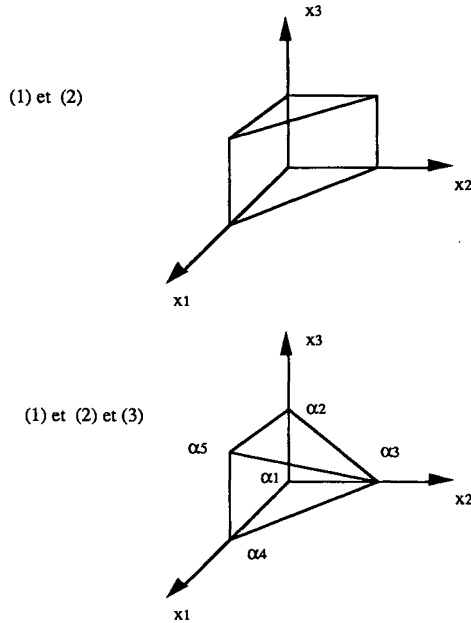


Figure 2. — Le polyèdre de l'exemple 2.

$$x_1 + x_2 \leq 1, \tag{2}$$

$$x_2 + x_3 \leq 1. \tag{3}$$

Ce polyèdre, dessiné figure 2, a pour sommets

$$\alpha_1 = (0, 0, 0),$$

$$\alpha_2 = (0, 0, 1),$$

$$\alpha_3 = (0, 1, 0),$$

$$\alpha_4 = (1, 0, 0),$$

$$\alpha_5 = (1, 0, 1).$$

Le poset de ses faces est donné figure 3.

DÉFINITION 7 : Un drapeau de faces  $\Phi$  de  $P$  est un  $d+1$ -uplet de faces

$$\Phi = (F_0, F_1, \dots, F_d)$$

tel que  $\dim(F_i) = i$  et pour  $0 \leq i \leq d-1$ ,  $F_i \subset F_{i+1}$  (donc  $F_d = P$ ). De plus un drapeau est dit complet si

$$\forall i \in [1, d], \quad \delta(F_i) \notin F_{i-1}.$$

On notera  $\Delta(\Phi)$  le simplexe de dimension  $d$  dont les sommets sont les plus petits éléments des faces du drapeau complet. Dans les exemples qui suivent le plus petit élément de chaque face du drapeau est en caractère gras.

Exemple 1 (suite) : Le polyèdre admet deux drapeaux complets :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= ((\alpha_4), (\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)), \\ \Phi_2 &= ((\alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)), \\ \Delta(\Phi_1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), \\ \Delta(\Phi_2) &= (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4). \end{aligned}$$

Exemple 2 (suite). – Le polyèdre admet aussi deux drapeaux complets :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= ((\alpha_5), (\alpha_3, \alpha_5), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)), \\ \Phi_2 &= ((\alpha_5), (\alpha_4, \alpha_5), (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)), \\ \Delta(\Phi_1) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5), \\ \Delta(\Phi_2) &= (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5). \end{aligned}$$

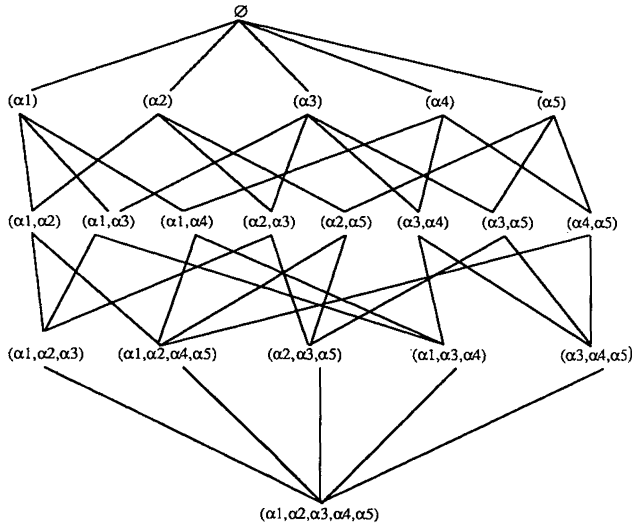


Figure 3. – Le poset des faces du polyèdre de l'exemple 2.

2. TRIANGULATION D'UN POLYÈDRE

L'objet de ce paragraphe est de ramener le calcul des fonctions  $J(P, \lambda)$  pour des polyèdres au calcul de ces mêmes fonctions pour un simplexe.

DÉFINITION 8 : Soit  $P$  un polyèdre convexe, une triangulation de  $P$  est un ensemble  $\Gamma$  de simplexes tels que

- (i) si  $\sigma \in \Gamma$  et  $\tau$  est une face de  $\sigma$ ,  $\tau \in \Gamma$ ,
- (ii) si  $\sigma, \tau \in \Gamma$  alors  $\sigma \cap \tau$  est une face de  $\sigma$  et de  $\tau$ ,
- (iii)  $\bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma = P$ .

LEMME 9 : L'ensemble engendré par l'union des simplexes  $\Delta(\Phi)$  associés aux drapeaux complets  $\Phi$  de  $P$  est une triangulation de faces maximales (tout sommet d'une face est un sommet de  $P$ ).

Nous noterons  $\Gamma(P)$ , cette triangulation de  $P$ .

La démonstration de ce lemme se fait par récurrence. Si  $d=0$  ou  $1$ , le lemme est évidemment vérifié.

Supposons le lemme exact pour tout polyèdre  $\mathcal{A}$  de dimension inférieure à  $d$ . Toutes les faces de  $P$  de dimension  $d-1$  admettent une triangulation. Considérons  $\partial P$  auquel on a retiré toutes les faces adjacentes à  $\alpha_1$ . Cet ensemble admet une triangulation vérifiant le lemme par hypothèse et il suffit alors de considérer tous les cônes issus de  $\alpha_1$  ayant pour frontières les triangulations de cet ensemble.

Exemple 1 (suite) : Si on supprime  $\alpha_1$  on obtient  $\{(\alpha_2, \alpha_4), (\alpha_3, \alpha_4), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)\}$  qui est une triangulation maximale la frontière de  $P$  privé des faces adjacentes à  $\alpha_1$ .

Tout polyèdre admettant une triangulation  $\Gamma(P)$ , on peut exprimer les fonctions génératrices de la définition 6 en utilisant cette triangulation. On a

$$J(P, \lambda) = \sum_{S \in \Gamma} \bar{J}(S, \lambda)$$

et

$$\bar{J}(P, \lambda) = \sum_{S \in \Gamma - \partial \Gamma} J(S, \lambda).$$

On en déduit le

LEMME 10:

$$J(P, \lambda) = \sum_{S \in \Gamma - \partial \Gamma} (-1)^{d - \dim S} J(S, \lambda),$$



et

$$J(P, \lambda) = \sum_{S \in \Gamma} (-1)^{d - \dim S} \mathcal{J}(S, \lambda).$$

Ce lemme se montre aisément en utilisant le principe d'inclusion-exclusion.

### 3. ÉNUMÉRATIONS DANS LE CAS DE SIMPLEXES

D'après le lemme 10 du paragraphe précédent, pour calculer les fonctions génératrices de la définition 6, il suffit de calculer ces fonctions dans le cas particulier de simplexes.

Soit  $S$  un simplexe de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^m$  de sommets  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Soit  $G$  le groupe abélien de  $\mathbb{Z}^{m+1}$  engendré par

$$G = \{(\beta, r), \beta \in \mathbb{Z}^m, r \in \mathbb{Z} \text{ et } \beta/r \in S\}.$$

Soit  $H$  le sous groupe de  $G$  engendré par les  $k+1$  vecteurs

$$\gamma_i = (l(\beta_i) \beta_i, l(\beta_i))$$

où  $l(\beta)$  est le plus petit entier positif tel que  $l(\beta) \cdot \beta \in \mathbb{Z}^m$ . Soit  $M$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs de  $\gamma_i$ . On peut montrer [9] que l'indice de  $H$  dans  $G$  est le PGCD des mineurs  $(k+1) \times (k+1)$  de la matrice  $M$ . Nous notons  $t$  cet indice.

On définit les demi-ouverts

$$\Delta_H = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i \gamma_i, 0 \leq a_i < 1 \right\},$$

$$\bar{\Delta}_H = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i \gamma_i, 0 < a_i \leq 1 \right\},$$

et les ensembles finis de points suivants

$$\Delta_H \cap \mathbb{Z}^{m+1} = \{(\varepsilon_i, r_i) \mid 0 \leq i < t\}, \quad \varepsilon_i \in \mathbb{Z}^m, \quad r_i \in \mathbb{Z},$$

$$\bar{\Delta}_H \cap \mathbb{Z}^{m+1} = \{(\xi_i, s_i) \mid 0 \leq i < t\}, \quad \xi_i \in \mathbb{Z}^m, \quad s_i \in \mathbb{Z}.$$

THÉORÈME 11 : (Théorème fondamental). — Soit  $S$  un simplexe de dimension  $k$ , en utilisant les notations précédentes, on a

$$J(S, \lambda) = \left( \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \right) \prod_{j=0}^k (1 - \lambda^{1(\beta_j)})^{-1},$$

$$\bar{J}(S, \lambda) = \left( \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^{s_i} \right) \prod_{j=0}^k (1 - \lambda^{1(\beta_j)})^{-1}.$$

Nous donnerons la preuve de ce théorème en dimension  $k=1$ . Dans un premier temps, nous allons développer le calcul de  $J(P, \lambda)$  pour l'exemple 1.

Exemple 1 (suite). — Ce polyèdre, d'après ce qui précède, admet la triangulation

$$\Gamma(P) = \{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4), (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4), (\alpha_2 \alpha_4), (\alpha_1 \alpha_4), (\alpha_2 \alpha_1), (\alpha_3 \alpha_4),$$

$$(\alpha_1 \alpha_3), (\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)\}.$$

Ceci utilise la définition 8 et le lemme 9. En appliquant le lemme 10, on obtient

$$J(\mathcal{P}, \lambda) = 2J((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4), \lambda) - J((\alpha_1 \alpha_4), \lambda).$$

Calculons  $J((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), \lambda)$ . On a

$$\begin{aligned} \beta_0 = \alpha_1 &= (0, 0) & \text{et} & \quad \gamma_0 = (0, 0, 1), \\ \beta_1 = \alpha_2 &= (0, 1) & \text{et} & \quad \gamma_1 = (0, 1, 1), \\ \beta_2 = \alpha_4 &= (1, 1) & \text{et} & \quad \gamma_2 = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

On en déduit  $t=1$ . De plus

$$\Delta_H = \{(a_2, a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2), 0 \leq a_i < 1\},$$

donc

$$\Delta_H \cap \mathbb{Z}^3 = \{(0, 0, 0)\},$$

et par suite

$$J((\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4), \lambda) = \frac{1}{(1 - \lambda^3)}.$$

De manière analogue, on obtient

$$J((\alpha_1 \alpha_4), \lambda) = \frac{1}{(1 - \lambda)^2},$$

et par suite

$$J(P, \lambda) = \frac{2}{(1-\lambda)^3} - \frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^2}.$$

On en déduit aisément

$$\begin{aligned} i(P, 0) &= 1, \\ i(P, n) &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Ce résultat peut être obtenu directement. En effet, si  $(x, y) \in P$  et  $(nx, ny) \in \mathbb{Z}^2$  alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{n}, & 0 \leq k \leq n \\ y &= \frac{k'}{n}, & 0 \leq k' \leq n \end{aligned}$$

et il y a effectivement  $(n+1)^2$  solutions possibles.

*Exemple 2 (suite) :* Un calcul analogue montre que

$$J(P, \lambda) = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^4}.$$

Nous allons donner une idée de la démonstration de théorème 11 dans le cas où  $k=1$ , le simplexe  $S$  est donc un segment de  $\mathbb{R}$

$$\left[ \frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b} \right].$$

Considérons les points de  $\mathbb{R}^2$  suivants

$$A_1 \left( \frac{\alpha}{a}, 1 \right) \quad \text{et} \quad B_1 \left( \frac{\beta}{b}, 1 \right).$$

On a

$$J(S, \lambda) = J([A_1, B_1], \lambda).$$

Considérons les points

$$A_n \left( \frac{n\alpha}{a}, n \right) \quad \text{et} \quad B_n \left( \frac{n\beta}{b}, n \right).$$

Le nombre de points à coordonnées entières de  $[A_n, B_n]$  est  $i([A_1, B_1], n)$ .

*Exemple 3 (suite)* : Choisissons  $\alpha=1, a=4, \beta=2, b=3, n=8$ . On a  $i([A_1, B_1], n)=4$ . Voir fig. 4.

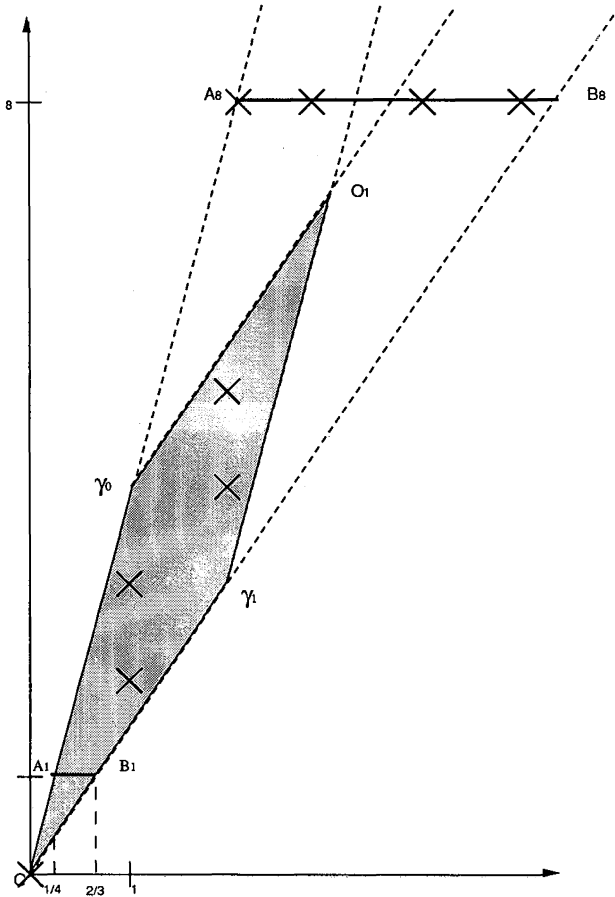


Figure 4. - Une représentation du théorème 11 en dimension 1 due à E. Ehrhart.

Les vecteurs engendrant le groupe  $H$  sont donc dans  $\mathbb{R}^2$ . Ils sont donnés par

$$\gamma_0 = (\alpha, a) \quad \text{et} \quad \gamma_1 = (\beta, b)$$

car dans ce cas on a de manière évidente  $l(\beta_0) = a$  et  $l(\beta_1) = b$ .

$\Delta_H$  (resp.  $\bar{\Delta}_H$ ) correspond à l'ensemble des points inclus dans le parallélogramme engendrés par les segments  $0\gamma_0$  et  $0\gamma_1$  et n'appartiennent pas aux

segments  $0_1 \gamma_0$  et  $0_1 \gamma_1$  (resp.  $0 \gamma_0$  et  $0 \gamma_1$ ). Pour ne point alourdir le discours nous raisonnons uniquement sur  $\Delta_H$ ; un raisonnement analogue peut être fait sur  $\bar{\Delta}_H$  et par suite sur  $j([A_1, B_1], n)$ .

Tout point  $M$  du plan est « congruent » (au sens des parallélogrammes) à au plus un point  $M_s$  du parallélogramme. Dans le cas général, tout élément de  $G$  est « congruent » à au plus un point de  $H$ .

Si  $y_r$  est l'ordonnée de  $M_r$ , tout point  $M$  a pour ordonnée  $y_r + ka + k'b$ , avec  $k, k' \in \mathbb{N}$ . Soient  $M_1, \dots, M_t$  l'ensemble des points de  $\Delta_H$  à coordonnées entières. Chacun de ces points détermine donc sur  $[A_n, B_n]$  autant de points entiers que l'équation

$$y_r + ka + k'b = n$$

a de solution entière. Soit  $j_{n,r}$  le nombre de ces solutions. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} j_{n,r} \lambda^{y_r} &= \lambda^{y_r} (1 + \lambda^a + \lambda^{2a} + \dots) (1 + \lambda^b + \lambda^{2b} + \dots), \\ &= \frac{\lambda^{y_r}}{(1 - \lambda^a)(1 - \lambda^b)}, \end{aligned}$$

d'où

$$J(S, \lambda) = \left( \sum_{i=1}^t \lambda^{y_i} \right) \frac{1}{(1 - \lambda^a)(1 - \lambda^b)}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 11 en dimension 1. La démonstration en dimension supérieure à 1, s'écrit de manière analogue (mais est bien moins visuelle!).

*Exemple 3 (suite) :* Le calcul de  $t$  donne la valeur 5, et les 5 points du parallélogramme sont (0,0), (1,2), (1,3), (2,4) et (2,5), ce qui donne

$$J(S, \lambda) = (\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 + 1) \frac{1}{(1 - \lambda^4)(1 - \lambda^3)},$$

qui admet le développement

$$J(S, \lambda) = (1 + \lambda^4 + \lambda^8 + \dots) (1 + \lambda^3 + \lambda^6 + \dots) (1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5),$$

dont le monôme de degré 8 a pour coefficient 4.

THÉORÈME 12 (théorème de réciprocité) :  $\bar{J}(\mathcal{P}, \lambda) = (-1)^d J(\mathcal{P}, 1/\lambda)$ .

La preuve est immédiate en utilisant le lemme 10 et le théorème 11. R. Stanley note dans [8] que ce genre de relation relie fréquemment deux

fonctions énumératrices portant l'une sur un espace et l'autre sur ce même espace privé de sa frontière.

**4. EFFEUILLAGE D'UN POLYÈDRE**

Nous donnons dans ce paragraphe, une définition de l'effeuillabilité des polyèdres [9] permettant un calcul plus simple des fonction  $J(P, \lambda)$ .

DÉFINITION 13 : Soit  $\Gamma(P)$  une triangulation de  $P$  telle que  $G_1, G_2, \dots, G_s$  soient les faces maximales de  $\Gamma(P)$  ordonnées de façon à ce que pour tout  $i, 2 \leq i \leq s, G_i \cap (G_1 \cup G_2 \dots \cup G_{i-1})$  soit une union de facettes  $((d-1)$ -faces) de  $G_i$  alors  $\Gamma(P)$  est dit effeuillable et  $(G_1, \dots, G_s)$  est son effeuillage.

Exemple 4 : Pour polyèdre de la figure 5, l'ordre  $(A, B, C, D)$  est un effeuillage,  $(A, D, B, C)$  n'en est pas un.

THÉORÈME 14 : Si  $\omega$  est un ordre sur  $V(\mathcal{P})$ , la triangulation  $\Gamma(P)$  est effeuillable.

Il suffit de « tourner autour » de  $\alpha_1$ . Pour cela on retire  $\alpha_1$  aux faces maximales de  $\Gamma(P)$ , on obtient des faces maximales de  $\partial P$  ne contenant pas  $\alpha_1$ . On parcourt alors la frontière ce qui permet d'obtenir l'ordre d'effeuillage des faces.

THÉORÈME 15 : Soit  $\omega$  un ordre de  $V_p$  et  $\Gamma(P)$  effeuillable en  $(G_1, G_2, \dots, G_s)$

$$J(P, \lambda) = \sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=0}^{t_i-1} \lambda^{r_{i,j} + q_{i,j}} \prod_{j=0}^k (1 - \lambda^{l(\beta_{i,j})})^{-1} \right)$$

où  $\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,d}$  sont les sommets  $G_i$  et

$$J(G_i, \lambda) = \sum_{j=0}^{t_i-1} \lambda^{r_{i,j}} \prod_{j=0}^k (1 - \lambda^{l(\beta_{i,j})})^{-1}.$$

Nous donnons une idée [5] due à A. Garsia permettant une démonstration de ce théorème énoncé en [9]. Construisons l'ensemble  $\Gamma'(P)$  issu de  $\Gamma(P)$  de la manière suivante

$$\Gamma'(P) = \{G_1, G'_2, \dots, G'_s\},$$

avec

$$\forall 2 \leq i \leq s, G'_i = (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{i-1}).$$

Les  $G'_i$  sont des simplexes privés d'une partie de leur frontière. On a

$$J(P, \lambda) = \sum_{i=2}^s J(G'_i, \lambda) + J(G_1, \lambda).$$

Le fait d'effectuer le calcul sur  $\Gamma'(P)$ , permet de ne pas compter deux fois les frontières communes à plusieurs simplexes. On évite ainsi l'utilisation des principes d'inclusion-exclusion du lemme 10.

Le calcul de la fonction  $J$  pour un simplexe  $G'_i$  privé d'une partie de sa frontière, consiste à définir des demi-ouverts

$$\Delta'_{H,i} = \left\{ \sum_{j=1}^k a_j \gamma_j, 0 \leq a_j < 1, \exists j_i \text{ tel que } a_{j_i} \neq 0 \right\}.$$

Le fait qu'un des coefficients est non nul assure l'exclusion de la frontière. Le calcul terminé montre alors que l'on obtient une forme semblable à celle du théorème 15. Le calcul des nombres  $q_{i,j}$  dépend en fait de la résolution des ensembles

$$\Delta'_{H,i} \cap \mathbb{Z}^{m+1}.$$

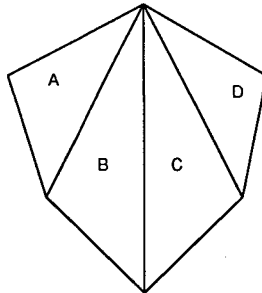


Figure 5. – Un polyèdre et son effeuillage.

On obtient les nombres  $q_{i,j}$  comme somme de certains des nombres  $1(\beta_{i,k})$ . On a en particulier

$$q_{0,j} = 0 \quad \text{pour tout } j \in [0, t_0 - 1]$$

et

$$q_{i,0} = \sum_{k=0}^d 1(\beta_{i,k}), \quad \forall 2 \leq i \leq s.$$

## 5. ÉNUMÉRATIONS DE CHEMINS DE DYCK

Dans ce paragraphe, nous donnons la définition des chemins de Dyck, puis nous montrons l'application des dénombrants  $J(P, \lambda)$  des polyèdres au calcul de fonctions énumératrices des chemins de Dyck suivant le nombre de pics et la somme de leurs hauteurs. L'intérêt de ces fonctions énumératrices est qu'elles s'expriment à l'aide des nouveaux  $q$ -analogues des fonctions de Bessel que nous donnons dans [2].

Dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , un *chemin* est une séquence

$$\omega = (s_0, s_1, \dots, s_k)$$

de points. Le point  $s_0$  (resp.  $s_k$ ) est le point de *départ* (resp. d'*arrivée*) du chemin. La *longueur* du chemin est  $k$ . On appelle *pas* élémentaire du chemin une paire  $(s_i, s_{i+1})$ . Un pas est dit *Nord-Est* (resp. *Sud-Est*), si  $s_i = (x, y)$ ,  $s_{i+1} = (x', y')$  avec  $x' = x + 1$  et  $y' = y + 1$  (resp.  $x' = x + 1$ ,  $y' = y - 1$ ). On appelle *pic* (resp. *creux*) d'un chemin un point  $s_i$  tel que  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Nord-Est (resp. Sud-Est) et  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas Sud-Est (resp. Nord-Est).

DÉFINITION 16 : *Un chemin de Dyck  $\omega$  est un chemin de longueur  $2n$  dont les pas élémentaires sont Nord-Est ou Sud-Est et tel que  $s_0 = (0, 0)$  et  $s_{2n} = (2n, 0)$ .*

Un chemin de Dyck est défini totalement par deux suites d'entiers, l'une est la suite des ordonnées des pics du chemin auxquelles on a retranché 1, l'autre est celle des ordonnées des creux du chemin. Nous notons respectivement  $p(\omega)$  et  $c(\omega)$  ces deux séquences, on écrira

$$p(\omega) = (p_1, \dots, p_k)$$

où  $k$  est le nombre de pics et

$$c(\omega) = (c_1, \dots, c_{k-1}).$$

On définit la somme des hauteurs des pics d'un chemin  $\omega$  par

$$hp(\omega) = \sum_{i=1}^k p_i + k.$$

Nous donnons un exemple figure 6.

L'intérêt des chemins de Dyck est qu'ils sont classiquement codés par les mots de Dyck et donc en bijection avec les *arbres binaires* dont nous rappelons la définition ci-dessous.



DÉFINITION 17 : Un arbre binaire  $\mathcal{A}$  est soit vide soit un triplet  $(r(\mathcal{A}), g(\mathcal{A}), d(\mathcal{A}))$  tel que  $r(\mathcal{A})$  est appelé racine de l'arbre,  $g(\mathcal{A})$  est un arbre binaire appelé sous-arbre gauche et  $d(\mathcal{A})$  est un arbre binaire appelé sous-arbre droit.

Un sommet d'un arbre est appelé *feuille* si les sous-arbres gauche et droit sont vides. Nous nous intéresserons aux arbres binaires *complets*, c'est-à-dire des arbres tels que tout sommet qui n'est pas une feuille admet deux sous-arbres non-vides. Nous notons  $B_n$  l'ensemble des arbres binaires complets ayant  $n + 1$  feuilles.

*Remarque* : Les chemins de Dyck apparaissent naturellement dans le codage des *polyominos parallélogrammes* (union de cellules élémentaires de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ayant des propriétés de convexité) suivant le périmètre [3]. Ce codage permet de « lire » alors l'aire du polyomino codé comme somme des ordonnées des pics. On trouvera dans [1] une justification de l'étude combinatoire de ces objets. En particulier, leur liaison avec, d'une part une classe particulière de polyominos convexes, et d'autre part avec les arbres binaires en font un objet intermédiaire très intéressant.

On définit

$$a_k(q) = \sum_{i \geq k} \alpha_{k,i} q^i$$

où  $\alpha_{k,i}$  est le nombre de chemins de Dyck  $\omega$  ayant  $k$  pics et tel que  $hp(\omega) = i$ . Remarquons que la longueur  $n$  est reliée à  $k$  et  $i$  par la relation

$$k + \left\lfloor \frac{i-1}{k} \right\rfloor \leq n \leq i.$$

Définissons les cônes  $C_k$  de  $\mathbb{R}^{2k-1}$  comme les éléments  $(p_1, c_1, p_2, \dots, p_{k-1}, c_{k-1}, p_k)$  vérifiant les inégalités suivantes

$$(i) \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1, \quad c_i \geq 0, \quad (4)$$

$$(ii) \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1, \quad p_{i+1} \geq c_i, \quad (5)$$

$$(iii) \quad \forall i, 1 \leq i \leq k-1, \quad p_i \geq c_i. \quad (6)$$

Soit  $P_k$  le polyèdre convexe constitué par les points de  $C_k$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

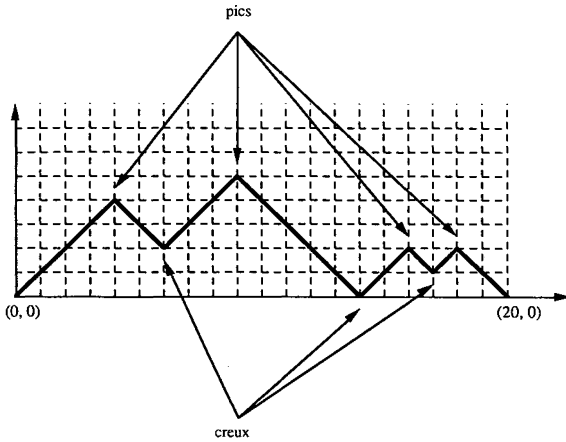


Figure 6. - Un chemin de Dyck de longueur 20.  
 $p(\omega) = (3, 4, 1, 1)$  et  $c(\omega) = (2, 0, 1)$   $k = 4$  et  $hp(\omega) = 13$ .

Par définition, on a

$$i(P_k, m) = \text{card} \{ x \in P_k \text{ tel que } mx \in \mathbb{Z}^{2m-1} \}.$$

Le nombre de chemins de Dyck dont la somme des hauteurs des pics est  $m+k$  et ayant  $k$  pics est le nombre de points à coordonnées entières de  $C_k$  situés dans l'hyperplan  $H_{k,m}$

$$\sum_{i=1}^k p_i = m.$$

On a donc le résultat suivant

THÉOREME 18 : Les fonctions génératrices  $a_k(q)$  sont les fonctions énumératrices  $J(P_k, q) q^k$ .

Nous donnons le calcul effectif pour  $k=2$  et  $k=3$ . On montre sans difficulté que  $P_2$  est un simplexe de  $\mathbb{R}^3$  de sommets,  $(1/2, 1/2, 1/2)$ ,  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . En utilisant le théorème 11, on a

$$J(P_2, q) = \frac{1}{(1-q^2)(1-q)^2} \quad \text{et} \quad a_2(q) = \frac{q^2}{(1-q^2)(1-q)^2}.$$

Pour  $k=3$ , il y a six sommets :  $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ ,  $(1/2, 1/2, 1/2, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 1)$ . Ce polyèdre n'est pas un simplexe. On construit donc une triangulation effeuillable et on

déduit des théorèmes 11 et 17 les égalités

$$J(P_3, q) = \frac{1 + q^2}{(1 - q^3)(1 - q^2)(1 - q)^3} \quad \text{et} \quad a_3(q) = \frac{q^3(1 + q^2)}{(1 - q^3)(1 - q^2)(1 - q)^3}.$$

En observant, par des calculs en MAPLE (langage de Calcul Formel de l'Université de Warterloo, Canada) les points extrémaux du polyèdre, on constate expérimentalement une certaine périodicité des coordonnées. Notons

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq j \leq k, \quad A_{i,j} = (p_1, c_1, p_2, \dots, p_{k-1}, c_{k-1}, p_k).$$

avec

$$\begin{aligned} \forall r, 1 \leq r \leq i-1, \quad p_r = c_r = 0 \\ \forall r, i \leq r \leq j-1, \quad p_r = c_r = 1 \quad \text{et} \quad p_j = 1, \\ \forall r, j \leq r \leq k-1, \quad p_{r+1} = c_r = 0. \end{aligned}$$

On démontre aisément par récurrence la

PROPRIÉTÉ 19 : *En utilisant la notation précédente, on a*

$$C_k = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} a_{i,j} A_{i,j}, a_{i,j} \geq 0 \right\}.$$



Figure 7. — Les arbres associés à  $P_3$ .

On déduit alors le

COROLLAIRE 20 : *Les sommets du polyèdre  $P_k$  sont des points*

$$b_{i,j} = \frac{1}{j-i+1} A_{i,j}.$$

Les sommets de  $P_k$  s'obtiennent comme intersection des droites  $OA_{i,j}$  avec l'hyperplan  $H_{k,1}$ . On en déduit le corollaire 20. Nous allons déduire de la propriété 19, un procédé de construction d'une triangulation de  $P_k$ . Pour

chaque élément  $\alpha$  de  $C_k$  à coordonnées entières, on construit récursivement un arbre  $\varphi(\alpha)$  de  $B_k$  en utilisant la définition récursive suivante.

Soit  $\alpha = (p_1, c_1, \dots, p_{k-1}, c_{k-1}, p_k)$ . Soit  $t$  le plus petit indice tel que  $c_t$  est minimum.

Si  $k = 1$ ,  $\varphi(\alpha) = (p_1, \emptyset, \emptyset)$  sinon décomposons  $\alpha$  en

$$\alpha = c_t A_{t,n} + (p'_1, c'_1, \dots, p'_t, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, p'_{t+1}, c'_{t+1}, \dots, p'_k),$$

avec

$$\forall 1 \leq r \leq k-1, \quad p'_r = p_r - c_t, \quad c'_r = c_r - c_t \quad \text{et} \quad p'_k = p_k - c_t.$$

On définit alors

$$\varphi(\alpha) = (c_t, \varphi((p'_1, c'_1, \dots, p'_t)), \varphi((p'_{t+1}, c'_{t+1}, \dots, p'_k))).$$

On obtient ainsi des arbres binaires complets étiquetés. En fait, si on renu-mérote les feuilles de l'arbre de 1 à  $k$  dans l'ordre préfixe (de gauche à droite), les indices définissant les points  $b_{i,j}$  intervenant dans la décomposition de  $\alpha$ , apparaissent comme intervalle de numérotation  $[i, j]$  des feuilles d'un arbre issu d'un sommet interne de  $\varphi(\alpha)$ . Soit  $T(\varphi(\alpha))$  l'ensemble des points  $b_{i,j}$ , tels qu'il existe un sommet de  $\varphi(\alpha)$  dont les feuilles sont numérotées de  $i$  à  $j$ . Il résulte de cette construction la

**PROPRIÉTÉ 21 :** *Pour chaque arbre binaire  $\mathcal{A}$  de  $B_k$ , l'enveloppe convexe de  $T(\mathcal{A})$  est un simplexe de  $\mathbb{R}^{2k-1} \cap H_{k,1}$  et l'ensemble de ces simplexes forme une triangulation de  $P_k$ .*

*Exemple :* On peut calculer en utilisant cette propriété les simplexes associés aux arbres de la figure 7 qui correspondent au polyèdre  $P_3$ . On obtient

$$T(A_1) = (b_{1,1}, b_{2,2}, b_{3,3}, b_{1,2}, b_{1,3}),$$

$$T(A_2) = (b_{1,1}, b_{2,2}, b_{3,3}, b_{2,3}, b_{1,3}),$$

#### REMERCIEMENTS

Nous remercions A. Garsia qui nous a fait découvrir l'univers des polyèdres d'Ehrhart.

## BIBLIOGRAPHIE

1. M. P. DELEST, Utilisation des langages algébriques et du calcul formel pour le codage et l'énumération, des polyominos, *Thèse d'état*, Bordeaux, 1987.
2. M. P. DELEST et J. M. FEDOU,  $q$ -énumérations des polyominos et fonctions de Bessel, preprint, Université de Bordeaux I, février 1989.
3. M. P. DELEST et G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theoret. Comput. Sci.*, 1984, 34, p. 169-206.
4. E. EHRHART, Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en Combinatoire, International series of numerical Math., 35, *Birkhäuser*, Basel, 1977.
5. A. GARSIA, Communication privée sur les polyèdres, septembre 1988.
6. I. G. MACDONALD, The volume of a lattice polyhedron, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1963, 59, p. 719-726.
7. P. MCMULLEN, Valuations and Euler types relations for certain classes of convex polytopes, *Proc. London Math. Soc.*, 1977, 35, p. 113-135.
8. R. P. STANLEY, Combinatorial reciprocity theorems, *Adv. in Math.*, 1974, 14, p. 194-253.
9. R. P. STANLEY, Decomposition of rational convex polytopes, in Combinatorial Mathematics, optimal designs and their applications, J. SRIVASTAVA éd., *Ann. Discrete Math.*, 1980, 6, p. 333-342.
10. R. P. STANLEY, Enumerative Combinatorics, 1, *Wadsworth & Brooks/Cole*, Monterey, California, 1986.
11. R. P. STANLEY, Notes de conférences données à U.C.S.D., 1979 (notes prises par X. G. Viennot).