

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. BERNIER

D. FANDEUX

Théorie du renouvellement. Application à l'étude statistique des précipitations mensuelles

Revue de statistique appliquée, tome 18, n° 2 (1970), p. 75-87

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1970__18_2_75_0

© Société française de statistique, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DU RENOUVELLEMENT APPLICATION A L'ÉTUDE STATISTIQUE DES PRÉCIPITATIONS MENSUELLES

J. BERNIER et D. FANDEUX

Ingénieurs au Département Laboratoire National d'Hydraulique

	Pages
I - INTRODUCTION.....	75
II - LES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT.....	75
1. Quelques définitions de base.....	75
2. Processus de renouvellement cumulatif.....	77
III - APPLICATIONS A L'HYDROLOGIE.....	79
1. Un modèle simplifié d'occurrence des précipitations.....	79
2. Ajustements graphiques de la loi des fuites.....	80
IV - CONCLUSION.....	81

I - INTRODUCTION

La théorie du renouvellement concerne l'étude probabiliste et statistique d'une classe particulière de processus stochastiques appelés processus de renouvellement. Le champ d'application en est très vaste. Les processus de renouvellement peuvent servir de base à une description assez générale de certains processus hydrologiques et météorologiques.

Nous nous proposons, plus particulièrement, dans cette étude, d'étudier la loi de la pluie totale tombée au cours d'une période donnée.

II - THEORIE SUR LES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

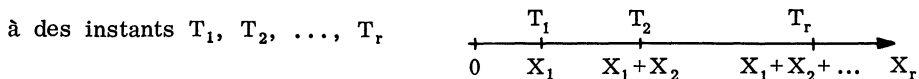
1 - Quelques définitions de base

Considérons une séquence de somme de variables aléatoires positives indépendantes en probabilité :

$$X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_r, \dots$$

Soit $F_{(x)}$ la fonction de répartition commune des X_1

Une interprétation phénoménologique d'un tel processus repose sur l'identification des sommes successives



auxquels peuvent survenir certains évènements E ; en particulier, puisque c'est le sujet qui nous intéresse, des crues ou des précipitations de caractéristiques données.

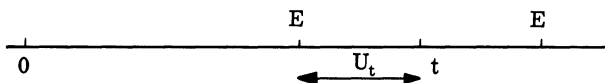
Une variable X_1 s'interprète alors comme l'intervalle de temps séparant l'occurrence de 2 évènements successifs. Dans la terminologie du renouvellement, X_1 est une durée de vie ; en hydrologie, X est souvent appelé durée de retour.

On suppose que cette durée de vie est une variable continue de telle sorte que la fonction de répartition $F_{(x)} = \text{Prob} [X \leq x]$ possède une dérivée $f_{(x)} = \frac{dF}{dx}$ qui est la densité de probabilité.

Les problèmes que résout la théorie du renouvellement sont liés à la détermination d'un certain nombre de variables aléatoires dont nous allons donner la liste :

- a) T_r : temps écoulé jusqu'à l'occurrence du r ième évènement E
- b) N_t : nombre d'évènements E apparus sur l'intervalle $(0, t)$
- c) U_t : durée de retour antérieure

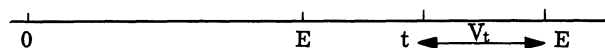
Soit t une période fixe, U_t est l'intervalle de temps séparant



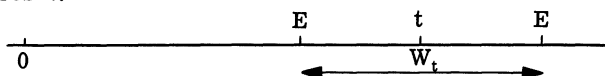
t de l'époque d'occurrence du dernier évènement E survenu antérieurement.

- d) V_t : durée de retour postérieure

V_t est l'intervalle de temps séparant t de l'époque d'occurrence du premier évènement E à revenir postérieurement.



- e) W_t : intervalle de temps séparant l'époque d'occurrence du dernier évènement survenu avant t de l'époque d'occurrence du premier évènement à survenir après t .



Dans la suite des calculs, nous utiliserons la transformée de LAPLACE.

2 - Processus de renouvellement cumulatif

Nous nous appliquons à définir particulièrement ce processus car c'est celui qui trouve le plus d'application en Hydrologie.

Il y a processus de renouvellement cumulatif lorsqu'à chaque variable X_i que nous considérons ici comme positive uniquement, est associée une autre variable Y_i .

Dans le cas du processus cumulatif ordinaire on suppose que V_i peut être dépendante de X_i mais non pas de X et Y précédentes. On considère ensuite la variable Z_t définie à l'époque t par :

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (N_t = 1, 2, \dots)$$

$$Z_t = 0 \quad (N_t = 0)$$

où N_t est le nombre d'évènements E apparus sur $(0, t)$.

On aura à considérer les lois des couples X, Y définis par :

soit leur fonction de répartition : $G(x, y) = \text{Prob} [X \leq x, Y \leq y]$

soit la densité de probabilité : $g(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = f(x) g_x(y)$

où f est la densité marginale de X et g_x la densité conditionnelle de Y pour une valeur x de X fixée.

On aura à utiliser les transformées de LAPLACE :

$$G^{XX}(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x - s_2 y} g(x, y) dx dy$$

qu'on pourra écrire :

$$G^{XX}(s_1, s_2) = \int_0^\infty e^{-s_1 x} f(x) g_x^X(s_2) dx$$

où $g_x^X(s_2)$ est la transformée de la densité conditionnelle.

$$g_x^X(s_2) = \int_0^\infty e^{-s_2 y} g_x(y) dy$$

Considérons les sommes conjointes :

$$X_1 + X_2 + \dots + X_r = T_r$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r = S_r$$

La fonction de répartition $G_r(t, y)$ du couple T_r, S_r s'obtient par convolution comme dans le cas à une dimension :

$$G_r(t, y) = \int_0^t \int_0^y G(t-u, y-v) g_{r-1}(u, v) du dv$$

où g_r est la densité correspondante.

Soit avec les transformées de LAPLACE

$$g_r^{xx}(s_1, s_2) = [g^{xx}(s_1, s_2)]^r$$

Considérons par ailleurs l'évènement $A_r(t, y)$

$$A_r(t, y) : \{T_r \leq t, T_{r+1} > t, S_r \leq y\}$$

dont on appellera $P_r(t, y)$ la probabilité et $p_r(t, y)$ la dérivée de P_r par rapport à y .

On peut vérifier facilement que la fonction de répartition $Q(t, z)$ de Z_t :

$$Q(t, z) = \text{Prob} [Z_t \leq z]$$

s'écrit :

$$Q(t, z) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t, z)$$

Or on a :

$$P_r(t, z) = \int_0^t [1 - F(t-u)] g_{r-1}(u, z) du$$

F est la fonction de répartition de la loi marginale de X_1

Avec les transformées de LAPLACE par rapport à t et u on a :

$$P_r^x(s_1, z) = \frac{1 - f^x(s_1)}{s_1} g_{r-1}^x(s_1, z)$$

et en prenant une fois de plus la transformée par rapport à z :

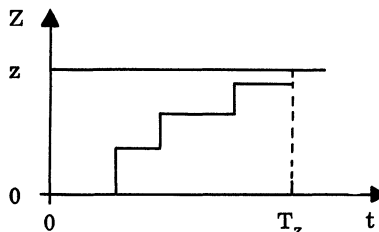
$$P_r^{xx}(s_1, s_2) = \frac{1 - f^x(s_1)}{s_2} g_{r-1}^{xx}(s_1, s_2)$$

on peut obtenir la transformée par rapport à t de la transformée par rapport à z de la densité $q(t, z)$ de Z_t :

$$q^{xx}(s_1, s_2) = \frac{1 - f^x(s_1)}{s_1} \cdot \frac{1}{1 - g^{xx}(s_1, s_2)}$$

$f^x(s_1)$ est la transformée de LAPLACE de la densité marginale de X_1 la considération du processus Z_t amène à définir une nouvelle variable aléatoire.

T_z : l'époque de premier passage de Z_t par le niveau z .



Comme les X_1 et Y_1 sont toutes positives on voit que :

$$T_z > t \text{ si et seulement si } Z_t < z$$

de telle sorte que si on appelle $K(t, z)$

la densité de probabilité de T_z ou a :

$$\int_t^\infty k(u, z) du = \int_0^z q(t, v) dv$$

A partir de là, on peut obtenir les transformées de LAPLACE et on trouve :

$$K^{xx}(s_1, s_2) = \frac{f^x(s_1) - g^{xx}(s_1, s_2)}{s_2 [1 - g^{xx}(s_1, s_2)]}$$

III - APPLICATIONS A L'HYDROLOGIE

1 - Un modèle simplifié d'occurrence des précipitations

La notion de durée de retour est d'usage courant en Hydrologie, notamment lorsqu'on s'intéresse aux pluies ou crues mensuelles ou annuelles d'une certaine importance. Si on considère les averses comme instantanées et poissonniennes, la loi des durées de retour est exponentielle :

$$F(x) = \text{Prob}[X > x] = e^{-x/\mu}$$

où X est la durée de retour

μ la durée de retour moyenne

En outre, supposons que lorsqu'il y a averse, la pluie totale tombée au cours de l'averse instantanée est une variable aléatoire Y distribuée exponentiellement.

$$\text{Prob}[Y \leq y] = 1 - e^{-y/\rho}$$

les lois du processus de renouvellement cumulatif donneront la loi de la pluie totale Z_t tombée au cours d'une période t . Dans le cas présent, on admet que Y est indépendant de X_1 donc :

$$f^x(s_1) = \frac{1}{\mu s_1 + 1}$$

$$g^{xx}(s_1, s_2) = \frac{1}{\mu s_1 + 1} \cdot \frac{\rho}{s_2 + \rho}$$

de telle sorte que :

$$q^{xx}(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1} - \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{1}{(\mu s_1 + 1)(s_2 + \rho) - \rho}$$

Une première inversion par rapport à s_1 donne la transformée de LAPLACE de la densité de Z_t à t fixé.

$$q^x(t, s_2) = e^{-\frac{ts_2}{\mu(s_2 + \rho)}}$$

et une nouvelle inversion, par rapport à s_2 donne la loi de Z_t :

$$\text{Prob } [Z_t = 0] = e^{-t/\mu}$$

$$\text{Pour } z > 0 : \text{Prob } [z \leq Z_t \leq z + dz] = e^{-\frac{t}{\mu} - \rho z} \sqrt{\frac{\rho t}{\mu z}} I_1 \left(2 \sqrt{\frac{\rho t z}{\mu}} \right) dz$$

I_1 est la fonction de BESSEL modifiée de première espèce.

Cette loi a été tabulée grâce à un programme de calcul traité sur ordinateur CDC 6 600 pour différentes valeurs des 2 paramètres μ et ρ . Nous l'avons intitulée "loi des fuites" car il se trouve que cette loi a déjà été utilisée pour représenter la distribution des débits de fuite des joints dans une conduite de gaz.

2 - Ajustements graphiques de la "loi des fuites"

Quelques ajustements graphiques ont été effectués, en particulier sur une série de 86 précipitations mensuelles observées à la station pluviométrique de CHATEAUNEUF de RANDON. Les graphiques 1 à 4 représentent l'ajustement de ces séries (mois de février, mai, août, novembre) d'une part par la loi des fuites, d'autre part par la loi de HALPHEN. Nous voyons combien ces 2 lois sont proches.

Au point de vue pratique, la loi des fuites est extrêmement facile à ajuster. Il est nécessaire, dans un premier temps, d'estimer les paramètres μ et ρ grâce à la moyenne et à la variance des observations :

$$\bar{x} = \frac{1}{\rho \mu} \quad s^2 = \frac{2}{\mu \rho^2}$$

Après quoi, il suffit de rechercher dans la table, pour les valeurs des paramètres estimés, les quantités qui nous intéressent.

La recherche des quantités peut se faire directement par programme ; les seules données étant les séries d'observations. L'ordinateur calcule sur ces séries la moyenne et la variance, puis estime les 2 paramètres puis, grâce à un sous-programme contenant la table de la loi des fuites, va lire dans cette table, les quantiles recherchés. La loi des fuites présente, par conséquent, un gros avantage sur les lois de HALPHEN qui demandent un calcul manuel après l'estimation des paramètres.

3 - Approximation de la loi des fuites par la loi normale

Il existe une transformation de la variable $u(z)$ dont la loi limite est de la forme.

$$\text{Si } \mu \rightarrow 0, \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2}$$

C'est-à-dire une loi normale.

Une transformation assurant une convergence rapide est :

$$u = \sqrt{2\rho} \left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \right)$$

Pour juger de la valeur de l'estimation des paramètres μ et ρ de la loi des fuites, nous avons calculé la moyenne et l'écart-type de la racine carrée des précipitations de deux façons différentes :

- directement sur la racine carrée des précipitations
- grâce à la formule ci-dessus et aux paramètres estimés μ et ρ

ceci pour quelques séries d'observations de précipitations mensuelles. Nous avons trouvé pratiquement les mêmes résultats donc nous pouvons penser que l'estimation des paramètres μ et ρ est parfaitement correcte. L'ajustement graphique de la loi normale calculée sur les paramètres estimés donne une approximation très valable de la loi des fuites comme on peut le constater sur les graphiques 5 et 6 qui représentent les ajustements des précipitations mensuelles à CHATEAUNEUF de RANDON (séries de 86 observations) pour les mois de janvier et février :

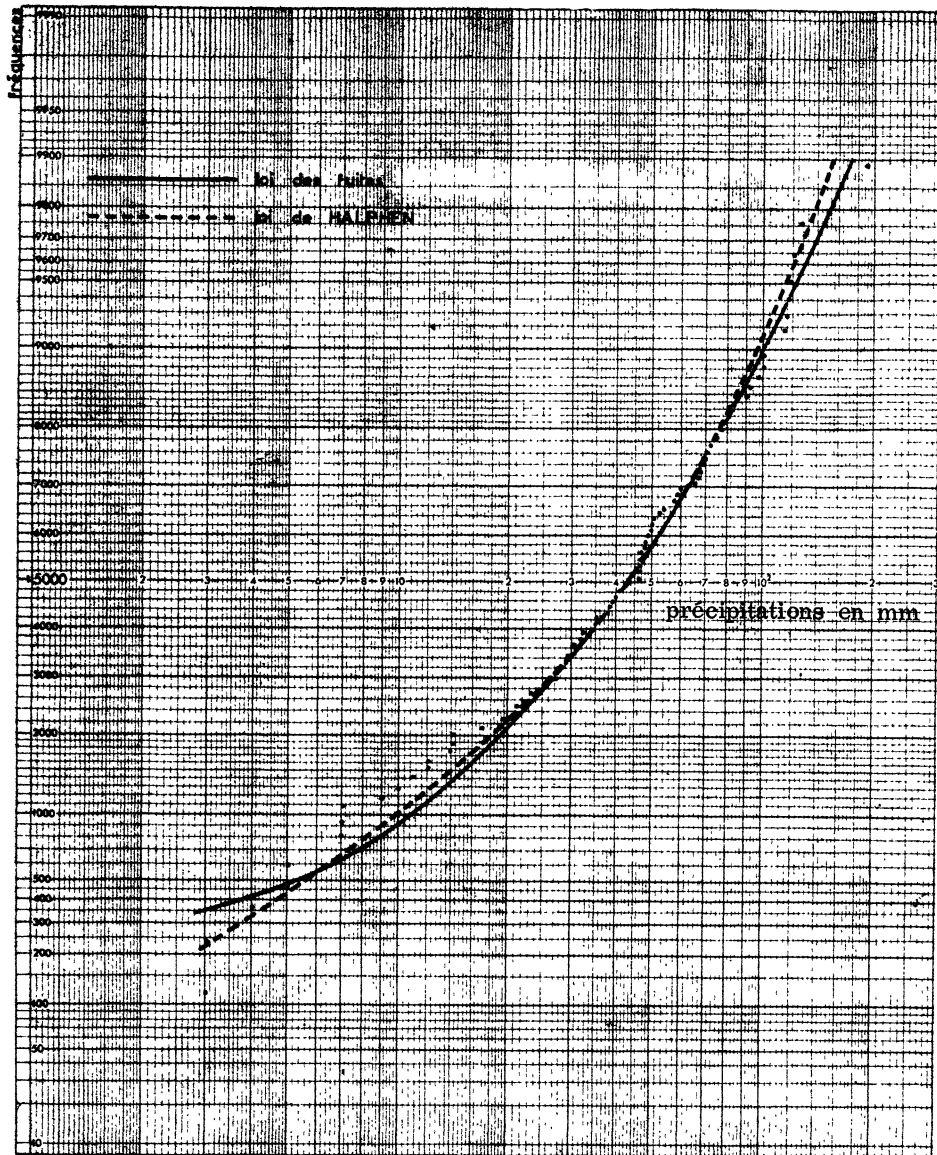
- par la loi des fuites
- par la loi normale appliquée aux racines carrées des précipitations.

IV - CONCLUSION

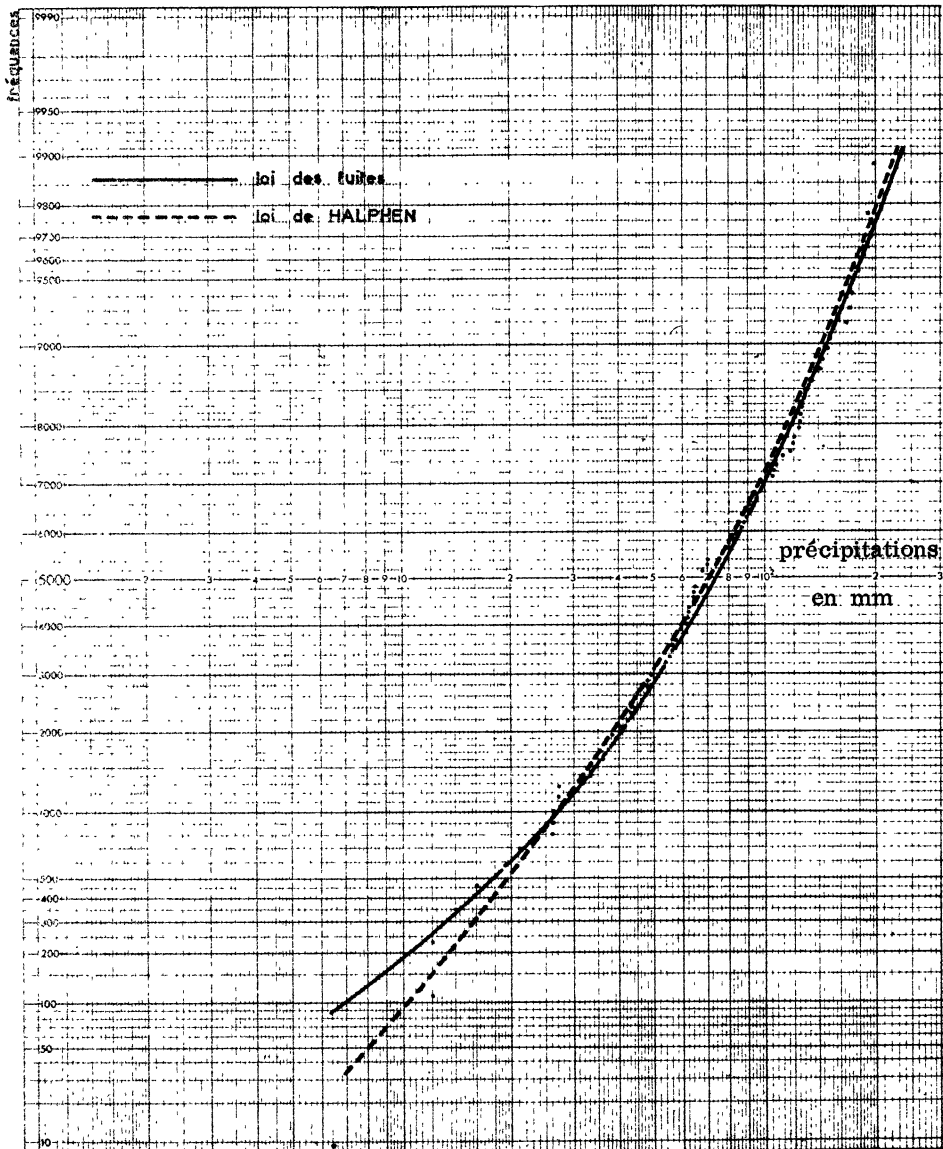
Nous avons constaté l'adéquation de la "loi des fuites" pour les séries chronologiques de précipitations mensuelles.

En outre, le fait que les ajustements et la recherche de quantiles donnés peuvent se faire entièrement sur ordinateur nous amènent à penser que cette loi peut rendre des services considérables aux hydrologues, sous réserve que la période sur laquelle la pluie totale est prise ne soit pas trop courte puisque nous avons considéré les phénomènes comme instantanés ce qui est assez peu réaliste à courte échelle de temps. C'est ainsi que la loi des fuites s'ajustant parfaitement bien à des précipitations mensuelles risque de donner des résultats moins satisfaisants pour des précipitations hebdomadaires.

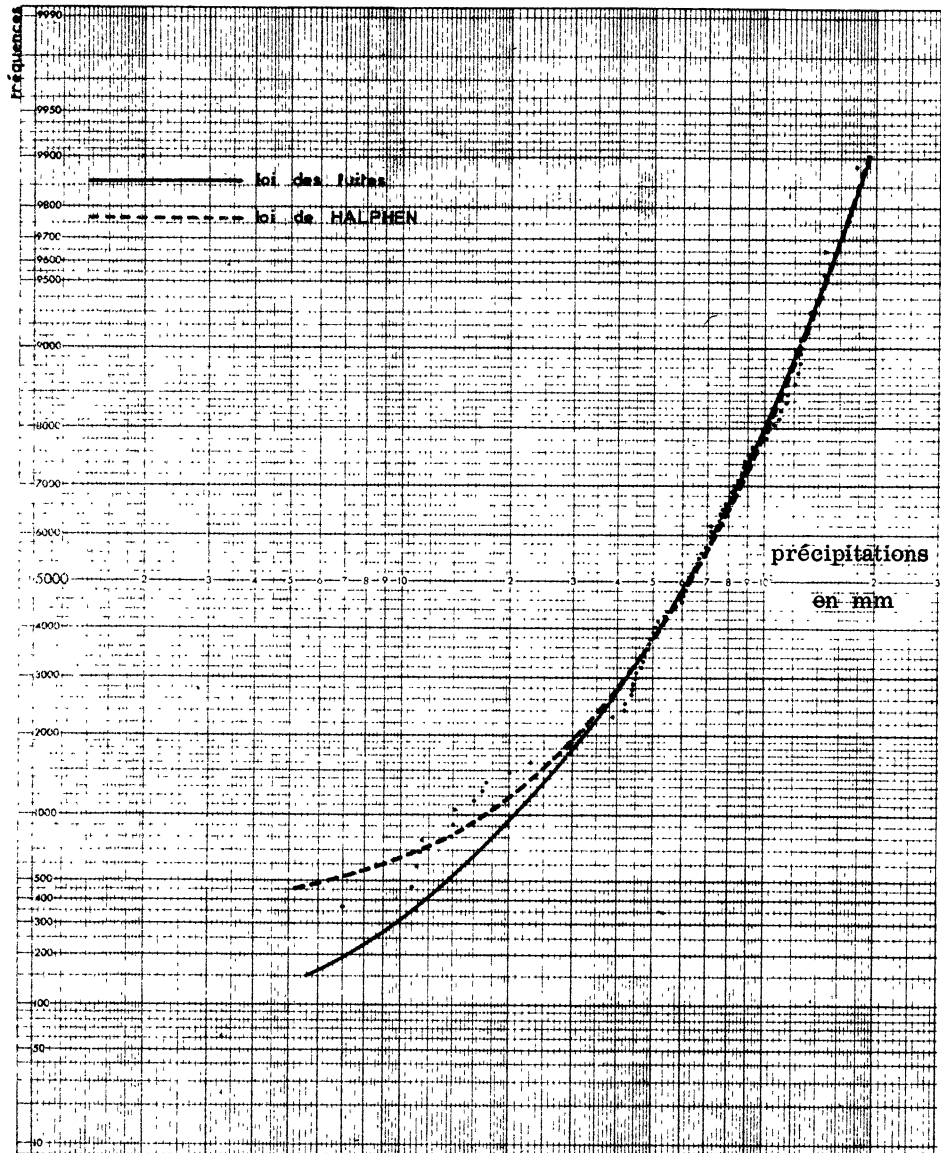
Précipitations mensuelles à Chateauneuf de Randon (février)
84 observations



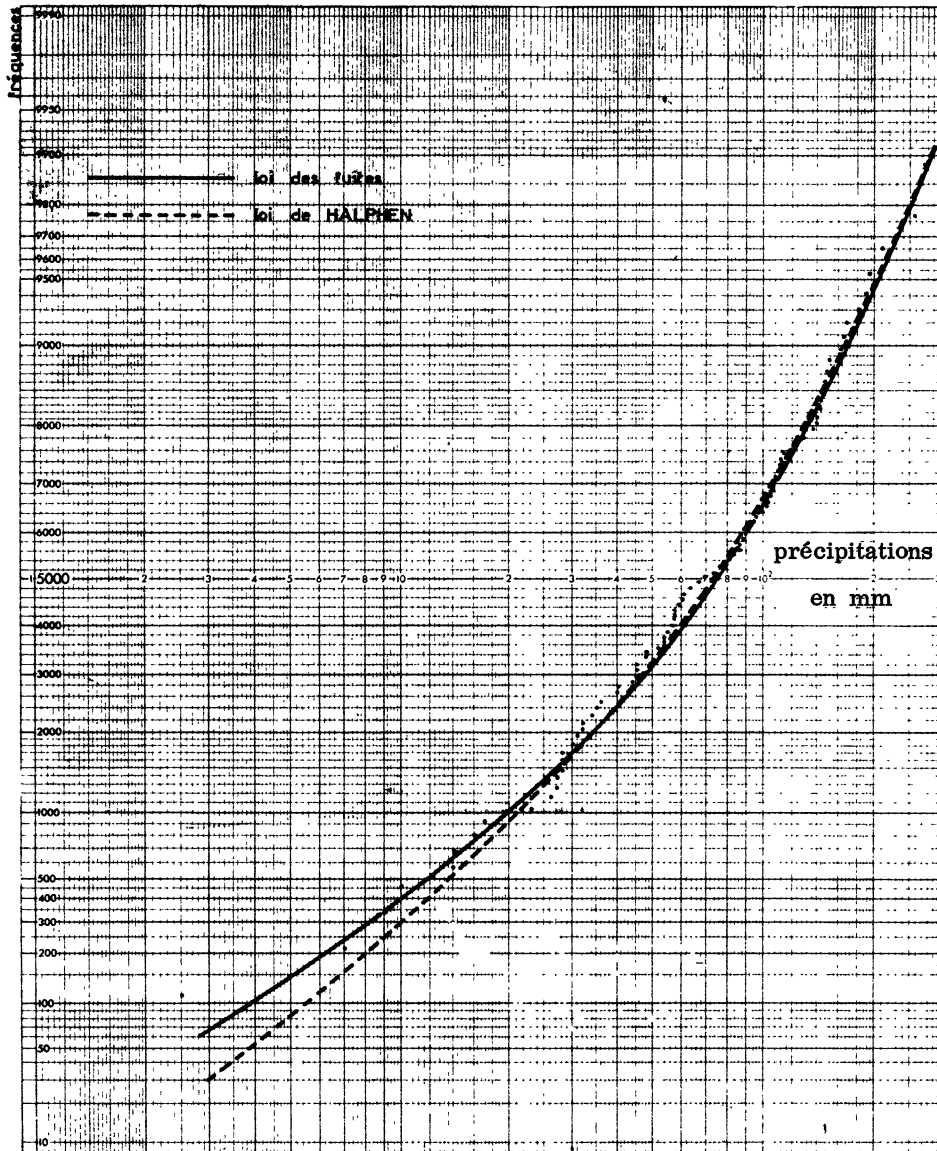
Précipitations mensuelles à Chateauneuf de Randon (mai)
86 observations



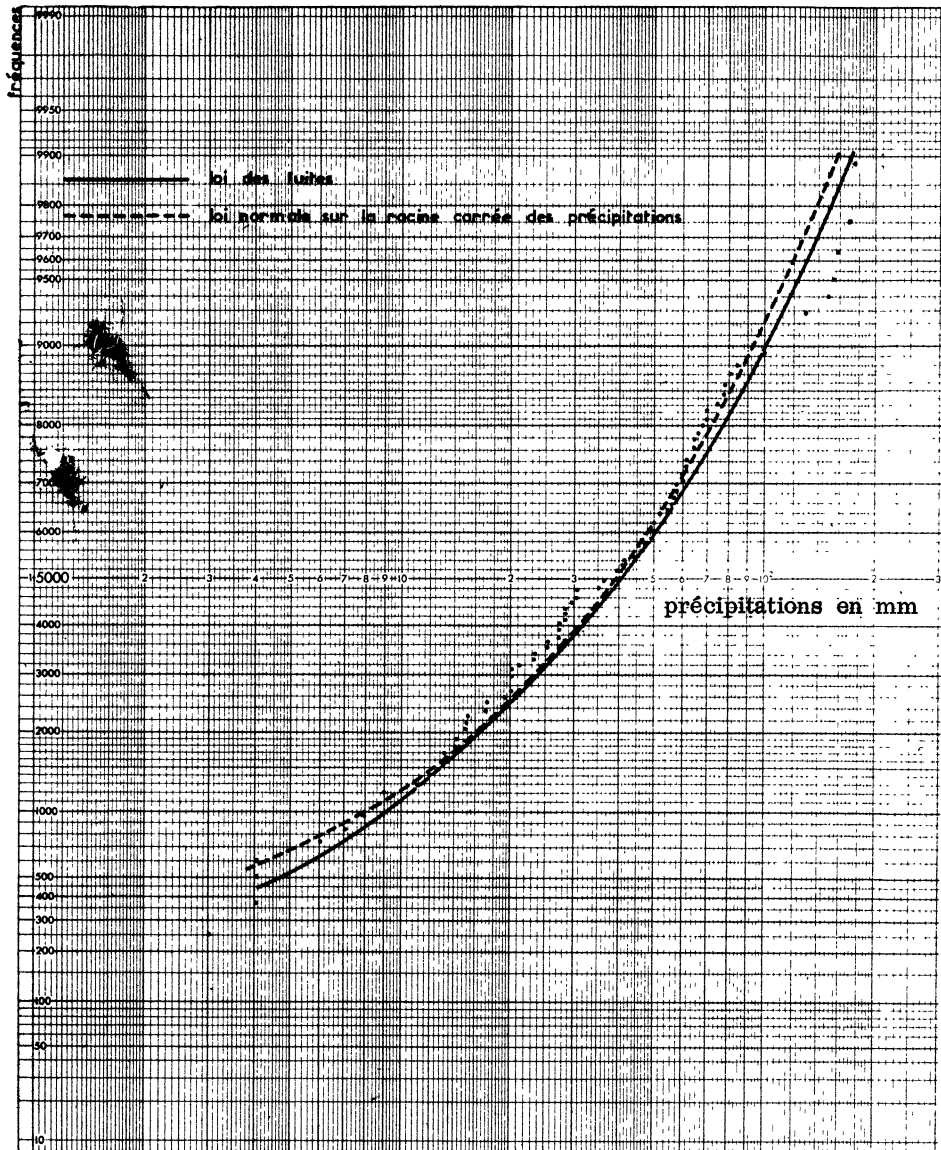
Précipitations mensuelles à Chateauneuf de Randon (août)
86 observations



Précipitations mensuelles à Chateaufeuf de Randon (novembre)
86 observations



Précipitations mensuelles à Chateauneuf de Randon (janvier)
84 observations



Précipitations mensuelles à Chateauneuf de Randon (février)
84 observations

