Compositio Mathematica

A. Guichardet

Utilisation des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts

Compositio Mathematica, tome 17 (1965-1966), p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1965-1966__17__1_0>

Utilisation des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts

par

A. Guichardet

On se propose dans ce mémoire de généraliser les résultats de [10], ch. II, relatifs aux représentations unitaires des groupes localement compacts, produits semi-directs d'un sous-groupe discret et d'un sous-groupe distingué abélien; la situation étudiée ici sera la suivante: G est un groupe localement compact à base dénombrable admettant un sous-groupe distingué ouvert G_1; on note G_0 le quotient et on suppose que la fonction 1 sur G_1 (resp. G_0) est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.

Dans le § 1 on donne une formulation légèrement modifiée et mieux adaptée aux applications des résultats de [10], ch. I relatifs à la décomposition des traces en caractères; on y définit la topologie de Jacobson sur le quasi-dual d'une C^*-algèbre A séparable ce qui permet notamment de parler du *support* d'une mesure sur ce quasi-dual $\tilde{A}$ intervenant dans la décomposition d'une représentation en représentations factorielles; on y introduit enfin une notion dont l'idée revient à J. Dixmier: celle de la μ-indépendance (μ mesure sur $\tilde{A}$) d'un champ de représentations factorielles; cette notion permet de caractériser la décomposition dite „centrale" (prop. 1) (on trouvera une autre caractérisation dans [5], prop. 7).

Les résultats du § 2 sont des généralisations faciles de ceux de [10], ch. II, § 1 où l'on ne supposait d'ailleurs pas G_1 abélien.

Le théorème 1 du § 4, dans sa partie directe, généralise exactement le résultat correspondant de [10] (ch. II, § 2, prop. 1); pour la réciproque on s'est borné aux représentations factorielles de type fini en raison de difficultés liées notamment au problème suivant: les fonctions $\lambda \to \lambda(x)$ où $x \in A^+$ sur l'ensemble des caractères sont-elles suffisamment nombreuses en un sens à préciser?

Le théorème 1 du § 5 généralise la proposition 3 du § 2, ch. II de [10], exceptée la dernière assertion dont la généralisation soulève des difficultés du même ordre que précédemment; le théorème 2 est à rapprocher de la proposition 1 de [11].

Les résultats du § 6 généralisent directement ceux de [10], ch. II, § 2, n° 5, y compris la description de la topologie de Jacobson.

Enfin au § 7 on étudie un exemple, inspiré de [4], par deux méthodes différentes donnant des résultats nettement différents.

On est souvent amené, dans le courant de ce travail, à utiliser des mesures standard sur un quasi-dual; on applique alors directement la théorie de la réduction des algèbres de von Neumann telle qu'elle est exposée dans [1].

Signalons enfin le problème suivant: on sait qu'un sous-groupe distingué d'un groupe de type I peut ne pas être de type I (cf. par exemple les groupes K et K_1 de [4]); on peut se demander de quelle façon un sous-groupe distingué doit être plongé dans un groupe de type I pour qu'on puisse affirmer qu'il est nécessairement de type I; le corollaire 2 de la proposition 2 du § 5 donne une réponse, évidemment très partielle, à cette question.

Les notations sont celles de [10], notamment en ce qui concerne A_{rep}, A_{fac}, $\tilde{A}$, $\tilde{A}_f$, $\tilde{A}_I$, etc.; rappelons que $\hat{A}$ s'identifie canoniquement avec sa structure borélienne à $\tilde{A}_I$ et que $\tilde{A}_I$ est une partie borélienne de $\tilde{A}$; on notera A^j l'espace des idéaux primitifs de A; enfin pour $x \in A$ et $\pi \in \tilde{A}$ on posera

$$\mathscr{F}x(\pi) = ||\dot{\pi}(x)||$$

où $\dot{\pi}$ est une représentation quelconque de la classe de quasi-équivalence π.

§ 1. Propriétés du quasi-dual d'une C^*-algèbre séparable

Dans tout ce paragraphe on désigne par A une C^*-algèbre séparable.

1. *Topologie du quasi-dual.*

On sait que le noyau d'une représentation factorielle de A est un idéal primitif (cf. [2], cor. 3 du th. 2); on peut donc définir sur $\tilde{A}$ la *topologie de Jacobson* comme image réciproque de la topologie de Jacobson par l'application $\pi \to$ noyau π de A sur A^j; la correspondance biunivoque canonique entre $\tilde{A}_I$ et $\hat{A}$ devient alors un homéomorphisme. De plus l'application $E \to E \cap \tilde{A}_I$ est une correspondance biunivoque entre parties ouvertes de $\tilde{A}$ et parties ouvertes de $\tilde{A}_I$; il en résulte que $\tilde{A}$ est à base dénombrable ([7], cor. du th. 3.2) et que pour tout $x \in A$ la fonction $\mathscr{F}x$ est semi-continue inférieurement ([6], lemme 2.2).

Enfin la structure borélienne sur $\tilde{A}$ sous-jacente à cette topologie est *moins fine* que la structure borélienne de Mackey: on vérifie en effet immédiatement que toute partie fermée de $\tilde{A}$ est borélienne pour cette dernière structure borélienne.

2. *Décomposition des représentations.*

Si Z est un espace borélien standard, ν une mesure borélienne positive sur Z et $\zeta \to \pi_\zeta$ une application borélienne de Z dans A_{fac}, on sait qu'on peut définir une représentation „intégrale" de A que nous noterons

$$\pi = \int^{\oplus} \pi_\zeta d\nu(\zeta).$$

Lemme 1. *Supposons ν bornée et notons μ la mesure borélienne sur $\tilde{A}$, image de ν; l'ensemble S des éléments de $\tilde{A}$ dont les noyaux contiennent celui de π est le plus petit fermé portant μ.*

D'abord S porte μ: en effet soient $x_1, x_2, \ldots$ des éléments partout denses dans le noyau de π; pour presque tout ζ on a $\pi_\zeta(x_i) = 0$ pour tout i, donc noyau $\pi_\zeta \supset$ noyau π, i.e. classe de $\pi_\zeta \in S$.

Puis S est le plus petit fermé qui porte μ: il s'agit de montrer qu'un ouvert U de $\tilde{A}$ qui rencontre S est non négligeable pour μ; or U est l'ensemble des éléments de $\tilde{A}$ dont les noyaux ne contiennent pas un certain idéal autoadjoint fermé I de A non contenu dans le noyau de π; tout revient alors à voir que l'ensemble des ζ pour lesquels noyau $\pi_\zeta \not\supset I$ est non négligeable pour ν; or il existe $x \in I$ tel que $\pi(x) \neq 0$, donc que $\pi_\zeta(x) \neq 0$ sur un ensemble non ν-négligeable.

L'ensemble S peut donc être appelé *support de μ*; on peut encore dire que le noyau de π est l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels $\mathscr{F}x$ est nulle sur S.

Les représentations $\pi_\zeta (\zeta \in Z)$ seront dites *ν-indépendantes* si pour toute partie ν-mesurable Y de Z il existe une suite $x_i \in A$ telle que les $||\pi(x_i)||$ soient bornés et que $\pi_\zeta(x_i)$ converge fortement vers I pour presque tout $\zeta \in Y$ et vers 0 pour presque tout $\zeta \in Z-Y$.

Proposition 1. *Soient $\mathfrak{Z}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables dans l'espace de π, $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}(\zeta)$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$ (resp. $\pi_\zeta(A)$); les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$

(ii) $\mathfrak{Z}$ *est le centre de* $\mathfrak{A}$;

(iii) $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) d\nu(\zeta)$;

(iv) *les représentations π_ζ sont ν-indépendantes.*

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

(i) $\Rightarrow$ (iii): l'algèbre $\int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)d\nu(\zeta)$, étant engendrée par $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{A}$ (cf. [1], ch. II, § 3, th. 1), est identique à $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): on a

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) \cap \mathfrak{A}(\zeta)' \cdot d\nu(\zeta)$$

et comme $\mathfrak{A}(\zeta)$ est un facteur pour tout ζ, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \mathfrak{Z}$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): soient Y une partie ν-mesurable de Z et P_Y le projecteur diagonalisable correspondant; on a $P_Y \in \mathfrak{A}$, donc P_Y est limite forte d'une suite $\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots$; alors les $||\pi(x_i)||$ sont bornés et il existe une sous-suite x_{i_j} telle que $\pi_\zeta(x_{i_j})$ converge fortement vers I pour presque tout $\zeta \in Y$ et vers 0 pour presque tout $\zeta \in Z-Y$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): si les μ_ζ sont ν-indépendantes, $\mathfrak{A}$ contient tous les projecteurs de $\mathfrak{Z}$, donc $\mathfrak{Z}$ elle-même.

On va maintenant indiquer certaines circonstances où des représentations factorielles π_ζ sont nécessairement ν-indépendantes; on en verra une autre à la fin du paragraphe. A ce sujet, voir aussi [16].

PROPOSITION 2. *On peut affirmer que les π_ζ sont ν-indépendantes dans chacun des cas suivants*:

(i) *ν est concentrée sur une partie dénombrable Z_0 de Z et les π_ζ sont deux à deux non quasi-équivalentes*;

(ii) *les π_ζ sont presque toutes irréductibles, normales et deux à deux non équivalentes.*

(i): on va montrer que $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$, i.e. que tout opérateur linéaire continu T dans l'espace H de π, permutable à $\pi(A)$, est décomposable; or H est somme hilbertienne d'espaces H_ζ ($\zeta \in Z_0$) et T est représenté par une matrice $(T_{\zeta,\zeta'})$; on voit aussitôt que

$$T_{\zeta,\zeta'} \cdot \pi_{\zeta'}(x) = \pi_\zeta(x) \cdot T_{\zeta,\zeta'}$$

pour $x \in A$ et $\zeta, \zeta' \in Z_0$; autrement dit $T_{\zeta,\zeta'}$ est un opérateur d'entrelacement pour π_ζ et $\pi_{\zeta'}$; l'hypothèse entraîne donc $T_{\zeta,\zeta'} = 0$ pour $\zeta \neq \zeta'$.

(ii): supposons d'abord les π_ζ presque toutes irréductibles et normales et π factorielle; alors les π_ζ ont presque toutes même noyau que π ([2], remarque après cor. 3 du th. 2) et par suite sont presque toutes deux à deux équivalentes. Pour démontrer la condition (i) de la prop. 1 il suffit maintenant de reprendre le raisonnement de [10], ch. I, § 3, lemme 4.

Lemme 2. *Soit μ une mesure borélienne standard sur $\tilde{A}$; il existe un sous-ensemble borélien standard E de $\tilde{A}$ de complémentaire μ-négligeable et une application borélienne $\rho \to \pi_\rho$ de E dans A_{fac} telle que pour tout $\rho \in E$, ρ soit la classe de π_ρ; la classe de quasi-équivalence de la représentation $\int^\oplus \pi_\rho d\mu(\rho)$ ne dépend pas du choix de E et de π_ρ.*

L'existence de E et de π_ρ résulte de [15], th. 6.3 (ou 10.2); la dernière assertion, de [5], prop. 7.

Cette classe de quasi-équivalence sera notée $\int^\oplus \rho \cdot d\mu(\rho)$.

Partons enfin d'une représentation π de A; on sait associer à certaines sous-algèbres abéliennes $\mathfrak{Z}$ de $\pi(A)'$ un espace borélien standard Z, une mesure borélienne ν et une application borélienne $\zeta \to \pi_\zeta$ de Z dans A_{fac} tels que

$$\pi = \int^\oplus \pi_\zeta \cdot d\mu(\zeta);$$

les diverses mesures μ sur $\tilde{A}$ correspondantes ne sont pas nécessairement équivalentes; toutefois elles ont *même support* (lemme 1). Si on prend en particulier pour $\mathfrak{Z}$ le centre de $\pi(A)'$, on peut imposer aux π_ζ d'être deux à deux non quasi-équivalentes; dans ce cas μ est *standard* et sa classe d'équivalence est *canoniquement associée* à la classe de quasi-équivalence de π (cf. [5], th. 3).

3. *Décomposition des traces.*

Proposition 3. *Soit μ une mesure borélienne sur $\tilde{A}_{\mathrm{nor}}$ concentrée sur un sous-ensemble borélien standard X; on suppose que les idéaux de définition des caractères (considérés comme formes sesquilinéaires) associés aux éléments de X contiennent un idéal autoadjoint I_0 et que ces caractères sont non identiquement nuls sur I_0; on suppose en outre qu'on peut choisir pour tout $\rho \in X$ un certain caractère χ_ρ associé de façon que les fonctions $\rho \to \chi_\rho(x, y)$ pour $x, y \in I_0$ soient μ-intégrables; pour tout $\rho \in X$ on note I_ρ, Λ_ρ, H_ρ, π_ρ, $\mathscr{U}_\rho$, Tr_ρ les éléments associés à χ_ρ (notations de [10], ch. 1, § 1, n° 1); on note enfin J une $*$-algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans I_0.*

(i) *Les champs de vecteurs $\rho \to \Lambda_\rho(x)$ où $x \in J$ définissent (au sens de [1], ch. II, § 1, prop. 4) sur le champ $\rho \to H_\rho$ une structure de chàmp μ-mesurable, pour laquelle les champs $\rho \to \pi_\rho(z)$ pour $z \in A$ et $\rho \to \mathscr{U}_\rho$ sont μ-mesurables.*

(ii) *La forme $\sigma(x, y) = \int \chi_\rho(x, y) \cdot d\mu(\rho)$ est une trace sur I_0.*

(iii) *Soient Λ, H, π, $\mathscr{U}$, Tr les éléments associés à σ; il existe un isomorphisme ϕ de H sur $\int^\oplus H_\rho \cdot d\mu(\rho)$ qui transforme $\pi(z)$ en*

$\int^{\oplus} \pi_\rho(z) \cdot d\mu(\rho)$ pour tout $z \in A$, $\mathcal{U}$ en $\int^{\oplus} \mathcal{U}_\rho \cdot d\mu(\rho)$, le centre de $\mathcal{U}$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables et Tr en $\int^{\oplus} Tr_\rho \cdot d\mu(\rho)$.

Démonstration. (i) résulte de [10], ch. I, § 3, lemme 2.

(ii): les axiomes (i), (ii), (iii) des traces sont trivialement vérifiés; pour prouver l'axiome (iv) il suffit de montrer que si (u_ι) est une unité approchée de A, on a

$$\sigma(u_\iota x, x) \to \sigma(x, x) \qquad \text{pour } x \in I; \tag{1}$$

or pour tout $\rho \in X$ on a

$$\chi_\rho(u_\iota x, x) \to \chi_\rho(x, x) \tag{2}$$

et

$$|\chi_\rho(u_\iota x, x)| \leqq ||u_\iota|| \cdot \chi_\rho(x, x) \leqq \chi_\rho(x, x)$$

et l'assertion résulte du théorème de Lebesgue.

Enfin pour prouver l'axiome (v) il suffit ([10], ch. I, § 1, n° 1, rem. 5) de montrer que si (u_ι) est une unité approchée de I_0 on a (1), et, en vertu du raisonnement qui vient d'être fait, que l'on a (2), ou enfin que $\pi_\rho|I_0$ est non dégénérée, ce qui résulte immédiatement de [10], ch. I, § 1, n° 1, rem. 6.

(iii) Sauf pour la dernière assertion la démonstration de [10], ch. I, § 3, prop. 1 s'applique intégralement, le fait que σ soit maximale n'y jouant en fait aucun role; démontrons donc la dernière assertion: notons $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}_\rho$) l'algèbre hilbertienne achevée associée à σ (resp. à χ_ρ pour $\rho \in X$); le champ $\rho \to \mathfrak{A}_\rho$ est mesurable (cf. [1], ch. II, § 4, prop. 1) et l'algèbre hilbertienne $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_\rho \cdot d\mu(\rho)$ est achevée ([1], ch. II, § 4, prop. 6); on vérifie sans peine, en utilisant la définition de [1], ch. II, § 4, n° 2, que l'image par ϕ de l'algèbre hilbertienne $\Lambda(I_0)$ est contenue dans $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_\rho \cdot d\mu(\rho)$; comme $\phi(\mathfrak{A})$ est l'algèbre hilbertienne des éléments bornés relativement à $\phi(\Lambda(I_0))$, on a

$$\phi(\mathfrak{A}) = \int^{\oplus} \mathfrak{A} \cdot d\mu(\rho);$$

par ailleurs la transformée de Tr par ϕ est la trace naturelle sur la transformée $\phi\mathcal{U}\phi^{-1}$ de $\mathcal{U}$, considérée comme algèbre de von Neumann associée à gauche à $\phi(\mathfrak{A})$ et $\int^{\oplus} \mathrm{Tr}_\rho \cdot d\mu(\rho)$ est (cf. [1], ch. II, § 5, th. 1) la trace naturelle sur $\int^{\oplus} \mathcal{U}_\rho \cdot d\mu(\rho)$, considérée comme algèbre de von Neumann associée à gauche à $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_\rho \cdot d\mu(\rho)$; d'où l'assertion.

Remarques.

1) La classe de quasi-équivalence de π n'est autre que $\int^{\oplus} \rho \cdot d\mu(\rho)$.

2) (iii) prouve que les π_ρ sont μ-indépendeantes.

3) Il résulte de [10], ch. I, § 3, th. 1 que la décomposition centrale de la représentation canoniquement associée à une trace peut se faire avec une mesure μ vérifiant les hypothèses de la prop. 3.

§ 2. Préliminaires sur les groupes étudiés et leurs C^*-algèbres

1. *Généralités.*

Dans tout ce paragraphe on désigne par G un groupe localement compact admettant un sous-groupe G_1 *ouvert et distingué*; on note G_0 le quotient (discret) G/G_1, e_0 et e_1 les éléments neutres de G_0 et de G_1; pour tout $a \in G_0$ on note s_a un élément quelconque de la classe résiduelle modulo G_1 correspondant à a et on suppose que s_{e_0} est l'élément neutre de G.

Pour a et $a' \in G_0$ les automorphismes de G_1: $b \to s_a s_{a'} b s_{a'}^{-1} s_a^{-1}$ et $b \to s_{aa'} b s_{aa'}^{-1}$ ne sont pas identiques en général, mais diffèrent par un automorphisme intérieur; il en est de même des automorphismes $b \to s_a^{-1} b s_a$ et $b \to s_{a^{-1}} b s_{a^{-1}}^{-1}$. On écrira pour simplifier

$$ab = s_a b s_a^{-1}.$$

Tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme bs_a ($a \in G_0$ et $b \in G_1$); G est homéomorphe à l'espace topologique $G_0 \times G_1$ et on identifiera souvent l'élément bs_a de G à l'élément (a, b) de $G_0 \times G_1$; on a alors les formules

$$(a, b)(a', b') = (aa', bs_a b' s_{a'} s_{aa'}^{-1}) = (aa', b \cdot ab' \cdot s_a s_{a'} s_{aa'}^{-1})$$
$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, s_a^{-1} b^{-1} s_{a^{-1}}^{-1}).$$

Le cas où G est produit semi-direct de G_1 par un sous-groupe isomorphe à G_0 se caractérise par le fait que l'application $a \to s_a$ peut être considérée comme un homomorphisme.

On supposera en outre G_1 *unimodulaire* et on notera $d(ab) = \delta_a^{-1} db$ l'action de G_0 sur la mesure de Haar de G_1; on a la relation

$$\delta_{aa'} = \delta_a \delta_{a'};$$

on a enfin la mesure de Haar à gauche sur G

$$\int f(a, b) d(a, b) = \sum_a \delta_a \int f(a, b) db$$

et la fonction modulaire $\Delta(a, b) = \delta_a$.

Nous supposerons que *la fonction* 1 *sur* G_0 (resp. G_1) *est limite* *uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.*

LEMME 1. *La fonction* 1 *sur* G *est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.*

La démonstration est une adaptation facile de celle de [17], lemme 3.5; on remarquera qu'elle est encore valable si on suppose seulement G_1 fermé, pourvu qu'il existe une section continue $a \to s_a$.

Soit C une partie compacte de G et soit ε un nombre positif; il existe des compacts $C' \subset G_0$ et $C'' \subset G_1$ tels que $C \subset C' \times C''$ et une fonction x sur G_0 à support fini telle que l'on ait

$$|x\tilde{x}-1| \leqq \varepsilon \text{ sur } C' \cup \{e_0\};$$

soit C'_0 le support de x. Soit C''_0 l'ensemble des éléments $s_{a'a}^{-1} b s_{a'} s_a \in G_1$ avec $a \in C'_0$, $a' \in C'$ et $b \in C''$; il existe $y \in \mathscr{K}(G_1)$ telle que

$$|y\tilde{y}-1| \leqq \varepsilon \text{ sur } C''_0;$$

définissons $z \in \mathscr{K}(G)$ par

$$z(a, b) = x(a)y(s_a^{-1} b s_a);$$

on a alors

$$\begin{aligned}(z\tilde{z})(a', b') &= \sum_a \delta_a \int z((a', b')(a, b))z(a, b)db \\ &= \sum_a \delta_a \int z(a'a, b's_{a'}bs_a s_{a'a}^{-1})z(a, b)db \\ &= \sum_a \delta_a \int x(a'a)x(a)y(s_{a'a}^{-1}b's_{a'}bs_a)y(s_a^{-1}bs_a)db \\ &= \sum_a x(a'a)x(a)(y\tilde{y})(s_{a'a}^{-1}b's_{a'}s_a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(z\tilde{z})(a', b')-1| \leqq &\sum_{a \in C'_0} |x(a'a)|\,|x(a)| \\ &\cdot |(y\tilde{y})(s_{a'a}^{-1}b's_{a'}s_a)-1|+|(x\tilde{x})(a')-1|.\end{aligned}$$

Supposons $(a', b') \in C$; alors $a' \in C'$, $b' \in C''$, $s_{a'a}^{-1}b's_{a'}s_a \in C''_0$ et

$$\begin{aligned}|(z\tilde{z})(a', b')-1| &\leqq \sum_a |x(a)|^2+\varepsilon \\ &= \varepsilon(x\tilde{x})(e_0)+\varepsilon \\ &\leqq \varepsilon(1+\varepsilon)+\varepsilon. \qquad \text{CQFD.}\end{aligned}$$

Désignons par A, A_0 et A_1 les C^*-algèbres respectives de G, G_0 et G_1; la représentation régulière gauche π (resp. π_0, resp. π_1) de

G (resp. G_0, resp. G_1) définit un isomorphisme de A (resp. A_0, resp. A_1) sur son image.

2. *Représentation des éléments de A par des applications de G_0 dans A_1.*

Pour $f \in L^1(G)$ et $a \in G_0$ nous noterons f_a l'élément de $L^1(G_1)$ défini par

$$f_a(b) = \delta_a f(a, b);$$

pour $g \in L^1(G_1)$ nous noterons g^a l'élément de $L^1(G)$ défini par

$$g^a(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-1} g(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

enfin nous noterons $L^1(G_1)^a$ l'ensemble des g^a pour $g \in L^1(G_1)$.

L'application $f \to f_a$ induit sur $L^1(G_1)^a$ un isomorphisme d'espaces de Banach de $L^1(G_1)^a$ sur $L^1(G_1)$, et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$; on désignera par A^a l'adhérence de $L^1(G_1)^a$ dans A.

L'espace $L^2(G)$ est somme hilbertienne d'espaces $H_a (a \in G_0)$, images de $L^2(G_1)$ par des isomorphismes J_a tels que

$$(J_a h)(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-\frac{1}{2}} h(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

tout opérateur continu T dans $L^2(G)$ est donc représenté par une matrice $(T_{a,a'})$ où

$$T_{a,a'} = J_a^* T J_{a'} \in \mathscr{L}(L^2(G_1)).$$

Soit $f \in L^1(G)$; pour $\varphi \in L^2(G)$ on a

$$(\pi(f)\varphi)(a, b) = \sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b')\varphi(a'^{-1}a, s_{a'}^{-1} b'^{-1} b s_a s_{a'^{-1}a}^{-1}) db'$$

d'où, pour $\psi \in L^2(G_1)$:

$$((\pi(f))_{a_1,a_2}\psi)(b) = \delta_{a_1,a_2}^{3/2} \int f(a_1 a_2^{-1}, b')\psi(s_{a_1 a_2^{-1}}^{-1} b'^{-1} b s_{a_1} s_{a_2}^{-1}) db'.$$

Pour a_1 et $a_2 \in G_0$ soit U_{a_1,a_2} l'opérateur unitaire dans $L^2(G_1)$ défini par

$$(U_{a_1,a_2}\psi)(b) = \delta_{a_1 a_2^{-1}}^{1/2} \psi(s_{a_1 a_2^{-1}}^{-1} b s_{a_1} s_{a_2}^{-1});$$

posons aussi $U_a = U_{a,e_0}$; on a alors

$$(\pi(f))_{a_1,a_2} = \pi_1(f_{a_1 a_2^{-1}}) U_{a_1,a_2}$$

et on voit que $(\pi(f))_{a_1,a_2} \cdot U_{a_1,a_2}^{-1}$ appartient à $\pi_1(L^1(G_1))$ et ne dépend que de $a_1a_2^{-1}$; par continuité, pour tout $x \in A$, $(\pi(x))_{a_1,a_2} \cdot U_{a_1,a_2}^{-1}$ appartient à $\pi_1(A_1)$ et ne dépend que de $a_1a_2^{-1}$; on posera, pour tout $a \in G_0$

$$x_a = \pi_1^{-1}((\pi(x))_{a_1,a_2} \cdot U_{a_1,a_2}^{-1}) \in A_1$$

où (a_1, a_2) est un couple quelconque vérifiant $a_1a_2^{-1} = a$; on a en particulier

$$x_a = \pi_1^{-1}((\pi(x))_{a,e_0} \cdot U_a^{-1}).$$

Pour tout a, l'application $x \to x_a$ de A dans A_1 est linéaire, diminue les normes et prolonge l'application $f \to f_a$ déjà considérée. Pour $f \in L^1(G_1)^{a_1a_2^{-1}}$ on vérifie immédiatement que $||f||_A = ||f_{a_1a_2^{-1}}||_{A_1}$; par suite la restriction de l'application $x \to x_a$ à A^a est un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1 et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$. Pour tout $x \in A_1$ on notera x^a l'élément correspondant de A^a, qui est donc défini par

$$(x^a)_{a'} = \begin{cases} x & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin pour $x \in A$ on a

$$(\pi(xx^*))_{e_0,e_0} = \sum_a (\pi(x))_{e_0,a}((\pi(x))_{e_0,a})^* \geqq 0$$

d'où $(xx^*)_{e_0} \geqq 0$; si alors $(xx^*)_{e_0}$ est nul on a

$$\begin{aligned} (\pi(x))_{e_0,a} &= 0 && \text{pour tout } a, \\ (\pi(x))_{a_1,a_2} &= (\pi(x))_{a_1,a_2} \cdot U_{a_1,a_2}^{-1} \cdot U_{a_1,a_2} \\ &= (\pi(x))_{e_0,a_2a_1^{-1}} \cdot U_{e_0,a_2a_1^{-1}} \cdot U_{a_1,a_2} \\ &= 0 && \text{quels que soient } a_1 \text{ et } a_2 \end{aligned}$$

donc $x = 0$.

Nous avons ainsi démontré la

Proposition 1. *A tout élément x de A est associée de façon biunivoque une application $a \to x_a$ de G_0 dans A_1 telle que pour $x \in L^1(G)$ on ait*

$$x_a \in L^1(G_1) \quad et \quad x_a(b) = \delta_a x(a, b);$$

pour tout $a \in G_0$ l'application $x \to x_a$ est linéaire et continue; elle est positive et fidéle pour $a = e_0$; elle induit sur A^a un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1, et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$.

3. *Action de G_0 dans A_1. Quelques formules.*

Pour $f \in L^1(G_1)$ et $b \in G_1$ posons ${}_bf(b') = f(b'b)$; on voit facilement que l'application $f \to {}_bf$ est isométrique pour la norme de A_1; elle se prolonge donc en un automorphisme d'espaces vectoriels de A_1, que nous noterons encore $x \to {}_bx$.

Soit (u_i) une unité approchée de $L^1(G_1)$ (donc aussi de A_1); posons

$$u_{i,b}(b') = u_i(bb');$$

on a alors, pour $f \in L^1(G_1)$

$$fu_{i,b} = {}_bfu_i \to {}_bf \qquad \text{au sens de } L^1(G_1)$$

et on en déduit facilement que pour $x \in A_1$

$$xu_{i,b} \to {}_bx \qquad \text{au sens de } A_1.$$

D'autre part, pour $f \in L^1(G_1)$ et $a \in G_0$ posons

$$(af)(b) = \delta_a f(s_a^{-1} b s_a);$$

$f \to af$ est isométrique pour la norme de A_1, donc se prolonge en un automorphisme $x \to ax$ de A_1, et on a

$$\pi_1(ax) = U_a \pi_1(x) U_a^{-1}.$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer les formules suivantes: pour $x \in A$

$$(x^*)_a = a({}_bx_{a^{-1}})^* \tag{1}$$

où on a posé $b = s_a^{-1} s_{a^{-1}}^{-1}$; pour $x \in A$ et $y \in L^1(G)$

$$(xy)_a = \sum_{a'} x_{a'} \cdot a'({}_by_{a'^{-1}a}) \tag{2}$$

où on a posé $b = s_{a'}^{-1} s_a s_{a'^{-1}a}^{-1}$ et où la série converge au sens de A_1; enfin pour $z \in A_1$

$$z^a = \lim z^{e_0}(u_i)^a \tag{3}$$

$$(az)^{e_0} = \lim (u_i)^a {}_bz^{e_0}(u_i)^{a^{-1}} \tag{4}$$

où on a posé $b = sa_{a^{-1}}s_a$.

Soit maintenant ρ une représentation unitaire de G; on a

$$\rho(a, e_1) = \lim \rho\big((u_i)^a\big)$$

d'où, pour $z \in A_1$

$$\rho(z^a) = \rho(z^{e_0})\rho(a, e_1) \tag{3'}$$

$$\rho\big((az)^{e_0}\big) = \rho(a, e_1)\rho(z^{e_0})\rho(a, e_1)^{-1}. \tag{4'}$$

4. *Approximation des éléments de A.*

L'exposé de [10] subsiste mot à mot; rappelons-en seulement les résultats: soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante de fonctions de type positif sur G_0 à supports finis telle que $f_i(e_0) = 1$ et que $f_i(a) \to 1$ pour tout a; pour $x \in A$ posons

$$P_i x = \sum_a f_i(a)(x_a)^a.$$

Proposition 2. *On a $x = \lim P_i x$ pour tout $x \in A$.*

Corollaire. *Soit ρ une représentation unitaire de G et soit x un élément de A; si on a $\rho((x_a)^{e_0}) = 0$ pour tout a, alors $\rho(x) = 0$.*

5. *Idéaux autoadjoints fermés de A et de A_1.*

Lemme 2. (i) *Soit I un idéal autoadjoint fermé de A; l'image $\Pi(I)$ de $I \cap A^{e_0}$ par l'application $x \to x_{e_0}$ est un idéal autoadjoint fermé de A_1 invariant par G_0.*

(ii) *Soit J un idéal autoadjoint fermé invariant de A_1; l'ensemble $\Pi'(J)$ des $x \in A$ tels que $x_a \in J$ pour tout a est un idéal autoadjoint fermé de A et on a $\Pi\Pi'(J) = J$.*

(iii) *On a $\Pi'\Pi(I) \subset I$ pour tout idéal autoadjoint fermé de A.*

La démonstration est identique à celle de [10].

§ 3. Propriétés générales des représentations de G et de G_1

On suppose à partir de maintenant G_0 *dénombrable* et G_1 *à base dénombrable.*

1. *Action de G_0 dans $\tilde{A}_1$.*

Tout $a \in G_0$ détermine pour tout n un homéomorphisme $\rho \to a\rho$ de $(A_1)_{\mathrm{rep},n}$ sur lui-même tel que

$$(a\rho)(b) = \rho(s_a^{-1} b s_a) \qquad \text{pour } b \in G_1;$$

on en déduit un isomorphisme borélien $\rho \to a\rho$ de $(A_1)_{\mathrm{rep}}$ sur lui-même qui conserve $(A_1)_{\mathrm{fac}}$ et passe au quotient en un *isomorphisme borélien de $\tilde{A}_1$ sur lui-même,* que nous noterons encore $\rho \to a\rho$; cette application est aussi, comme on le voit aisément, un *homéomorphisme* de $\tilde{A}_1$ sur lui-même.

De même l'application $I \to aI$ est un *homéomorphisme* de A_1^i sur lui-même; enfin les applications $a \to (\rho \to a\rho)$ pour $\rho \in \tilde{A}_1$ et $a \to (I \to aI)$ sont des *représentations* de G_0 et *ne dependent pas de la section $a \to s_a$ choisie.*

Soit π_1 une représentation unitaire de G_1 et soit C la classe de mesures sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée; on voit, par transport de structure, que la classe associée à $a\pi_1$ est la classe aC formée des mesures $a\mu$ ($\mu \in C$). Supposons que π_1 soit la restriction à G_1 d'une représentation π de G; alors $a\pi_1$ est équivalente à π_1 pour tout a et C est invariante par G_0; autrement dit ses éléments sont des mesures *quasi-invariantes par* G_0; de plus C est concentrée sur un sous-ensemble Z borélien standard invariant par G_0; par ailleurs le support F de C est un ensemble fermé invariant; le noyau de π_1 dans A_1 est l'ensemble des x tels que $\mathscr{F}x$ soit nulle sur F; enfin si I est le noyau de π dans A, celui de π_1 dans A_1 est $\Pi(I)$, car pour $x \in A^{e_0}$ on a $\pi(x) = \pi_1(x_{e_0})$.

Lemme 1. *Si π_1 est la restriction à G_1 d'une représentation factorielle π de G, la classe de mesures C est ergodique pour G_0.*

On va d'abord démontrer l'existence d'un „système d'imprimitivité" basé sur C; soit

$$\pi_1(x) = \int_Z^{\oplus} \rho_\tau(x) d\pi(\tau) \qquad (x \in A)$$

une décomposition de π_1, ρ_τ appartenant à la classe τ pour tout $\tau \in Z$; en vertu de la formule (4') du § 2, pour $x \in A_1$ et $a \in G_0$ on a

$$\pi(a, e_1)\pi_1(x)\pi(a, e_1)^{-1} = \pi_1(ax);$$

par suite l'application $T \to \pi(a, e_1)T\pi(a, e_1)^{-1}$ détermine un automorphisme de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_1(G_1)$ ainsi que de son centre qui n'est autre que l'algèbre des opérateurs diagonalisables; si T_f est l'opérateur diagonisable correspondant à une fonction borélienne bornée f il existe donc g telle que

$$\pi(a, e_1)T_f\pi(a, e_1)^{-1} = T_g$$

et il reste à montrer que $g = af$ i.e. que $g(\tau) = f(a^{-1}\tau)$ presque partout; T_f est limite forte d'une suite $\pi_1(x_i)$ où $x_i \in A_1$; il existe donc une sous-suite x'_i et une partie Z' de Z de complémentaire négligeable telles que pour $\tau \in Z'$

$$f(\tau) \cdot 1 = \text{limite forte de } \rho_\tau(x'_i);$$

alors T_g est limite forte de $\pi_1(ax'_i)$ et il existe une sous-suite x''_i et une partie Z'' de Z' de complémentaire négligeable telles que, pour $\tau \in Z''$

$$g(\tau) \cdot 1 = \text{limite forte de } \rho_\tau(ax''_i);$$

puis pour $\tau \in Z'' \cap aZ''$, $f(a^{-1}\tau) \cdot 1$ et $g(\tau) \cdot 1$ sont resp. limites de

$\rho_{a^{-1}\tau}(x_i'')$ et de $\rho_\tau(ax_i'')$; et comme les représentations $\rho_{a^{-1}\tau}$ et $b \to \rho_\tau(ab)$ sont quasi-équivalentes, $f(a^{-1}\tau) = g(\tau)$.

Supposons π factorielle; si f est invariante par G_0, T_f permute à $\pi(G)$, donc est un scalaire et f est presque partout égale à une constante. CQFD.

2. *Une propriété relative aux représentations de G.*

Définition. Une mesure borélienne standard μ sur $\tilde{A}_1$ sera dite *vérifier la condition* $(*)$ si pour tout $a \neq e_0$ et toute partie μ-mesurable non négligeable E il existe une partie μ-mesurable non négligeable $E' \subset E$ telle que $aE' \cap E' = \emptyset$. Soient alors π une représentation de G et C la classe de mesures canoniquement associée à $\pi|G_1$; dire que C vérifie la condition $(*)$ revient à dire ceci: soit $\mathfrak{Z}$ le centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G_1)$; pour tout $s \in G - G_1$ et tout projecteur P non nul de $\mathfrak{Z}$, il existe un projecteur P' de $\mathfrak{Z}$ non nul et majoré par P tel que $\pi(s)P'\pi(s)^{-1}$ soit orthogonal à P'. Nous dirons alors que π *vérifie la condition* $(*)$.

Lemme 2. *Soit π une représentation de G vérifiant la condition $(*)$; si $x \in A$ et si $\pi(x) = 0$ alors $\pi((x_a)^{e_0}) = 0$ pour tout a. Si I est le noyau de π dans A, on a $I = \Pi'\Pi(I)$.*

Nous donnons ici une démonstration globale de ce résultat. Soit $x \in A$ tel que $\pi(x) = 0$ et soient $a_0 \in G_0$ et $\varepsilon > 0$; on va prouver que

$$||\pi((x_{a_0})^{e_0})|| \leqq \varepsilon.$$

Il existe $y \in A$ tel que y_a soit nul sauf pour un nombre fini d'éléments de G_0, soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et que $||x-y|| \leqq \varepsilon/2$; d'autre part, en vertu du théorème de Zorn, il existe des projecteurs $P_1, P_2, \ldots$ de $\mathfrak{Z}$, deux à deux orthogonaux, de somme 1 et tels que

$$\pi(s_{a_i}s_{a_0}^{-1})P_j\pi(s_{a_i}s_{a_0}^{-1})^{-1}$$

soit orthogonal à P_j pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et pour tout j. On a alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon/2 &\geqq ||\pi(y)|| = ||\pi(y)\pi(s_{a_0}^{-1})|| \\
&\geqq \sup_j ||P_j\pi(y)\pi(s_{a_0}^{-1})P_j|| \\
&= \sup_j ||\sum_{i=0}^{n} P_j\pi((y_{a_i})^{e_0})\pi(s_{a_i})\pi(s_{a_0}^{-1})P_j|| \\
&= \sup_j ||\pi((y_{a_0})^{e_0})P_j|| \\
&= ||\pi((y_{a_0})^{e_0})||
\end{aligned}$$

Comme

$$||\pi((x_{a_0})^{e_0})-\pi((y_{a_0})^{e_0})|| \leqq \varepsilon/2$$

on a

$$||\pi((x_{a_0})^{e_0})|| \leqq \varepsilon.$$

Enfin l'égalité $I = \Pi'\Pi(I)$ résulte du lemme 2 du § 2.

Notation. On désignera par A' la sous-algèbre de A formée des x pour lesquels x_a est nul sauf pour un nombre fini d'éléments a.

Lemme 3. *Soient π une représentation de G vérifiant la condition $(*)$ et* Tr *une trace normale sur l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$; pour $x \in A'^{+}$ on a*

$$\mathrm{Tr}\,(\pi(x)) = \mathrm{Tr}\,(\pi((x_{e_0})^{e_0})).$$

La démonstration est celle de [10], ch. II, § 2, lemme 2.

§ 4. Représentations factorielles de type fini de G

Soient ρ une représentation de G_1 dans un espace H, $\rho(x) = \int_Z^{\oplus} \rho_\tau(x)d\mu(\tau)$ sa décomposition canonique où Z est une partie borélienne standard de $\hat{A}_1$, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}_\tau$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\rho(G_1)$ (resp. $\rho_\tau(G_1)$).

On va étudier la représentation π de G induite par ρ (noter que, la représentation régulière de G étant induite par celle de G_1, on doit s'attendre à retrouver certains résultats du § 2, n⁰ 2); π a lieu dans l'espace hilbertien K_0 des applications boréliennes F de G dans H qui vérifient

— $F(a', bb') = \rho(b)F(a', b')$ pour $a' \in G_0$, b et $b' \in G_1$

— la fonction $a \to ||F(a, e_1)||$ est de carré sommable;

elle est donnée par

$$(\pi(a, b)F)(a', b') = F((a', b')(a, b)) = F(a'a, b's_{a'}bs_a s_{a'a}^{-1});$$

on notera $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neuman engendrée par $\pi(G)$.

On suppose que

(i) les représentations ρ_τ ont lieu dans un même espace H_0

(ii) Z est invariant par G_0

(iii) μ est quasi-invariante par G_0;

on peut alors supposer $H = L^2_{H_0}(Z, \mu)$ et, par ailleurs, poser

$$r_a(\tau) = d\mu(a\tau)/d\mu(\tau);$$

de plus, pour $\tau \in Z$, les représentations $a\rho_\tau$ et $\rho_{a\tau}$ sont quasi-équivalentes et il existe un isomorphisme $\phi_{a,\tau}$ unique de $\mathscr{B}_\tau$ sur $\mathscr{B}_{a\tau}$ tel que

$$\phi_{a,\tau}(\rho_\tau(s_a^{-1} b s_a)) = \rho_{a\tau}(b) \tag{1}$$

et on a

$$\phi_{a,\tau}^{-1} = \phi_{a^{-1},a\tau}. \tag{2}$$

Posons $K = L^2(G_0) \otimes L^2_{H_0}(Z, \mu)$; on vérifie facilement que l'on définit un isomorphisme de K_0 sur K en associant à toute $F \in K_0$ l'élément φ de K défini par

$$\varphi(a, \tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\big(F(a^{-1}, e_1)\big)(a^{-1}\tau) \in H_0$$

et que la représentation π, transportée dans K, est donnée par la formule

$$\big(\pi(a, b)\varphi\big)(a', \tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}} \rho_{a'^{-1}\tau}(s_{a'^{-1}} b s_a s_{a'^{-1}a}^{-1})\varphi(a^{-1}a', a^{-1}\tau). \tag{3}$$

L'espace K est somme hilbertienne d'espaces hilbertiens K_a ($a \in G_0$), images de H par des isomorphismes J_a:

$$(J_a\psi)(a', \tau) = \begin{cases} \psi(\tau) & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

calculons la matrice représentative $\big((\pi(a, b))_{a_1,a_2}\big)$ de $\pi(a, b)$; pour $a \in G_0$ désignons par U_a l'opérateur unitaire dans H défini par

$$(U_a\psi)(\tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}\tau);$$

on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} &\big((\pi(a, b))_{a_1,a_2}\psi\big)(\tau) \\ &= \begin{cases} r_{a_2 a_1^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}} \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}b)\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(a_2 a_1^{-1}\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } a = a_1 a_2^{-1} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

et que, pour $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} &\big((\pi(f))_{a_1,a_2}\psi\big)(\tau) \\ &\quad = r_{a_2 a_1^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}} \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1} f_{a_1 a_2^{-1}})\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(a_2 a_1^{-1}\tau) \end{aligned} \tag{5}$$

on en déduit

$$\big((\pi(f))_{a_1,a_2} U_{a_2 a_1^{-1}}\psi\big)(\tau) = \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1} f_{a_1 a_2^{-1}})\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(\tau)$$

ce qui prouve que $(\pi(f))_{a_1,a_2} U_{a_2 a_1^{-1}}$ est décomposable et que

$$(6)\quad \begin{aligned}&\left((\pi(f))_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}\right)(\tau)\\ &\qquad = \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}f_{a_1a_2^{-1}})\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1}) \in \mathscr{B}_{a_1^{-1}\tau}\end{aligned}$$

en particulier

$$\left((\pi(f))_{e_0,a_2a_1^{-1}}U_{a_2a_1^{-1}}\right)(\tau) = \rho_\tau(f'_{a_1a_2^{-1}});$$

on déduit alors de (1) et (2)

$$(7)\quad \begin{aligned}&\left((\pi(f))_{a_1a_2}U_{a_2a_1^{-1}}\right)(\tau)\\ &\qquad = \phi_{a_1^{-1},\tau}\left(\left((\pi(f))_{e_0,a_2a_1^{-1}}U_{a_2a_1^{-1}}\right)(\tau)\right)\cdot\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1})\end{aligned}$$

(6) donne en particulier

$$(8)\qquad (\pi(f))_{a,a}(\tau) = \rho_{a^{-1}\tau}(a^{-1}f_{e_0}) \in \mathscr{B}_{a^{-1}\tau}$$

$$(9)\qquad (\pi(f))_{e_0,e_0} = \rho(f_{e_0}) \in \mathscr{B}$$

et (7)

$$(10)\qquad (\pi(f))_{a,a}(\tau) = \phi_{a^{-1},\tau}\left((\pi(f))_{e_0,e_0}(\tau)\right)$$

$$(11)\qquad \left((\pi(f))_{a^{-1},e_0}U_a\right)(\tau) = \phi_{a,\tau}\left(\left((\pi(f))_{e_0,a}U_a\right)(\tau)\right).$$

Par continuité, pour tout $S \in \mathfrak{A}$, $S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}$ est décomposable et on a pour presque tout τ

$$(6')\qquad (S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau) \in \mathscr{B}_{a_1^{-1}\tau}$$

$$(7')\quad (S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau) = \phi_{a_1^{-1},\tau}\left((S_{e_0,a_2a_1^{-1}}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)\right)\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1})$$

$$(8')\qquad S_{a,a}(\tau) \in \mathscr{B}_{a^{-1}\tau}$$

$$(9')\qquad S_{e_0,e_0} \in \mathscr{B}$$

$$(10')\qquad S_{a,a}(\tau) = \phi_{a^{-1},\tau}(S_{e_0,e_0}(\tau))$$

$$(11')\qquad (S_{a^{-1},e_0}U_a)(\tau) = \phi_{a,\tau}\left((S_{e_0,a}U_a)(\tau)\right).$$

Lemme 1. *Si μ est ergodique et vérifie la condition* $(*)$, $\mathfrak{A}$ *est un facteur.*

Tout d'abord on vérifie, à l'aide de (5), que pour $f \in L^1(G)$ et a_1 et $a_2 \in G_0$ l'opérateur $U_{a_1a_2^{-1}}(\pi(f))_{a_2,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}$ est décomposable et que

$$\left(U_{a_1a_2^{-1}}(\pi(f))_{a_2,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}\right)(\tau) = \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_2^{-1}f_{e_0}).$$

Soit alors $S \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$; puisque S permute à $\pi(g^{e_0})$ pour toute $g \in L^1(G_1)$ on a

$$S_{a_1,a_2}(\pi(g^{e_0}))_{a_2,a_2} = (\pi(g^{e_0}))_{a_1,a_1}S_{a_1,a_2}$$

$$S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}U_{a_1a_2^{-1}}(\pi(g^{e_0}))_{a_2,a_2}U_{a_2a_1^{-1}} = (\pi(g^{e_0}))_{a_1,a_1}S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}}$$

d'où, en utilisant la remarque ci-dessus et la formule (8):

(12) $(S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)\rho_{a_1^{-1}\tau}(a_2^{-1}g) = \rho_{a_1^{-}\tau}(a_1^{-1}g)(S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)$

pour presque tout τ.

On va déduire de là que si $a_1 \neq a_2$ on a $S_{a_1,a_2} = 0$. Supposons $S_{a_1,a_2} \neq 0$; alors $S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}} \neq 0$ et il existe une partie μ-mesurable non négligeable E de Z telle que

$$(S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau) \neq 0 \qquad \text{pour tout } \tau \in E;$$

puis il existe une partie μ-mesurable non négligeable E' de E telle que

$$a_2a_1^{-1}E' \cap E' = \emptyset;$$

appelons φ la fonction caractéristique de E'; d'autre part il existe une suite $g_i \in L^1(G_1)$ telle que $\rho_\tau(g_i)$ converge fortement vers $\varphi(\tau)\cdot 1$ pour presque tout τ; la formule (1) prouve alors que, pour presque tout τ:

$$\rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}g_i) \text{ converge fortement vers } \varphi(\tau)\cdot 1$$
$$\rho_{a_1^{-1}\tau}(a_2^{-1}g_i) \text{ converge fortement vers } \varphi(a_2a_1^{-1}\tau)\cdot 1;$$

(12) donne

$$(S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)\varphi(a_2a_1^{-1}\tau) = \varphi(\tau)(S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)$$

presque partout; enfin, en prenant $\tau \in E'$:

$$0 = (S_{a_1,a_2}U_{a_2a_1^{-1}})(\tau)$$

ce qui est contradictoire et prouve que $S_{a_1,a_2} = 0$ pour $a_1 \neq a_2$.

Posons maintenant $a_1 = a_2 = a$; (8′) prouve que $S_{a,a}(\tau) \in \mathscr{B}_{a^{-1}\tau}$ et (12) que $S_{a,a}(\tau) \in \mathscr{B}'_{a^{-1}\tau}$ donc $S_{a,a}(\tau)$ est un scalaire, lequel ne dépend pas de a à cause de (10′); posons $S_{a,a}(\tau) = k(\tau)$.

Il reste à écrire que S permute aux $\pi(a, e_1)$:

$$\sum_{a_3} S_{a_1,a_3}(\pi(a, e_1))_{a_3,a_2} = \sum_{a_3} (\pi(a, e_1))_{a_1,a_3}S_{a_3,a_2}$$

et, en prenant $a_1 = a$ et $a_2 = e_0$:

$$S_{a,a}(\pi(a, e_1))_{a,e_0} = (\pi(a, e_1))_{a,e_0}S_{e_0,e_0};$$

on trouve, en appliquant (4)

$$k(\tau) = k(a\tau) \qquad \text{presque partout}$$

donc S est un scalaire.

Lemme 2. *On suppose μ invariante; soit $\tau \to \mathrm{tr}_\tau$ un champ mesurable de traces sur $\mathscr{B}_\tau$ tel que la trace sur $\mathscr{B}$: $\mathrm{tr} = \int^\oplus \mathrm{tr}_\tau \, d\mu(\tau)$ soit* *normale, fidèle et semi-finie et que* $\phi_{a,\tau}$ *transforme* tr_τ *en* $\mathrm{tr}_{a\tau}$ *pour tout* $\tau \in Z$ *et tout* $a \in G_0$. *Alors la fonction sur* $\mathfrak{A}^+$

$$S \to \mathrm{Tr}\, S = \mathrm{tr}\, S_{e_0, e_0}$$

est une trace normale, fidèle et semi-finie.

Montrons d'abord que Tr est une trace, i.e. que pour tout $S \in \mathfrak{A}$ on a

$$\mathrm{Tr}\, SS^* = \mathrm{Tr}\, S^*S.$$

Posons $S_{e_0, a} U_a = R_a$ avec $R_a \in \mathscr{B}$ d'après (6′); on a

$$(SS^*)_{e_0, e_0} = \sum_a S_{e_0, a} S^*_{e_0, a} = \sum_a R_a R_a^*$$

$$(S^*S)_{e_0, e_0} = \sum_a S^*_{a, e_0} S_{a, e_0} = \sum_a S^*_{a^{-1}, e_0} S_{a^{-1}, e_0}$$

$$= \sum_a U_a (S_{a^{-1}, e_0} U_a)^* (S_{a^{-1}, e_0} U_a) U_a^*$$

$$(S^*S)_{e_0, e_0}(\tau) = \sum_a (S_{a^{-1}, e_0} U_a)^* (S_{a^{-1}, e_0} U_a)(a^{-1}\tau)$$

et, en vertu de (11′):

$$= \sum_a \phi_{a, a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)(a^{-1}\tau))$$

$$\mathrm{Tr}\, S^*S = \int \mathrm{tr}_\tau\, ((S^*S)_{e_0, e_0}(\tau))\, d\mu(\tau)$$

$$= \int \sum_a \mathrm{tr}_\tau\, (\phi_{a, a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)\,(a^{-1}\tau)))\, d\mu(\tau)$$

$$= \int \sum_a \mathrm{tr}_{a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)(a^{-1}\tau))\, d\mu(\tau)$$

$$= \int \sum_a \mathrm{tr}_\tau (R_a^* R_a)(\tau) d\mu(\tau)$$

$$= \sum_a \mathrm{tr}\, (R_a^* R_a) = \sum_a \mathrm{tr}\, (R_a R_a^*) = \mathrm{Tr}\, SS^*.$$

La normalité de Tr résulte immédiatement de celle de tr; Tr est fidèle: en effet pour $S \in \mathfrak{A}$, $\mathrm{Tr}\, SS^* = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}\, (\sum_a R_a R_a^*) = 0 \Rightarrow R_a = 0$ pour tout a et ceci entraîne (cf. formule (7′)) $S_{a_1, a_2} = 0$ quels que soient a_1 et a_2, donc $S = 0$.

Reste à voir que Tr est semi-finie: puisque tr est semi-finie, il existe une suite (T_i) d'éléments de $\mathscr{B}$, tendant fortement vers I et vérifiant

$$0 \leqq T_i \leqq I \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\, T_i < +\infty;$$

posons $T_i = \int^\oplus T_i(\tau) d\mu(\tau)$ et définissons des opérateurs S_i dans K par

$$(S_i)_{a_1, a_2} = 0 \qquad \text{si } a_1 \neq a_2$$
$$(S_i)_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1}, \tau}(T_i(\tau));$$

on va voir que les S_i appartiennent à $\mathfrak{A}$; en effet T_i est limite forte d'une suite (g_n) avec $(g_n \in L^1(G_1))$; posons

$$f_n = (g_n)^{e_0} \in L^1(G);$$

d'après les formules (5), (9) et (10) on a

$$\big(\pi(f_n)\big)_{a_1, a_2} = 0 \qquad \text{si } a_1 \neq a_2$$
$$\big(\pi(f)\big)_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1}, \tau}\big((\rho(g_n))(\tau)\big)$$

ce qui prouve que S_i est limite forte des $\pi(f_n)$.

En outre on a évidemment

$$0 \leqq S_i \leqq I \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr} S_i = \operatorname{tr} T_i < +\infty;$$

enfin S_i converge fortement vers I, d'où l'assertion.

Proposition 1. *Soient Z une partie borélienne standard invariante de $\tilde{A}_1$ contenue dans $(\tilde{A}_1)_{\text{nor}}$ et μ une mesure borélienne sur Z, invariante, ergodique et vérifiant la condition* (∗); *on suppose qu'il existe un idéal autoadjoint invariant I_0 de A_1 et, pour tout $\tau \in Z$, un caractère λ_τ associé à τ de façon que*

a) $\lambda(ax) = \lambda_{a^{-1}\tau}(x)$ quels que soient $x \in A_1$, $a \in G_0$, $\tau \in Z$;

b) la fonction $\tau \to \lambda_\tau(xx^*)$ soit finie et μ-intégrable pour tout $x \in I_0$;

c) pour tout $\tau \in Z$ il existe un $x \in I_0$ tel que $\lambda_\tau(xx^*) \neq 0$.

Dans ces conditions on peut affirmer ce qui suit:

(i) *Il existe un espace hilbertien H_0 et pour tout $\tau \in Z$, une représentation ρ_τ de A_1 dans H_0 dont la classe de quasi-équivalence est τ; de plus la formule*

$$\big(\pi(a, b)\varphi\big)(a', \tau) = \rho_{a'^{-1}\tau}(s_{a'^{-1}} b s_a s_{a^{-1}a'})\varphi(a^{-1}a', a^{-1}\tau)$$

définit une représentation π de G dans $L^2(G_0) \otimes L^2_{H_0}(Z, \mu)$, vérifiant la condition (∗), *factorielle et normale relativement à A^{e_0}; son caractère λ dans A est donné par*

$$\lambda(x) = \int \lambda_\tau(x_{e_0})d\mu(\tau) \qquad (x \in A^+).$$

(ii) *La représentation π est de type fini si et seulement si μ est bornée et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_f$.*

(iii) *Définissons de même Z', μ', λ'_τ, ρ'_τ, ρ' et π' avec le même I_0; π et π' sont quasi-équivalentes si et seulement si μ et μ' induisent sur $Z \cap Z'$ des mesures proportionnelles et non nulles.*

DÉMONSTRATION.

(i) Soit χ_τ la forme sesquilinéaire associée à λ_τ (définie sur un certain idéal autoadjoint de A_1); on a $\chi_\tau(x, x) = \lambda_\tau(xx^*)$ pour $x \in I_0$ et les fonctions $\tau \to \chi_\tau(x, y)$ où x et $y \in I_0$ sont μ-intégrables en vertu de l'identité

$$\begin{aligned}4\chi_\tau(x, y) = \chi_\tau(x+y, x+y)&-\chi_\tau(x-y, x-y)\\ +i\chi_\tau(x+iy, x+iy)&-i\chi_\tau(x-iy, x-iy);\end{aligned}$$

on peut alors appliquer la prop. 3 du § 1: la forme

$$\sigma(x, y) = \int \chi_\tau(x, y)d\mu(\tau)$$

est une trace sur I_0; en outre notons N, Λ, H, ρ, $\mathscr{B}$, tr (resp. N_τ, Λ_τ, H_τ, ρ_τ, $\mathscr{B}_\tau$, tr_τ) les éléments (noyau, application canonique, espace hilbertien complété, représentation, algèbre de von Neumann engendrée, trace naturelle) canoniquement associés à σ (resp. χ_τ); alors on peut identifier $\rho(x)$ à $\int^\oplus \rho_\tau(x)d\mu(\tau)$ pour tout $x \in A_1$, $\mathscr{B}$ à $\int^\oplus \mathscr{B}_\tau d\mu(\tau)$ et tr à $\int^\oplus \mathrm{tr}_\tau\, d\mu(\tau)$; et $\int^\oplus \rho_\tau d\mu(\tau)$ est la décomposition canonique de ρ.

D'autre part pour $\tau \in Z$ et $a \in G_0$, l'application linéaire

$$\Lambda_\tau(x) \to \Lambda_{a\tau}(ax) \qquad (x \in I_0)$$

de $\Lambda_\tau(I_0)$ sur $\Lambda_{a\tau}(I_0)$ est isométrique d'après l'hypothèse a) et comme $\Lambda_\tau(I_0)$ est partout dense dans H_τ, elle se prolonge en un isomorphisme $\Omega_{a,\tau}$ de H_τ sur $H_{a\tau}$; on vérifie aisément que $\Omega_{a,\tau}$ transforme $\rho_\tau(z)$ en $\rho_{a\tau}(az)$ pour tout $z \in A_1$, autrement dit l'isomorphisme $\phi_{a,\tau}$ du début du paragraphe n'est autre que l'application

$$T \to \Omega_{a,\tau}T\Omega_{a,\tau}^{-1};$$

il devient alors immédiat que $\phi_{a,\tau}$ transforme tr_τ en $\mathrm{tr}_{a\tau}$; les hypothèses des lemmes 1 et 2 sont ainsi satisfaites.

Enfin la dimension de H_τ est une fonction mesurable de τ, évidemment invariante par G_0, donc égale presque partout à une constante; on peut donc supposer que ρ_τ a lieu dans un espace hilbertien fixé H_0 et les hypothèses du début du paragraphe sont aussi satisfaites.

D'après la formule (3) la représentation π de l'énoncé coïncide avec celle qui a été étudiée au début du paragraphe; elle est factorielle d'après le lemme 1; d'après le lemme 2 on obtient la trace canonique de $\mathfrak{A}$ en posant, pour $S \in \mathfrak{A}^+$

$$\mathrm{Tr}\, S = \mathrm{tr}\, S_{e_0, e_0} = \int \mathrm{tr}_\tau(S_{e_0, e_0}(\tau))d\mu(\tau);$$

pour $x \in L^1(G)$ et, par continuité, pour $x \in A$, on a (formule (9))

$$(\pi(x))_{e_0, e_0} = \rho(x_{e_0}) = \int^{\oplus} \rho_\tau(x_{e_0}) d\mu(\tau)$$

d'où enfin, pour $x \in A^+$

$$\lambda(x) = \mathrm{Tr}\, \pi(x) = \mathrm{tr}\, \rho(x_{e_0}) = \int \lambda_\tau(x_{e_0}) d\mu(\tau).$$

(ii) Supposons μ bornée et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_f$, i.e. τ de type fini presque partout; la fonction $\tau \to ||\lambda_\tau||$ est mesurable et invariante par G_0, donc égale presque partout à une constante k; pour $x \in A^+$

$$|\lambda_\tau(x_{e_0})| \leqq k ||x_{e_0}||$$

$$\lambda(x) = \int \lambda_\tau(x_{e_0}) d\mu(\tau) < +\infty.$$

Supposons maintenant π de type fini; Tr est finie, donc aussi tr, et tr_τ est finie presque partout, i.e. τ est de type fini presque partout; $||\lambda_\tau||$ est égale presque partout à une constante (même raisonnement que ci-dessus) et on a

$$\mathrm{tr}\, 1 = \int \mathrm{tr}_\tau(1) d\mu(\tau) = \int ||\lambda_\tau|| d\mu(\tau) < +\infty$$

ce qui prouve que μ est bornée.

(iii) Supposons que μ et μ' induisent sur $Z \cap Z'$ des mesures proportionnelles et non nulles; alors $Z \cap Z'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ' et on peut remplacer Z et Z' par $Z \cap Z'$; λ'_τ est proportionnel à λ_τ pour tout τ, soit $\lambda'_\tau = \alpha(\tau)\lambda_\tau$ avec $\alpha(\tau) > 0$; pour montrer que α est mesurable, prenons une suite (x_n) partout dense dans I_0 et notons Z_n l'ensemble des $\tau \in Z \cap Z'$ pour lesquels $\lambda_\tau(x_n x_n^*) \neq 0$; on a alors $Z \cap Z' = \cup Z_n$ et sur Z_n, $\alpha(\tau) = \lambda'_\tau(x_n x_n^*)/\lambda_\tau(x_n x_n^*)$ est mesurable; comme de plus $\alpha(\tau)$ est invariante par G_0 (cf. hypothèse a)) elle est égale presque partout à une constante et λ' est proportionnel à λ.

Supposons maintenant π et π' quasi-équivalentes; d'après [13], th. 12.1 (on peut aussi le déduire de la formule (3) ci-dessus), $\pi|G_1$ (resp. $\pi'|G_1$) est équivalente à la somme directe des représentations $a\rho$ (resp. $a\rho'$) avec $a \in G_0$; μ et μ' appartiennent donc aux classes de mesures canoniquement associées à $\pi|G_1$ et $\pi'|G_1$; elles sont équivalentes et $Z \cap Z'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ'; et enfin les mesures induites sur $Z \cap Z'$ sont proportionnelles puisque ergodiques.

Remarque. *Si μ est diffuse, π est de type* II.

Soient en effet $E_1, E_2, \ldots$ une suite de parties μ-mesurables décroissantes de Z telles que les $\mu(E_i)$ soient finies et strictement décroissantes et soient $P_1, P_2, \ldots$ les projecteurs diagonalisables correspondants; définissons des opérateurs Q_i dans K par

$$(Q_i)_{a_1, a_2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_1 \neq a_2 \\ P_i & \text{si} \quad a_1 = a_2; \end{cases}$$

les Q_i sont des projecteurs strictement décroissants; pour montrer qu'ils appartiennent à $\mathfrak{A}$, il suffit de remarquer que l'on a

$$(Q_i)_{a,a}(\tau) = \phi_{a^{-1},\tau}(P_i(\tau))$$

et de reprendre le raisonnement fait à la fin de la démonstration du lemme 2; enfin

$$\text{Tr } Q_i = \text{tr } P_i < +\infty.$$

On étudiera plus loin la réciproque de ce résultat (voir § 5, remarque 4).

Proposition 2. *Toute représentation factorielle de type fini de G vérifiant la condition $(*)$ est quasi-équivalente à une représentation obtenue par la méthode de la proposition 1 à partir d'une mesure borélienne bornée sur $(\tilde{A}_1)_f$, invariante, ergodique et vérifiant la condition $(*)$.*

Soient π une représentation factorielle de type fini vérifiant la condition $(*)$, π_1 sa restriction à G_1, $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$ (resp. $\pi_1(G_1)$), Tr la trace canonique normée sur $\mathfrak{A}$ et tr la trace qui en résulte sur $\mathscr{B}$; on peut écrire la décomposition canonique de π_1:

$$\pi_1(x) = \int_Z^{\oplus} \rho_\tau(x) d\mu(\tau)$$

où Z est une partie borélienne standard invariante de $(\tilde{A}_1)_f$, μ une mesure borélienne sur Z, quasi-invariante et vérifiant la condition $(*)$; et ρ_τ une représentation appartenant à la classe τ agissant dans un espace hilbertien fixe H_0; pour $\tau \in Z$ on notera $\mathscr{B}_\tau$ le facteur engendré par $\rho_\tau(G_1)$ et tr_τ la trace canonique normée sur $\mathscr{B}_\tau$; pour tout $T = \int^{\oplus} T(\tau) d\mu(\tau) \in \mathscr{B}$ on a alors

$$\text{tr } T = \int \text{tr}_\tau(T(\tau)) d\mu(\tau).$$

Pour toute fonction borélienne bornée φ sur Z désignons par T_φ l'opérateur diagonalisable correspondant et posons

$$\mu'(\varphi) = \text{tr } (T_\varphi);$$

μ' est une mesure borélienne normée sur Z, invariante par G_0 puisque, pour $a \in G_0$

$$T_{a\varphi} = \pi(a, e_1) T_\varphi \pi(a, e_1)^{-1}$$

(cf. démonstration du lemme 1, § 3); d'après le raisonnement de [10], ch. II, § 2, prop. 1, (iii), μ' est équivalente à μ; elle est donc ergodique et vérifie la condition (*).

Posons, pour $\tau \in Z$ et $x \in A_1$

$$\lambda_\tau(x) = \mathrm{tr}_\tau(\rho_\tau(x));$$

l'hypothèse a) de la prop. 1 est satisfaite puisque les caractères $x \to \lambda_\tau(ax)$ et $x \to \lambda_{a^{-1}\tau}(x)$ sont associés à la même classe $a^{-1}\tau$, donc proportionnels, et égaux, puisque tous deux de norme 1; quant aux hypothèses b) et c) elles sont évidemment satisfaites en prenant $I_0 = A_1$.

La construction de la prop. 1 donne alors une représentation factorielle de type fini π' de G; de plus, si on note $\mathfrak{A}'$ le facteur engendré par $\pi'(G)$, tout élément S de $\mathfrak{A}'$ est représentable par une matrice (S_{a_1, a_2}) telle que $S_{e_0, e_0} \in \mathscr{B}$ et si on note tr$'$ la trace $\int^\oplus \mathrm{tr}_\tau d\mu'(\tau)$ sur $\mathscr{B}$, la trace canonique normée Tr$'$ sur $\mathfrak{A}'$ est donnée par

$$\mathrm{Tr}'(S) = \mathrm{tr}'(S_{e_0, e_0});$$

ceci entraîne, pour $x \in A$:

$$\mathrm{Tr}'(\pi'(x)) = \mathrm{tr}'((\pi'(x))_{e_0, e_0}) = \mathrm{tr}'(\pi_1(x_{e_0}))$$

(cf. formule (9)); par ailleurs, pour $x \in A'$, le lemme 3 du § 3 montre que

$$\mathrm{Tr}(\pi(x)) = \mathrm{Tr}(\pi((x_{e_0})^{e_0})) = \mathrm{tr}(\pi_1(x_{e_0}));$$

mais les traces tr$'$ et tr sur $\mathscr{B}$, coïncidant sur le centre de $\mathscr{B}$ d'après leur définition même, sont identiques; par suite les caractères normés correspondant à π et π' coïncident sur A', donc partout, et π et π' sont quasi-équivalentes. CQFD

En réunissant les propositions 1 et 2 et en rappelant que $(\tilde{A}_1)_f$ est standard (cf. [10], ch. I, § 2, th. 1) nous obtenons le

Théorème 1. *La formule*

$$\lambda(x) = \int \lambda_\tau(x_{e_0}) d\mu(\tau)$$

où, pour tout $\tau \in (\tilde{A}_1)_f$, λ_f désigne le caractère normé associé à τ, établit une correspondance biunivoque entre

— *les mesures boréliennes sur $(\tilde{A}_1)_f$, normées, invariantes, ergodiques et vérifiant la condition* $(*)$
— *les caractères de type fini, de norme* 1 *sur* A *dont la représentation associée vérifie la condition* $(*)$.

§ 5. Représentations irréductibles normales de A

Soit $\mathfrak{S}$ une trajectoire de G_0 dans $\tilde{A}_1$ *à stabilisateur nul* (i.e. le stabilisateur dans G_0 de tout élément de $\mathfrak{S}$ est réduit à $\{e_0\}$) et soit τ_0 un élément de $\mathfrak{S}$; pour tout $\tau \in \mathfrak{S}$ désignons par a_τ l'élément de G_0 tel que $a_\tau \tau_0 = \tau$.

Soit d'autre part ρ une représentation de G_1 dans un espace hilbertien H et soit π la représentation de G induite par ρ; π a lieu dans un espace K_0 qui a été explicité, ainsi que la formule donnant π, au début du paragraphe 4.

Définissons une mesure μ sur $\tilde{A}_1$ par des masses $\mu(\tau) > 0$ en tous les points τ de $\mathfrak{S}$; on vérifie sans peine qu'on définit un isomorphisme de K_0 sur l'espace $K = L^2_H(\tilde{A}_1, \mu)$ en associant à chaque $F \in K_0$ l'élément φ de K tel que

$$\varphi(\tau) = \mu(\tau)^{-\frac{1}{2}} F(a_\tau^{-1}, e_1) \qquad \text{pour } \tau \in \mathfrak{S}$$

et que l'action de π dans K est donnée par

$$(1) \qquad (\pi(a, b)\varphi)(\tau) = (\mu(a^{-1}\tau)/\mu(\tau))^{\frac{1}{2}} \rho(s_{a_\tau^{-1}} b s_a s^{-1}_{a_\tau^{-1} a}) \varphi(a^{-1}\tau).$$

On en déduit que

$$(2) \qquad (\pi(e_0, b)\varphi(\tau) = \rho(a_\tau^{-1} b)\varphi(\tau)$$

et aussi que, pour $f \in L^1(G)$

$$(3) \quad (\pi(f)\varphi)(\tau) = \sum_a (\mu(a^{-1}\tau)/\mu(\tau))^{\frac{1}{2}} \rho(a_\tau^{-1} f_a) \rho(s_{a_\tau^{-1}} s_a s^{-1}_{a_\tau^{-1} a}) \varphi(a^{-1}\tau)$$

enfin pour $x \in A^{e_0}$, $\pi(x)$ est décomposable et

$$(4) \qquad (\pi(x))(\tau) = \rho(a_\tau^{-1} x_{e_0}).$$

La formule (2) redémontre que $\pi|G_1$ est somme des représentations $b \to \rho(a_\tau^{-1} b)$ (cf. [13], th. 7.1), les quelles sont équivalentes aux $a_\tau \rho$; si on suppose que $\rho \in \tau_0$, on a $a_\tau \rho \in \tau$ pour tout $\tau \in \mathfrak{S}$ et les $a_\tau \rho$ sont deux à deux non quasi-équivalentes, donc (§ 1, prop. 2 (i)) μ-indépendantes; la décomposition obtenue pour $\pi|G_1$ est la décomposition centrale et la classe de mesures canoniquement associée à $\pi|G_1$ est concentrée sur $\mathfrak{S}$. [Inversement si cette classe de mesures est concentrée sur $\mathfrak{S}$ et si G_1 est de type I, on a $\rho \in \tau_0$ d'après [14] th. 8.1; en est-il de même dans le cas général?]

Supposons de nouveau $\rho \in \tau_0$ et notons $\mathfrak{Z}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables pour la décomposition obtenue de $\pi|G_1$; il résulte de [13], n° 6 (mais on peut aussi le vérifier directement à l'aide de (1)) que $\pi(G)' \cap \mathfrak{Z}'$ est isomorphe à $\rho(G_1)'$; mais puisque les représentations $a_\tau \rho$ sont μ-indépendantes, on a $\pi(G') \cap \mathfrak{Z}' = \pi(G)'$ et $\pi(G)'$ est isomorphe à $\rho(G_1)'$. Enfin la classe de quasi-équivalence de π ne dépend que de $\mathfrak{S}$; on a ainsi prouvé la

Proposition 1. *Soient $\mathfrak{S}$ une trajectoire dans $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul, τ_0 un élément de $\mathfrak{S}$, ρ un élément de τ_0; la représentation π de G induite par ρ est donnée par* (1); *la classe de mesures sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée à $\pi|G_1$ est concentrée sur $\mathfrak{S}$; π est factorielle, de même type que ρ et irréductible si et seulement si ρ est irréductible; sa classe de quasi-équivalence ne dépend que de $\mathfrak{S}$.*

Cette classe de quasi-équivalence sera notée $\pi_{\mathfrak{S}}$.

Corollaire. *Si G est de type I, toute élément de $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul est de type I.*

Lemme 1. *Supposons $\mathfrak{S} \subset (\tilde{A}_1)_I$; soient $\tau_0 \in \mathfrak{S}$ et ρ un élément irréductible de τ_0; π est normale si et seulement s'il existe un élément z de A_1 tel que $\rho(z)$ soit compact et non nul et $\tau(z)$ nul pour tout $\tau \in \mathfrak{S}$ distinct de τ_0.*

La condition est suffisante: la formule (4) montre que $(\pi(z^{e_0}))(\tau)$ est compact et non nul pour $\tau = \tau_0$ et nul pour $\tau \neq \tau_0$; par conséquent $\pi(z^{e_0})$ est compact et non nul.

La condition est aussi nécessaire: soit S un opérateur compact non nul dans H et soit T l'opérateur décomposable compact dans K défini par

$$T(\tau) = \begin{cases} S & \text{si} \quad \tau = \tau_0 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

si π est normale, $\pi(A)$ doit contenir T; il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément x de A' tel que

$$||\pi(x) - T|| \leqq \varepsilon;$$

soient $\omega \in H$, $\tau_1 \in \mathfrak{S}$ et $\psi \in K$ défini par

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \omega & \text{si} \quad \tau = \tau_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons d'abord $\tau_1 \neq \tau_0$; on a

$$\begin{aligned}
\big((\pi(x)-T)\psi\big)(\tau_1) &= (a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})(\omega)\\
\mu(\tau_1)\varepsilon^2||\omega||^2 &\geqq ||(\pi(x)-T)\psi||^2\\
&\geqq \mu(\tau_1)||\big((\pi(x)-T)\psi\big)(\tau_1)^2 \qquad (5)\\
&= \mu(\tau_1)||(a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})\omega||^2\\
||(a_\tau\rho)(x_{e_0})\omega|| &\leqq \varepsilon||\omega||.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\tau_1 = \tau_0$; on a

$$\begin{aligned}
\big((\pi(x)-T)\psi\big)(\tau_0) &= \big(\rho(x_{e_0})-S\big)(\omega)\\
\mu(\tau_0)\varepsilon^2||\omega||^2 &\geqq ||(\pi(x)-T)\psi||^2\\
&\geqq \mu(\tau_0)||\big((\pi(x)-T)\psi\big)(\tau_0)||^2 \qquad (6)\\
&= \mu(\tau_0)||\big(\rho(x_{e_0})-S\big)\omega||^2\\
||\big(\rho(x_{e_0})-S\big)\omega|| &\leqq \varepsilon||\omega||.
\end{aligned}$$

Comme ω est quelconque dans H, (5) et (6) entraînent

$$\begin{aligned}
||(a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})|| &\leqq \varepsilon \qquad \text{quel que soit } \tau_1 \neq \tau_0\\
||\rho(x_{e_0})-S|| &\leqq \varepsilon;
\end{aligned}$$

mais à cause de (4) ceci prouve que

$$||\pi\big((x_{e_0})^{e_0}\big)-T|| \leqq \varepsilon$$

et ceci quel que soit ε pour un x convenable; $\pi(A^{e_0})$ étant complète on en déduit que $T \in \pi(A^{e_0})$, i.e. qu'il existe un élément z de A_1 tel que

$$\begin{aligned}
\rho(z) &= S\\
(a_\tau\rho)(z) &= 0 \qquad \text{pour tout } \tau \neq \tau_0.
\end{aligned}$$

DÉFINITION. Une trajectoire $\mathfrak{S}$ dans $\tilde{A}_1$ sera dite *hyper-discrète* si elle est contenue dans $(\tilde{A}_1)_{I,\mathrm{nor}}$ et si pour tout élément τ_0 de $\mathfrak{S}$ il existe $z \in A_1$ possédant la propriété suivante: $\rho(z)$ est compact et non nul pour toute représentation irréductible ρ de la classe τ_0 et nul pour toute représentation ρ d'une classe $\tau \in \mathfrak{S}$ distincte de τ_0.

Il suffit évidemment que ceci soit vrai pour *un* élément τ_0 de $\mathfrak{S}$.

REMARQUE 1. Toute trajectoire hyper-discrète est *discrète* en tant que sous-espace topologique de $\tilde{A}_1$; en effet, avec les notations ci-dessus, l'ensemble des $\tau \in \tilde{A}_1$ qui vérifient

$$||\tau(z)|| > ||\tau_0(z)||/2$$

est un ensemble ouvert dont l'intersection avec $\mathfrak{S}$ est réduite à $\{\tau_0\}$.

Remarque 2. Si G_1 est de type I, toute trajectoire discrète est *hyper-discrète*; d'abord $\tilde{A}_1 = (\tilde{A}_1)_{I,\mathrm{nor}}$; puis, avec les notations ci-dessus, τ_0 n'est pas adhérent à $\mathfrak{C}-\{\tau_0\}$, i.e. si J est l'intersection des noyaux dans A_1 des éléments de $\mathfrak{C}-\{\tau_0\}$, on a noyau $\tau_0 \not\supset J$; soit ρ une représentation irréductible de la classe τ_0; l'algèbre $\rho(J)$ est non nulle, donc irréductible, et comme J est de type I, elle contient les opérateurs compacts.

Remarque 3. Si $\mathfrak{C}$ est hyperdiscrète, la trajectoire correspondante dans $A_1^{\mathfrak{i}}$ est discrète.

Le lemme 1 s'énonce maintenant comme suit:

Proposition 2. *La classe de quasi-équivalence $\pi_{\mathfrak{C}}$ de représentations factorielles de type I associée à une trajectoire $\mathfrak{C}$ dans $(\tilde{A}_1)_I$ à stabilisateur nul est normale si et seulement si $\mathfrak{C}$ est hyper-discrète.*

Corollaire 1. *Si G est de type I, tout élément de $(\tilde{A}_1)_I$ à stabilisateur nul est normal.*

Disons que G_0 *agit simplement* dans $(\tilde{A}_1)_I$ si tout élément de $(\tilde{A}_1)_I$, distinct de la classe de la représentation triviale, est à stabilisateur nul; on a alors le

Corollaire 2. *Si G est de type I et si G_0 agit simplement dans $(\tilde{A}_1)_I$, alors G_1 est de type I.*

Théorème 1. *L'application $\mathfrak{C} \to \pi_{\mathfrak{C}}$ définie à la proposition* 1 *établit une correspondance biunivoque entre*
— *l'ensemble des trajectoires dans $\tilde{A}_1$ hyper-discrètes et à stabilisateur nul*
— *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréducibles normales de A vérifiant la condition* (*).

Si, en premier lieu, $\mathfrak{C}$ est hyper-discrète et à stabilisateur nul, $\pi_{\mathfrak{C}}$ est de type I (prop. 1) et par conséquent contient une classe d'équivalence et une seule de représentations irréductibles; celles-ci sont normales (prop. 2) et vérifient la condition (*) en vertu de la prop. 1. En outre l'application $\mathfrak{C} \to \pi_{\mathfrak{C}}$ est évidemment injective.

Réciproquement soit π une représentation irréductible normale de A vérifiant la condition (*); soient I le noyau de π dans A, C la classe de mesures (quasi-invariantes et ergodiques) sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée à $\pi|G_1$ et S le support de C (cf. § 1, lemme 1). On va montrer qu'il existe une trajectoire $\mathfrak{C}$ partout dense dans S et à stabilisateur nul.

Soit $(O_n)_{n=1,2\ldots}$ une base d'ouverts de S; $G_0 \cdot O_n$ est de complémentaire négligeable pour tout n, donc aussi $\bigcap_n G_0 \cdot O_n$; pour tout $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ la trajectoire de τ rencontre chaque O_n, i.e. est partout dense dans S; supposons que tout $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ ait un stabilisateur non nul; pour tout $a \in G_0 - \{e_0\}$ soit E_a l'ensemble des $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ dont le stabilisateur contient a; les E_a sont boréliens et ont pour réunion $\bigcap_n G_0 \cdot O_n$; il existe donc un E_a non négligeable; mais a induit l'identité sur E_a, ce qui contredit le fait que C vérifie la condition $(*)$ et démontre l'assertion.

Soient π' un élément de $\pi_{\mathfrak{C}}$ et I' son noyau dans A; les représentations de A_1 correspondant à π et π' ont un même noyau-ensemble des x tels que $\mathscr{F}x$ soit nulle sur S, autrement dit (cf. début du n° 1 du § 3) $\Pi(I) = \Pi(I')$; d'après le lemme 2 du § 3, on a donc $I = I'$.

Montrons que π et π' sont quasi-équivalentes: π' peut être décomposée en une intégrale de représentations irréductibles qui ont même noyau que π' (cf. [2], rem. suivant le cor. 3 du th. 1), donc que π et par suite lui sont équivalentes; d'où notre assertion. Finalement $\pi_{\mathfrak{C}}$ est de type I et normale et $\mathfrak{C}$ est hyper-discrète.

Corollaire. *Supposons que G_0 agisse simplement dans $\tilde{A}_1$; si la réunion des trajectoires non hyper-discrètes est partout dense dans $\tilde{A}_1$, A est NGCR.*

Il suffit ([8], th. 1) de prouver que si $x \in A$, $x \neq 0$, il existe une représentation irréductible non normale de A, non nulle en x; or $(xx^*)_{e_0}$ est non nul et $\mathscr{F}((xx^*)_{e_0})$ est > 0 sur un ouvert non vide U de $\tilde{A}_1$; il existe une trajectoire $\mathfrak{C}$ non hyperdiscrète qui rencontre U; si alors $\mathfrak{C}$ est contenue dans $(\tilde{A}_1)_I$, $\pi_{\mathfrak{C}}$ est de type I, non normale et non nulle en x; si au contraire $\mathfrak{C}$ est contenue dans $\tilde{A}_1 - (\tilde{A}_1)_I$; on peut décomposer $\pi_{\mathfrak{C}}$ en une intégrale de représentations irréductibles de même noyau, donc toutes non normales; et l'une au moins est non nulle en x, puisque $\pi_{\mathfrak{C}}$ est non nulle en x. CQFD

Désignons par ω l'élément trivial de $\tilde{A}_1$.

Théorème 2. (i) *Supposons que toute mesure quasi-invariante ergodique sur $\tilde{A}_1$ non concentrée en ω vérifie la condition $(*)$ et que toute trajectoire soit hyper-discrète; alors G est de type I si en outre G_0 est de type I.*

(ii) *Supposons que G_0 agisse simplement dans $\tilde{A}_1$ et que G soit de type I; alors toute trajectoire dans $\tilde{A}_1$ est hyper-discrète.*

(i) D'après un raisonnement fait au th. 1, toute représentation irréductible π de G non triviale sur G_1 a même noyau dans A qu'une représentation irréductible de la forme $\pi_{\mathfrak{C}}$, laquelle est

nécessairement normale; donc π est équivalente à $\pi_{\mathfrak{S}}$ et normale.
(ii) résulte de la prop. 2.

Remarque 4. Reprenons les notations de la prop. 1 du § 4: *π est de type I si et seulement si μ est atomique et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_I$.*
Remarquons d'abord que si μ est atomique elle est nécessairement concentrée sur une trajectoire $\mathfrak{S}$ à stabilisateur nul; ρ est alors somme directe de représentations ρ_τ avec $\rho_\tau \in \tau$ et $\tau \in \mathfrak{S}$; π est somme directe des représentations π_τ induites par les ρ_τ, et comme les π_τ sont deux à deux quasi-équivalentes, on a $\pi \in \pi_{\mathfrak{S}}$ et π est de même type que les éléments de $\mathfrak{S}$.
L'assertion résulte alors trivialement de la remarque du § 4.

§ 6. Idéaux primitifs de A

A toute trajectoire T de G_0 dans A_1^j (cf. début du § 3) correspondent un certain nombre de trajectoires dans $\tilde{A}_1$, que nous dirons *associées à T*.

Proposition 1. *Soit J l'intersection des éléments d'une trajectoire T de G_0 dans A_1^j telle que l'une au moins des trajectoires dans $\tilde{A}_1$ associées soit à stabilisateur nul; $\Pi'(J)$ est un idéal primitif de A et l'une des représentations factorielles de noyau $\Pi'(J)$ vérifie la condition* $(*)$; *tout idéal primitif vérifiant cette condition s'obtient de cette façon et d'une manière unique.*

Soit T telle que l'une, soit $\mathfrak{S}$, des trajectoires associées soit à stabilisateur nul; la classe de représentations $\pi_{\mathfrak{S}}$ construite à la prop. 1 du § 5 est factorielle et vérifie la condition $(*)$; si I est son noyau dans A, on a $I = \Pi'\Pi(I)$ (lemme 2 du § 3); mais on a évidemment $\Pi(I) = J$, d'où notre assertion. L'application $J \to \Pi'(J)$ est injective puisque $J = \Pi\Pi'(J)$.
Soit enfin I un idéal primitif de A tel que l'une, soit π, des représentations factorielles de noyau I vérifie la condition $(*)$; d'après un raisonnement fait au th. 1 du § 5, I est aussi le noyau d'une classe $\pi_{\mathfrak{S}}$ construite à partir d'une trajectoire $\mathfrak{S}$ dans $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul; si T est la trajectoire correspondante dans A_1^j et J l'intersection des éléments de T, on a donc $I = \Pi'(J)$.
CQFD

Désignons par Q le sous-ensemble de A_1^j formé des J tels qu'au moins une classe de représentations factorielles de noyau J soit à stabilisateur nul, par W le sous-ensemble de A^j formé des I tels qu'au moins une représentation factorielle de noyau I vérifie la condition ($*$); considérons sur Q la relation d'équivalence R définie par

$$R(J, J') \Leftrightarrow \bigcap_a aJ = \bigcap_a aJ';$$

la proposition 1 établit une bijection Λ de Q/R sur W, que l'on peut écrire

$$\Lambda(\gamma) = \Pi'(\bigcap_{J \in \gamma} J);$$

si, pour tout $\gamma \in Q/R$, on pose K_γ = intersection des éléments de γ, on a aussi $\Lambda(\gamma) = \Pi'(K_\gamma)$.

Proposition 2. *La bijection Λ est un homéomorphisme si on munit Q/R de la topologie quotient de la topologie de Jacobson sur A_1^i et W de la topologie de Jacobson sur A^i.*

Soit Γ une partie de Q/R; posons $\mathscr{G} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ et aussi
$\mathscr{J}$ = intersection des éléments de $\mathscr{G} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$
$\mathscr{I}$ = intersection des éléments $\Lambda(\Gamma) = \Pi'(\mathscr{J})$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes:
— Γ est fermé dans Q/R
— $\mathscr{G}$ est fermé dans Q
— pour $J \in Q$, $J \supset \mathscr{J} \Rightarrow J \in \mathscr{G}$
— pour $J \in Q$, $\bigcap_a aJ \supset \mathscr{J} \Rightarrow \bigcap_a aJ = K_\gamma$ pour un $\gamma \in \Gamma$
— pour $J \in Q$, $\Pi'(\bigcap_a aJ) \supset \Pi'(\mathscr{J}) \Rightarrow \Pi'(\bigcap_a aJ) \in \Lambda(\Gamma)$
— pour $I \in W$, $I \supset \mathscr{I} \Rightarrow I \in \Lambda(\Gamma)$
— $\Lambda(\Gamma)$ est fermé dans W.

§ 7. Étude d'un exemple

Soit G le groupe dont les éléments sont les triplets (a, b, c) où a est un nombre rationnel dyadique, b un entier, c un réel, avec la loi de groupe

$$(a, b, c)(a', b', c') = \big(a+a', b+b', c+c'+\tfrac{1}{2}(ab'-a'b)\big);$$

l'élément neutre est $(0, 0, 0)$ et on a

$$(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c)$$
$$(a', b', c')(a, b, c)(a', b', c')^{-1} = (a, b, c+a'b-b'a).$$

On va étudier G en le considérant d'abord (n° 1) comme produit semi-direct du sous-groupe G_0 formé des $(a, 0, 0)$ et du sous-groupe distingué G_1 formé des $(0, b, c)$; puis (n° 3) comme admettant un sous-groupe distingué ouvert Γ (non de type I) formé des (a, b, c) où a est entier.

1. *Étude de* G (première méthode).

Les sous-groupes G_0 et G_1 sont abéliens; en notant a un élément quelconque de G_0 et (b, c) un élément quelconque de G_1, l'action de G_0 dans G_1 est donnée par

$$a \cdot (b, c) = (b, c+ab);$$

G_0 conserve la mesure de Haar de G_1 et G est unimodulaire. On identifiera $\hat{G}_1$ à $T \times R$ en posant

$$\langle(\sigma, \tau), (b, c)\rangle = \exp\big(2\pi i(\sigma b+\tau c)\big);$$

on a alors l'action de G_0 dans $\hat{G}_1$:

$$a \cdot (\sigma, \tau) = (\sigma - a\tau, \tau);$$

on voit que les trajectoires sont de trois sortes:
— dans le parallèle $T \times \{0\}$, les trajectoires sont les points;
— dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ rationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur non nul;
— dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur nul.

On constate que les trajectoires discrètes sont à un élément et d'autre part que les mesures invariantes ergodiques diffuses vérifiant la condition $(*)$ sont, à un facteur constant près, les mesures de Lebesgue sur les parallèles $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel; l'étude de [10] fournit donc

a) des représentations $\pi_{\sigma,\theta}$ de dimension 1 de G, déterminées par des couples (σ, θ) où $\sigma \in T$ et $\theta \in \hat{G}_0$:

$$\pi_{\sigma,\theta}(a, b, c) = \langle\theta, a\rangle \exp(2\pi i\sigma b);$$

b) des représentations factorielles π_τ de type II_1 avec τ irrationnel; le caractère correspondant est

$$\psi_\tau(a, b, c) = \begin{cases} \exp(2\pi i\tau c) & \text{si } a = b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intersection des noyaux dans A (C^*-algèbre de G) des représentations π_τ est nulle et par suite A est $NGCR$.

2. *Étude de* Γ.

Le groupe Γ est produit semi-direct du sous-groupe Γ_0 des $(a, 0, 0)$ où a est entier et du sous-groupe distingué $\Gamma_1 = G_1$ des $(0, b, c)$; il est unimodulaire.

Les trajectoires de Γ_0 dans $\hat{\Gamma}_1$ sont de deux sortes:

— dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ rationnel (on écrira toujours $\tau = \tau_1/\tau_2$ où τ_1 et τ_2 sont des entiers premiers entre eux et où $\tau_2 = 1$ si $\tau = 0$), les trajectoires ont τ_2 éléments de la forme

$$(\sigma, \tau), (\sigma+1/\tau_2, \tau), \ldots, (\sigma+(\tau_2-1)/\tau_2, \tau)$$

et leur stabilisateur dans Γ_0 est $\tau_2 \cdot Z$.

— dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur nul.

Toute mesure ergodique sur $\hat{\Gamma}_1$ est concentrée sur un parallèle, et on voit facilement que toute mesure ergodique quasi-invariante à support infini vérifie la condition $(*)$; comme la réunion des trajectoires non discrètes est partout dense dans $\hat{\Gamma}_1$, la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ de Γ est $NGCR$.

La méthode de [10] permet de décrire entièrement $\tilde{\Gamma}_f$ (avec la précision que $\tilde{\Gamma}_{I,\mathrm{nor}}$ est réduit à $\Gamma_{I,f}$):

a) représentations irréductibles de dimensions finies: elles sont déterminées par la donnée d'un nombre rationnel $\tau = \tau_1/\tau_2$, d'une trajectoire contenue dans le parallèle $T \times \{\tau\}$, i.e. d'un nombre réel modulo $1/\tau_2$, soit θ_2, et d'un caractère de $\tau_2 \cdot Z$, i.e. d'un autre nombre réel modulo $1/\tau_2$, soit θ_1; soit $\rho_{\tau,\theta_1,\theta_2}$ la représentation en question; son caractère est donné par

$$\chi_{\tau,\theta_1,\theta_2}(a, b, c) = \begin{cases} \exp 2\pi i(\theta_1 a+\theta_2 b+\tau c) & \text{si } a \text{ et } b \in \tau_2 \cdot Z \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) représentations factorielles de type II_1: elles sont de la forme ρ_τ avec τ irrationnel, et ont pour caractères

$$\chi_\tau(a, b, c) = \begin{cases} \exp (2\pi i\tau c) & \text{si } a = b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Désignons par X_{τ,θ_1} (τ rationnel, $\theta_1 \in R/(1/\tau_2) \cdot Z$) l'ensemble des représentations $\rho_{\tau,\theta_1,\theta_2}$, θ_2 parcourant $R/(1/\tau_2) \cdot Z$; comme la structure borélienne de Mackey de $\tilde{\Gamma}_f$ est définie par les caractères (cf. [10], ch. I, § 2, th. 1) on voit que X_{τ,θ_1} est standard, donc borélien dans $\tilde{\Gamma}_f$; d'autre part les éléments de X_{τ,θ_1} étant de même dimension finie, la topologie de X_{τ,θ_1} est définie par les caractères (cf. [6], n° 10, 11) et on voit que X_{τ,θ_1} est homéomorphe à $R/(1/\tau_2) \cdot Z$.

3. *Étude de G* (deuxième méthode).

Le quotient G/Γ est isomorphe au groupe des rationnels dyadiques modulo 1; pour tout élément α de G/Γ on notera $\bar{\alpha}$ le rationnel dyadique de la classe α défini par $0 \leqq \bar{\alpha} < 1$ et s_α l'élément $(\bar{\alpha}, 0, 0)$ de G. Pour $(a, b, c) \in \Gamma$ et $\alpha \in G/\Gamma$ on a alors

$$\alpha \cdot (a, b, c) = (a, b, c+\bar{\alpha}b).$$

La fonction 1 sur Γ (resp. G/Γ) est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts, et les hypothèses générales du § 2 sont satisfaites.

En utilisant les caractères des éléments de $\tilde{\Gamma}_f$ on voit que G/Γ agit trivialement sur Γ_{II_1} et de la façon suivante sur $\tilde{\Gamma}_{I,f}$:

$$\alpha \cdot \rho_{\tau,\theta_1,\theta_2} = \rho_{\tau,\theta_1,\theta_2 - \bar{\alpha}\tau};$$

Dans chaque ensemble X_{0,θ_1}, les trajectoires sont les points et ont pour stabilisateur G/Γ; dans chaque ensemble X_{τ,θ_1} où τ est un rationnel non nul, les trajectoires sont partout denses, donc non discrètes; si τ_1 est impair, leur stabilisateur est nul; si τ_1 est de la forme $\tau_1'\tau_1''$ où τ_1' est une puissance de 2 et τ_1'' impair, leur stabilisateur est l'ensemble des k/τ_1', k entier. On voit qu'il n'existe aucune trajectoire hyperdiscrète à stabilisateur nul; l'étude faite au § 5 ne fournit donc aucune représentation irréductible normale de G. Par contre l'étude du § 4 fournit des représentations factorielles de type II_1; celles qui vérifient la condition $(*)$ sont de la forme π_{τ,θ_1} où τ est un nombre rationnel à numérateur impair et θ_1 un nombre réel modulo $1/\tau_2$; les caractères correspondants sont

$$\psi_{\tau,\theta_1}(a, b, c) = \begin{cases} \exp\left(2\pi i(\theta_1 a+\tau c)\right) & \text{si } a \in \tau_2 \cdot Z \text{ et } b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Addendum

La proposition 2 (ii) du § 1 est un cas particulier d'un résultat récent de E. G. Effros (A Decomposition Theory for Representations of C^*-algebras, th. 4.3).

BIBLIOGRAPHIE

J. Dixmier,

[1] *Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien*, Cahiers Scientifiques, fasc. 25, Paris, Gauthier-Villars, (1957).

J. Dixmier,

[2] *Sur les C*-algèbres*, Bull. Soc. Math. France, t. 88, (1960), p. 95—112.

J. Dixmier,

[3] *Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive* (à paraître).

J. Dixmier,

[4] *Sur le revêtement universel d'n groupe de Lie de type I*, CR. Acad. Sc., t. 252, (1961), p. 2805—2806.

J. A. Ernest,

[5] *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups* (à paraître).

J. M. G. Fell,

[6] *The dual spaces of C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., t. 94, (1960), p. 365—403.

J. M. G. Fell,

[7] *C*-algebras with smooth duals*, Illinois J. Math., t. 4, (1960), p. 221—230.

J. Glimm,

[8] *Type I C*-algebras*, Ann. Math., t. 73, (1961), p. 572—612.

A. Guichardet,

[9] *Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes*, Bull. Soc. Math. France, t. 89, (1961), p. 77—101.

A. Guichardet,

[10] *Caractères des algèbres de Banach involutives* à paraître dans Ann. Inst. Fourier).

A. Guichardet,

[11] *Sur la réciproque d'un théorème de G. W. Mackey*, CR. Acad. Sc., Sc., t. 254, (1962), p. 2280—2282 et p. 3484.

G. W. Mackey,

[12] *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 35, (1949), p. 537—545.

G. W. Mackey,

[13] *Induced representations of locally compact groups I*, Ann. Math., t. 55, (1952), p. 101—139.

G. W. Mackey,

[14] *Unitary representations of group extensions I*, Acta Math., t. 99, (1958), p. 265—311.

G. W. Mackey,

[15] *Borel structures in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc., t. 85, (1957), p. 134—165.

M. A. Naĭmark,

[16] *Sur les représentations isomorphes des algèbres et groupes*, Doklady Acad. Nauk. SSSR., t. 137, (1961), p. 278—281. (en russe).

O. Takenouchi,

[17] *Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact*, Math. J. Okayama Univ., t. 4. (1955), p. 143—173.

(Oblatum 24-10-62).