iii) $\Longrightarrow$ iv) Siano $a,b \in S$ poiché $ab \mathscr{D} ba$, per l'ipotesi $\mathscr{D} = \mathscr{R}$ e per il Teorema 1.1

$$ba = \widehat{ba}\, ba = \widehat{ab}\, \widehat{ba}\, ba =$$
$$= ab\,(ab)^{-1}\, ba \in aS$$

cioé $Sa \subseteq aS$; Analogamente $aS \subseteq Sa$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Siano $e,f \in E$, $ef \mathscr{D} fe$ quindi esiste $x \in S$ tale che $efS = xS$, $Sx = Sfe$. Pertanto, per l'ipotesi $efS = xS = Sx = Sfe = feS$ $Sef = efS = feS = Sfe$.

Allora per il Teorema 1.1

$$ef = ef \cdot fe = fe.$$

3. STRUTTURA DELGI ORTOGRUPPI. -

Sia S un ortogruppo; risulterà dal Teorema 3.1 seguente, che S è un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha (\alpha \in Y)$ e quindi il prodotto di un elemento x di S_α e di un elemento y di S_β è in $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ prodotto di α e β in Y). Ma tale teorema non chiarisce il modo in cui elementi di differenti S_α si possono moltiplicare tra loro.

Riprendendo un teorema di struttura per i semigruppi completamente regolari di Lallement [/7/, 1967],M. Petrich ottiene[/10/, 1974] un teorema di struttura "fine" per gli ortogruppi, chiarendo il modo in cui si moltiplicano gli elementi dei differenti S_α, tramite sistemi di applicazioni soddisfacenti certe proprietà; tuttavia M. Petrich non dà un procedimento effettivo di costruzione di tali sistemi.

La dimostrazione del teorema di M. Petrich si avrà ora (ottenendo una semplificazione della trattazione) utilizzando un risultato di Clifford [/2/, 1972] sugli ortogruppi a "due componenti".

Si vuole affrontare lo studio della struttura degli ortogruppi mediante una particolare decomposizione.

Sia S un semigruppo, Y un semireticolo e Z un omomorfismo da S in Y; allora ognuno dei sottoinsiemi αZ^{-1} $(\alpha \epsilon Z)$ è un sottosemigruppo di S. Denotato αZ^{-1} con S_α, S è unione disgiunta dei sottosemigruppi $S_\alpha (\alpha \epsilon Y)$ ed è tale che

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$$

dove $\alpha\beta$ è il prodotto di α e β in Y.

Se ogni S_α con $\alpha \epsilon Y$ è di "tipo A" allora si dice che S è un <u>semireticolo di semigruppi di "tipo A"</u>.

<u>TEOREMA 3.1.</u> - [Yamada M., Petrich,M., Preston G.B.]

Un semigruppo S è un ortogruppo sse è un semireticolo di gruppo rettangolare.

<u>Dim.</u> -

Sia S un ortogruppo; per il Teorema 4.5 di /4/, S è un semireticolo Y di semigruppi completamente semplici $S_\alpha (\alpha \epsilon Y)$. Poiché l'insieme E degli idempotenti di S è un sottosemigruppo di S, l'insieme $E_\alpha (\alpha \epsilon Y)$ degli idempotenti di S è un sottosemigruppo di S_α, pertanto S_α è un gruppo rettangolare.

Viceversa, sia S un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha (\alpha \epsilon Y)$; è chiaro che S è unione di gruppi, rimane da provare che il prodotto di due idempotenti è un idempotente. Siano e,f idempotenti di S, $e \epsilon S_\alpha$, $f \epsilon S_\beta$ per certi $\alpha,\beta \epsilon Y$; allora posto $a = ef$, $b = fe$, entrambi sono in $S_{\alpha\beta}$ ed

$$b^2 = fefe = fe(ef)fe = bab.$$

Usando il prodotto su un gruppo rettangolare, $b^2 = bab$ implica che $a = ef$ è idempotente.

Può sembrare che il Teorema 3.1 non costituisca un progresso nello studio della struttura degli ortogruppi, in quanto i gruppi rettagolari, anche se di struttura nota, sono più complicati dei gruppi. Ma un reale progresso esiste ed è nella relazione $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$. Infatti, era già noto che

$$S = \bigcup_{e\in E} H_e$$

dove E è l'insieme degli idempotenti di S e ogni sottogruppo H_e è la $\mathcal{H}$-classe contenente e, ma non si aveva idea di dove fossero i prodotti di elementi $x \in H_e$ ed $y \in H_f$ o se il prodotto di H_e ed H_f fossero contenuto in un singolo H_g.

Tuttavia, anche considerando la struttura dei semireticoli come nota, non è ancora chiara la struttura "fine" di S, poiché sebbene sia $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, il modo in cui elementi di differenti S_α possono moltiplicarsi è estremamente complicato. Si darà in questo capitolo un risultato dovuto a Petrich che migliora il Teorema 3.1.

DEFINIZIONE 3. 1. -

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a un elemento di S tale che $aT \subseteq T$. Si definisce T-traslazione interna sinistra di a, l'applicazione λ_a da T in T tale che

$$\lambda_a x = ax$$

per ogni $x \in T$.

DEFINIZIONE 3.2. -

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a un elemento di S tale che $Ta \subseteq T$. Si definisce T-traslazione interna destra di a, l'applicazione ρ_a da T in T tale che

$$x\rho_a = xa$$

ogni $x \in T$.

LEMMA 3.2.-

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a, a' due elementi di S tali che $aT \subseteq T$, $a'T \subseteq T$, $Ta \subseteq T$, $Ta' \subseteq T$.

Allora

i) λ_a, ρ_a sono associate

ii) $\lambda_{aa'} = \lambda_a \lambda_{a'}$, $\rho_{aa'} = \rho_a \rho_{a'}$

Dim. -

Si prova la i). Per ogni x,y in T

$$x(\lambda_a y) = x(ay) = xay = (x\rho_a)y$$

Si prova la ii). Per ogni $x \in S$

$$\lambda_{aa'}x = aa'x = a(a'x) = \lambda_a(\lambda_{a'}x)$$

$$x\rho_{aa'} = xaa' = (xa)a' = (x\rho_a)\rho_{a'}$$

Sia X un insieme, il semigruppo di tutte le trasformazioni di X riguardate come destre |risp. sinistre| si denota con $\widetilde{\mathscr{T}}(X)$ |risp. $\mathscr{T}(X)$|.

Indichiamo inoltre con π il semireticolo costituito da due soli elementi α,β tali che $\alpha > \beta$ cioè $\alpha\beta = \beta\alpha = \beta$ ed $\alpha \neq \beta$.

DEFINIZIONE 3.3. - Un semigruppo S è un ortogruppo a due componenti sse è un semireticolo π di gruppi rettangolari.

La struttura di un ortogruppo a due componenti è descritta dal seguente lemma.

LEMMA 3.3. -

Siano $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ ed $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$ gruppi rettangolari disgiunti. Si consideri

(A.1) un omomorfismo $t_{\alpha,\beta}$ da S_α in $\widetilde{\mathscr{T}}(I_\beta)$

(A.2) un omomorfismo $\tau_{\alpha,\beta}$ da S_α in $\mathscr{T}(\Lambda_\beta)$

(A.3) un omomorfismo $Z_{\alpha,\beta}$ da G_α in G_β

Se $A = (a;j,\mu) \in S_\alpha$ ed $B = (b;i,\lambda) \in S_\beta$, si definiscono i prodotti

(1) $\qquad AB = (aZ_{\alpha,\beta})b;\ (t^{A}_{\alpha,\beta})i,\lambda)$

(2) $\qquad BA = (b(aZ_{\alpha,\beta});\ i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta}))$.

Con il prodotto definito e mantenendo i prodotti in S_α e S_β, $S_\beta \cup S_\alpha$ è un ortogruppo a due componenti.

Viceversa, ogni ortogruppo a due componenti è isomorfo ad una tale costruzione.

Dim.-

Siano $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ e $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$ due gruppi rettangolari disgiunti, e siano $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$ e $Z_{\alpha,\beta}$ le applicazioni delle ipotesi del teorema. Il prodotto definito su $S = S_\alpha \cup S_\beta$, come nel teorema, è associativo. L'associatività si ottiene dalla verifica delle uguaglianze

$(AB)C = A(BC) \quad , \quad A(CB) = (AC)B \quad , \quad (BA)C = B(AC)$

per ogni $A,C \in S_\alpha$ e $B \in S_\beta$ e, per ogni $A \in S_\alpha$ e $C,B \in S_\beta$.

Verifichiamo, ora che $(AC)\ B = A(CB)$ con $A,C \in S_\alpha$ ed $B \in S_\beta$.

Sia $A = (a;i,\delta)$, $C = (c;j,\varepsilon)$, $B = (b,i,\mu)$:

$(AC)B = (\ (ac\ Z_{\alpha\beta})b\ ;\ (t^{(AC)}_{\alpha,\beta}\ )i,\mu)$ (per la (1));

$A(CB) = A((c\ Z_{\alpha,\beta})b\ ;\ (t^{C}_{\alpha,\beta})i,\mu)$ (per la (1)) =

$= (\ (a\ Z_{\alpha,\beta})(c\ Z_{\alpha,\beta})b;\ t^{A}_{\alpha,\beta}(\ (t^{C}_{\alpha,\beta})i,\mu)$ (per la (1)) =

$= (\ (ac\ Z_{\alpha,\beta})b;\ (t^{AC}_{\alpha,\beta})i,\mu)$

poiché $Z_{\alpha,\beta}$ e $t_{\alpha,\beta}$ sono omomorfismi.

Le altre uguaglianze si dimostrano in modo analogo.

Per come è definito il prodotto in S è evidente che S_α e S_β

sono sottosemigruppi di S, inoltre $S = S_\alpha \cup S_\beta$, pertanto S è completamente regolare. Per provare che S è un ortogruppo, poiché S_α e S_β sono gruppi rettangolari e quindi ortogruppi, è sufficiente provare che i prodotti AB e BA sono idempotenti, se A è un idempotente di S_α e B è un idempotente di S_β

Sia A un idempotente di S_α, sia B un idempotente di S_β:

$$A = (e_\alpha; i,\lambda) \qquad \text{con} \quad e_\alpha \text{ unità di } G_\alpha$$

$$B = (e_\beta; j,\mu) \qquad \text{con} \quad e_\beta \text{ unità di } G_\beta$$

$$AB = ((e_\alpha Z_{\alpha,\beta})e_\beta \ ; (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) = (e_\beta; (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu)$$

$$BA = (e_\beta(e_\alpha Z_{\alpha,\beta}); j ,\lambda(B\tau_{\alpha,\beta})) = e_\beta;j,\lambda(B\tau_{\alpha,\beta}) .$$

Pertanto, poiché AB e BA sono idempotenti, S è un ortogruppo.

Viceversa, sia $S = S_\alpha \cup S_\beta$ $(\alpha > \beta)$ un ortogruppo a due componenti; si indica ancora con S il semigruppo isomorfo al precedente con S_α della forma $G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ e S_β della forma $G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$.

Si procede ora alla costruzione delle applicazioni $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$, $Z_{\alpha,\beta}$. Sia $A \in S_\alpha$, si consideri le S_β-traslazioni interne sinistra e destra di A, λ_A e ρ_A, rispettivamente. Si osservi che

$$\lambda_A(b;i,\mu) = \lambda_A((b;i,\mu)\ (1;i,\mu) =$$

$$= (\lambda_A(b;i,\mu))\ (1;i,\mu) = (c;k,\mu)$$

(con $c \in G_\beta$, $k \in I_\beta$, opportuni), con $b \in G_\beta$, $i \in I_\beta$ e $\mu \in \Lambda_\beta$ ed 1 l'unità di G_β. In altre parole λ_A non cambia l'indice appartenente a I_β.

Si suppone che

$$\lambda_A(1;i,\mu) = (b;j,\mu) \ \text{ e } \ \lambda_A(1;i,\partial) = (c;k,\partial)$$

ove l'unità di G_β , $i,j,k \in I_\beta$, $\mu, \partial \in \Lambda_\beta$; allora

$$(b;j,\partial) = (b;j,\mu)(1;j,\partial) = (\lambda_A(1;i,\mu))\ (1;j,\partial) =$$

$$= \lambda_A((1;i,\mu)(1;j,\partial)) = \lambda_A(1;i,\partial) = (c;k,\partial)$$

e quindi $j = k$ e $b = c$ cioé i valori dei due primi indici di $\lambda_A(1;i,\mu)$ dipendono solo da i. Si indichi con θ_A e $t^A_{\alpha,\beta}$ le applicazioni da I_β in G_β e da I_β in I_β , rispettivamente, tali che

$$\lambda_A(1;i,\mu) = (\theta_A i;\ (t^A_{\alpha,\beta})i,\mu) \qquad (3)$$

Analogamente esistono ψ_A e $A\tau_{\alpha,\beta}$ applicazioni da Λ_β in G_β e da Λ_β in Λ_β , rispettivamente, tale che

$$(1;i,\mu)\rho_A = (\mu\psi_A;i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta})) \qquad (4)$$

Poiché si ha

$$(b;j,\mu)(\lambda_A(1;i,\partial)) = (b;j,\mu)(\theta_A i\ ;(t^A_{\alpha,\beta})i,\partial) =$$

$$=(b(\theta_A i);j,\partial) \qquad (5)$$

$$((b;j,\partial)\rho_A)(1;i,\partial) = (b;j,\mu)((1,j,\mu)\rho_A)(1;i,\partial) =$$

$$= (b;j,\mu)(\mu\psi_A;i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta}))(1;i,\partial) =$$

$$= (b(\mu\psi_A);j,\partial) \qquad (6)$$

per ogni $b \in G_\beta$, $i,j \in I_\beta$ ed $\mu,\partial\in\Lambda_\beta$, e poiché λ_A e ρ_A sono associate [cfr. Lemma 3.2], segue da (5) e (6) che

$$b(\mu\psi_A) = b(\theta_A\ i)$$

per ogni $b \in G_\beta$, $i \in I_\beta$ e $\mu \in \Lambda_\beta$, pertanto

$$\mu\ \psi_A = \theta_A i$$

per ogni $\mu \in \Lambda_\beta$, $i \in I_\beta$.

Si indichi con $A\xi_{\alpha,\beta}$ l'elemento di G_β uguale a $\theta_A i$, per ogni $i \in I_\beta$.

Si è provata allora l'esistenza di tre applicazioni:

$$\xi_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to A\,\xi_{\alpha,\beta} \in G_\beta$$

$$t_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to t^A_{\alpha,\beta} \in \widetilde{\mathscr{T}}(I_\beta)$$

$$\tau_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to A\tau_{\alpha,\beta} \in \mathscr{T}(\Lambda_\beta)$$

Si verifica facilmente che esse sono omomorfismi, ricordando che $\lambda_{AA'} = \lambda_A \lambda_{A'}$ ed $\rho_{AA'} = \rho_A \rho_{A'}$ per ogni $A, A' \in S_\alpha$ [Lemma 3.2]. Si indichi con $Z_{\alpha,\beta}$, l'applicazione da G_α in G_β tale che

(7) $$a\,Z_{\alpha,\beta} = (a;i,\lambda)\xi_{\alpha,\beta}$$

per ogni $a \in G_\alpha$, $i \in I_\alpha$ e $\lambda \in \Lambda_\alpha$.

Tale applicazione è ben posta; infatti, per ogni $i,j \in I_\alpha$, $\lambda, \mu \in \Lambda_\alpha$ ed $a \in G_\alpha$,

$$\begin{aligned}(a;i,\lambda)\xi_{\alpha,\beta} &= ((1;i,\lambda)(a;j,\mu)(1;i,\lambda))\xi_{\alpha,\beta} \\ &= (a;j,\mu)\xi_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

poiché $\xi_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo.

Facilmente segue che $Z_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo dal fatto che $\xi_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo.

Siano ora $A = (a;j,\lambda) \in S_\alpha$ ed $B = (b;i,\mu) \in S_\beta$; allora

$$\begin{aligned}AB &= \lambda_A(B) = \lambda_A((1;j,\mu)B) = (\lambda_A(1;j,\mu))B = \\ &= ((A\,\xi_{\alpha,\beta})b;(t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) \qquad \text{(per la (3))} \\ &= ((aZ_{\alpha,\beta})b;\ (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) \quad \text{(per la (7)}\end{aligned}$$

Si ottiene in modo analogo l'espressione di BA e quindi si ha la tesi.

Si adotta la notazione $<\chi>$ per denotare il valore costante di una applicazione costante $\check{\chi}$.

<u>TEOREMA 5.5.</u> -

(B.0) Sia Y un semireticolo; ad ogni α in Y corrisponda un gruppo rettangolare $S_\alpha = {}_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$. Si assumi che

$$S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset \quad \text{se} \quad \alpha \neq \beta.$$

Per ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$ si abbiano tre omomorfismi

$$Z_{\alpha,\beta} : G_\alpha \to G_\beta \qquad t_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to \widetilde{\mathcal{T}}(I_\beta) \qquad \tau_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to \mathcal{T}(\Lambda_\beta)$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(B.1) Se $\alpha \in Y$ ed $A = (a;i,\lambda) \in S_\alpha$, allora

$$aZ_{\alpha,\alpha} = a \qquad < t_{\alpha,\alpha} A > = 1 \qquad < A\,\tau_{\alpha,\alpha} > = \lambda$$

(B.2) Per α,β arbitrari elementi di Y, e $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$,

$$(t_{\alpha,\alpha\beta} A)(t_{\beta,\alpha\beta} B) \qquad \text{ed} \qquad (A\tau_{\alpha,\alpha\beta})(B\tau_{\beta,\alpha\beta})$$

sono trasformazioni costanti di $I_{\alpha\beta}$ ed $\Lambda_{\alpha\beta}$, rispettivamente.

Su $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ si definisce il prodotto di $A = (a;i,\lambda) \in S_\alpha$ e $B = (b;j,\mu) \in S_\beta$ come

$$(8) \qquad AB = (aZ_{\alpha,\alpha\beta}\, bZ_{\beta,\alpha\beta} ; < t_{\alpha,\alpha\beta} A \;\, t_{\beta,\alpha\beta} B > , < A\tau_{\alpha,\alpha\beta} \;\, B\tau_{\beta,\alpha\beta} >)$$

(B.3) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma \in Y$ ed $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$

se $\alpha > \beta > \gamma$ allora $Z_{\alpha,\beta}\ Z_{\beta,\gamma} = Z_{\alpha,\gamma}$ (9)

se $\alpha\beta > \gamma$ allora $t_{\alpha\beta,\gamma}(AB) = t_{\alpha,\gamma}A\ t_{\beta,\gamma}B$ (10.1)

$(AB)\tau_{\alpha\beta,\gamma} = A\tau_{\alpha,\gamma}\ B\tau_{\beta,\gamma}$ (10.2) .

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (8); S è un ortogruppo. Viceversa, ogni ortogruppo è isomorfo ad uno ottenuto con una costruzione di questo tipo.

<u>Dim.</u> -

Per ogni $\alpha \in Y$, sia $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ un gruppo rettangolare con Y un semireticolo, tale che $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$ (in Y). Siano $Z_{\alpha,\beta}\ t_{\alpha,\beta}$, $\tau\tau_{\alpha,\beta}$ con $\alpha \geq \beta$ $(\alpha,\beta \in Y)$ gli omomorfismi dati nel teorema e inoltre su $\bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ sia definito il prodotto (8) che coincide con quello dato su ogni singolo $S_\alpha (\alpha\in Y)$ in virtù della condizione (B.1).

Proviamo che il prodotto (8) è associativo. Siano $A,B,C \in S$ con $A = (a;i_\alpha,\mu_\alpha) \in S_\alpha$, $B = (b;\ i_\beta,\mu_\beta)$ X ed $C = (c;i_\gamma,\mu_\gamma)$ in S_γ $(\alpha,\beta,\gamma\in Y)$,

$(AB)C = ((aZ_{\alpha,\alpha\beta}\,bZ_{\beta,\alpha\beta})Z_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\,cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma};\ < t_{\alpha\beta\ \alpha\beta\gamma}AB\ \ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C > ,$

$< AB\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\ C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>)$ (per la (8)) =

$= (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\,bZ_{\beta,\alpha\beta\gamma}\ cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma};< t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ \ t_{\beta,\alpha\beta\gamma}B\ \ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C > ,$

$= < A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta\gamma}\,C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>)$ (per (B.3)) =

$A(BC) = (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ (bZ_{\beta,\beta\gamma}\ cZ_{\gamma,\beta\gamma})Z_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma};< t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ \ t_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}BC > ,$

$< A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ \ BC\tau_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} >) =$

$= (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ bZ_{\beta,\alpha\beta\gamma},\quad cZ_{=},\quad ;<t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ t_{\beta,\alpha\beta\gamma}B\ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C>,$

$<A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta\gamma}\ C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>).$

E' evidente quindi, per il Corollario 5.2, che S è un ortogruppo.

Viceversa, sia S un ortogruppo e sia $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ la sua espressione come semireticolo di gruppi rettangolari e si indichi ancora con S il semigruppo isomorfo al precedente con gli S_α della forma $G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ $(\alpha\in Y)$.

Siano $\alpha,\beta\in Y$ tali che $\alpha>\beta$ e si consideri gli omomorfismi $Z_{\alpha,\beta}$, $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$ relativi ad $S_\alpha \cup S_\beta$ del Lemma 5.4, definendo $Z_{\alpha,\alpha}$, $t_{\alpha,\alpha}$, $\tau_{\alpha,\alpha}$ $(\alpha\in Y)$ come in (B.1). Allora considerati α,β arbitrari elementi di Y ed $A\in S_\alpha$, $B\in S_\beta$ si vuole provare che $t_{\alpha,\alpha\beta}A\ t_{\beta,\alpha\beta}B$ è una applicazione costante. Sia $\bar\lambda \in \Lambda_{\alpha\beta}$; per ogni $i \in I_{\alpha\beta}$ si ponga

$$\underline{i} = (1_{\alpha\beta};\ i,\ \bar\lambda)$$

dove $1_{\alpha\beta}$ è l'unità di $G_{\alpha\beta}$, allora

$$B\underline{i} = (bZ_{\beta,\alpha\beta};\ (t_\beta B_{\beta,\alpha\beta})i\ ,\ \bar\lambda)$$

per il Lemma 5.4 (si tenga conto che $\beta > \alpha\beta$) e quindi

$$(11)\qquad A(B\underline{i}) = (aZ_{\alpha,\alpha\beta}bZ_{\beta,\alpha\beta};\ (t_{\alpha,\alpha\beta}A\ t_{\beta,\alpha\beta}B)i,\ \bar\lambda)$$

per il lemma 5.4 (si tenga conto che $\alpha \geq \alpha\beta$).

Posto $AB = (c;j,\mu)$

$$A(B\underline{i}) = (AB)\underline{i} = (c;j,\bar\lambda) \qquad (12)$$

Confrontando (11) e (12) segue che $t_{\alpha,\alpha\beta}A\ t_{\beta,\alpha\beta}B$ è costante e $<t_{\alpha,\alpha\beta}A\ t_{\beta,\alpha\beta}B = j$ ed $c = aZ_{\alpha,\alpha\beta}\ bZ_{\beta,\alpha\beta}$; così pure $A\tau_{\alpha,\alpha\beta}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta}$ è costante ed $<A\tau_{\alpha,\alpha\beta}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta}> = \mu$.

A questo punto è immediata l'uguaglianza (8) del teorema.

Si verificano ora le (10.1) e (10.2). Siano A,B,C e S

$A = (a;i_\alpha,\mu_\alpha) \in S_\alpha$, $B = (b;i_\beta,\mu_\beta) \in S_\beta$, $C = (c;i_\gamma,\mu_\gamma) \in S_\gamma$,

con $\alpha\beta > \gamma$

$$(AB)C = ((aZ_{\alpha,\alpha\beta}\, bZ_{\beta,\alpha\beta})Z_{\alpha\beta,\gamma}\, c\,;\, (t_{\alpha\beta,\gamma} AB\,)\, i_\gamma ; \mu_\gamma)$$

per la (8) che si è ottenuta ed il Lemma 5.4, inoltre $A(BC)=A(bZ_{\beta,\gamma} c;$ $(t_{\beta,\gamma} B\,)i_\gamma\,,\mu_\gamma)$ (per il Lemma 5.4 ; $\beta \geq \alpha\beta \geq \gamma$) =

$$= (aZ_{\alpha,\gamma}\, bZ_{\beta,\gamma}\, c;\, (t_{\alpha,\gamma} A\,)(t_{\beta,\gamma} B\,)i_\gamma\,,\, \mu_\gamma)$$

(per Lemma 5.4; $\alpha \geq \alpha\beta > \gamma$) ne segue, dalla associatività di S, la (10.1). Da C(AB) = (CA)B segue analogamente la (10.2), mentre dall'uguaglianza (AB)C = A(BC) con $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$ e $C \in S_\gamma$ tali che $\alpha > \beta > \gamma$ si ottiene la (9) (applicando più volte il prodotto nella forma del Lemma 5.4).

COROLLARIO 5.6. (Petrich, /8/). -

Sia Y un semireticolo; ad ogni $\alpha \in Y$ corrisponda una banda rettangolare $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ tale che $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$. Per ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$ si abbiano due omomorfismi

$$t_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to \widetilde{\mathcal{T}}(I_\beta) \qquad \tau_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to \mathcal{T}\,(\Lambda_\beta)$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(C.1) Se $\alpha \in Y$ ed $A = (i;\lambda) \in E_\alpha$, allora

$$< t_{\alpha,\alpha} A > = i \quad , \quad <A\tau_{\alpha,\alpha}> = \lambda$$

(C.2) Se α , β sono arbitrari elementi di Y, e $A \in E_\alpha$,

$B \in E_\beta$, allora

$$(t_{\alpha,\alpha\beta} A)(t_{\beta,\alpha\beta} B) \quad \text{ed} \quad (A\tau_{\alpha,\alpha\beta})(B\tau_{\beta,\alpha\beta})$$

sono trasformazioni costanti di $I_{\alpha\beta}$ e $\Lambda_{\alpha\beta}$, rispettivamente.

Su $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ si definisce il prodotto di $A = (i,\lambda) \in E_\alpha$ e $B = (j,\mu) \in E_\beta$, come

$$AB = (<t_{\alpha,\alpha\beta} A \; t_{\beta,\alpha\beta} B>, <A\tau_{\alpha,\alpha\beta} \; B\tau_{\beta,\alpha\beta}>) \tag{13}$$

(C.3) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma \in Y$ e $A \in E_\alpha$, $B \in E_\beta$, se $\alpha\beta>\gamma$, allora

$$t_{\alpha\beta,\gamma} AB = t_{\alpha,\gamma} A \quad t_{\beta,\gamma} B \tag{14.1}$$

$$AB\tau_{\alpha\beta,\gamma} = A\tau_{\alpha,\gamma} \quad B\tau_{\beta,\gamma} \tag{14.2}$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (13), E è una banda. Viceversa, ogni banda è isomorfa ad una ottenuta con una costruzione di questo tipo.

<u>COROLLARIO 5.7.</u> - (Clifford, /4/)

Sia Y un semireticolo; ad ogni $\alpha \in Y$ è associato un gruppo G_α tale che $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$. Ad ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$, assegniamo un omomorfismo $Z_{\alpha,\beta}$ da G_α in G_β tale che

(D.1) $Z_{\alpha\alpha}$ sia l'omomorfismo identico di G_α.

(D.2) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma \in Y$ tali che $\alpha>\beta>\gamma$

$$Z_{\alpha,\beta} \, Z_{\beta,\gamma} = Z_{\alpha,\gamma} \quad .$$

Sia S l'unione di tutti i gruppi G_α $(\alpha \in Y)$, e definiamo il prodotto di due elementi a_β, $b_\beta \in S$ $(a_\alpha \in G_\alpha$, $b_\beta \in G_\beta)$ come

$$a_\alpha b_\beta = (a \, Z_{\alpha,\gamma})(b \, Z_{\beta,\gamma})$$

dove γ è il prodotto $\alpha\beta$ nel semireticolo Y.

Allora S è un semigruppo unione di gruppi e in cui gli idempotenti commutano (o equivalentemente, un semigruppo inverso che è unione di gruppi). Viceversa, ogni tale semigruppo è isomorfo ad uno ottenuto con una tale costruzione.

Accettato per la pubblicazione su parere favorevole del Prof. Franco MIGLIORINI