

Sorgenti sismiche: rappresentazione matematica ed applicazione al calcolo degli spostamenti

Flaminia Catalli

Indice

1	Introduzione	3
2	Sorgenti sismiche e campo degli spostamenti	4
2.1	Meccanica del mezzo continuo ed elementi di elastostatica	4
2.2	Spostamenti dovuti ad una forza singola, calcolo del tensore di Somigliana	8
2.3	Spostamenti dovuti ad una coppia di forze	10
2.4	Spostamenti dovuti ad una doppia coppia di forze	13
2.5	Deformazioni e sforzi	14
3	Rappresentazione di sorgenti sismiche	15
3.1	Teoremi di Unicit� e di Reciprocit�	15
3.2	Teorema della Rappresentazione	18
4	Equivalenza tra forze e dislocazioni	19
4.1	Teorema della Rappresentazione per una superficie interna	20
4.2	Il tensore Momento Sismico	21
5	I parametri di sorgente e l'energia sismica	23
5.1	Energia sismica rilasciata da una dislocazione e caduta di sforzo	23
5.2	L'energia di deformazione e il momento sismico.	25
6	Caso particolare di una sorgente estesa rettangolare piana: simulazioni	26
6.1	Modellazione di una faglia rettangolare	26
6.2	Il programma di simulazione	27
6.3	Simulazioni	29
6.4	Gli spostamenti	30
6.5	Gli sforzi	31
7	Il problema del semispazio	32
8	Conclusioni e sviluppi	33

Elenco delle tabelle

1	Valore delle variabili usate nelle simulazioni della distribuzione degli spostamenti, delle deformazioni e degli sforzi intorno la faglia	29
---	---	----

Elenco delle figure

1	Rappresentazione di una coppia di forze.	5
2	Le nove possibili coppie di forze M_{ij} componenti del tensore momento sismico. Ognuna consiste di due forze opposte separate da una distanza infinitesima tali che la forza risultante sia sempre nulla.	7
3	Coppia di forze agente nel punto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) parallela al piano x_1x_2	11
4	Rappresentazione geometrica di una faglia trascorrente verticale.	13
5	Schema delle coordinate polari	22
6	Dislocazione variabile sulla faglia	28
7	Dislocazione variabile lungo l'asse x_2	35
8	Dislocazione variabile lungo l'asse x_1	36
9	Dislocazione uniforme lungo l'asse x_1	36
10	Sforzo di taglio σ_{12} lungo l'asse x_1 per una dislocazione variabile.	37
11	Sforzo di taglio σ_{12} lungo l'asse x_1 per una dislocazione uniforme.	37
12	Spostamento lungo l'asse di scorrimento della faglia.	38
13	Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.	38
14	Spostamento lungo l'asse di scorrimento della faglia.	39
15	Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.	39
16	Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.	40
17	Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.	40
18	Spostamento lungo l'asse verticale.	41
19	Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia calcolato da <i>Chinnery</i> , [1961].	41
20	Sforzo di taglio lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.	42
21	Sforzo di taglio lungo l'asse verticale.	42
22	Sforzo di taglio lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia, <i>Chinnery</i> , [1963].	43
23	Sforzo di taglio lungo l'asse verticale.	43

1 Introduzione

Se si vuole trattare fisicamente il fenomeno del terremoto è necessario prima di tutto conoscere e poter rappresentare la sorgente dell'evento stesso e risalire in questo modo alla soluzione analitica del problema fisico.

Una sorgente sismica può essere identificata con una frattura nel mezzo (una faglia o parte di essa) che sottoposta ad una sollecitazione di sforzo disloca, ovvero accade che i due lembi della faglia si muovono l'uno rispetto all'altro. Questo tipo di sorgenti è detta di taglio perchè la dislocazione è provocata da sforzi di taglio. Se il movimento relativo dei due lembi di faglia è parallelo rispetto alla linea di rottura allora la faglia è detta faglia trascorrente; se invece il movimento è parallelo alla profondità della faglia questa è detta faglia a rigetto verticale. Una dislocazione provoca nel mezzo circostante un campo degli spostamenti che può essere studiato nel contesto della teoria dell'elasticità, come vedremo nel capitolo (2).

In questa breve trattazione vogliamo rappresentare la sorgente sismica fisicamente e analiticamente e trattare la teoria principale che riguarda le sorgenti dei terremoti (capitolo (2), paragrafo (2.1), e capitoli (3) e (4)). Quindi vogliamo poter ricavare la descrizione esplicita dei campi di spostamento, di deformazione e di sforzo che essa genera nello spazio circostante (sezioni (2) e (2.5)). Nel capitolo (6) le conoscenze acquisite verranno tradotte in un codice di simulazione del comportamento di una particolare sorgente sismica. Questo permetterà di visualizzare, attraverso delle mappe, il comportamento del mezzo circostante una faglia che disloca in termini di spostamento, deformazione e sforzo. La comprensione di come reagisce il mezzo circostante la sorgente sismica all'avvenire del terremoto è importante per capire come diverse faglie interagiscono fra loro, favorendo o inibendo vicendevolmente la propria rottura. E' comunemente noto nella letteratura specialistica che un terremoto generalmente ne favorisce altri intorno a sé (i suoi *aftershocks*) ed è questo il cosiddetto fenomeno di *triggering*; negli ultimi anni si fa più attenzione anche al fenomeno opposto, ovvero al fatto che un terremoto ha anche la capacità di inibire per un periodo di tempo altri fenomeni in una certa zona (scaricandone lo sforzo accumulato). Quest'area si verrà a trovare così in un periodo di cosiddetta quiescenza. Capire quindi come reagisce il mezzo ad una dislocazione è importante se si vogliono sviluppare modelli di previsione a breve e lungo termine.

La struttura della trattazione è pensata per dare al lettore inizialmente un approccio più concettuale di alcuni aspetti del problema proposto (in particolare della rappresentazione delle sorgenti), pur portando avanti la sua soluzione analitica; solo in un secondo momento vengono ripresi ed approfonditi, sia concettualmente che quantitativamente, alcuni degli argomenti proposti nella parte iniziale. Nella prima parte (capitolo (2)) ci riferiamo in particolare al più semplice problema statico per un mezzo isotropo; in un secondo momento proponiamo alcuni teoremi fondamentali in una veste più generale, includendo anche la variabile temporale e riferendoci ad un mezzo anisotropo (capitolo (4)). Vogliamo trattare, inoltre, le relazioni che intercorrono tra i principali parametri di sorgente e l'energia sismica (capitolo (5)). Infine, come già accennato sopra, ci occupiamo di una specifica sorgente estesa di forma rettangolare di cui calcoliamo e rappresentiamo i relativi tre campi di spostamento, sforzo e deformazione su un piano, introducendola in un programma di simulazione (capitolo(6)).

2 Sorgenti sismiche e campo degli spostamenti

2.1 Meccanica del mezzo continuo ed elementi di elastostatica

L'intera trattazione che segue avviene nel contesto della *meccanica del mezzo continuo* [Malvern, 1969]: la supposizione che implicitamente faremo sempre è che la materia occupi tutto il volume a sua disposizione, senza lasciare vuoti strutturali; trascuriamo, quindi, non solo le discontinuità macroscopiche (fratture, pori, cavità...), ma anche le discontinuità tipiche della struttura atomica e molecolare. Sono due le giustificazioni a questa nostra idealizzazione del mezzo: la prima sta nel fatto che ci occupiamo di volumi contenenti tante particelle che sarebbe impossibile parlare del movimento di ognuna di queste singolarmente, tanto più che il concetto di posizione relativa in questo caso perderebbe senso; la seconda, invece, nasce dall'osservazione che, generalmente, ci occuperemo di regioni di volume le cui dimensioni sono nettamente inferiori alle lunghezze d'onda tipiche delle oscillazioni sismiche. Consideriamo l'*equazione del moto dell'elastodinamica*, ovvero la legge di Newton applicata ad un mezzo continuo:

$$\rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

con ρ densità del mezzo, \mathbf{u} lo spostamento, \mathbf{f} una forza applicata in un punto e σ lo sforzo (ricordiamo che $\sigma_{ij,j}$ sta per $\partial\sigma_{ij}(\mathbf{x})/\partial x_j$) e che l'indice ripetuto equivale ad una somma, nel caso specifico di una somma su $j = 1, 2, 3$); osserviamo anche che la (1) ha le dimensioni di una forza per unità di volume. Sostituendovi l'espressione dello sforzo, data dall'equazione di Hooke per un mezzo omogeneo ed isotropo¹:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2)$$

dove λ e μ sono i moduli d'incompressibilità e di taglio, e l'espressione della deformazione:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

si ottiene l'*equazione del moto di Cauchy-Navier*:

$$f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} u_{i,j} + \mu \nabla^2 u_i - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad (4)$$

che in forma vettoriale si scrive

$$\mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0. \quad (5)$$

Se si considera una densità di forza statica di volume \mathbf{f} , applicata in un punto \mathbf{x}' dello spazio elastico, il campo degli spostamenti \mathbf{u} da essa prodotto può essere ricavato risolvendo l'equazione di Cauchy-Navier all'equilibrio, ovvero avendo posto $\rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$ ² [Boschi et Dragoni, 2000]. In questo senso *le forze di volume hanno il ruolo di sorgenti del campo di spostamento, deformazione e sforzo all'interno del mezzo*. Possiamo dire che ciascuna componente dello spostamento è una combinazione lineare delle tre componenti della forza, cioè:

¹Qui introduciamo una prima semplificazione del problema ipotizzando che il mezzo elastico studiato sia isotropo

²Questa è la seconda semplificazione che facciamo, immaginando di riferirci ad un problema puramente statico

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')F_j(\mathbf{x}), \quad (6)$$

dove G_{ij} rappresenta le componenti del *tensore di Somigliana* \mathbf{G} che dà la componente i – *esima* dello spostamento dovuto ad una forza unitaria F , puntiforme e costante nel tempo con direzione j – *esima*. Effettuato il calcolo del tensore di Somigliana (che seguiremo dettagliatamente più avanti) si arriva a conoscere esplicitamente *il campo degli spostamenti dovuto ad una forza singola*. Nel caso di una *distribuzione di forze* $f_j(x_1, x_2, x_3)$ per unità di volume lo spostamento è dato da

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V f_j(\mathbf{x}')G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')dV, \quad (7)$$

dove G_{ij} dipende dal punto di applicazione della forza \mathbf{x}' e dal punto d'osservazione \mathbf{x} , con $dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3$. *Il tensore di Somigliana è la soluzione fondamentale per i problemi di elasticità statica*. Una forza singola, che agisce in un singolo punto del mezzo, è la sorgente puntiforme più semplice che si può immaginare, ma a partire da questa si possono derivare numerose altre soluzioni dell'equazione di equilibrio. Si arriva così a parlare di sorgenti costituite da una coppia di forze o da una doppia coppia di forze. E' utile notare in anticipo che, anche se ci riferiamo ad una sorgente costituita da una o più coppie di forze, noi ipotizziamo sempre che questa sia puntiforme, quindi che il braccio che separa i due vettori tenda a zero (tuttavia su di essa deve rimanere possibile indicare tutte le direzioni). Vediamo ora come si arriva a costruire il campo degli spostamenti per una coppia di forze e per una doppia coppia (ci preoccuperemo inizialmente solo dei passaggi concettuali fondamentali e soltanto in un secondo momento approfondiremo i diversi casi in singoli paragrafi). Consideriamo una forza $\mathbf{F}^{(1)}$ applicata nell'origine delle coordinate in direzione x_1 e una forza $\mathbf{F}^{(2)}$ applicata nel punto $(0, h, 0)$ in direzione opposta, come mostrato in figura (1).

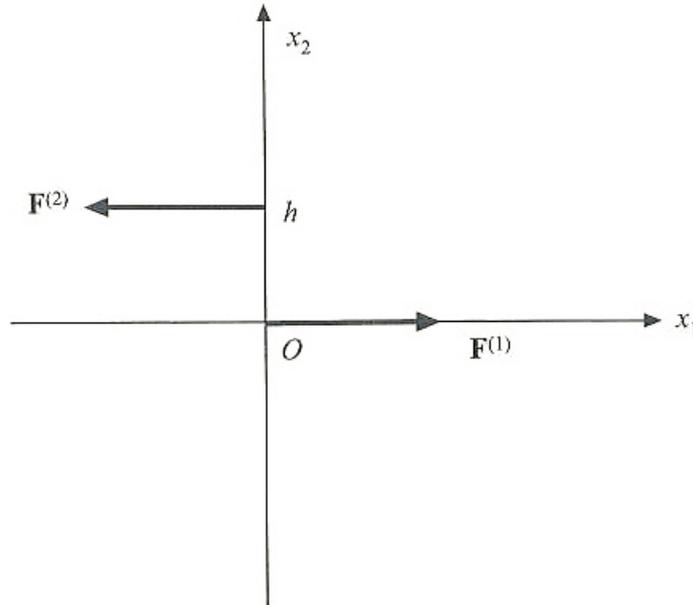


Figura 1: Rappresentazione di una coppia di forze.

Definiamo le due forze in questo modo:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \frac{M}{h} \hat{x}_1, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = -\frac{M}{h} \hat{x}_1, \quad (9)$$

dove M è una costante che ha le dimensioni di un momento. Lo spostamento totale prodotto dalle due forze è, per il principio di sovrapposizione, la somma degli spostamenti prodotti dalle singole forze:

$$U_i(\mathbf{x}) = u_i^1(\mathbf{x}) + u_i^2(\mathbf{x}) = \frac{M}{h} G_{i1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{M}{h} G_{i1}(x_1, x_2 - h, x_3). \quad (10)$$

Poichè, come abbiamo già sottolineato, la sorgente è puntiforme, si deve passare al limite per $h \rightarrow 0$:

$$u_i(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} U_i(\mathbf{x}), \quad (11)$$

ovvero

$$u_i(\mathbf{x}) = M \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_{i1}(x_1, x_2, x_3) - G_{i1}(x_1, x_2 - h, x_3)}{h}. \quad (12)$$

In definitiva

$$u_i(\mathbf{x}) = M G_{i1,2}, \quad (13)$$

dove con $G_{i1,2}$ si indica la derivata parziale del tensore di Somigliana rispetto alla direzione del braccio della coppia di forze (vedremo che le variabili rispetto alle quali si deve derivare sono le coordinate sulla faglia). Se si considerano forze dirette come gli assi principali esistono sei possibili coppie di forze a momento torcente non nullo. Ma ricordiamo che in un mezzo elastico anche una coppia di forze con momento torcente nullo, che hanno cioè la stessa linea d'azione, producono uno spostamento. In questo caso si parla di *dipolo vettoriale*. In definitiva esistono nove tipi diversi $M_i^j = M_j^i$ di coppia di forze rappresentabili come in figura (2).

Precisiamo la descrizione appena vista dello spostamento dovuto ad una coppia osservando che, mentre una sorgente costituita da una singola forza è descritta da un vettore, una sorgente costituita da una o più coppie di forze è descritta da un tensore del secondo ordine M_{ij} , il *tensore momento sismico*, dove l'indice i indica la direzione della forza e l'indice j la direzione del braccio. Quindi, ad ognuna delle nove coppie di forze, corrisponde una diversa componente del tensore. In maniera più generale e precisa allora, la (13), che definisce *il campo degli spostamenti dovuto ad una coppia di forze per una sorgente puntiforme*, si scrive:

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ik,l} M_{kl}; \quad (14)$$

ricordiamo che due indici ripetuti come in questo caso equivalgono alla somma di nove termini, per $k = 1, 2, 3$ e $l = 1, 2, 3$. Se trattiamo una sorgente estesa, ovvero una distribuzione di coppie, avremo:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V m_{kl}(\mathbf{x}) G_{ik,l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV, \quad (15)$$

con \mathbf{m} densità del tensore momento sismico \mathbf{M} (su questo torneremo più avanti). Bisogna fare attenzione a dare il giusto segno alla componente del momento torcente ed una regola da

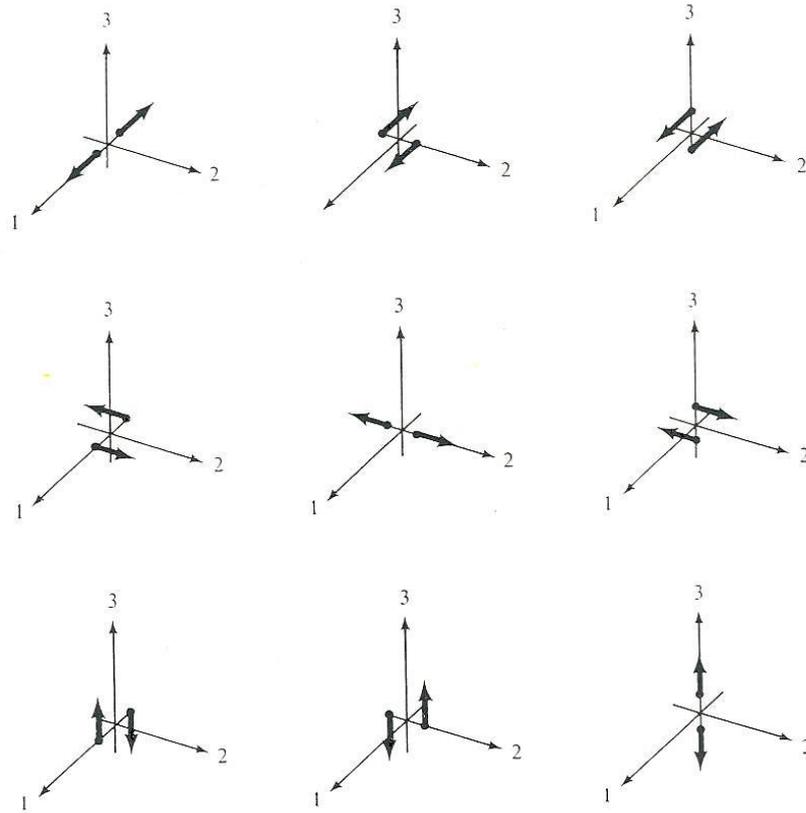


Figura 2: Le nove possibili coppie di forze M_{ij} componenti del tensore momento sismico. Ognuna consiste di due forze opposte separate da una distanza infinitesima tali che la forza risultante sia sempre nulla.

seguire è quella che il segno è determinato dalla forza con il punto di applicazione nel verso positivo lungo la direzione del braccio: se tale forza è diretta nel verso positivo dell'asse di riferimento allora il momento è positivo e viceversa [Boschi et Dragoni, 2000]. Il segno definitivo del campo degli spostamenti dipenderà anche dal tensore di Somigliana, in particolare dal punto nello spazio dove vogliamo calcolare il campo stesso (il punto d'osservazione). Se la sorgente è costituita da una doppia coppia di forze per ricavare il campo degli spostamenti totale non dobbiamo fare altro che sommare i singoli spostamenti dovuti alle due coppie. Questo è ancora una volta vero per il principio di sovrapposizione. *Una doppia coppia di forze, o ancor meglio una distribuzione di doppie coppie, è la migliore rappresentazione di una sorgente sismica di taglio che si possa dare, la rappresentazione con maggiore rigore fisico.* La doppia coppia di forze garantisce infatti la conservazione del momento angolare totale del sistema. Ricordiamo che *la coppia o la doppia coppia di forze si trovano sempre in un piano perpendicolare al piano di faglia, intesa a sua volta come possibile sorgente di un nuovo evento.* E' doveroso a questo punto anticipare la definizione di faglia ed un importante risultato che vedremo più avanti, espresso nel Teorema della Rappresentazione. Una faglia è una superficie di frattura sulla quale si trovano i segni di un movimento discontinuo della Terra, ovvero le dislocazioni; se la frattura è avvenuta a causa di un movimento di taglio allora la faglia, se sottoposta ad uno sforzo, può essere soggetta ancora a scorrimento orizzontale (faglia trascorrente o *strike-slip*) o

verticale (faglia verticale o *dip-slip*) (in proposito si veda *Boschi et Dragoni*, [2000]). Il Teorema della Rappresentazione esplicita l'equivalenza che esiste tra un sistema di forze e un sistema di dislocazioni: in questo senso il concetto di faglia è sovrapponibile con quello di sorgente di un nuovo terremoto.

2.2 Spostamenti dovuti ad una forza singola, calcolo del tensore di Somigliana

Vogliamo determinare ora, in maniera esplicita, il campo di spostamenti \mathbf{u} nel caso statico in un generico punto P del mezzo elastico, infinito, omogeneo ed isotropo. Supponiamo che tale spostamento sia dovuto ad una forza puntiforme applicata in 0 e che a distanze infinite dalla sorgente $\mathbf{u} = 0$ [*Lay et Wallace*, 1990]. Le caratteristiche del mezzo sono la densità ρ e le costanti elastiche λ e μ . Introduciamo l'espressione di forza puntiforme nell'equazione di Cauchy-Navier all'equilibrio (trattiamo in realtà ancora una densità di forza \mathbf{f}):

$$\mathbf{f} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} = 0, \quad (16)$$

che, per la proprietà del prodotto vettoriale secondo cui $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, può anche essere scritta come segue:

$$\mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (17)$$

Immaginiamo che la forza puntiforme sia applicata nell'origine degli assi coordinati:

$$\mathbf{f} = F\mathbf{a}\delta(r), \quad (18)$$

con F l'intensità di una forza, \mathbf{a} un vettore unitario nella direzione della forza lungo un asse principale e $\delta(r)$ la funzione di Dirac tale che

$$\delta(r) = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \int_V \delta(r)dV = 1 & r = 0. \end{cases}, \quad (19)$$

con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ distanza dal centro delle coordinate. Il teorema di Gauss ci permette di scrivere:

$$\delta(r) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right), \quad (20)$$

perciò la (18) diventa

$$\mathbf{F} = -F\nabla^2\left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi r}\right) = -F\left[\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{a}}{4\pi r}\right) - \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi r}\right)\right]. \quad (21)$$

L'equazione di Cauchy-Navier all'equilibrio diventa quindi:

$$-F\left[\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{a}}{4\pi r}\right) - \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi r}\right)\right] + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (22)$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_P) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_S, \quad (23)$$

dove \mathbf{A}_P e \mathbf{A}_S sono due potenziali vettore rispettivamente irrotazionale e solenoidale:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{A}_P = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_S = 0. \end{cases} \quad (24)$$

L'idea che la soluzione che cerchiamo abbia questa forma si basa sulla conoscenza che qualsiasi campo degli spostamenti può essere rappresentato dalla somma di un campo irrotazionale e di un campo solenoidale (teorema di Helmholtz-Lamè) e i termini $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_P)$ e $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_S$ rispettano questa richiesta. Sostituiamo allora \mathbf{u} nella (22) e raccogliendo otteniamo:

$$\nabla \left\{ \nabla \cdot \left[-\frac{F\mathbf{a}}{4\pi r} + (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{A}_P \right] \right\} + \nabla \times \nabla \times \left(\frac{F\mathbf{a}}{4\pi r} - \mu \nabla^2 \mathbf{A}_S \right), \quad (25)$$

che è soddisfatta per

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{A}_P = \frac{F\mathbf{a}}{4\pi r} \\ \mu \nabla^2 \mathbf{A}_S = \frac{F\mathbf{a}}{4\pi r}. \end{cases} \quad (26)$$

Se poniamo ³

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P &= A_P \mathbf{a}, \\ \mathbf{A}_S &= A_S \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (27)$$

otteniamo le equazioni di Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_P &= \frac{F}{4\pi(\lambda + 2\mu)r}, \\ \nabla^2 A_S &= \frac{F}{4\pi\mu r}, \end{aligned} \quad (28)$$

di cui conosciamo il risultato ricordando che $\nabla^2 r = \frac{2}{r}$:

$$\begin{aligned} A_P &= \frac{Fr}{8\pi(\lambda + 2\mu)}, \\ A_S &= \frac{Fr}{8\pi\mu}. \end{aligned} \quad (29)$$

A_P e A_S sono potenziali che risolvono le equazioni disomogenee (26). Per ottenere lo spostamento che cerchiamo bisogna sostituirli nell'equazione (23) ottenendo così *la componente i -esima dello spostamento dovuto ad una forza unitaria nella direzione j -esima*:

$$\begin{aligned} u_i^j &= \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{1}{8\pi\mu} \nabla^2 r \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\delta_{ij} \nabla^2 r - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

³Questo passaggio ci è consentito dall'osservazione che se $\nabla^2 \mathbf{A} = F\hat{i}$ questo significa che $(\nabla^2 A\hat{i}, \nabla^2 A\hat{j}, \nabla^2 A\hat{k}) = F\hat{i}$ e quindi che $\nabla^2 A\hat{i} = F\hat{i}, \nabla^2 A\hat{j} = 0, \nabla^2 A\hat{k} = 0$ dove i, j, k indicano i versori degli assi coordinati.

ovvero, esprimendo le operazioni vettoriali con la notazione ad indici, si può anche scrivere in forma più compatta:

$$u_i^j = \frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ij}r_{,kk} - \Gamma r_{,ij}) \quad (31)$$

con

$$\Gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (32)$$

Per i solidi detti poissoniani ricordiamo che $\lambda \approx \mu$ quindi $\Gamma \approx \frac{2}{3}$. L'equazione (31) rappresenta proprio *il tensore di Somigliana* che volevamo calcolare avendo posto $F = 1$. Per una generica forza \mathbf{F} le sei possibili diverse componenti sono le seguenti:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left[\frac{2}{r} - \Gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3} \right) \right] \\ u_1^2 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left(\Gamma \frac{x_1 x_2}{r^3} \right) \\ u_1^3 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left(\Gamma \frac{x_1 x_3}{r^3} \right) \\ u_2^2 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left[\frac{2}{r} - \Gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3} \right) \right] \\ u_2^3 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left(\Gamma \frac{x_2 x_3}{r^3} \right) \\ u_3^3 &= \frac{F}{8\pi\mu} \left[\frac{2}{r} - \Gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{x_3^2}{r^3} \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

poichè $u_i^j = u_j^i$, essendo il tensore di Somigliana simmetrico. Si noti che esiste una dipendenza dalla distanza rispetto alla sorgente del tipo $1/r$.

2.3 Spostamenti dovuti ad una coppia di forze

Riprendiamo il discorso sullo spostamento dovuto ad una coppia di forze introdotto precedentemente. Abbiamo visto che tale spostamento si ottiene derivando le componenti del tensore di Somigliana secondo la (14). Esplicitiamo ora questa relazione. Per farlo rivediamo il problema in maniera più specifica immaginando di applicare una forza nel punto $(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}d\xi_2, \xi_3)$ e la seconda nel punto $(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}d\xi_2, \xi_3)$ come mostrato in figura (3) [Lay et Wallace, 1990].

Se lo spostamento lo vogliamo in un generico punto $P(x_1, x_2, x_3)$ la distanza r che compare nel tensore di Somigliana va corretta in $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$. Come abbiamo già visto, lo spostamento in P è dato dalla somma dei due campi di spostamento dovuti alle forze prese singolarmente:

$$u_i^1(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}d\xi_2, \xi_3; x_1, x_2, x_3) - u_i^1(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}d\xi_2, \xi_3; x_1, x_2, x_3), \quad (34)$$

che si può ridurre a:

$$\frac{\partial u_i^1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + O(d\xi_2^2). \quad (35)$$

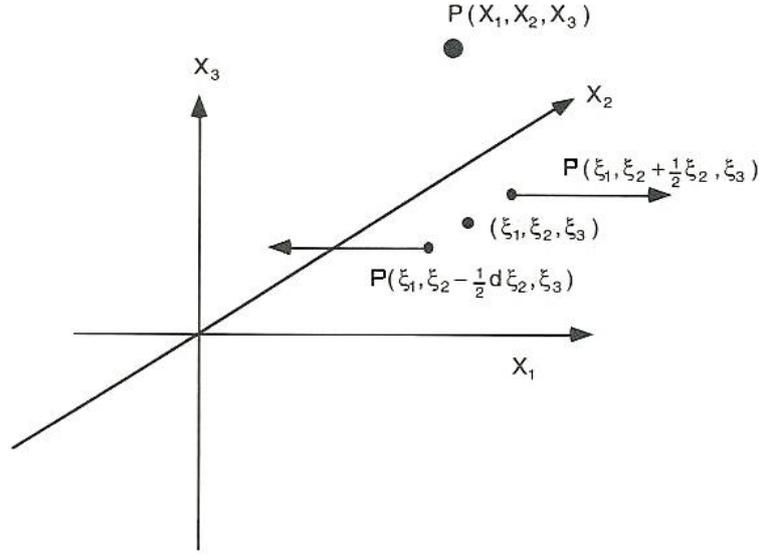


Figura 3: Coppia di forze agente nel punto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) parallela al piano x_1x_2 .

Poichè $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$, si ha che $\frac{\partial r}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial r}{\partial x_i}$, ovvero:

$$\frac{\partial u_i^j}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial u_i^j}{\partial x_k}, \quad (36)$$

perciò la (35) diventa:

$$-\frac{\partial u_i^1}{\partial x_2} d\xi_2 + O(d\xi_2^2). \quad (37)$$

Per ottenere il campo degli spostamenti dovuto ad una coppia di forze bisogna, in definitiva, risolvere la (37) tenendo conto che $d\xi_2 \rightarrow 0$ e che a $F d\xi_2$ va sostituito il momento M . Abbiamo calcolato esplicitamente le diverse componenti di uno spostamento causato da una coppia di forze agenti in ogni possibile direzione x_i con il braccio lungo x_j ⁴:

⁴Con $i, j=1,2,3$

$$\begin{aligned}
u_1^{1,1} &= \frac{Mx_1 [2x_1^2 + (2 - 3\Gamma)(x_2^2 + x_3^2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{1,2} &= \frac{Mx_2 [2x_1^2(\Gamma + 1) + (2 - \Gamma)(x_2^2 + x_3^2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{1,3} &= \frac{Mx_3 [2x_1^2(\Gamma + 1) + (2 - \Gamma)(x_2^2 + x_3^2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{2,1} &= \frac{M\Gamma x_2 (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{2,2} &= -\frac{M\Gamma x_1 (x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{2,3} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{(8\pi\mu) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{3,1} &= \frac{M\Gamma x_3 (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{3,2} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{(8\pi\mu) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{3,3} &= -\frac{M\Gamma x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{2,1} &= -\frac{Mx_1 [x_1^2(\Gamma - 2) - 2x_2^2(\Gamma + 1) + x_3^2(\Gamma - 2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{2,2} &= -\frac{Mx_2 [x_1^2(3\Gamma - 2) - 2x_2^2 + x_3^2(3\Gamma - 2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{2,3} &= -\frac{Mx_3 [x_1^2(\Gamma - 2) - 2x_2^2(\Gamma + 1) + x_3^2(\Gamma - 2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{3,1} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{(8\pi\mu) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{3,2} &= -\frac{M\Gamma x_3 (x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{3,3} &= -\frac{M\Gamma x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{3,1} &= -\frac{Mx_1 [x_1^2(\Gamma - 2) + x_2^2(\Gamma - 2) - 2x_3^2(\Gamma + 1)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{3,2} &= -\frac{Mx_2 [x_1^2(\Gamma - 2) + x_2^2(\Gamma - 2) - 2x_3^2(\Gamma + 1)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{3,3} &= -\frac{Mx_3 [x_1^2(3\Gamma - 2) + x_2^2(3\Gamma - 2) - 2x_3^2]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}. \tag{38}
\end{aligned}$$

Si noti subito che, rispetto agli spostamenti dovuti ad una forza singola, ora la dipendenza dalla distanza dalla sorgente è del tipo $1/r^2$. Facciamo qualche altra utile osservazione. Ab-

biamo riportato solo 18 diverse componenti del campo di spostamenti perchè esistono delle uguaglianze tra i termini dovute alla simmetria espressa dalla relazione $u_i^j = u_j^i$, che ha come conseguenza l'uguaglianza $u_i^{j,k} = u_j^{i,k}$. Si osservi ancora che la $u_1^{1,2}$ è uguale alla $u_3^{3,2}$ scambiando x_1 con x_3 : fisicamente significa che i meccanismi di faglia trascorrente e di faglia a scorrimento verticale, dovuti rispettivamente alle coppie di forze (1, 2) e (3, 2) se immaginiamo la faglia giacente nel piano x_1, x_3 , sono uguali a meno di una rotazione nello spazio delle coordinate. Questo punto lo approfondiremo nel paragrafo successivo e ci permetterà di dedurre delle generalizzazioni interessanti. Altre simmetrie riguardano le componenti $u_1^{1,1}$, $u_2^{2,2}$ e $u_3^{3,3}$ che sono uguali scambiando x_1 con x_2 e poi con x_3 ; la $u_2^{1,1}$ e la $u_3^{1,1}$ che sono uguali scambiando x_2 con x_3 ; la $u_1^{2,2}$ e la $u_3^{2,2}$ che sono uguali scambiando x_1 con x_3 ; la $u_1^{3,3}$ e la $u_2^{3,3}$ che sono uguali scambiando x_1 con x_2 ; l'uguaglianza $u_3^{1,2} = u_2^{1,3} = u_1^{2,3}$; ed infine le $u_1^{1,2}$, $u_2^{1,2}$, $u_1^{1,3}$, $u_3^{1,3}$, $u_2^{2,3}$ e la $u_3^{2,3}$ che sono uguali per scambio degli assi. Un'ultima, ma non meno significativa, osservazione che possiamo fare riguarda il calcolo che ci porta alle espressioni (38): si tratta di una derivazione degli spostamenti di singola forza rispetto alle coordinate di sorgente ξ_i . Questo procedimento è analogo al calcolo delle deformazioni dovute a singola forza nel quale, però, si deriva rispetto alle generiche coordinate x_i . Ciò che si sa calcolare in principio è il campo degli spostamenti dovuti ad una singola forza grazie al tensore di Somigliana. Da questo si arriva al campo degli spostamenti dovuti ad una coppia di forze immaginando che questo secondo tipo di sorgente sia una deformazione della sorgente elementare. Anche su questo torneremo più avanti nella teoria della rappresentazione della sorgente.

2.4 Spostamenti dovuti ad una doppia coppia di forze

Come abbiamo già accennato nell'ultima parte del capitolo (2), il campo degli spostamenti dovuto ad una doppia coppia di forze si ricava sommando i singoli spostamenti dovuti a ciascuna delle due coppie. Abbiamo calcolato esplicitamente le singole componenti del campo. Riportiamo per prime le tre componenti dello spostamento causato da una doppia coppia di forze agente nel piano x_1x_2 , che darebbe luogo ad una faglia *strike-slip* nel piano x_1x_3 come nella figura (4); di seguito riportiamo le restanti componenti.

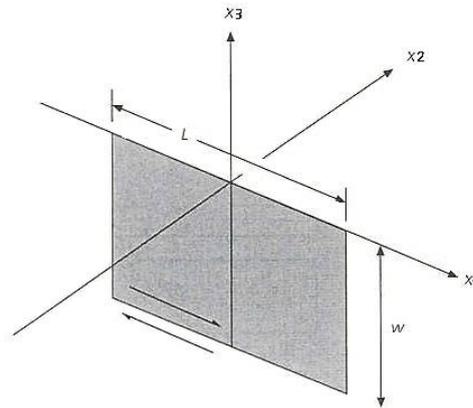


Figura 4: Rappresentazione geometrica di una faglia trascorrente verticale.

$$\begin{aligned}
u_1^{(1,2)} &= \frac{Mx_2 [x_1^2 (2\Gamma + 1) + (1 - \Gamma) (x_2^2 + x_3^2)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{(1,2)} &= -\frac{Mx_1 [x_1^2 (\Gamma - 1) - x_2^2 (2\Gamma + 1) + x_3^2 (\Gamma - 1)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{(1,2)} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{(1,3)} &= \frac{Mx_3 [x_1^2 (2\Gamma + 1) + (1 - \Gamma) (x_2^2 + x_3^2)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{(1,3)} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{(1,3)} &= -\frac{Mx_1 [x_1^2 (\Gamma - 1) + x_2^2 (\Gamma - 1) - x_3^2 (2\Gamma + 1)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_1^{(2,3)} &= \frac{3M\Gamma x_1 x_2 x_3}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_2^{(2,3)} &= -\frac{Mx_3 [x_1^2 (\Gamma - 1) - x_2^2 (2\Gamma + 1) + x_3^2 (\Gamma - 1)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
u_3^{(2,3)} &= -\frac{Mx_2 [x_1^2 (\Gamma - 1) + x_2^2 (\Gamma - 1) - x_3^2 (2\Gamma + 1)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \tag{39}
\end{aligned}$$

La dipendenza dalla distanza rispetto alla sorgente è ancora del tipo $1/r^2$. Analogamente con quanto osservato per la coppia di forze, anche qui possiamo vedere che per passare dagli spostamenti di una faglia *strike-slip*, $u_i^{(1,2)}$, a quelli di una faglia *dip-slip*, $u_i^{(2,3)}$, (con la faglia immaginata nel piano x_1x_3) basta scambiare x_1 con x_3 . Questo si prova facilmente, per esempio, confrontando la prima equazione con l'ultima delle (39). Infine, osservando le componenti del campo degli spostamenti dovuto alla doppia coppia di forze (39), è immediato (più facile che nel caso della coppia) notare che per passare dalle $u_i^{1,2}$ alle $u_i^{1,3}$ basta scambiare x_2 con x_3 , mentre per passare dalle $u_i^{2,3}$ alle $u_i^{1,3}$ bisogna scambiare x_1 con x_2 ; si tratta ancora del passaggio da un movimento trascorrente ad uno verticale, nel primo caso immaginando la faglia spostata nel piano x_2x_3 e nel secondo nel piano x_1x_2 .

2.5 Deformazioni e sforzi

Il campo delle deformazioni, per qualsiasi tipo di sorgente puntiforme sopra citata, si calcola attraverso la definizione di deformazione. Le componenti diverse del tensore deformazione, calcolate immaginando che la sorgente sia costituita da una doppia coppia nel piano x_1x_2 , sono (si ricordi che il tensore deformazione è simmetrico secondo $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$):

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11}^{(1,2)} &= -\frac{3Mx_1x_2 [x_2^2 (2\Gamma + 1) + (1 - 3\Gamma) (x_2^2 + x_3^2)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
\epsilon_{12}^{(1,2)} &= \frac{M \{x_1^4 (4\Gamma - 1) + x_1^2 [x_3^2 (2\Gamma + 1) - 2x_2^2 (11\Gamma + 1)] + [x_2^2 (4\Gamma - 1) - 2x_3^2 (\Gamma - 1)] (x_2^2 + x_3^2)\}}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{13}^{(1,2)} &= -\frac{3Mx_2x_3 [x_1^2 (8\Gamma + 1) + (1 - 2\Gamma) (x_2^2 + x_3^2)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
\epsilon_{22}^{(1,2)} &= \frac{3Mx_1x_2 [x_1^2 (3\Gamma - 1) - x_2^2 (2\Gamma + 1) + x_3^2 (3\Gamma - 1)]}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
\epsilon_{23}^{(1,2)} &= \frac{3Mx_1x_3 [x_1^2 (2\Gamma - 1) - x_2^2 (8\Gamma + 1) + x_3^2 (2\Gamma - 1)]}{8\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\
\epsilon_{33}^{(1,2)} &= \frac{3M\Gamma x_1x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2)}{4\pi\mu (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{40}$$

Tutte le altre possibili componenti del campo di deformazione, dovute ad una doppia coppia di forze in uno qualunque dei piani principali, si ricavano da quelle date con gli scambi delle x_i viste nel paragrafo (2.4). Il campo degli sforzi si ricava invece interamente dalla legge di Hooke per un mezzo omogeneo ed isotropo data dalla (2).

Fino a questo punto abbiamo immaginato che la nostra sorgente (o equivalentemente la frattura di taglio considerata) si trovasse su uno dei piani principali. Più avanti nella trattazione vedremo come si possano ricavare dalle relazioni note dei tre campi di spostamento, deformazione e sforzo quelle più generali relative ad una faglia orientata arbitrariamente introducendo un'opportuna dipendenza angolare attraverso il momento sismico scalare (o la forza, se trattiamo con una sorgente rappresentabile da una singola forza) che compare nel tensore di Somigliana.

3 Rappresentazione di sorgenti sismiche

3.1 Teoremi di Unicit  e di Reciprocit 

E' interessante a questo punto introdurre il modo di determinare univocamente il campo degli spostamenti prodotto da una sorgente sismica e conoscere le relazioni intercorrenti tra soluzioni diverse [Aki et Richards, 1980]. Come abbiamo anticipato, in questo capitolo torniamo ad un problema pi  generale in cui consideriamo la variabile temporale ed il mezzo anisotropo. Questo per una maggiore precisione, ricordando che i risultati di seguito presentati sono estendibili ai due casi limite. In particolare il caso statico   un caso limite del problema pi  generale in cui ci occuperemo di una forza istantanea (rappresentata da una delta di Dirac nel tempo); nel caso statico basterebbe riferirsi ad una forza a gradino applicata a $-\infty$, ovvero costante nel tempo, per riportare il problema all'equilibrio e poter trascurare la variabile temporale. Attenzione a notare che il tensore di Green che viene presentato in questa sezione non   lo stesso calcolato nella (31) poich  dipende dal tempo e non fa riferimento alla (2). Infine notiamo che il concetto di convoluzione che verr  introdotto nei prossimi paragrafi nel caso statico perderebbe senso e verrebbe sostituito da un semplice prodotto. Attraverso il primo dei teoremi presentati verificheremo che, note le condizioni iniziali,   sufficiente specificare le forze di volume agenti in V e le trazioni (o equivalentemente gli spostamenti) sulla superficie S che racchiude V per determinare univocamente il campo di spostamenti nello stesso volume V di un mezzo elastico. Il secondo teorema che affronteremo, invece, mostra il legame matematico esistente tra due soluzioni indipendenti per lo spostamento in un mezzo elastico.

Teorema di unicit 

Lo spostamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in un corpo elastico di volume V e superficie S   univocamente determinato, dopo un tempo $t \geq t_0$, dalle condizioni iniziali dello spostamento e della velocit  delle particelle al tempo t_0 e dai valori al tempo $t \geq t_0$:

i) delle forze di volume $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ all'interno di V

ii) delle trazioni τ su $S_1 \in S$

iii) degli spostamenti su $S_2 \in S$ tale che $S_1 + S_2 = S$ (S_1 o S_2 possono coincidere con l'intera superficie S)

Prima di riportare la dimostrazione rigorosa del teorema, vediamo brevemente come sia facile capire, da relazioni che gi  conosciamo, che il campo degli spostamenti   strettamente legato alle forze di volume e alle trazioni sulla superficie. Partiamo dall'equazione del moto dell'elastodinamica (1) per un mezzo elastico continuo che ci permette di mettere in relazione l'accelerazione di una particella, \ddot{u}_i , con le forze di volume, f_i , e le forze di contatto con le particelle adiacenti, $\tau_i = \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t)$. L'equazione (1) si riferisce a forze infinitesime agenti su volumi infinitesimi di materia; integrandola, allora, considerando un volume finito V di superficie S , otteniamo una relazione fra grandezze finite:

$$\int_V \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) dV + \int_V f_i(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV. \quad (41)$$

Ricorrendo al teorema della divergenza (o di Gauss) la (41) si pu  scrivere anche come segue:

$$\int_S \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \nu_j dS + \int_V f_i(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV, \quad (42)$$

dove ν_j sono le componenti della normale alla superficie S nel punto \mathbf{x} . La (42) mette in relazione il moto delle particelle di un corpo elastico con la distribuzione delle forze di volume al suo interno e con la distribuzione delle tensioni sulla sua superficie proprio come volevamo vedere.

Dimostrazione

Supponiamo di conoscere due soluzioni qualunque \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 per il campo degli spostamenti in V con superficie S ; immaginiamo che \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 soddisfino le stesse condizioni iniziali e che siano tali che nei punti i) e iii) troviamo gli stessi valori. Possiamo definire allora $\mathbf{U} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ il campo degli spostamenti nullo ($\mathbf{U} = 0$) con condizioni iniziali nulle, forze di volume nulle e trazioni nulle su S_1 . Quindi non rimane che dimostrare che $\mathbf{U} = 0$ nel volume per $t \geq t_0$ per aver dimostrato il teorema. Per questo consideriamo il tasso di lavoro meccanico (la potenza) che segue ad un processo di deformazione del corpo di volume V e superficie S :

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{U}} dV + \int_S \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{U}} dS &= \int_V [f_i \dot{U}_i + (\sigma_{ij} \dot{U}_i)_{,j}] dV \\ &= \int_V (\rho \dot{U}_i \ddot{U}_i + \sigma_{ij} \dot{U}_{i,j}) dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{U}_i \dot{U}_i dV + \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV; \end{aligned} \quad (43)$$

il primo passaggio è permesso dal teorema della divergenza di Gauss applicato all'integrale sulla superficie; il secondo passaggio deriva da una semplice sostituzione della (1) dove consideriamo solo le trazioni del tensore dello sforzo σ_{ij} ; infine l'ultimo passaggio è valido sotto il doppio segno di sommatoria per le simmetrie di σ_{ij} e ϵ_{ij} . Possiamo integrare tra t_0 e t l'ultima equazione delle (43) ottenendo per ogni t :

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \dot{U}_i \dot{U}_i dV + \int_V \frac{1}{2} c_{ijkl} U_{i,j} U_{k,l} dV = 0, \quad (44)$$

dove nel secondo termine si sono utilizzate le definizioni di sforzo e deformazione e dove si sono tenute presente le condizioni al tempo iniziale t_0 e il fatto che forze e trazioni sono nulle per ipotesi. Segue dalla (44) che \dot{U}_i deve essere uguale a zero per $t \geq t_0$ poichè l'energia cinetica e l'energia potenziale sono entrambe definite positive; ma $U_i = 0$ per $t = t_0$ perciò $\mathbf{U} = 0$ in V per $t \geq t_0$.

Teorema della reciprocità Supponiamo che in un mezzo elastico di volume V agiscano due diversi sistemi di forze \mathbf{f} e \mathbf{g} ai quali corrispondono rispettivamente i due campi di spostamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ che hanno, in generale, diverse condizioni iniziali al tempo zero e diverse condizioni al contorno su S . Indicheremo le rispettive trazioni superficiali con $\mathbf{T}^{(\mathbf{u})}$ e $\mathbf{T}^{(\mathbf{v})}$; ricordiamo che $T_i = \sigma_{ij} n_j$. La prima relazione di reciprocità che si può scrivere tra \mathbf{u} e \mathbf{v} è:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{T}^{(\mathbf{u})} \cdot \mathbf{v} dS \\ = \int_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{T}^{(\mathbf{v})} \cdot \mathbf{u} dS, \end{aligned} \quad (45)$$

che deriva dall'applicazione ai due campi di forze della (42) nello stesso volume, moltiplicata per il campo degli spostamenti opposto. Questa relazione è nota come Formula di Betti. Si noti che questa non invoca le condizioni iniziali per \mathbf{u} e \mathbf{u} . Dalla (45) si può passare alla (46) facendo dei semplici raccoglimenti:

$$\begin{aligned} \int_V \rho (\mathbf{v} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \ddot{\mathbf{v}}) dV + \int_V (\mathbf{u} \mathbf{g} - \mathbf{v} \mathbf{f}) dV \\ = \int_S (\mathbf{v} \mathbf{T}^{(\mathbf{u})} - \mathbf{u} \mathbf{T}^{(\mathbf{v})}) dS. \end{aligned} \quad (46)$$

Integriamo nel tempo la precedente relazione ; il primo integrale di sinistra della precedente relazione può essere considerato nullo ipotizzando che le particelle siano ferme all'inizio e alla fine del processo. Infatti, dato che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \dot{\mathbf{v}} \mathbf{u}] &= \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{v}} \mathbf{u} \\ &= \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \ddot{\mathbf{v}} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (47)$$

segue che

$$\begin{aligned}
\rho \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V (\mathbf{v}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\ddot{\mathbf{v}}) dV &= \\
&= \rho \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{v}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\ddot{\mathbf{v}}) d\tau \\
&= \rho \int_V dV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau} (\dot{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \dot{\mathbf{v}}\mathbf{u}) d\tau \\
&= \rho \int_V [\dot{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \dot{\mathbf{v}}\mathbf{u}]_{-\infty}^{+\infty} = 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

Quindi otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V (\mathbf{u}\mathbf{g} - \mathbf{v}\mathbf{f}) dV = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S (\mathbf{v}\mathbf{T}^{(\mathbf{u})} - \mathbf{u}\mathbf{T}^{(\mathbf{v})}) dS, \tag{49}$$

e questa relazione è nota come Teorema della Reciprocità.

3.2 Teorema della Rappresentazione

Il più importante obiettivo di questa sezione è quello di sviluppare una rappresentazione analitica dello spostamento (in particolare della dislocazione, che è una sigolarità dello spostamento) tra le più ricorrenti in Sismologia. Questa rappresentazione, come vedremo, è una formula che descrive lo spostamento, in un generico punto dello spazio e ad un certo tempo, in termini delle grandezze che originano il moto stesso; queste grandezze, abbiamo visto nel teorema dell'unicità, sono le forze di volume e le trazioni (o gli spostamenti) sulla superficie del corpo in questione. Notiamo fin da subito che la semplicità della relazione che troveremo (pur avendo questa una grande importanza) dipende dal fatto che si suppone di avere una sorgente puntiforme, precisamente localizzata nello spazio e nel tempo e generatrice di un impulso unidirezionale; ovvero assumiamo valido, per il nostro sviluppo, il modello di sorgente più semplice che conosciamo. Come abbiamo già visto, il campo degli spostamenti generato da una sorgente puntiforme, in un mezzo omogeneo ed isotropo, è descritto dal tensore di Somigliana, ovvero da una funzione di Green detta funzione di Green dell'elastodinamica che introduce il principio di causalità, ovvero il concetto della relazione causa-effetto. Immaginiamo di applicare un impulso unitario nel punto $\mathbf{x} = \xi$ al tempo $t = \tau$ nella direzione n ; l'intensità per unità di volume di questa forza sarà data quindi da:

$$g_i(\xi, \tau) = F_0 \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau) \delta_{in}, \tag{50}$$

con F_0 impulso della forza (unità di forza per tempo), $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ delta di Dirac che indica la posizione della forza e $\delta(t - \tau)$ che indica l'istante di tempo in cui questa viene applicata. Supponiamo di aver determinato nello spazio e nel tempo, attraverso il tensore di Somigliana, gli spostamenti che la forza impulsiva $g_i(\xi, \tau)$ produce nel mezzo circostante e indichiamo con $G_{in} = G(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ la componente i -esima di tali spostamenti per un impulso unitario. Il tensore \mathbf{G} rappresenta la funzione di Green dell'elastodinamica. Sostituendo la (50) nella (49) (utilizzando la relazione di Hooke tra sforzi e deformazioni) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V u_i \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau) \delta_{in} dV - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_i G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dV \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S \{G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) c_{ijkl} u_{kl} - u_i c_{ijkl} G_{kn,l}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0)\} \nu_j dS. \tag{51}
\end{aligned}$$

Quest'ultima equazione può essere semplificata applicando la proprietà della funzione di Dirac secondo cui, per qualunque funzione $u(\mathbf{x})$, vale:

$$u(\mathbf{x}) = \int_V \delta(\mathbf{x} - \xi) u(\xi) dV, \tag{52}$$

e riportando le tensioni superficiali al posto delle deformazioni nel primo termine dell'integrale di superficie. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}, t) & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\xi) \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) \tau_i(\xi, \tau) dS(\xi) \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) c_{ijkl}(\xi) \nu_j \partial G_{kn}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) / \partial \xi_l dS(\xi), \tag{53}
\end{aligned}$$

dove, per una migliore comprensione fisica della relazione stessa, è stato già intercambiato \mathbf{x} con ξ e t con τ ; questo fa sì che (\mathbf{x}, t) indichi la posizione e il tempo in cui si calcolano gli spostamenti integrando su un volume in cui varia ξ e il tempo τ . *Questa è la prima forma del Teorema della Rappresentazione che stabilisce chiaramente che il campo degli spostamenti \mathbf{u} in un generico punto è determinato dal contributo della forza \mathbf{f} di volume e dai contributi della tensione τ_i e dello spostamento stesso sulla superficie S .* Questa forma, però, non è ancora pienamente soddisfacente poichè ciascun termine invoca una funzione di Green in cui la sorgente è in \mathbf{x} e il punto d'osservazione è in ξ ; si vuole invece che \mathbf{x} sia il punto d'osservazione così che lo spostamento totale possa essere visto come la somma dei diversi contributi in \mathbf{x} di ogni elemento di volume e di superficie. Per questo si può sfruttare la proprietà di reciprocità della funzione di Green secondo cui

$$G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) = G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0), \tag{54}$$

valida però solo se G soddisfa condizioni al contorno su S omogenee.

4 Equivalenza tra forze e dislocazioni

Nel capitolo precedente abbiamo immaginato di lavorare con sorgenti sismiche esterne alla Terra (la superficie S a cui abbiamo riferito spostamenti e trazioni poteva essere vista come la superficie esterna della Terra stessa). Tuttavia è importante, in questo contesto, poter applicare le proprietà ricavate anche agli effetti provocati da sorgenti interne alla Terra, come le dislocazioni di una superficie di faglia sepolta e le esplosioni. Mostriamo che esiste un'equivalenza tra un sistema di forze di volume nel mezzo e un sistema di dislocazioni sulla superficie della frattura.

4.1 Teorema della Rappresentazione per una superficie interna

Supponiamo che la superficie esterna S , che racchiude il volume V , contenga due superfici interne adiacenti Σ_+ e Σ_- che rappresentano le due facce opposte di una faglia sepolta di superficie Σ (Σ è una superficie di discontinuità interna a S). Possiamo pensare di applicare la (53) alle due superfici Σ_+ e Σ_- perchè su di esse il campo degli spostamenti è continuo, a differenza che su Σ ; questa diviene quindi, trascurando i contributi di S^5 (che potrebbe essere la superficie della Terra) e imponendo su G condizioni al contorno omogenee su S stessa,:

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_p(\eta, \tau) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \eta, 0) dV(\eta) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau) c_{ijpq} \nu_j \partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q] d\Sigma \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Sigma} [G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) \tau_p] d\Sigma. \end{aligned} \quad (55)$$

In questa relazione la nuova variabile introdotta η indica la generica posizione in V , mentre ξ si riferisce a Σ . Le parentesi quadrate invece hanno il significato della differenza dei valori calcolati su Σ_+ e Σ_- ⁶. In assenza di forze di volume e dato che le trazioni sono continue su Σ (ovvero che $[\tau_p(\mathbf{u}(\xi, \tau), \nu) = 0]$ la (55) diviene:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} \nu_j \partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q d\Sigma. \quad (56)$$

Si noti che è sufficiente conoscere gli spostamenti sulla faglia per conoscerli in qualsiasi punto: questo deriva dal Teorema di Unicità. La (56) non invoca direttamente le forze di volume, tuttavia le funzioni di Green che contribuiscono al calcolo degli spostamenti in (\mathbf{x}, t) sono generate da forze di volume: quindi deve esserci una relazione tra una distribuzione di dislocazioni (su una superficie di frattura attiva) e un sistema di forze. Per evidenziare l'equivalenza che esiste tra queste due quantità si ricorre ad un'altra proprietà della funzione di Dirac secondo cui:

$$\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q = - \int_V \partial \delta(\eta - \xi) / \partial \eta_q G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \eta, 0) dV(\eta), \quad (57)$$

che sostituita nella (56) porta alla:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V \left\{ - \int_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} \nu_j \partial \delta(\eta - \xi) / \partial \eta_q d\Sigma \right\} G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \eta, 0) dV(\eta). \quad (58)$$

Poichè la (58) ha la stessa forma del contributo dato dalla forza di volume (si confronti con il primo termine a destra della (55)) si può dedurre in definitiva che

$$f_p(\eta, \tau) = - \int_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} \nu_j \partial \delta(\eta - \xi) / \partial \eta_q d\Sigma. \quad (59)$$

La (59) può essere interpretata come un'altra espressione molto importante del Teorema della Rappresentazione secondo cui una sorgente sismica è ugualmente ben rappresentata sia da una distribuzione di forze che da un sistema di dislocazioni data la loro equivalenza.

⁵Immaginando che il corpo abbia dimensioni illimitate ci interessiamo ai soli contributi provenienti da Σ

⁶I segni degli ultimi due integrali, variati rispetto alla (53) dipendono dalla convenzione scelta per la sottrazione.

4.2 Il tensore Momento Sismico

Continuiamo a trattare le sorgenti sismiche all'interno del mezzo elastico costituite da dislocazioni su superfici piane. Reintroduciamo ora il concetto di tensore momento sismico \mathbf{M} in modo più approfondito. Questa quantità dipende dall'intensità della sorgente e dall'orientazione della faglia e caratterizza tutte le informazioni sulla sorgente stessa che provengono dall'osservazione delle onde sismiche che abbiano lunghezza d'onda maggiore delle dimensioni di Σ . Per sorgenti di dimensioni finite s'introduce la densità del tensore momento, \mathbf{m} , che ha le dimensioni di un momento per unità di area (o di volume). Riscriviamo la (56), che è il nostro punto di partenza per l'analisi delle discontinuità nel campo degli spostamenti, utilizzando la convoluzione $*$ fra due funzioni⁷:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} [u_i] \nu_j c_{ijpq} * \partial G_{np} / \partial \xi_q d\Sigma. \quad (60)$$

Osserviamo che nella (60) compare ancora la derivata di G_{np} rispetto alla coordinata di sorgente ξ ; possiamo pensare che questa indichi una *deformazione* della semplice sorgente puntiforme, ovvero che rappresenti una coppia di forze con braccio nella direzione q ; la somma su q indica che ogni componente dello spostamento in \mathbf{x} è equivalente all'effetto di una somma di coppie su Σ . In definitiva, per tre componenti della forza e tre possibili direzioni del braccio, esistono nove tipi di coppie di forze che abbiamo già rappresentato in figura (2). Poichè $[u_i] \nu_j c_{ijpq} * \partial G_{np} / \partial \xi_q$ nella (60) rappresenta il campo degli spostamenti per unità di area prodotto in \mathbf{x} da una coppia di forze in ξ , segue che $[u_i] \nu_j c_{ijpq}$ indica l'intensità, sempre per unità di area, della doppia coppia (p, q) , quindi definiamo una generica componente del tensore densità momento sismico:

$$m_{pq} \equiv [u_i(\xi, \tau)] \nu_j c_{ijpq}. \quad (61)$$

In termini del tensore momento sismico \mathbf{m} , la cui simmetria discende da quella di c_{ijpq} e che è dipendente dal tempo, il Teorema della Rappresentazione dello spostamento in \mathbf{x} , prodotto dalla generica discontinuità $[\mathbf{u}(\xi, t)]$ su Σ , può essere scritto come segue:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma. \quad (62)$$

La dipendenza dal tempo è un fattore molto importante da sottolineare in questo punto: in assenza di una variazione temporale del momento sismico non c'è produzione di onde elastiche! Possiamo riferirci ad un problema statico facendo la differenza tra il momento sismico iniziale e quello finale. Abbiamo accennato, introducendo la funzione di Green, che $u_n(\mathbf{x}, t)$ dipende da ciò che è successo in ξ al tempo τ ma vi dipende con un certo tempo di ritardo t . Per un corpo isotropo il tensore delle costanti elastiche si può scrivere come $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, quindi la (61) diventa:

$$m_{pq} = \lambda \nu_k [u_k(\xi, \tau)] \delta_{pq} + \mu (\nu_p [u_q(\xi, \tau)] + \nu_q [u_p(\xi, \tau)]). \quad (63)$$

Se la dislocazione è parallela a Σ in ξ allora il prodotto scalare $\nu [\mathbf{u}]$ è nullo, quindi:

$$m_{pq} = \mu (\nu_p [u_q(\xi, \tau)] + \nu_q [u_p(\xi, \tau)]). \quad (64)$$

⁷La convoluzione tra due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ è definita $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$ e concettualmente indica in questo caso che la risposta ad un certo tempo t è data dal contributo degli istanti precedenti a t

Nel caso in cui la superficie Σ coincide con il piano $\xi_3 = 0$ e la dislocazione è diretta lungo l'asse ξ_1 , il tensore densità del momento sismico è ben rappresentato dalla matrice che segue

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu [u_1(\xi, \tau)] \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu [u_1(\xi, \tau)] & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Quindi, una dislocazione di puro scorrimento è equivalente a due coppie di forze con momento opposto; questa rappresentazione di sorgente sismica è nota col nome di doppia coppia. Per un *crack* tensile, invece, per cui il piano di frattura è $\xi_2 = 0$, il tensore momento sismico è rappresentabile come segue:

$$\begin{pmatrix} \lambda [u_3(\xi, \tau)] & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) [u_3(\xi, \tau)] & 0 \\ 0 & 0 & \lambda [u_3(\xi, \tau)] \end{pmatrix}. \quad (66)$$

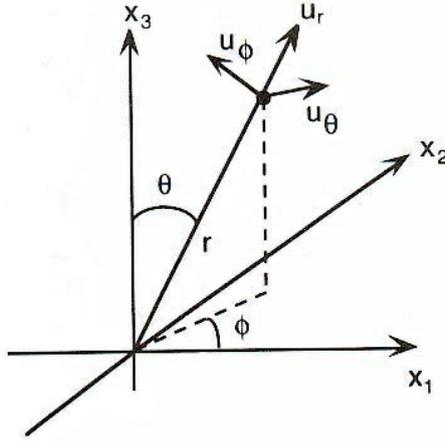


Figura 5: Schema delle coordinate polari

Se volessimo orientare arbitrariamente la sorgente doppia coppia basterebbe ruotare il sistema di riferimento, secondo lo schema in figura (5), attraverso una generica matrice di rotazione

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Ruotando gli assi le u_i , per $i = 1, 2, 3$, diventano u_r , u_θ e u_φ . Lo stesso vale per una sorgente tensile. I risultati fin qui ottenuti sono stati sviluppati per una faglia piana di superficie Σ di dimensioni finite dove agisce una sorgente puntiforme; tuttavia è più verosimile immaginare che la sorgente stessa sia estesa. Questi stessi risultati sono applicabili a sorgenti estese per integrazione dei contributi relativi ad elementi infinitesimi $d\Sigma$. Se l'osservazione del campo di spostamenti è effettuata su onde di periodo sufficientemente lungo da poter considerare le dimensioni della sorgente trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, i contributi dei diversi

elementi si possono considerare approssimativamente in fase e tutti coerenti tra loro. In questo caso la dislocazione sull'intera superficie Σ si può considerare equivalente ad un solo sistema di coppie, applicato in un punto della superficie, con il tensore del momento sismico pari all'integrale della densità del momento su Σ :

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q}, \quad (68)$$

dove

$$M_{pq} = \int_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma. \quad (69)$$

Le componenti non nulle del tensore \mathbf{M} equivalgono al *momento sismico scalare*

$$M_0 = \mu \bar{u} S, \quad (70)$$

dove \bar{u} è la dislocazione media su Σ e S è l'area della superficie.

5 I parametri di sorgente e l'energia sismica

L'energia totale rilasciata da un terremoto è la somma dell'energia sismica E_S (sotto forma di onde elastiche e deformazione statica) e dell'energia dissipata anelasticamente in forma di calore E_R :

$$E = E_S + E_R. \quad (71)$$

L'unica parte di E che si è in grado di misurare è E_S , perciò si usa scrivere

$$E_S = \eta E, \quad (72)$$

dove η è detto *coefficiente di efficienza sismica* ed ha un valore considerevolmente inferiore all'unità. È utile conoscere le relazioni che legano tale energia agli altri parametri in gioco. Esiste infatti una dipendenza tra il valore della dislocazione in un terremoto, le dimensioni della faglia e l'energia di deformazione elastica che viene rilasciata dalla dislocazione stessa. Ed esiste anche una relazione che lega l'energia al momento sismico scalare. Vediamo queste due relazioni in dettaglio.

5.1 Energia sismica rilasciata da una dislocazione e caduta di sforzo

Vediamo perchè si parla di energia rilasciata da una dislocazione ed esplicitiamo la relazione che abbiamo accennato poco sopra [Boschi et Dragoni, 2000]. Una dislocazione è causata da un campo di sforzi σ_{ij} applicato in un mezzo elastico; ma essa, a sua volta, poichè comporta uno spostamento di una superficie rispetto ad un'altra, produce un campo di sforzi σ_{ij}^d . Il campo di sforzi iniziale viene quindi modificato dall'aggiunta del campo dovuto alla dislocazione:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^d. \quad (73)$$

Questa modifica, che una dislocazione porta al campo degli sforzi e quindi a quello delle deformazioni, può essere letta come una variazione di energia di deformazione elastica all'interno del mezzo. Chiamiamo W e W' l'energia di deformazione per unità di volume iniziale e finale e calcoliamo tale variazione di energia. Si ha

$$W' = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \epsilon'_{ij}, \quad (74)$$

che può anche essere scritta, sfruttando la (73) e l'equivalente per la deformazione, come:

$$W' = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} u^d_{i,j} + \frac{1}{2} \sigma^d_{ij} \epsilon_{ij}, \quad (75)$$

dove $u^d_{i,j} = \epsilon^d_{i,j}$ è la deformazione dovuta alla dislocazione e $\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = W$. Sfruttando la legge di Hooke generalizzata la (75) diventa:

$$\begin{aligned} W' &= W + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} u^d_{i,j} + \frac{1}{2} c_{ijkl} u^d_{k,l} \epsilon_{ij} \\ &= W + \frac{1}{2} \sigma'_{ij} u^d_{i,j} + \frac{1}{2} \sigma_{kl} u^d_{k,l}. \end{aligned} \quad (76)$$

Possiamo quindi scrivere la variazione totale di energia elastica

$$\Delta E_S = \int_V (W' - W) dV, \quad (77)$$

come

$$\Delta E_S = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) u^d_{i,j} dV. \quad (78)$$

La (78) può ancora essere scritta come:

$$\Delta E_S = \frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) u^d_{i,j}]_{,j} dV, \quad (79)$$

considerando la legge del moto dell'elastodinamica (1) secondo la quale $\sigma_{ij,j} = \sigma'_{ij,j} = 0$, essendo questi campi statici, e supponendo che non ci siano forze di volume. Il teorema di Gauss ci permette di modificare ancora la (79) in:

$$\Delta E_S = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) u^d_{i,j} n_j dS, \quad (80)$$

dove S (pedice dell'integrale) è la superficie racchiusa dal volume V , che comprende le due facce del taglio di dislocazione Σ^+ e Σ^- , e n_j è il versore perpendicolare a S .⁸ La (80) si può quindi dividere sulle due superfici del taglio:

$$\Delta E_S = \frac{1}{2} \int_{\Sigma^+} (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) u^d_{i,j} n_j^+ dS + \int_{\Sigma^-} (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) u^d_{i,j} n_j^- dS. \quad (81)$$

Le superfici Σ^+ e Σ^- coincidono, per questo le loro normali sono legate dalla seguente relazione:

$$n_i^+ = -n_i^-; \quad (82)$$

in definitiva, ponendo $n_i^- = n_i$ e $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$, la (81) diventa:

⁸Non ci preoccupiamo della superficie esterna al volume V perchè, nel caso di un mezzo illimitato, assumiamo gli sforzi nulli su di essa.

$$\Delta E_S = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) \Delta u_i n_j dS. \quad (83)$$

Questa equazione è detta *relazione di Volterra*. Il segno meno indica che, in generale, la dislocazione produce una diminuzione dell'energia elastica di deformazione totale nel mezzo, si tratta cioè di un processo che favorisce una situazione di maggiore stabilità. Questo, però, non è vero localmente! Infatti, in prossimità del bordo di dislocazione, lo sforzo finale viene accresciuto (anche di molto) dalla dislocazione e si crea una situazione d'instabilità. Ciò dipende dal fatto che in prossimità della dislocazione σ_{ij}^d è positivo, mentre esso è negativo altrove su Σ . Questo fenomeno è noto come *concentrazione di sforzo* ed ha un ruolo importante nel meccanismo dei terremoti. Dal segno di σ_{ij}^d dipende anche il segno della *caduta di sforzo* dovuta alla dislocazione:

$$\Delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \sigma'_{ij}(\mathbf{x}) = -\sigma_{ij}^d(\mathbf{x}). \quad (84)$$

Si noti che la caduta di sforzo ha un valore negativo se $\sigma_{ij}^d(\mathbf{x})$ è positivo, ovvero vicino al bordo di dislocazione.

5.2 L'energia di deformazione e il momento sismico.

Prestiamo ora attenzione al legame tra l'energia e il momento sismico scalare [Udias, 1999]. Il momento sismico scalare, dato dalla (70), è legato all'energia rilasciata da un terremoto in quanto è una misura dell'entità di quest'ultimo. Esso rappresenta infatti l'intensità della sorgente ed è misurato in Nm . In forma semplificata l'energia rilasciata da una frattura può anche essere espressa tramite la (83) come segue⁹:

$$E = \bar{\sigma} \Delta u S, \quad (85)$$

intendendo con $\bar{\sigma}$ lo sforzo di taglio medio che agisce sulla faglia prima e dopo l'evento, definito dalla seguente relazione:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma'), \quad (86)$$

dove σ e σ' sono stati già definiti nel paragrafo precedente. Sostituendo nell'espressione dell'energia la (70) si ottiene:

$$E = \frac{\bar{\sigma}}{\mu} M_0. \quad (87)$$

Nel caso in cui la caduta di sforzo sia totale, ovvero se $\sigma' = 0$ in assenza di attrito, allora la (84) diventa:

$$\Delta \sigma = \sigma = 2\bar{\sigma}, \quad (88)$$

che sostituita nella (87) ci dà l'espressione che cercavamo:

$$E = \frac{\Delta \sigma}{2\mu} M_0. \quad (89)$$

⁹Sia la (70) che la (85) derivano dalle loro espressioni più generali per una sorgente sulla quale i valori puntuali sono costanti.

6 Caso particolare di una sorgente estesa rettangolare piana: simulazioni

In questo capitolo trattiamo un caso particolare di sorgente: una sorgente di taglio estesa, rappresentata da una dislocazione arbitraria sul piano di faglia, di forma rettangolare, posta nel piano x_1x_3 (per la geometria del problema ci si può riferire alla figura (4)). Sulla sua superficie immaginiamo una caduta di sforzo $\Delta\sigma$ costante e una distribuzione della funzione di dislocazione Δu variabile rispetto alle coordinate spaziali interne alla faglia. Questo modello di sorgente sismica viene introdotto in un programma di simulazioni creato per poter calcolare numericamente i valori di spostamento, deformazione e sforzo in un mezzo elastico infinito ed omogeneo su un piano orientato secondo gli assi principali. I risultati calcolati dal programma vengono mappati attraverso un programma di grafica.

6.1 Modellazione di una faglia rettangolare

Come accennato, abbiamo scelto di occuparci in particolare di un tipo di sorgente estesa di forma rettangolare sulla cui superficie abbiamo supposto una caduta di sforzo costante $\Delta\sigma$ e un andamento variabile della funzione di dislocazione Δu . La distribuzione di Δu deve soddisfare l'equazione dell'elastostatica con la condizione al contorno di essere nulla sul perimetro di faglia. In letteratura esistono diverse modellazioni di faglie/sorgenti estese, riguardanti specifiche geometrie, che danno le funzioni di dislocazione interna e di sforzo esterno alla faglia stessa. In particolare ricordiamo il modello di faglia infinitamente lunga di *Knopoff* [*Knopoff*,1957; *Kasahara*, 1981]; il modello di faglia ellittica di *Starr* [*Kasahara*, 1981]; il modello di faglia circolare [*Udias*, 1999]. Tuttavia, nella letteratura più recente, si trova più spesso trattato il caso di sorgente rettangolare [*Chinnery*,1962,1963; *Iwasaki et Sato*, 1979; *Okada*, 1985,1992.]. Perciò la nostra attenzione si è rivolta alla faglia rettangolare, anche per la sua maggiore attinenza alla realtà: soprattutto i grandi terremoti, infatti, sono caratterizzati da fratture che si allungano molto in superficie mentre, arrivate ad una certa profondità, rimangono circa costanti in altezza.

Sul piano di faglia abbiamo modellato la distribuzione continua della dislocazione secondo la seguente funzione che soddisfa le condizioni richieste:

$$\Delta u = \frac{\Delta\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{W}{2}\right)^2 - x^2\right] \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - y^2\right]}{\frac{LW}{4}}}, \quad (90)$$

valida per $-W/2 \leq x \leq W/2$ e $-L/2 \leq y \leq L/2$ con L, W dimensioni della faglia, x, y coordinate spaziali, $\Delta\sigma$ la caduta di sforzo e μ il modulo di taglio. Questa scelta è stata dettata da un'attenta analisi dei risultati già noti dalla letteratura. In primo luogo precisiamo che a tutt'oggi non sembra ancora esistere un modello teorico che fornisca l'andamento della distribuzione di dislocazione su una faglia rettangolare, non esiste cioè una soluzione analitica per questo tipo di problema; esistono, però, modelli numerici che mostrano un andamento tridimensionale a calotta simile alla (90) su questo tipo di sorgente estesa [*Kostrov et Das*, 1998]. Inoltre abbiamo immaginato che l'andamento in questo caso sia dello stesso tipo di quello proposto per una faglia circolare [*Keilis et Borok*, 1958; *Udias*, 1999] che abbiamo quindi preso come riferimento, tenendo presente la seconda dimensione.

La scelta di porre costante la caduta di sforzo sulla faglia è stata semplificativa.

6.2 Il programma di simulazione

Il programma di simulazione di una frattura all'equilibrio è stato scritto nel linguaggio FORTRAN; questo può calcolare lo spostamento, la deformazione e lo sforzo generato da una dislocazione arbitraria, in una faglia rettangolare, piana, verticale, in ogni punto del mezzo elastico circostante su uno dei piani principali. Il programma lavora per punti, sommando i diversi contributi in maniera discreta. Si è immaginato di suddividere la sorgente e lo spazio circostante in un numero arbitrario di cellette; ciascuna celletta sulla superficie di faglia rappresenta una sorgente puntiforme affinché si possa sfruttare la teoria elastostatica rivisitata in questa trattazione. I diversi contributi vengono sommati e le approssimazioni nel risultato finale saranno tanto minori quanto più piccole si scelgono le dimensioni di cella (è doveroso ricordare che *Okada*, 1985, 1992, ha risolto il problema di faglia estesa rettangolare analiticamente, senza ricorrere alla discretizzazione). Immaginando, quindi, che M e N rappresentino il numero di cellette sui due lati della sorgente, p e q le generiche coordinate del punto centrale di ciascuna sua celletta e Σ_{pq} la sua superficie, il programma calcola il valore dello spostamento in un generico punto dello spazio a distanza r variabile secondo la

$$u = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N u(m_{pq}), \quad (91)$$

dove $u(m_{pq})$ si calcola attraverso la (31), con

$$m_{pq} = \mu \Delta u_{pq} \Sigma_{pq}. \quad (92)$$

Δu_{pq} è la dislocazione sulla superficie di faglia che il programma calcola secondo l'equazione che segue, in accordo con la (90):

$$\Delta u_{pq} = \Delta u_{max} \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x_1^2\right] \left[\left(\frac{W}{2}\right)^2 - x_3^2\right]}}{\frac{LW}{4}}, \quad (93)$$

dove x_1 e x_3 sono le coordinate interne alla faglia e Δu_{max} è la dislocazione massima.

La figura (6) mostra l'andamento di Δu_{pq} su un generico piano di faglia LW così come viene calcolato in maniera discreta dal programma stesso; sul perimetro di faglia, dove la funzione in realtà è uguale a zero per le condizioni al contorno, come abbiamo visto dall'equazione (90), si osserva un effetto di bordo dovuto alla scelta numerica ed arbitraria di calcolare Δu nei punti pq centro di ogni celletta. I valori delle variabili che compaiono nella (93) vengono assegnati arbitrariamente dall'utente del programma. In particolare il valore di Δu_{max} deve essere stimato tenendo presente che per una sorgente rettangolare vale la seguente relazione:

$$\Delta u_{max} = \frac{\Delta \sigma \sqrt{LW}}{\mu \cdot 2}, \quad (94)$$

dove ricordiamo che $\Delta \sigma$ è la caduta di sforzo sulla faglia. Se l'utente disponesse della stima della magnitudo dell'evento piuttosto che di $\Delta \sigma$ o di Δu_{max} (da un catalogo la magnitudo è un'informazione più comunemente fornita) allora si possono sfruttare le seguenti relazioni che legano la magnitudo M a $\Delta \sigma$:

$$M_0 = 9.1 + 1.5M, \quad (95)$$

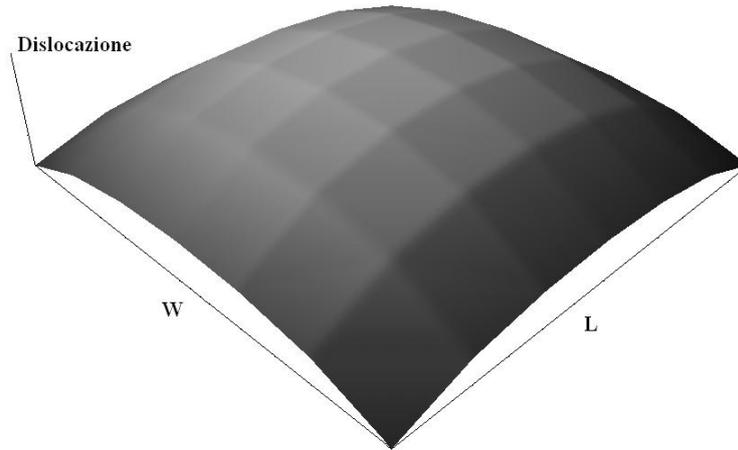


Figura 6: Dislocazione variabile sulla faglia

legge di *Kanamori and Anderson* [*Kanamori and Anderson*, 1975] che esplicita la proporzionalità fra la magnitudo M e il logaritmo del momento sismico scalare M_0 (espresso in Nm);

$$M_0 = \Delta\sigma \frac{\pi^2}{32} (WL)^{3/2}, \quad (96)$$

equazione che mette in relazione il momento sismico scalare alla caduta di sforzo per una faglia rettangolare. Le equazioni (94) e (96) sono soluzioni del problema statico per faglia rettangolare riviste per questo particolare caso geometrico partendo dalla nota teoria sviluppata da *Keilis et Borok*, (1958) e *Knopoff*, (1957) rispettivamente per faglia circolare e per faglia infinitamente lunga. Dal campo degli spostamenti, calcolato su ogni punto della griglia immaginata nello spazio elastico, attraverso la definizione di deformazione e la Legge di Hooke per un mezzo omogeneo ed isotropo, il programma può calcolare anche il campo di deformazione e quello di sforzo punto per punto. Abbiamo appena accennato alla possibilità di lasciare all'utente la scelta di alcune variabili del codice; prima di passare alle rappresentazioni delle simulazioni fatte, riportiamo di seguito un breve schema che spiega quali sono le scelte che il programma permette di eseguire all'inizio di ogni nuova simulazione (**dati variabili**):

- le due dimensioni della faglia e della griglia;
- i diversi passi sulla faglia e sulla griglia, ovvero la grandezza delle cellette in cui le immaginiamo suddivise;
- il valore della dislocazione massima sulla frattura o equivalentemente il valore della caduta di sforzo o della magnitudo dell'evento inducente;
- il tipo di dislocazione sulla frattura, costante o variabile;

Tabella 1: Valore delle variabili usate nelle simulazioni della distribuzione degli spostamenti, delle deformazioni e degli sforzi intorno la faglia

Variabile	Valore
Dimensioni della faglia	10 $km \times 10 km$
Passo sulla faglia	0.05 km
Dimensioni della griglia	20 $km \times 20 km$
Passo sulla griglia	0.5 km
Dislocazione massima	0.1 m

- il tipo di faglia: trascorrente, a scorrimento verticale o tensile;
- la giacitura del piano della griglia, il piano, cioè, dove si vuole siano effettuati i calcoli richiesti;
- la grandezza da calcolare tra spostamenti, deformazioni o sforzi.

Mentre i **dati fissi** sono:

- il piano di giacitura della faglia x_1x_3 ;
- la forma geometrica della faglia rettangolare.

6.3 Simulazioni

In questo paragrafo saranno spiegate e commentate delle simulazioni che abbiamo eseguito con il codice di calcolo visualizzate attraverso mappe relative a vari casi. Questo lavoro è servito anche come verifica del programma e della modellazione presentata: abbiamo potuto confrontare direttamente i nostri risultati con relativi risultati già esistenti in letteratura. Il buon esito del confronto è in parte una verifica della modellazione del fenomeno e del programma scritto. Nella letteratura specialistica sono stati presentati negli ultimi anni molti studi eseguiti attraverso codici capaci del calcolo del campo di sforzo intorno una sorgente [*Stein et al.*, (1997); *Gomberg et al.*, (2000); *King and Cocco*, (2001); *Stein*, (1999); *Kilb et al.*, (2002); *Toda and Stein*, (2003); *Nostro et al.*, (2005); *Toda et al.*, (2005); e molti altri]. Alcuni di questi affrontano anche problemi che nella modellazione qui presentata sono stati trascurati per semplicità (come il problema del semispazio che verrà accennato nell'ultimo paragrafo); tuttavia ogni modellazione può essere utile per un costante confronto di risultati e per le diverse soluzioni che può proporre. Un esempio in questo caso può essere la distribuzione di dislocazione sulla faglia che è stata proposta in questa trattazione (equazione (90)) che è una soluzione originale ad un problema fisico: può essere interessante infatti in applicazioni più complicate optare per una dislocazione variabile pur non potendone stimare la vera distribuzione. In tutte le simulazioni si sono scelti dei valori sempre uguali per le variabili utilizzate che mostriamo in tabella (1).

Ricordiamo che il centro degli assi coordinati lo abbiamo posto al centro della faglia e abbiamo richiesto al programma una dislocazione sempre variabile su di essa, come descritto nella (93). Ciò che abbiamo invece variato è stato il tipo di dislocazione, il piano di proiezione della griglia e le grandezze richieste in uscita. Un'osservazione: se la griglia è posta sui piani perpendicolari alla faglia abbiamo fissato la terza dimensione uguale a zero, mentre questo non è possibile sul piano stesso di faglia perchè su di essa ci sono punti singolari sui quali il programma non può calcolare le uscite; in questi casi abbiamo scelto per la direzione perpendicolare al piano il valore, tendente a zero, di 0.02 km . Ricordiamo, infine, che SURFER, il programma di grafica utilizzato per le mappe, lavora per interpolazione dei dati e che non rappresenta mai variazioni a scalino ma addolcisce i contorni secondo un certo suo algoritmo: questo significa che in questo tipo di visualizzazione bisogna sempre tener presente un certo grado di arbitrarità nella visualizzazione dei risultati. Nonostante queste approssimazioni i grafici rappresentano con una buona approssimazione ciò che ci interessa vedere.

6.4 Gli spostamenti

Occupiamoci inizialmente di analizzare il campo degli spostamenti di una faglia trascorrente. In figura (12) sono mappati gli spostamenti lungo x_1 su un piano parallelo al piano di faglia: la figura conferma in pieno quanto ci aspettavamo di trovare, ovvero che la dislocazione lungo l'asse di scorrimento fosse massima al centro della faglia e diminuisse ai suoi bordi, restando sempre positiva. In figura (13) rimaniamo sullo stesso piano ma osserviamo gli spostamenti lungo x_2 : le due metà di faglia rispetto a x_1 si comportano in maniera simmetrica ma con segni opposti; se immaginiamo la faglia vista dall'alto è come se questa si deformasse in maniera da sembrare una S , con due pance dovute agli spostamenti da una parte positivi e dall'altra negativi rispetto a x_2 . Si noti che, in questo caso di faglia trascorrente, sul piano di faglia saranno nulli gli spostamenti lungo x_3 . La figura (14) riporta di nuovo un'evidente simmetria di forme degli spostamenti (ma con segno scambiato) lungo x_1 sul piano x_2x_3 . Questa è dovuta allo scorrimento in verso opposto dei due lembi di faglia l'uno rispetto all'altro. Su questo piano le rimanenti componenti dello spostamento sono entrambe nulle. Può accadere, sui piani perpendicolari al piano di faglia, che più di una componente dello spostamento sia nulla; questo accade quando ci troviamo su un piano che divide la faglia in due parti uguali che lungo una certa direzione agiscono in contrapposizione. Passiamo alla faglia a rigetto verticale. Confrontando la figura (16) con la figura (13) e la (17) con la (15) possiamo avere una conferma visibile che i due fenomeni di dislocazione trascorrente e a scorrimento verticale sono fisicamente uguali con lo scambio di x_1 con x_3 . Osserviamo infine i risultati ottenuti con un faglia di tipo *crack*. I grafici ottenuti non sono stati come ce li aspettavamo intuitivamente: si può facilmente cadere nell'errore di credere che un crack tensile, in quanto tale, provochi spostamenti di segno positivo in tutte le direzioni; questo non è vero e si può vedere dai grafici. Immaginiamo, per esempio, di trovarci nel piano x_2x_3 come in figura (18), dove sono rappresentati gli spostamenti lungo x_3 ; ricordiamo che la componente della forza in atto lungo x_2 prevale sulle altre secondo la (66): la componente u_2 dello spostamento su tale piano sarà quindi d'intensità maggiore rispetto alle rimanenti, positiva verso x_2 positivo e viceversa; si tratterà quindi di una dilatazione; i segni delle altre due componenti, invece, comporteranno delle contrazioni, anche se di minore intensità, proprio in corrispondenza dell'intersezione col piano di faglia. E' come se allontanassimo i due estremi di una strisciolina elastica: provocheremmo un allungamento nella direzione della forza esercitata, ma ciò comporterebbe una contrazione al centro dell'oggetto. Questa contrazione è visibile in figura nei lobi minori, che si trovano proprio in corrispondenza dell'intersezione col piano

di faglia. Può essere interessante, come abbiamo già anticipato, osservare che si trovano in letteratura rappresentazioni confrontabili (a meno di ragionevoli differenze dei valori dovute alla scelta dei parametri iniziali) a quelle appena presentate. Per fare almeno un esempio nel caso degli spostamenti *M.A. Chinnery*, [1961], propone la figura (19) come risultato analogo (per la geometria del problema) a quello qui presentato in figura (15). *Chinnery* ha determinato gli andamenti del campo di spostamento sulla superficie terrestre (piano x_1x_2) per una faglia verticale trascorrente in un mezzo semi-infinito, elastico, omogeneo, isotropo e poissoniano ($\lambda = \mu$). *Chinnery* ha posto nel suo lavoro del 1961 $W = 2L = 10$ km e una dislocazione totale sulla faglia pari a 1 m per la figura sopra e 2 m per la figura sotto. La dislocazione è quindi costante sulla sorgente e avrà un comportamento come quello mostrato in figura (9)¹⁰.

6.5 Gli sforzi

Gli sforzi hanno un comportamento più complesso degli spostamenti. Questo dipende anche dal fatto che le componenti dello sforzo differenti fra loro sono sei, che proiettate sui tre possibili piani cartesiani danno origine a diciotto diverse figure (noi non riporteremo tutte e diciotto le mappe, tralascieremo quelle componenti dello sforzo che su alcuni piani hanno valori molto deboli, inferiori a 500 *Pascal*, o nulli). Qui ci occuperemo solo di una faglia di tipo trascorrente. Facciamo anche alcune osservazioni. L'intervallo di valori interassato dagli sforzi è molto ampio, va dallo zero alle decine di milioni di *Pascal*; in questo caso, più che per gli spostamenti, è stato necessario, quindi, scegliere una scala logaritmica che rappresentasse tutti i diversi valori di sforzo. A volte, variando tale scala, si possono ottenere figure più dettagliate. Anche per gli sforzi, come per gli spostamenti, il programma non può eseguire i calcoli sullo stesso piano di faglia, dove incontra punti di singolarità. Si noti che nei casi in cui ci troviamo in questo piano abbiamo scelto un valore di x_2 maggiore rispetto ai casi riguardanti gli spostamenti (0.1 *km* invece di 0.02 *km*). Questo allontanamento dal piano di faglia è stato necessario perchè, facendo delle prove, ci siamo accorti che SURFER, per $x_2 = 0.02$, presentava i grafici relativi alle componenti dello sforzo sul piano x_1x_3 con delle approssimazioni che non avevano riscontro nei dati. In proposito notiamo che rispetto ad x_2 gli spostamenti lungo x_1 hanno un'andamento teorico del tipo $u_1 = \pm D/2 - (D/\pi) \arctan(x_2/W)$, come mostrato in figura (8) con dati teorici, dove D rappresenta la dislocazione massima sulla faglia, W la sua altezza e dove il primo termine è positivo se x_2 è positivo e viceversa. SURFER non fa altro che approssimare come continua questa funzione, che in realtà presenta un punto di discontinuità per $x_2 = 0$, con il risultato obsoleto appena accennato quando ne viene fatta la derivata per ottenere gli sforzi. Risolviamo in parte il problema allontanandoci, quindi, dal punto critico $x_2 = 0$, pur perdendo così in risoluzione. Osserviamo infine che, se il modello di distribuzione della dislocazione sulla faglia che abbiamo adottato (mostrato in figura (8) fosse fisicamente corretto, dovremmo trovare che la caduta di sforzo è nulla sulla faglia stessa a fine evento; questo nel nostro caso non si ottiene ma abbiamo una distribuzione dello sforzo come quella graficata in figura (10). Ciò significa che la (93) è solo un'approssimazione della distribuzione ideale. Nella realtà è ugualmente impossibile osservare sforzi totalmente nulli sulla faglia e questo per molti motivi, basti pensare all'attrito che non permette alla dislocazione un libero movimento. Per la geometria del problema bisogna tenere presente che la maggior parte dello sforzo sarà associata alla componente σ_{12} , la componente di taglio dello sforzo che avrà il ruolo predominante nella rottura del materiale circostante la sorgente. Cominciamo quindi con

¹⁰Attenzione al fatto che lavoro di *Chinnery* si riferisce ad un semispazio, perciò è corretto confrontare solo le componenti di taglio rispetto alla superficie $x_3 = 0$!

l'osservare in figura (20) proprio il comportamento di σ_{12} su un piano parallelo al piano di faglia: all'interno del perimetro di sorgente la variazione di sforzo è negativa, la sorgente ha scaricato lo sforzo accumulato sprigionando energia sotto forma di onde elastiche e calore (il terremoto); è invece all'esterno della sorgente che si accumula, con una variazione positiva, lo sforzo, in particolare vicino al perimetro di essa: questo fenomeno è molto importante poichè si può tradurre nella capacità di una faglia di interagire con le faglie adiacenti caricandole di nuovo sforzo. Ovviamente, data la proporzionalità inversa già osservata tra lo sforzo ed il cubo della distanza, la variazione di sforzo positiva tende ad affievolirsi allontanandosi dal perimetro di sorgente. In figura (21) ci troviamo ancora su un piano parallelo a quello della sorgente ad osservare un'altra componente dello sforzo di taglio, la componente σ_{23} . In questo caso si vedono chiaramente due rilievi e due depressioni di sforzo diagonalmente simmetrici. Per capire meglio si prenda un foglio di carta, vi si faccia una taglio al centro e si facciano scivolare su un piano le due parti del foglio l'una rispetto all'altra: i due lembi di faglia si comportano esattamente come i due lembi di carta intorno alla dislocazione-taglio, ovvero creando due colline e due depressioni rispettivamente per variazioni positive e negative di sforzo di taglio. Ora occupiamoci di cosa si osserva sul piano x_1x_2 rispetto la componente predominante σ_{12} : la figura (22) mostra la tendenza della sorgente ad estendersi lungo la direzione x_1 di *slip* e di nuovo mostra un netto rilascio dello sforzo di taglio che causa il terremoto in prossimità della sorgente. Possiamo, anche per gli sforzi, confrontare il risultato ottenuto nell'ultima figura commentata con la figura (23) ottenuta da *Chinnery* nel 1963. Il problema risolto da *Chinnery* è analogo alla geometria di dislocazione imposta in questa trattazione: *Chinnery* ha determinato la distribuzione della variazione di sforzo dovuta ad una faglia verticale trascorrente con gli stessi parametri descritti nel paragrafo (6.4) per la figura (19). Dal confronto si può osservare un buon accordo fra i risultati pur dovendo tener presente la diversa scelta dei parametri iniziali ma soprattutto il fatto che *Chinnery* differentemente dai risultati qui proposti:

- risolve il problema del semispazio;
- impone una dislocazione costante, con effetti sull'andamento dello sforzo di taglio mostrati in figura (11);
- nella figura (23) si è posto sulla superficie del piano orizzontale a distanza 0 km dal lato superiore della faglia; mentre nella figura (21) ci si pone a metà del lato corto di essa tagliandola in due parti.

La figura (22) è confrontabile con esito positivo anche con l'analogo risultato che *Nostro et al.* mostrano nel lavoro del 1997 (figura (1-a) dell'articolo citato) prodotto con un codice che implementa i risultati di *Okada*, [1985,1992], per il problema statico di una sorgente rettangolare in un mezzo infinito.

7 Il problema del semispazio

In questa trattazione si immagina la faglia immersa in un mezzo infinito; si è deciso di lavorare con questa semplificazione perchè la teoria che si conosce, e che è stata alla base della modellazione proposta, è sviluppata senza tenere conto di eventuali superfici di discontinuità. Inoltre, ai fini della comprensione del comportamento della distribuzione di sforzo intorno ad

una sorgente, non si è reputato importante introdurre una complicazione il cui effetto si può in questo caso trascurare. Tuttavia nella realtà ci si trova di fronte al problema della discontinuità terra-aria e in studi più accurati questo problema non si può più trascurare. Per questo in letteratura specialistica esistono già molti lavori che si occupano della trattazione del problema di una faglia rettangolare verticale che abbia un lato coincidente con la superficie terrestre o che sia sepolta ad una certa distanza dalla superficie stessa [Steketee, 1958; Chinnery, 1961,1963; Iwasaki et Sato, 1978; Okada, 1985,1992., Nostro et al., 1997; Nostro et al., 2005 e molti altri]. Per completezza, quindi, vogliamo dare almeno una spiegazione qualitativa di come si può affrontare questo problema, riferendoci in particolare ai lavori presentati da Y.Okada e da J.A.Steketee. Introdurre una superficie di discontinuità significa introdurre dei punti di singolarità nelle relazioni usate e una nuova condizione al contorno, ovvero che le trazioni siano nulle sulla superficie di discontinuità stessa (la superficie $x_3 = 0$ nel caso della superficie terra-aria). L'idea per risolvere questo problema è quella d'immaginare la faglia sepolta nel semispazio ad una certa distanza x_3 dalla superficie e di sfruttare ancora le equazioni per gli spostamenti usate fino ad ora (come già Knopoff [1957] aveva anticipato), senza considerare la presenza di una discontinuità, ma supponendo l'esistenza di una seconda sorgente (immaginaria) speculare alla prima, la cui presenza, sul piano matematico, garantisca le condizioni al contorno richieste. La presenza di un sistema di doppie coppie di forze in un punto speculare rispetto alla faglia, $P = (x_1, x_2, -x_3)$, per sovrapposizione dei due campi di sforzo reale ed immaginario, garantisce solo in parte la condizione richiesta facendo in modo che $\sigma_{31}, \sigma_{32} = 0$ sulla superficie $x_3 = 0$, ma non che $\sigma_{33} = 0$; al contrario σ_{33} in questo modo viene raddoppiata sulla superficie di discontinuità. Per rimediare a questo inconveniente, allora, si aggiungono dei termini nel calcolo dello spostamento finale che garantiscano anche $\sigma_{33} = 0$. Quindi, il risultato finale per lo spostamento causato da una sorgente in un mezzo seminfinito avrà una forma del tipo:

$$\begin{aligned}
u_i^j(x_1, x_2, x_3) &= u_{iA}^j(x_1, x_2, -x_3) - u_{iA'}^j(x_1, x_2, x_3) + \\
&+ u_{iB}^j(x_1, x_2, x_3) + x_3 u_{iC}^j(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}
\tag{97}$$

dove i primi due termini rappresentano due sorgenti (speculari) nel mezzo infinito, il terzo è un termine relativo allo spostamento in superficie e l'ultimo è un termine dipendente esplicitamente dalla profondità. A, A', B e C sono solo denominazioni arbitrarie.

8 Conclusioni e sviluppi

In questa trattazione in un primo momento abbiamo cercato di fornire gli strumenti matematici essenziali per capire la teoria riguardo la sorgente sismica. Nella seconda parte, invece, a partire dal capitolo (6), si è fatto riferimento ad un caso particolare di sorgente sismica estesa. Si sono applicate così le relazioni analizzate precedentemente al fine di svolgere una vera e propria simulazione di frattura osservata nel caso statico attraverso delle mappe bidimensionali. Questo ha permesso una comprensione più intuitiva del fenomeno studiato attraverso le mappe dei campi di spostamento e sforzo in diverse situazioni. Questo lavoro, basato quasi esclusivamente sulla teoria classica dell'elastostatica, senza alcuna complicazione aggiunta se non la necessaria traduzione nel linguaggio di un codice numerico, mostra chiaramente il percorso dalla teoria all'applicazione. Il risultato, pur considerando la semplicità delle ipotesi fatte, spiega il comportamento fisico di una sorgente alla rottura nel mezzo ed è confrontabile con risultati noti in letteratura. Si fornisce quindi un semplice ma valido strumento di simulazione che permette la

scelta di molti parametri del problema fisico. Inoltre è stata proposta una soluzione originale di modellazione di dislocazione variabile su faglia che soddisfa le condizioni del problema fisico e che è attinente con la realtà. Abbiamo accennato nel corso della trattazione lo stretto legame che esiste tra la comprensione del comportamento dello sforzo intorno una sorgente e la comprensione del fenomeno fisico d'interazione fra terremoti. Proprio in questo senso il lavoro qui proposto ha trovato la sua naturale evoluzione. Il codice è stato infatti implementato in seguito con l'aggiunta di un algoritmo che tenesse conto del legame fisico che c'è tra la variazione di sforzo e il tasso di sismicità nel tempo (si approfondisca per questo il modello *rate-and-state* proposto da *Dieterich* [1986,1992,1994]). Abbiamo quindi potuto associare alla variazione di sforzo intorno alla faglia il comportamento della sismicità nel tempo [*Console et Catalli*, 2005]; per studiare l'interazione tra faglie abbiamo adattato ancora il modello affinché fosse in grado di simulare una vera e propria sequenza sismica in cui diverse sorgenti dislocano in tempi diversi ognuna contribuendo diversamente al tasso di sismicità [*Catalli et al.*, 2006]. In questo ultimo lavoro ci si è avvicinati il più possibile alla realtà del problema introducendo fra l'altro anche le soluzioni del campo di sforzo nel semispazio. Lo sviluppo del codice e del modello qui descritti ed in seguito implementati tende ora verso la possibilità del calcolo di probabilità di accadimento degli eventi a partire da un modello fisico e tenendo conto del peso di ciascun parametro in gioco.

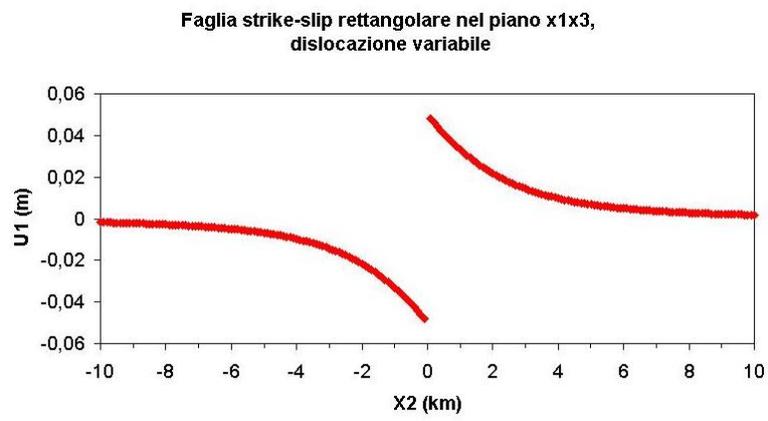


Figura 7: Dislocazione variabile lungo l'asse x_2 .

Faglia strike-slip rettangolare nel piano x_1x_3 ,
dislocazione variabile

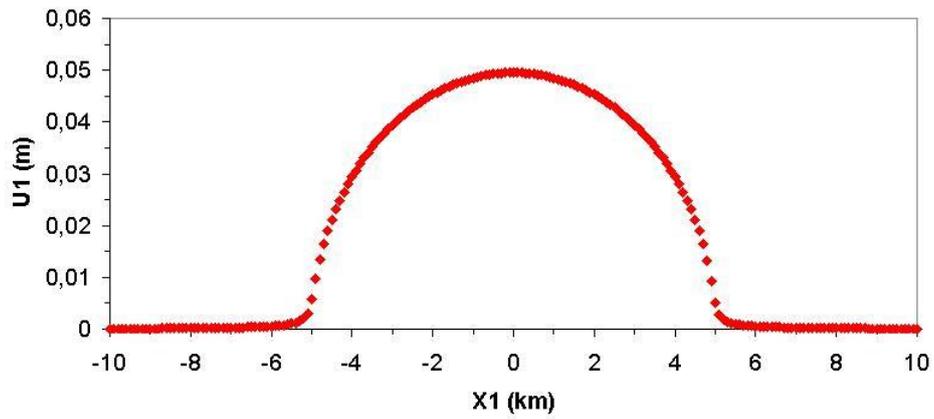


Figura 8: Dislocazione variabile lungo l'asse x_1 .

Faglia strike-slip rettangolare nel piano x_1x_3 ,
dislocazione uniforme

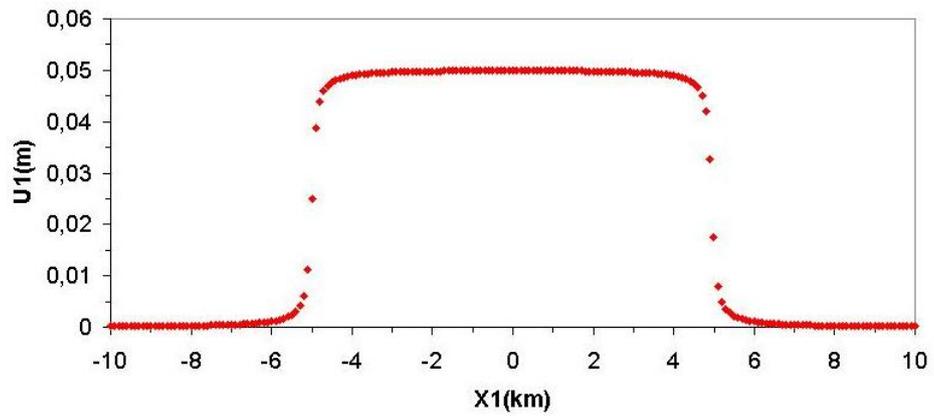


Figura 9: Dislocazione uniforme lungo l'asse x_1 .

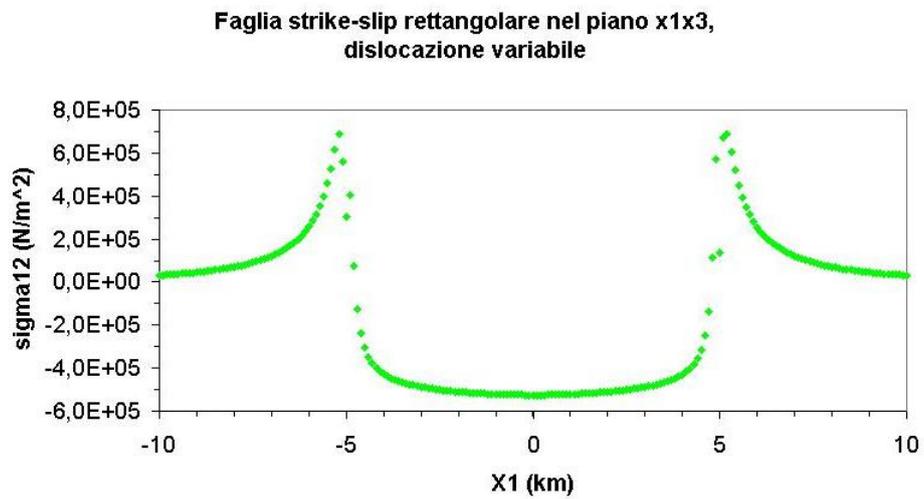


Figura 10: Sforzo di taglio σ_{12} lungo l'asse x_1 per una dislocazione variabile.

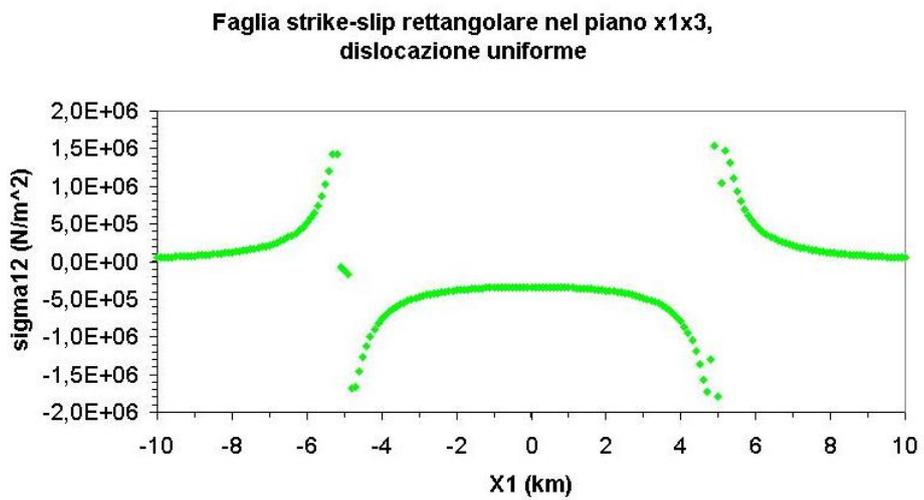


Figura 11: Sforzo di taglio σ_{12} lungo l'asse x_1 per una dislocazione uniforme.

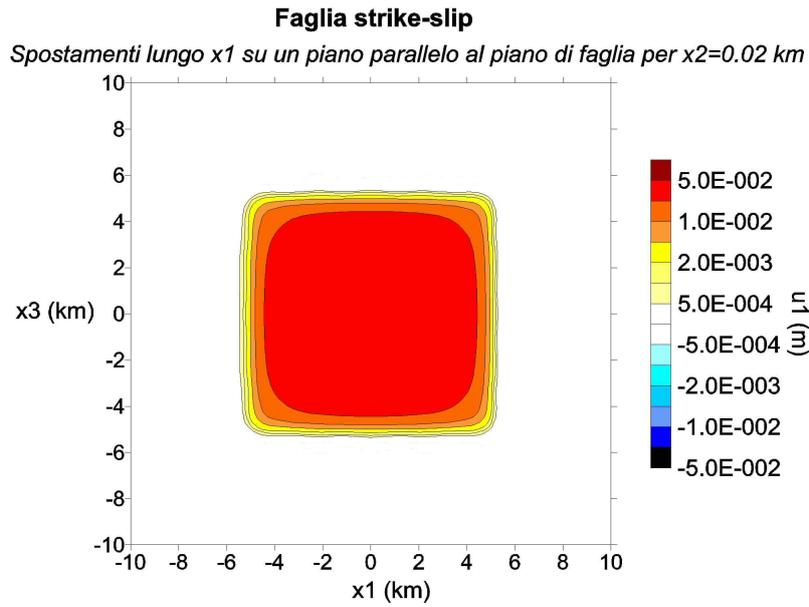


Figura 12: Spostamento lungo l'asse di scorrimento della faglia.

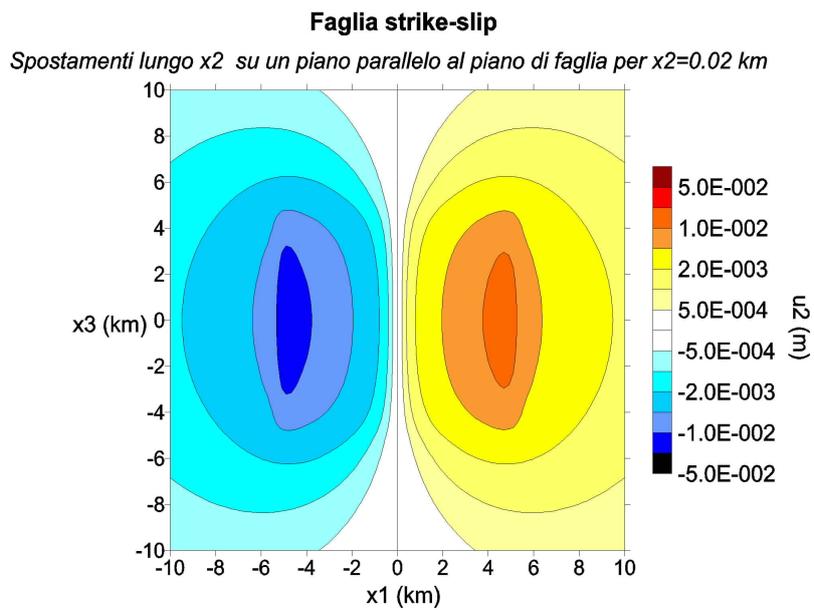


Figura 13: Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.

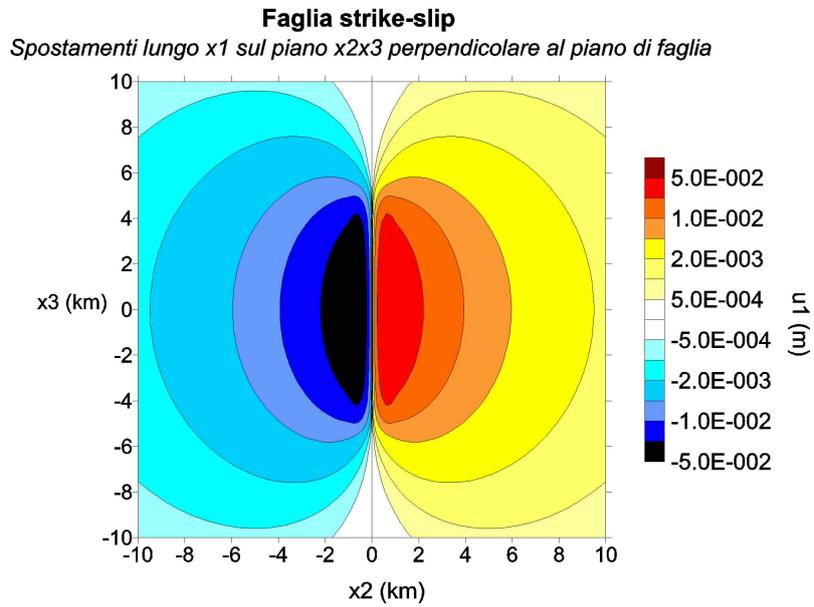


Figura 14: Spostamento lungo l'asse di scorrimento della faglia.

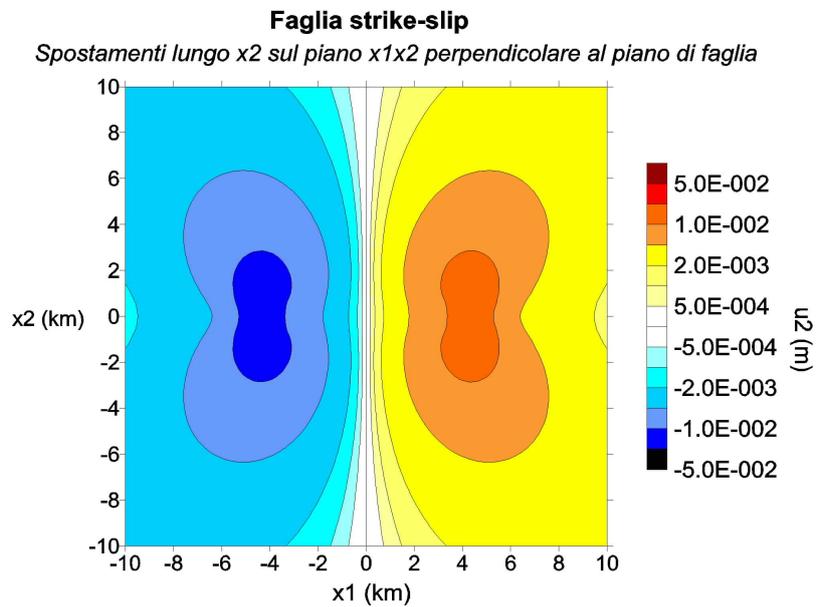


Figura 15: Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.

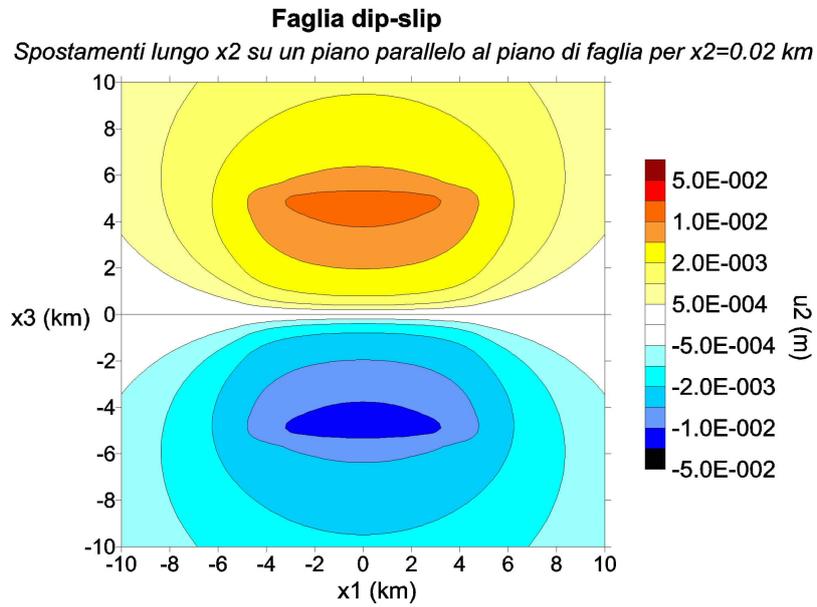


Figura 16: Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.

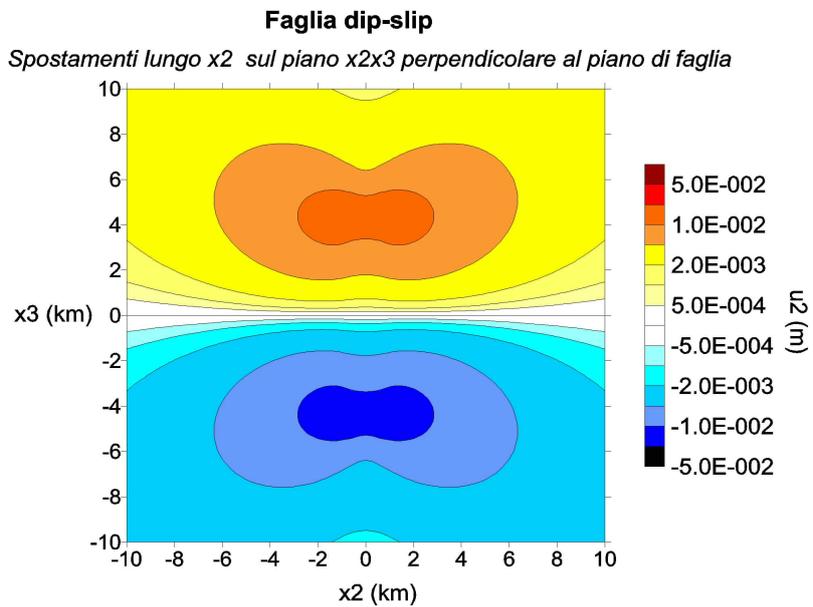


Figura 17: Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.

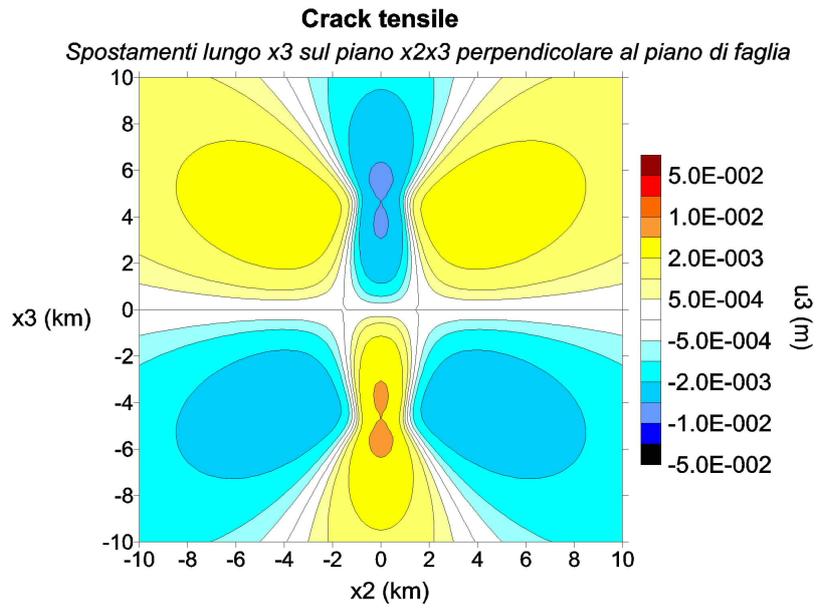


Figura 18: Spostamento lungo l'asse verticale.

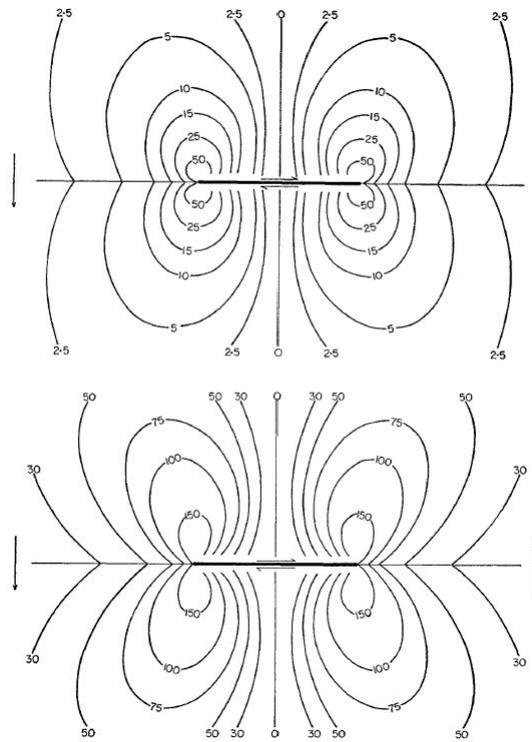


Figura 19: Spostamento lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia calcolato da *Chinnery*, [1961].

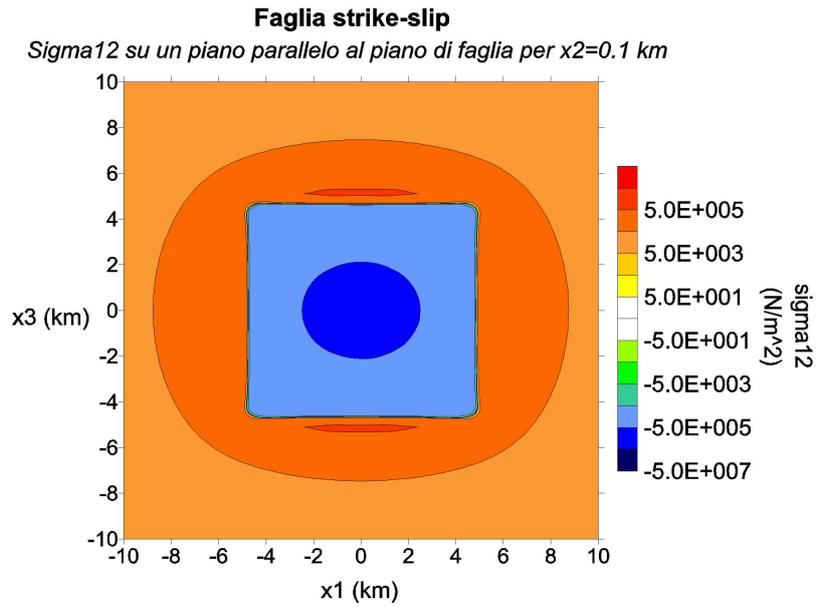


Figura 20: Sforzo di taglio lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia.

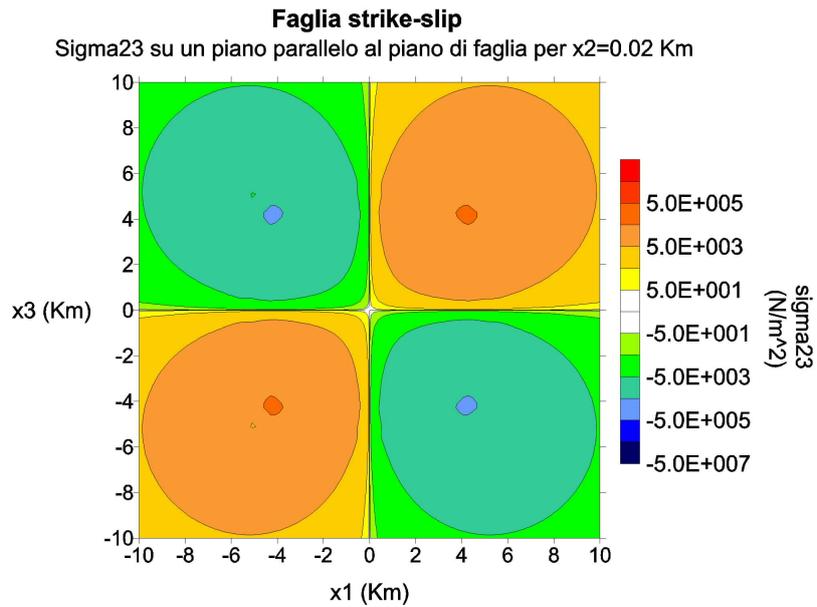


Figura 21: Sforzo di taglio lungo l'asse verticale.

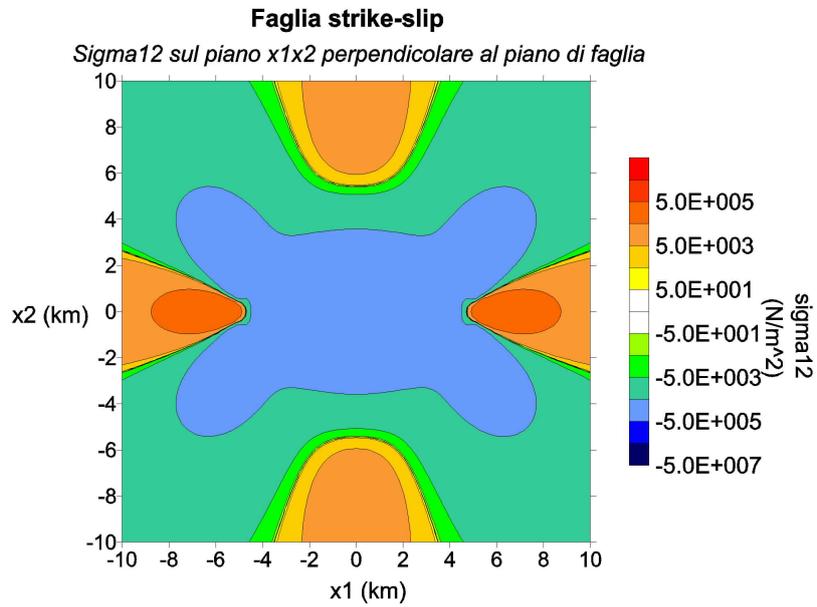


Figura 22: Sforzo di taglio lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia

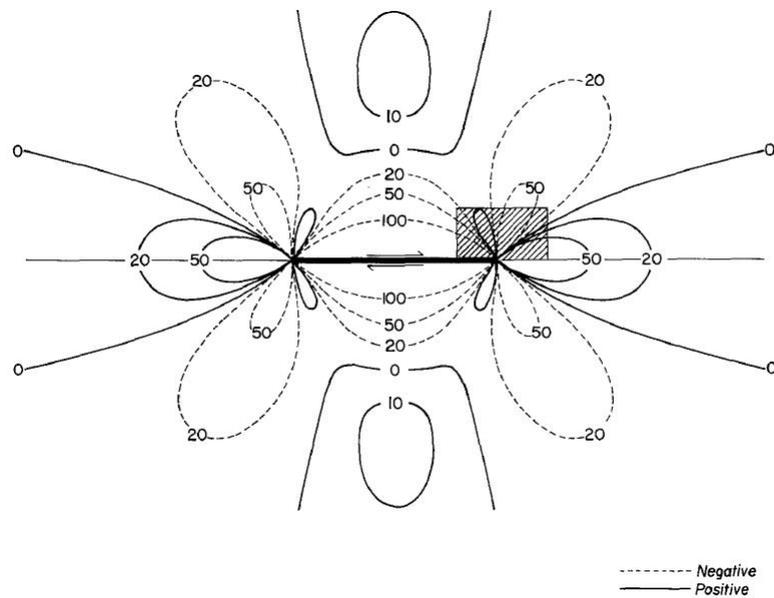


Figura 23: Sforzo di taglio lungo l'asse perpendicolare al piano di faglia, *Chinnery*, [1963].

Bibliografia

- Aki K. et Richards P.** , 1980, *Quantitative Seismology, Theory and Methods v.1*, W.H.Freeman and Company, San Francisco.
- Belardinelli M.E., Bizzarri A. et Cocco M.** , 2003, *Earthquake triggering by static and dynamic stress change*, Journal of Geophysical Research, v.108, p.1,1-1,16.
- Boatwright J. et Cocco M.** , 1996, *Frictional constraints on crustal faulting*, Journal of Geophysical Research, v.101, p.13,895-13,909.
- Boschi E. et Dragoni M.** , 2000, *Sismologia*, Utet, Torino.
- Catalli F., Console R. et Cocco M.** , 2006, *An application of the rate-state model for seismicity rate changes to the 1997 Umbria-Marche, Central Italy, seismic sequence*, in prep.
- Console R. et Rosini R.** , 1996, *Rappresentazione di sorgenti sismiche*, Pubblicazione interna Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Roma.
- Console R. et Catalli F.** , 2005, *A rate-state model for aftershocks triggered by dislocation on a rectangular fault: a review and new insights*, in print to Annals of Geophysics.
- Chinnery M.A.** , 1961, *The deformation of the ground around surface faults*, Bull. Seism. Soc. Am., v.51, No.3, p.355-372.
- Chinnery M.A.** , 1963, *The stress changes that accompany strike-slip faulting*, Bull. Seism. Soc. Am., v.53, No.5, p.921-932.
- Dieterich J.H.** , 1986, *A model for the nucleation of earthquake slip*, Earthquake Source Mechanics, Geophy.Monogr.Ser., v.37, p.36-49.
- Dieterich J.H.** , 1992, *Earthquake nucleation on faults with rate and state dependent strenght*, Tectonophysics, v.211, p.115-134.
- Dieterich J.H.** , 1994, *A constitutive law for rate of earthquake production and its application to earthquake clustering*, Journal of Geophysical Research, v.99, p.2601-2618.
- Gomberg J., Beeler N., Blanpied M. et Bodin P.** , 1998, *Earthquake triggering by transient and static deformations*, Journal of Geophysical Research, v.103, p.24,411-24,426.
- Gomberg J., Beeler N. et Blanpied M.** , 2000, *On rate and state and Coulomb failure models*, Journal of Geophysical Research, v.105, p.7857-7871.
- Harris R.A:** , 1998, *Introduction to special section: stress triggers, stress shadows, and implications for seismic hazard*, Journal of Geophysical Research, v.103, p.24,347-24,358.
- Iwasaki Y.** , 1979, *Strain field in a semi-infinite medium due to an inclined rectangular fault*, J. Phys. Earth, vol.27, p.285-314.
- Kasahara K.** , 1981, *Earthquake Mechanics*, Cambridge University Press.

- Keilis-Borok V.** , 1959, *On the estimation of the displacement in an earthquake source and of source dimensions*, Ann. di Geofisica, v.12, p.205-214.
- Kilb D., Gomberg J. et Bodin P.** , 2002, *Aftershock triggering by complete Coulomb stress changes*, Journal of Geophysical Research, v.107, p.2,1-2,14.
- King G.C.P. et Cocco M.** , 2001, *Fault interaction by elastic stress changes: new clues from earthquake sequences*, Advances in Geophysics, v.44, p.1-39.
- Knopoff L.** , 1957, *Energy release in earthquakes*, Publication No.90, Institute of Geophysics, University of California, U.S.A., p.44-51.
- Kostrov B.V. et Das S.** , 1998, *Principles of Earthquake source mechanics*, Cambridge University Press.
- Lay T. et Wallace T.C.** , 1990, *Modern Global Seismology*, Accademic Press.
- Malvern L.E.** , 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mendoza C. et Hartzell S.H.** , 1988, *Aftershock patterns and main shock faulting*, Bull. Seism. Soc. Am., v.78, p.1438-1449.
- Nostro C., Cocco M., Belardinelli M.E.** , 1997, *Static Stress Changes in Extensional Regimes: An Application to Southern Apennines (Italy)*, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 87, No. 1, pp. 234-248.
- Nostro, C., Chiaraluca, L., Cocco, M., Baumont, D., and Scotti, O.** , 2005, *Coulomb stress changes caused by repeated normal faulting earthquakes during the 1997 Umbria-Marche (central Italy) seismic sequence*, J. Geophys. Res., v.110, B05S20, doi:10.1029/2004JB003386.
- Okada Y.** , 1985, *Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space*, Bull. Seism. Soc. Am., v.75, No.4, p.1135-1154.
- Okada Y.** , 1992, *Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space*, Bull. Seism. Soc. Am., v.75, No.4, p.1135-1154.
- Sgrigna V.** , 1997, *Dispense del Corso di Geofisica*, Dipartimento di Fisica, Università degli Studi Roma Tre, Roma.
- Stein, R.S., Barka, A.A., and Dieterich, J.H.** , 1997, *Progressive failure on the North Anatolian fault since 1939 by earthquake stress triggering*, Geophys. J. Int., v.128 pp. 594-604.
- Toda, S. et Stein, R. S.** , 2003, *Toggling of seismicity by the 1997 Kagoshima earthquake couplet: A demonstration of time-dependent stress transfer*, J. Geophys. Res., v.109, B12, 2567, doi:10.1029/2003JB002527.
- Toda, S., Stein, R.S., Richards-Dinger, K. and Bozkurt, S.B.** , 2005, *Forecasting the evolution of seismicity in southern California: animations built on earthquake stress transfer*, J. Geophys. Res., v.110, B05S16, doi:10.1029/2004JB003415.

- Stein R.S.** , 1999, *The role of stress transfer in earthquake occurrence*, Nature, v.402, p.605-609.
- Steketee J.A.** , 1958, *On Volterra's dislocation in a semi-infinite elastic medium*, Canadian Journal of Physics, v.36, p.192-205.
- Toda S., Stein R.S., Reasenberg P.A., Dieterich H. et Yoshida A.** , 1998, *Stress transferred by the 1995 $M_w = 6.9$ Kobe, Japan, shock: effect on aftershocks and future earthquake probabilities*, Journal of Geophysical Research, v.103, p.24,543-24,565.
- Udias A.** , 1999, *Principles of Seismology*, Cambridge University Press.

Ringraziamenti

Un indispensabile aiuto per lo svolgimento e la stesura di questo lavoro è venuto dal dott. Rodolfo Console che ringrazio per la sua disponibilità.