

**Thèse en cotutelle**

**OPTIMISATION DES CORRECTIONS  
DE FORME DANS LES ENGRENAGES  
DROITS ET HELICOIDAUX  
- APPROCHES DETERMINISTES ET  
PROBABILISTES-**

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon  
Et  
L'école nationale d'ingénieurs de Sfax

Pour obtenir  
Le grade de docteur

**École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)**  
**École doctorale : Sciences et Technologies (EDST)**  
**Formation doctorale : mécanique**

Par

**M. Dhafer GHRIBI**

(Ingénieur électromécanique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie)

Soutenue le 21 février 2013 devant la Commission d'Examen

**Jury MM.**

---

<b>D. DUREISSEIX</b>	Professeur (INSA de Lyon)	Président
<b>J.Y. DANTAN</b>	Professeur (ENSAM - Metz)	Rapporteur
<b>M. CHOUCANE</b>	Professeur (ENI Monastir)	Rapporteur
<b>F. CHAARI</b>	Professeur (ENI Sfax)	Examineur
<b>J. BRUYERE</b>	Maitre de Conférences (INSA de Lyon)	Examineur
<b>M. OCTRUE</b>	Docteur en Mécanique (CETIM)	Examineur
<b>Ph. VELEX</b>	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur de thèse
<b>M. HADDAR</b>	Professeur (ENI Sfax)	Directeur de thèse

LaMCoS – UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon  
20, Avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)

---



## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
E.E.A.	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
E2M2	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@univ-lyon.fr">e2m2@univ-lyon.fr</a>
EDISS	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
INFOMATHS	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a>
Matériaux	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
MEGA	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
ScSo	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

# Avant Propos

Cette thèse a été préparée en cotutelle entre deux institutions : l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA de Lyon) et l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS).

Ce travail s'inscrit ainsi dans le cadre de la coopération entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon, sous la direction de Monsieur le Professeur David DUREISSEIX et l'Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP) de ENI de Sfax, dirigée par le Professeur Mohamed HADDAR. De même, cette thèse est faite en collaboration avec le pôle Mécatronique, transmissions et Capteurs du Centre technique des industries mécaniques (Cetim) sous la responsabilité de Monsieur Christophe AUGÉ.

Je remercie le Professeur David DUREISSEIX d'avoir accepté d'être le Président de mon jury de thèse. Je suis également honoré de l'attention que Messieurs les Professeurs Jean-Yves DANTAN, de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Metz (ENSAM-Metz), Mnaouar CHOUCANE, de l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM) et Fakher CHAARI, de l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS) ont portée à mon travail en tant que rapporteurs et membres du jury.

Je témoigne toute ma gratitude aux Messieurs Philippe VELEX, Professeur à l'INSA de Lyon, Mohamed HADDAR, Professeur à l'ENIS et Michel OCTRUE, Docteur en mécanique et Ingénieur au Cetim de m'avoir encadré, guidé et de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions. J'exprime aussi ma plus sincère reconnaissance à Monsieur Jérôme BRUYERE, Maître de conférences à l'INSA de Lyon, qui en plus de m'avoir encadré, m'a soutenu et conseillé tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier toutes les personnes, qui de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, je m'adresse particulièrement aux membres du LaMCoS et spécialement de l'équipe SMC, pour leur sympathie, leur soutien et leur amitié.

Enfin, ma reconnaissance est acquise à tous ceux qui de près ou de loin m'ont apporté leur aide.

A ma famille

# Résumé

Cette thèse a pour objectif de mener une optimisation des corrections de forme des engrenages cylindriques, droits et hélicoïdaux. Le travail se décompose en quatre parties principales. Dans la première partie, on présente un état de l'art sur les différents types de corrections de forme proposées dans la littérature. Une analyse des travaux d'optimisation, menés jusqu'à présent, est conduite. La deuxième partie est focalisée sur une approche déterministe visant à cerner l'influence des corrections de dentures sur les principaux critères de performance. Dans ce contexte, on propose un développement analytique qui caractérise les fluctuations d'erreur de transmission quasi-statique permettant d'obtenir des relations approchées originales. En présence de plusieurs paramètres de corrections, un algorithme génétique est utilisé afin d'identifier, en un temps réduit, les solutions optimales. Nous proposons, en troisième partie, une étude probabiliste pour caractériser les corrections robustes. Ainsi, on définit une fonction objectif de robustesse faisant intervenir des paramètres statistiques. Après une étape de validation, l'estimation de ces paramètres est effectuée en utilisant les formules de quadrature de Gauss. Plusieurs études paramétriques sont ensuite menées et qui reflètent entre autre l'influence des classes de qualité, la forme de la correction, etc. Enfin, on a conduit une optimisation multicritère en utilisant un algorithme d'optimisation spécifique : « NSGA-II ».

## **Mots clés :**

Engrenages, correction de dentures, écarts de transmission, conception robuste, algorithme génétique, optimisation multicritères.

# Abstract

The objective of this PhD thesis is to define optimum tooth shape modifications for spur and helical gears with regard to a number of design parameters. The memoir is divided into four parts. A literature review on tooth modification along with optimization techniques is presented in the first section. The second part of the text is centred on a deterministic approach to the performance induced by tooth modifications on several design criteria commonly used in gearing. Some original analytical developments on transmission errors are presented which are combined with a genetic algorithm in order to define optimum profile relief. In the third part of the memoir, a probabilistic analysis is conducted based on Gaussian quadrature leading to robust tooth modifications. A number of results are presented which illustrate the influence of the quality grade, the tooth modification shapes, etc. Finally, the results delivered by a specific multi-criterion optimization algorithm “NSGA-II” are displayed and commented upon.

## **Keywords**

Gears, tooth modifications, transmission error, robust design, genetic algorithm, multi-objective optimization.

# Table des Matières

<b>Avant Propos</b> .....	<b>4</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>5</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>6</b>
<b>Table des Matières</b> .....	<b>7</b>
<b>Principales notations</b> .....	<b>10</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>13</b>
<b>Chapitre I : Modélisation - Etude bibliographique</b> .....	<b>16</b>
I.1. Introduction .....	17
I.2. Modélisation des engrenages .....	17
I.2.1. Etat de référence.....	18
I.2.1.1. Géométrie des engrenages rigides.....	18
I.2.1.2. Ecart géométrique .....	19
I.2.1.3. Cinématique des corps rigides.....	22
I.2.2. Etat déformé - Principes .....	23
I.2.2.1. Modèle élémentaire à 2 ddl .....	23
I.2.2.2. Arbres et paliers flexibles.....	24
I.2.2.3. Corps de roue dentée déformable.....	25
I.2.3. Modélisation de l'interface d'engrènement.....	26
I.2.3.1. Ecrasement au point de contact.....	26
I.2.3.2. Condition de contact.....	27
I.2.3.3. Raideur d'engrènement .....	28
I.2.3.4. Raideur d'engrènement – Expression de l'ISO 6336 [30] .....	29
I.2.3.5. Raideur d'engrènement – Modèle plus élaboré [25]–[26] .....	30
I.2.4. Mise en équation .....	34
I.2.4.1. Equation du mouvement.....	34
I.2.4.2. Introduction de l'amortissement.....	34
I.2.5. Résolution des équations du mouvement.....	35
I.3. Correction des dentures : définitions et types .....	35
I.3.1. Modifications du profil apparent.....	37
I.3.2. Corrections longitudinales.....	38
I.3.3. Modification topographique du flanc.....	40
I.4. Optimisation des corrections de dentures : Etat de l'art.....	40
I.4.1. Erreur de transmission quasi-statique sous charge.....	41
I.4.1.1. Corrections de profils seules .....	42
I.4.1.2. Corrections de profils et longitudinales combinées .....	44
I.4.2. Rendement.....	47
I.4.3. Usure .....	49
I.4.4. Grippage : scuffing.....	50
I.5. Optimisation robuste .....	52
I.5.1. Engrenages et tolérancement.....	52
I.5.2. Concept de robustesse .....	53
I.5.3. Différentes approches de la robustesse .....	54
I.5.4. Modélisation de l'incertitude / Approche probabiliste.....	55

I.5.5.	Propagation de l'incertitude .....	56
I.5.6.	Robustesse et engrenages .....	58
I.6.	Méthodes numériques d'optimisation .....	59
I.6.1.	Méthode énumérative .....	60
I.6.2.	Méthodes de gradient .....	60
I.6.3.	Méthode de recherche directe .....	62
I.6.4.	Méthodes évolutionnaires .....	62
I.7.	Conclusion .....	64
<b>Chapitre II</b>	<b>: Optimisation des corrections de forme – Approches multivariables .....</b>	<b>65</b>
II.1.	Introduction .....	66
II.2.	Problème d'optimisation : critères et contraintes .....	66
II.2.1.	Cibles d'optimisation .....	68
II.2.1.1.	Erreur de transmission quasi-statique sous charge .....	69
II.2.1.2.	Rendement (Pertes par frottement) .....	72
II.2.1.3.	Facteur pV .....	74
II.2.1.4.	Température éclair .....	75
II.2.1.5.	Synthèse sur les critères d'optimisation .....	76
II.2.2.	Contraintes à respecter .....	76
II.2.2.1.	Contrainte maximale de contact .....	77
II.2.2.2.	Contraintes en pied de dents .....	78
II.2.2.3.	Contrainte d'évitement du choc à l'engagement .....	79
II.2.2.4.	Formulation générale du problème d'optimisation .....	79
II.3.	Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique – Approche analytique .....	80
II.3.1.	Correction linéaire de profil .....	80
II.3.1.1.	Théorie .....	80
II.3.1.2.	Expression du RMS de l'écart de transmission .....	84
II.3.1.3.	Eléments de validation .....	85
II.3.1.4.	Solution du problème d'optimisation .....	86
II.3.2.	Correction linéaire de profil combinée avec un bombé .....	88
II.3.2.1.	Théorie .....	88
II.3.2.2.	Recherche des minimums de fluctuations de TEs .....	93
II.3.2.3.	Synthèse de l'approche analytique .....	94
II.4.	Optimisation multi-variables simple critère .....	94
II.4.1.	Méthode d'optimisation : Algorithme génétique .....	95
II.4.1.1.	Validation de l'algorithme génétique .....	96
II.4.1.2.	Formulation du problème avec plus de 3 variables .....	99
II.4.1.3.	Résultats numériques .....	100
II.5.	Conclusion .....	105
<b>Chapitre III</b>	<b>: Optimisation des corrections de forme – Approches probabilistes .....</b>	<b>107</b>
III.1.	Introduction .....	108
III.2.	Robustesse : formulation .....	108
III.3.	Estimation des paramètres statistiques .....	110
III.3.1.	Développement analytique .....	111
III.3.2.	Méthodes numériques .....	112
III.3.2.1.	Méthode des simulations de Monte Carlo .....	112
III.3.2.2.	Méthode d'intégration numérique : Quadrature de Gauss .....	113
III.4.	Optimisation des corrections de profil .....	115
III.4.1.	Approche semi-analytique /Modèle de raideur simplifié .....	115
III.4.2.	Optimisation numérique .....	118



III.4.2.1.	Influence de la loi de probabilité.....	119
III.4.2.2.	Influence de l'étendu de l'intervalle de tolérance .....	122
III.4.2.3.	Influence de la variation du chargement .....	123
III.4.2.4.	Synthèse .....	125
III.5.	Robustesse des corrections combinées.....	126
III.5.1.1.	Méthode.....	126
III.5.1.2.	Influence de la classe de qualité.....	128
III.5.1.3.	Influence de la forme de la correction.....	130
III.5.1.4.	Introduction de désalignements.....	131
III.5.1.5.	Influence de la variation du chargement .....	135
III.6.	Variabilité entre dents des paramètres de correction du profil : .....	137
III.7.	Conclusion.....	139
<b>Chapitre IV</b>	<b>: Optimisation multi objectifs des corrections de forme.....</b>	<b>140</b>
IV.1.	Introduction .....	141
IV.2.	Optimisation multi objectif : Etat de l'art .....	141
IV.2.1.	Définitions :.....	141
IV.2.2.	Méthode de Pareto.....	142
IV.2.3.	Méthodes d'optimisation basées sur l'algorithme génétique .....	144
IV.2.3.1.	Introduction .....	144
IV.2.3.2.	L'algorithme NSGA-II.....	146
IV.2.4.	Validation de l'algorithme NSGA-II.....	148
IV.2.4.1.	Problème bi objectifs : fonction test ZDT4 [152] .....	148
IV.2.4.2.	Problème tri objectifs : fonction test DTLZ2 [153] .....	149
IV.3.	Engrenages : Optimisation multicritères .....	151
IV.3.1.	Démarche de résolution : Stratégie de parallélisation.....	151
IV.3.2.	Applications .....	152
IV.3.2.1.	Problèmes bi-objectifs.....	152
IV.3.2.2.	Problèmes tri objectifs.....	157
IV.4.	Conclusion.....	161
	<b>Conclusion générale .....</b>	<b>162</b>
	<b>Références Bibliographiques.....</b>	<b>165</b>
	<b>Annexe A : Procédure de résolution.....</b>	<b>177</b>
	<b>Annexe B : Développement analytique.....</b>	<b>180</b>
	<b>Annexe C : Algorithme génétique – opérateurs et techniques.....</b>	<b>190</b>
	<b>Annexe D : Détermination des points et des poids de Gauss [83] .....</b>	<b>195</b>
	<b>Annexe E : Ecart de forme de profil [69] .....</b>	<b>197</b>
	<b>Annexe F : Algorithme NSGA-II – Procédure de résolution .....</b>	<b>198</b>

# Principales notations

$Z_1$	: Nombre de dents du pignon.
$Z_2$	: Nombre de dents de la roue.
$R_{b1}$	: Rayon de base du pignon.
$R_{b2}$	: Rayon de base de la roue.
$\beta_b$	: Angle d'hélice de base.
$\alpha_p$	: Angle de pression.
$b$	: Largeur de la dent.
$\Omega_1$	: Vitesse de rotation du pignon.
$C_m$	: Couple moteur.
$e(M_{ij})$	: Ecart total au point de contact $M_{ij}$ .
$e_1(M_{ij})$	: Ecart au point $M_{ij}$ sur le pignon.
$e_2(M_{ij})$	: Ecart au point $M_{ij}$ sur la roue.
$\delta e(M_{ij})$	: Ecart relatif au point $M_{ij}$ .
$e(M^*)$	: Ecart normal maximal.
$\delta(M_{ij})$	: Rapprochement (ou éloignement) normal.
$\Delta(M_{ij})$	: Déflexion au point $M_{ij}$ .
$t_m$	: Période d'engrènement.
$f_{\text{mesh}}$	: Fréquence d'engrènement.
$F$	: Force normale appliquée sur la dent.
$b$	: Largeur de la dent.
$E$	: Module de Young.
$\nu$	: Coefficient de Poisson.
$\rho_1, \rho_2$	: Rayons de courbure, du pignon et de la roue.
$[M]$	: Matrice de masse totale. coefficient de Poisson.
$[C]$	: Matrice amortissement visqueux.
$[K(t, X)]$	: Matrice de rigidité globale.
$F_0$	: Vecteur des forces extérieures.

---

$E$	: Profondeur de la correction de profil.
$E^*$	: Profondeur de la correction de profil adimensionnée par rapport $\delta_{mref}$ .
$\delta_{mref}$	: Déflexion statique moyenne de référence.
$Lc$	: Longueur de la correction de profil.
$\Gamma$	: Fraction du segment de conduite impacté par la correction.
$\varepsilon_\alpha$	: Rapport de conduite transversale.
$P_{ba}$	: Pas de base apparent.
$f$	: Coefficient de frottement.
$u = \frac{Z_1}{Z_2}$	: Rapport de réduction.
$\Lambda_p$	: Facteur des pertes.
$\max(pV)$	: Valeur maximale du produit (pression*vitesse).
$P_0$	: Pression maximale hertzienne.
$E(X)$	: Espérance de la performance (X).
$\text{Var}(X)$	: Variance de la performance (X).
$\bar{x}$	: Valeur moyenne de la performance (X).
$\rho$	: Rendement mécanique.
$E_{dissipée}$	: Energie dissipée due au frottement entre les dentures.
$E_{entrée}$	: Energie d'entrée, fournie pendant une période d'engrènement.
$\sigma_F$	: Contrainte maximale au pied de dent.
$\sigma_{Fadm}$	: Contrainte admissible à la rupture.
$TE_s^*(\tau)$	: Ecart de transmission quasi-statique adimensionnée par rapport $\delta_m$ .
$\delta_m$	: Déflexion statique moyenne associée à chaque nouvelle géométrie corrigée.
$e^*(M)$	: Ecart normal au point M, adimensionné par rapport $\delta_m$ .
$\hat{k}(M) = \hat{k}_0$	: Raideur par unité de longueur au point M, adimensionnée par rapport $k_m$ .
$k_m$	: Raideur moyenne d'engrènement.
$k_0$	: Raideur par unité de longueur(ISO 6336).
$\lambda$	: Paramètre de réduction de conduite.

---

$\varepsilon'_\alpha = (1 - 2\lambda) \varepsilon_\alpha$  : Rapport de conduite actuel.

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  : Fonction sinus cardinal.

$\alpha$  : Facteur de pondération,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$m$  : Nombre total des points au plan orthogonal.

$L_c$  : Réponse au centre du plan.

$L_i$  : Réponse au point  $i$  du plan.

$\mu_Y$  : Moyenne de la performance (Y).

$\sigma_Y$  : Ecart type de la performance (Y).

$\beta$  : Coefficient de qualité.

$\text{RMS}(Y)$  : Root Mean Square of (Y).

$F_{\text{rob}}$  : Fonction objectif robuste.

$\text{IT-X}$  : Intervalle de tolérance associé au paramètre (X).

$N$  : Nombre de segments par ligne de contact.

$sp$  : Exposant pour la correction paramétrique.

# Introduction générale

Les engrenages occupent une position privilégiée dans le domaine des transmissions de puissance et ont, depuis un siècle environ, fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Parmi l'ensemble des architectures possibles, les engrenages cylindriques en développante de cercle sont, sans conteste, les plus utilisés pour le transfert de rotation entre axes parallèles car relativement faciles à fabriquer, ils possèdent des géométries mathématiquement simples dont le contrôle dimensionnel est relativement aisé. Les nombreuses études les concernant ont en particulier conduit à des corpus de normes importants (ISO 6336, ANSI / AGMA, par exemple) appliqués dans le monde entier. Dans un contexte de perpétuel progrès technologique avec des produits industriels toujours plus fiables et performants, les engrenages modernes sont de plus en plus soumis à des exigences strictes en termes de capacité de charge, du rendement, de bruit développé, etc. Ces contraintes sociétales ont ainsi généré, depuis une quarantaine d'années, un nombre important de travaux relatifs à la simulation et la prédiction du comportement des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Dans cette optique, le laboratoire LaMCoS s'est particulièrement investi dans le développement de modèles numériques permettant de prédire les principales caractéristiques statiques et dynamiques de systèmes d'engrenages.

Dans le cadre de la conception de mécanismes de transmission de puissance par engrenages, les études et les modélisations réalisées sont largement motivées par la volonté de trouver des géométries qui assurent le meilleur fonctionnement possible. Ainsi, de nombreuses recherches se sont intéressées aux rôles de corrections de forme de denture dans une perspective d'optimisation de comportement [10]–[42]. En particulier, leur effet sur le niveau de vibration et de bruit rayonné est attesté par de nombreux travaux expérimentaux et théoriques. Les géométries de corrections de forme sont généralement caractérisées par un nombre réduit de paramètres : amplitude de correction de profil en tête de dent, longueur corrigée sur le profil, amplitude de bombé longitudinal, etc.... tandis que les aspects associés à la forme de correction sont généralement relégués au second plan. Cependant, le développement des techniques d'optimisation stochastiques, notamment par le biais d'algorithmes évolutionnaires, permet d'envisager des configurations d'optimisation plus complexes et ainsi répondre plus précisément aux besoins des concepteurs. Dans ce contexte, la majorité des modèles demeurent toutefois essentiellement déterministes et ne permettent pas, entre autres, d'intégrer l'influence des variations géométriques inhérentes aux procédés de fabrication. On peut donc s'interroger sur la validité des résultats obtenus à partir des seules valeurs nominales dans les cas où les plages de variation des paramètres deviennent

significatives. Un des objectifs principaux de cette étude sera donc de définir des corrections de forme de denture « robustes » pour lesquelles le système maintient un comportement optimal attendu malgré des incertitudes géométriques et des variations du chargement. Définir des corrections de forme conduisant à un meilleur comportement vis-à-vis des fluctuations d'erreur de transmission, du rendement, des contraintes, etc... constitue un problème délicat pour les concepteurs car ces différents critères de performances peuvent évoluer de façon contradictoire en présence de corrections de dentures. On propose donc dans ce mémoire d'aborder une optimisation multicritères visant à trouver des corrections qui conduisent au meilleur compromis entre les différents critères de performance de l'engrenage considéré.

L'ensemble des problématiques présentées ci-dessus sous-tend l'organisation en quatre chapitres retenue pour la présentation du manuscrit de thèse. Le premier chapitre est consacré à la présentation du modèle numérique développé au laboratoire LaMCoS sur lequel se base une grande partie des travaux présentés ici. Les différents types de corrections de dentures et leur caractérisation suivant la norme ISO sont ensuite abordés. Le chapitre se poursuit par une étude bibliographique relative à l'optimisation du comportement d'engrenages par l'intermédiaire de corrections de forme, à la notion de robustesse et ses applications dans le domaine des transmissions mécaniques. Enfin, nous concluons par une brève présentation des principales méthodes numériques utilisées dans le cadre de l'optimisation.

Le second chapitre est consacré à l'étude déterministe des corrections de dentures. Dans un premier temps, les différentes cibles et contraintes pour l'optimisation de la performance d'engrenages sont hiérarchisées. Par la suite, une approche analytique est introduite qui, sous certaines hypothèses simplificatrices, permet de déterminer et d'optimiser les fluctuations d'erreurs de transmission quasi-statiques. Enfin, on traite un problème multi variables avec simple critère dans le but d'examiner l'hypothèse de symétrie de correction des deux roues et d'explorer les différentes formes susceptibles d'optimiser davantage les performances du système. Pour résoudre un tel problème à plusieurs variables, un algorithme génétique a été retenu comme méthode d'optimisation. Sa mise en oeuvre, son efficacité et son domaine de validité sont détaillés au préalable.

Le troisième chapitre présente une étude probabiliste visant à déterminer les corrections de dentures (caractérisées par des variables aléatoires) rendant le système moins sensible aux variations géométriques et fonctionnelles. Cette détermination nécessite une estimation fiable des paramètres statistiques figurant dans la fonction objectif. Dans ce contexte, diverses méthodes sont développées et testées, à savoir la méthode de Monte Carlo, une approche analytique et la méthode d'intégration numérique de Gauss. Ces différentes approches permettent de conduire plusieurs études paramétriques portant, d'une part, sur les paramètres intrinsèques, c'est-à-dire liés aux corrections de dentures (forme de correction, classe de qualité,..) et, d'autre part, sur les paramètres environnementaux du système (chargement, désalignement, ..).

Au terme de ce travail, on traite de l'optimisation multi objectifs dans le dernier chapitre. Le but essentiel est alors de définir une approche permettant d'aider le choix du concepteur relatif aux paramètres de correction de dentures pour simultanément optimiser les différents critères de performances. Une technique d'optimisation basée sur un algorithme spécifique (NSGA-II) est présentée en détail et son efficacité en termes d'optimisation multicritère au sens d'optimale de Pareto est analysée à travers différents cas d'études.

# **Chapitre I : Modélisation - Etude bibliographique**

- 1. Introduction**
- 2. Modélisation des engrenages**
- 3. Correction des dentures : définitions et types**
- 4. Optimisation des corrections de dentures : Etat de l'art**
- 5. Optimisation robuste**
- 6. Méthode numériques d'optimisation**
- 7. Conclusion**



## I.1. Introduction

L'objectif principal de ce chapitre essentiellement bibliographique est de présenter un état de l'art relatif aux travaux de recherches menés sur les corrections de forme des dentures d'engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux et sur les différentes approches permettant d'optimiser ces paramètres.

En premier lieu, pour étudier le comportement des transmissions par engrenages, on doit passer par la modélisation du système physique en le transformant en un modèle numérique. La modélisation de l'engrènement nécessite la prise en compte des écarts de formes introduits par les corrections de dentures dans les équations qui décrivent le mouvement du système. Après cette étape, les définitions des principales corrections de forme dans les engrenages seront présentées. Puis, nous nous intéresserons aux différentes études portant sur l'optimisation des corrections selon divers critères caractérisant la performance d'un engrenage : bruit, vibrations, usure, grippage. Ensuite, une partie de ce chapitre sera consacrée à la définition et à l'intégration des différentes erreurs géométriques qui peuvent apparaître dans un tel système. En effet, une meilleure conception doit tenir compte de la présence des dispersions inhérentes à la réalisation des pièces. Dans ce contexte, le concept de robustesse et son application dans l'optimisation des engrenages seront évoqués. Enfin, nous présenterons les différentes méthodes numériques utilisées pour traiter un tel problème d'optimisation. Un examen critique des méthodes employées dans ce domaine relativement étendu sera également présenté.

## I.2. Modélisation des engrenages

L'objectif de cette partie est de présenter et d'étudier des outils numériques permettant de modéliser au plus juste le comportement mécanique d'engrenages droits ou hélicoïdaux. Dans la littérature, il existe généralement deux techniques de modélisation à savoir, les approches reposant sur des modèles discrets à paramètres concentrés [1] et les modèles de type éléments finis [4] – [7] avec, parfois, des tentatives d'hybridation entre les deux modélisations [8] – [9]. Dans ce mémoire, on ne s'intéressera qu'à la première technique en s'appuyant largement sur des modèles développés au préalable au LaMCoS qui s'avèrent particulièrement bien adaptés à la prise en compte de défauts et écarts géométriques [10] – [11].

Il est généralement admis que ces écarts sont susceptibles de générer des excitations internes puissantes pouvant impacter notablement les efforts dynamiques sur les contacts et le niveau de bruit d'une transmission par engrenages (Welbourn [14], Kohler et al.[15], Kassāi et al. [16], etc...). L'analyse précise de ces phénomènes est relativement récente et les premiers travaux de modélisation reposaient sur les approches globales conduisant à des

termes forcés, parfois approximatifs, directement introduits dans les équations du mouvement (Tuplin [11], Remmers [12] et Pearce et al. [13]). L'introduction de la notion d'erreur de transmission [17-18] a constitué une avancée importante facilitant l'intégration de ces sources d'excitations dans des modèles de complexité croissante [19].

### I.2.1. Etat de référence

En règle générale, l'état de fonctionnement idéal (engrenages parfaits et indéformables) est implicitement considéré comme l'état de référence. A partir de celui-ci, il est possible de calculer les déplacements de corps rigides et les déplacements des engrenages perturbés par les déformations et les écarts géométriques. Velez [2] et Maatar [3], ont considéré l'état de fonctionnement des engrenages rigides avec écarts géométriques comme l'état de référence au voisinage duquel l'état déformé du système est analysé. Ce choix conduit à une séparation naturelle entre les mouvements de corps rigides et les déplacements élastiques. Une première étape consiste donc à analyser et déterminer les caractéristiques géométriques et cinématiques de cet état de référence.

#### *1.2.1.1. Géométrie des engrenages rigides*

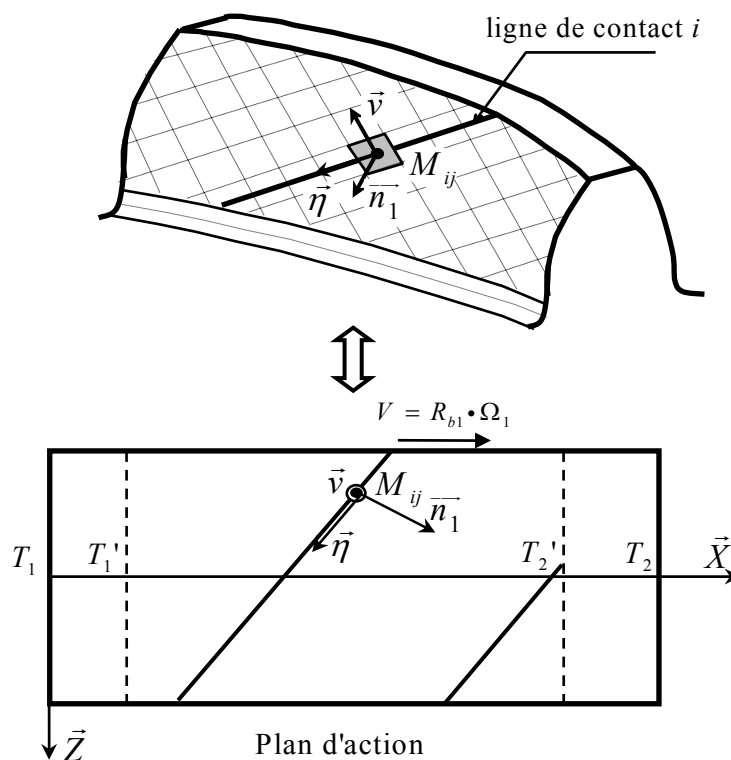
Le contact entre les profils conjugués de dentures s'effectue, par hypothèse, dans le plan tangent aux deux cylindres de base, c'est-à-dire dans le plan d'action. Le contact est supposé linéique ; les lignes de contact sont inclinées de l'angle d'hélice de base par rapport aux lignes de tangence entre le plan d'action et les cylindres de base. Ces lignes de contact se translatent sur le plan d'action avec une vitesse linéique  $V_b$  imposée par la vitesse de rotation du pignon.

$$V_b = R_{b1}\Omega_1 \quad (\text{I.1})$$

avec

$R_{b1}$  : Rayon de base du pignon (m).

$\Omega_1$  : Vitesse angulaire du pignon (rad/s).



**Figure I-1 :** *Défilement des lignes de contact dans le plan d'action*

### 1.2.1.2. Écarts géométriques

- Origines des écarts géométriques

Quelque soit la précision avec laquelle les transmissions par engrenages sont fabriquées et assemblées, elles ne sont jamais parfaites. Il existe toujours un certain nombre d'écarts géométriques causés par les aléas de fabrication, par les incertitudes de montage (jeux, ...), par les fluctuations des conditions de fonctionnement (différentes charges induisant différentes déformations, ...), etc. Les écarts purement géométriques sont de deux types : les écarts de forme et les défauts de montage. Les écarts de forme sont liés au processus et aux procédés de fabrication de l'engrenage, tandis que les défauts de montage dépendent des écarts de réalisation et des jeux dans l'assemblage des différents composants d'un réducteur.

Les principaux écarts géométriques, selon la classification issue de la Norme NF ISO 1328-006 [69] sont :

- les écarts de forme :
  - erreurs de profil,
  - erreurs d'hélice,
  - erreurs de division.
- les défauts de montage :
  - défauts d'inclinaison et de déviation,
  - défauts d'excentricité.

Notons que, selon la norme, les erreurs de profil et d'hélice ne sont pas nécessairement définies par rapport à, respectivement, la développante de cercle et à la génératrice rectiligne. Le concepteur peut définir un profil de référence modifié (corrections d'hélice ou de profil de la denture, détaillées ultérieurement). Cependant, dans la modélisation adoptée, les écarts de forme comptabilisent toutes les déviations par rapport à l'hélicoïde développable.

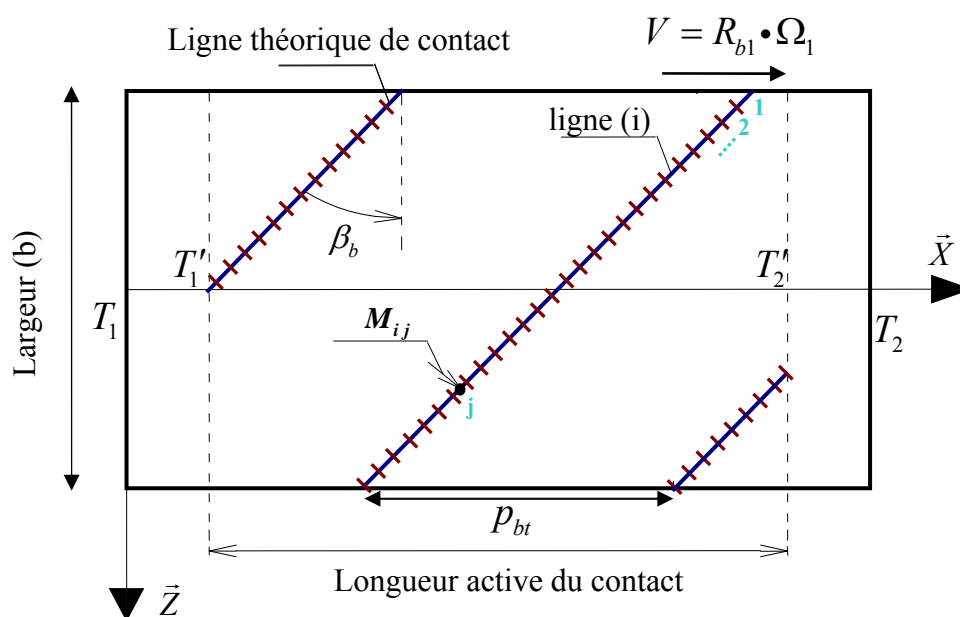
Les défauts de montages induisent un écart normal aux surfaces qui est calculé en utilisant les torseurs des petits déplacements.

- Modélisation des écarts géométriques

Tout d'abord, pour simuler les écarts de forme, les lignes de contact sont supposées demeurer dans le plan d'action et sont discrétisées en plusieurs segments. Cette discrétisation est illustrée sur la figure I.2. Le centre géométrique de chacun de ces segments correspond à un point de contact potentiel  $M_{ij}$  ( $i$  : indice de la ligne et  $j$  : indice du segment).

A chaque point  $M_{ij}$ , on associe un écart de forme pour le pignon et pour la roue. Chacun de ces écarts est défini par la distance algébrique entre la surface réelle et la surface théorique (hélicoïde développable) suivant la normale extérieure au profil considéré. Par convention, les écarts sont définis positifs s'il y a excès de matière (voir Figure I-3). On suppose par ailleurs que les écarts sont suffisamment faibles devant les dimensions caractéristiques des engrenages pour ne pas affecter l'orientation des normales.

Les écarts associés aux défauts de montage sont introduits de la même façon. En effet, ces défauts influent sur le positionnement des centres et des axes de rotations des roue induisant des écarts qui sont ensuite transposés, via des projections géométriques, au niveau des segments de chaque lignes de contact ([1], [2] et [3]).



**Figure I-2 : Discretisation des lignes de contact**

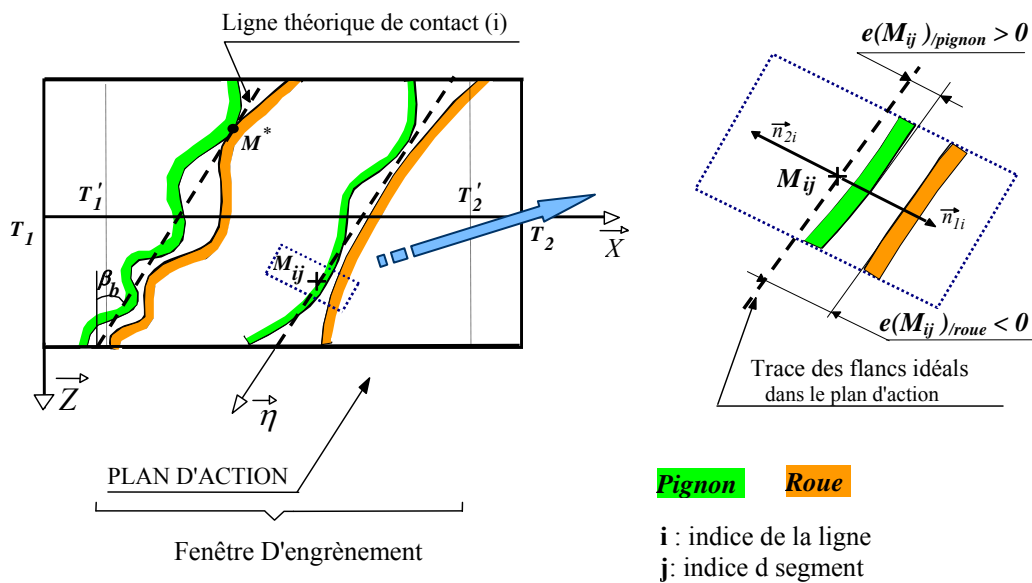
Sachant que le point de contact entre les deux profils conjugués est commun au pignon et à la roue, on définit un écart normal total au point de contact  $M_{ij}$  qui est la somme algébrique des écarts associés au point  $M_{ij}$  appartenant, à la fois, à la dent du pignon et à la dent de la roue :

$$e(M_{ij}) = e_1(M_{ij}) + e_2(M_{ij}) \quad (I.2)$$

avec :

$e_1(M_{ij})$  : écart au point  $M_{ij}$  sur le pignon

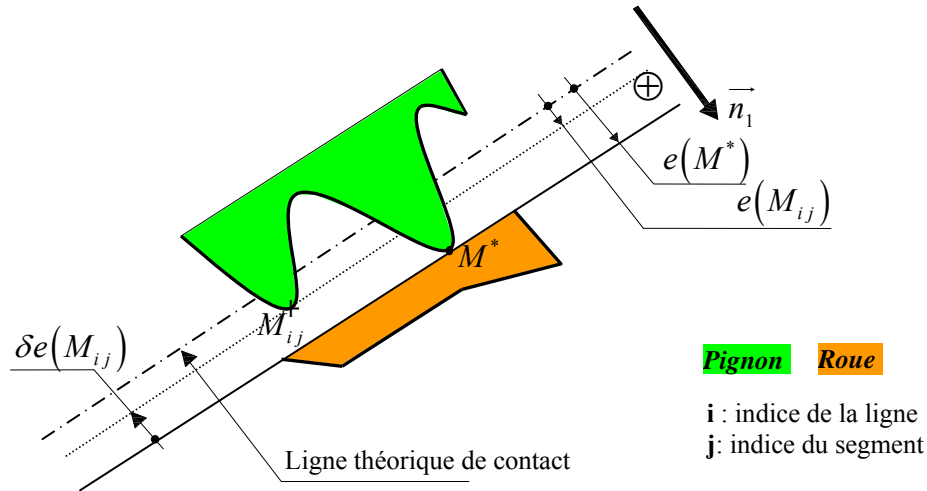
$e_2(M_{ij})$  : écart au point  $M_{ij}$  sur la roue



**Figure I-3 :** Configuration, à un instant donné, du point de contact entre corps rigides [3]

- L'écart normal équivalent et l'écart relatif

Par définition, la fenêtre d'engrènement est le lieu géométrique, dans le plan d'action, où l'engrènement entre différents couples de dents se déroule. A chaque instant, il existe dans ce domaine au moins un point de contact  $M^*$  entre les dentures rigides. D'après la définition des écarts géométriques, le point de contact  $M^*$  est caractérisé par l'écart normal maximal noté  $e(M^*)$ . La détermination de la valeur maximale de  $e(M_{ij})$  permet de détecter un point de contact ( $M^*$ ) et l'ensemble des écarts relatifs entre les surfaces au niveau des points potentiels de contact avant déformation.



**Figure I-4 :** Point de contact dans les conditions des corps rigides

Comme schématisé dans la Figure I-4, l'écart relatif associé à un point  $M_{ij}$  (noté  $\delta e(M_{ij})$ ), est défini comme la différence entre l'écart normal maximum  $e(M^*)$  et l'écart normal en ce point  $e(M_{ij})$ .

$$\delta e(M_{ij}) = e(M^*) - e(M_{ij}) \quad (\text{I.3})$$

### 1.2.1.3. Cinématique des corps rigides

L'introduction d'écarts géométriques sur les éléments d'engrenage perturbe leur cinématique. La relation liant les vitesses d'entrée et de sortie découle de la propriété de non inter-pénétrabilité des corps solides selon la normale aux points de contact commun. Le développement de cette expression conduit, pour un élément d'engrenage cylindrique à denture extérieure, à la relation définie dans l'équation (I.4):

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}} \cdot \Omega_1(t) + \frac{1}{R_{b2} \cdot \cos \beta_b} \frac{de(M^*)}{dt} \quad (\text{I.4})$$

avec :

- $R_{b1}$  : rayon de base du pignon.
- $R_{b2}$  : rayon de base de la roue.
- $\Omega_1$  : vitesse de rotation du pignon.
- $\Omega_2$  : vitesse de rotation de la roue.
- $\beta_b$  : angle d'hélice de base.
- $e(M^*)$  : l'écart normal maximal sur tous les points potentiels de contact, à un instant  $t$ .

On peut constater que les écarts géométriques, lorsqu'ils dépendent du temps, imposent pour une vitesse de rotation à l'entrée constante, une composante supplémentaire à la vitesse de rotation en sortie qui est fonction de la dérivée de l'écart normal maximum dans les conditions de corps rigides. La perturbation supplémentaire induite par (I.4) est liée à la notion d'erreur de transmission sans charge (NLTE) définie via l'équation (I.5).

$$\frac{d}{dt}(NLTE) = Rb_1\Omega_1 + Rb_2\Omega_2 = -\frac{1}{\cos \beta_b} \frac{de(M^*)}{dt} \quad (I.5)$$

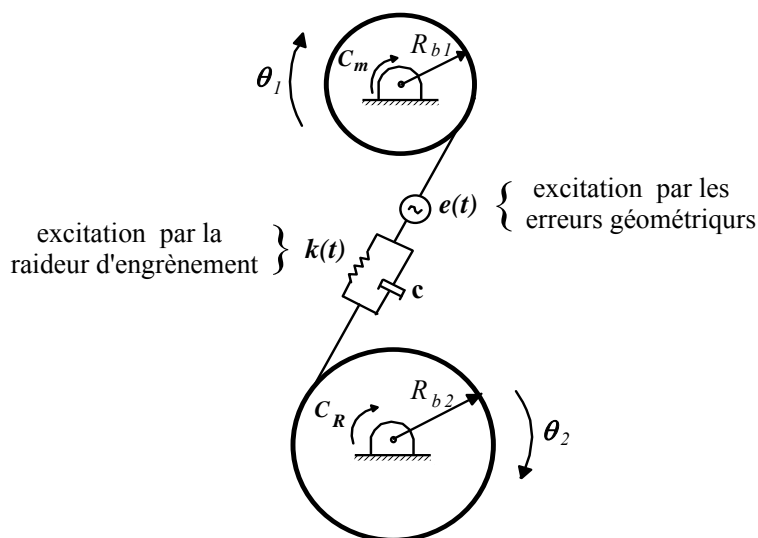
La connaissance des écarts de forme et des écarts de montage permet ainsi de déterminer à chaque instant de l'engrènement : la position du (des) point(s) de contact et l'erreur de transmission à vide (NLTE) associée. La configuration de référence étant déterminée, il est possible d'estimer les déformations.

## I.2.2. Etat déformé - Principes

Suivant le niveau de complexité du modèle utilisé, les déformations de plus ou moins d'éléments sont considérées. Ainsi, on trouve en premier lieu le modèle torsionnel simple, à 2 degrés de liberté où seules les dents se déforment. Un second niveau de modélisation consiste à prendre en compte les déformations des arbres et des paliers. Enfin, dans le cas d'une denture large, il est possible de modéliser les déformations du corps des roues dentées.

### I.2.2.1. Modèle élémentaire à 2 ddl

Le modèle de base est schématisé dans la Figure I-5. Il privilégie les angles de torsion autour des axes (Gregory et al [18], Kubo [20], etc...). Les deux roues sont représentées par deux inerties en rotation reliées par un élément d'engrenage (avec raideur et amortissement variables). Ce modèle ne considère que les déformations des dents.



**Figure I-5 :** Modèle dynamique de base à deux degrés de liberté

### *1.2.2.2. Arbres et paliers flexibles*

Dans un réducteur, l'environnement mécanique influe considérablement sur le comportement d'un système d'engrenages [1] – [3]. La ligne de transmission comprend généralement un générateur de puissance (moteur), des mécanismes entraînés (accouplements, frein), des structures servant de support (arbre, paliers) incorporés dans un carter. Ainsi, une bonne caractérisation du comportement d'un engrenage passe nécessairement par une meilleure modélisation de ces divers éléments. Dans ce contexte, pour tenir en compte des déformations non seulement des dentures mais également de l'ensemble des lignes d'arbres et des paliers, Vexel et al [3] ont proposé un modèle à 32 DDL. Les paliers sont représentés par des rigidités concentrées et les arbres par des éléments finis de poutres classiques à deux nœuds (poutre de Timoshenko) [3]. Chaque arbre comporte des sous éléments de part et d'autre de l'engrenage. Le moteur qui impose le couple, ainsi que le frein (la charge), sont introduits uniquement via leurs masses et inerties.

Pour modéliser l'élément engrenage, les deux roues sont assimilées à deux cylindres rigides qui possèdent chacun six degrés de liberté et sont reliés l'un à l'autre par une liaison élastique et dissipative représentant de manière plus ou moins détaillée les contributions des parties déformables de la denture (voir Figure I-6). Le modèle possède donc, d'un point de vue physique, la possibilité de prendre en compte les effets combinés de torsion ( $\theta_1$  et  $\theta_2$ ), flexion ( $v_1, v_2, w_1, w_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$ ) et de traction-compression ( $u_1$  et  $u_2$ ).

Il convient de signaler que ce type de modélisation est tributaire d'un certain nombre d'hypothèses restrictives qui sont rappelées ci-dessous :

- les contacts entre les dentures sont considérés comme linéiques et s'effectuent uniquement dans le plan d'action théorique.
- les amplitudes des écarts de géométrie sont suffisamment faibles pour ne pas affecter les normales aux profils des dentures.
- les dentures sont considérées comme suffisamment étroites pour pouvoir négliger les effets de déformations différentielles des corps du pignon et de la roue (le cas du modèle 72 ddl, pour dentures larges n'est pas concerné par cette hypothèse).



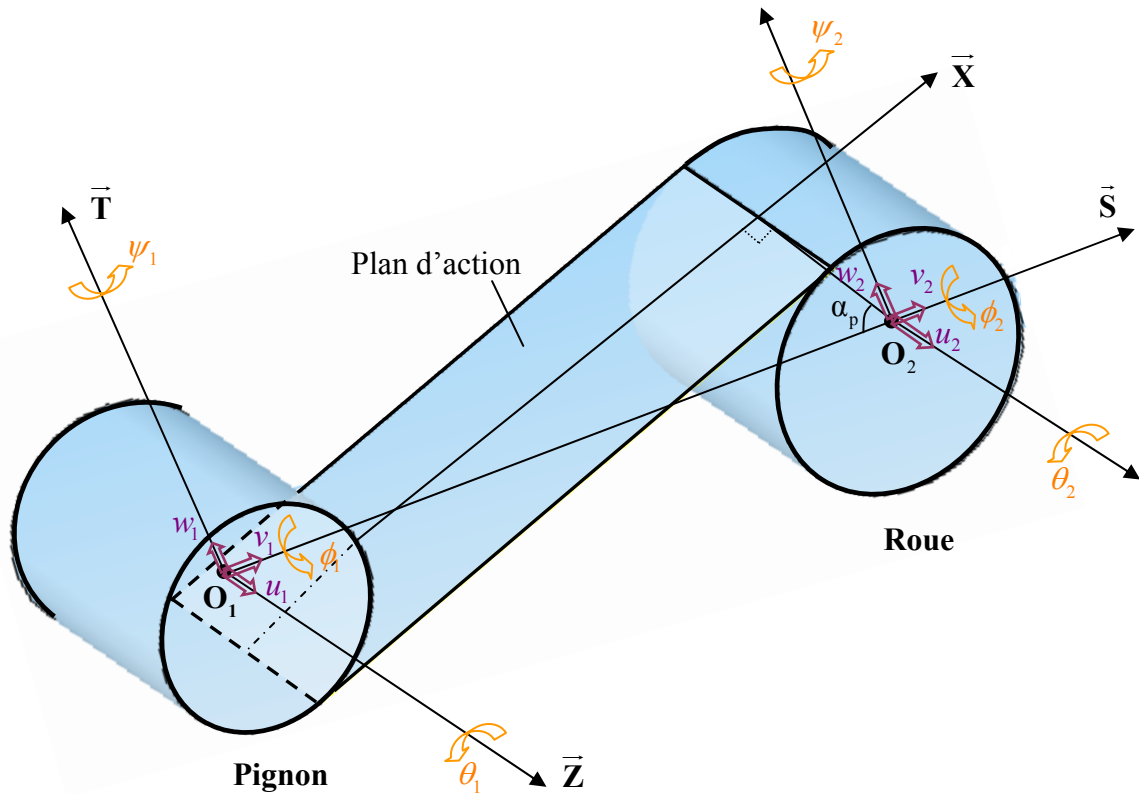


Figure I-6 : Modélisation 3D de l'élément engrenage

Le champ de déplacements résultant des petites perturbations autour de l'état de référence peut se caractériser au moyen du torseur de déplacements infinitésimaux  $\{S_k\}$  exprimé par rapport au repère fixe  $R(O_k, \vec{s}, \vec{t}, \vec{z})$  lié à la ligne des centres :

$$\{S_k\} \begin{Bmatrix} \vec{u}_k(O_k) \\ \vec{\omega}_k \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \vec{u}_k(O_k) = v_k \vec{s} + w_k \vec{t} + u_k \vec{z} \\ \vec{\omega}_k = \phi_k \vec{s} + \psi_k \vec{t} + \theta_k \vec{z} \end{Bmatrix}_R \quad (I.6)$$

- $k = 1$  : indice des déplacements associés au pignon.
- $k = 2$  : indice des déplacements associés à la roue.
- $O_1, O_2$  sont respectivement les centres de rotation du pignon et de la roue.

### 1.2.2.3. Corps de roue dentée déformable

Pour des architectures particulières, avec des dentures larges (ratio : largeur de denture (b) / module (m) > 16 [72]), il n'est plus réaliste de représenter la déformation des dentures en utilisant un seul nœud. En effet, pour ce type de dentures, il y a présence d'une variation de l'angle de torsion suivant la largeur de denture [9]. Dans ce contexte, Ajmi et al. [21] – [22] ont proposé un modèle plus développé, à 72 degrés de liberté, où les arbres de transmission sont modélisés par 5 éléments finis d'arbre et le corps de chaque roue dentée est supposé déformable. Une illustration du modèle global est présentée dans la Figure I-7.

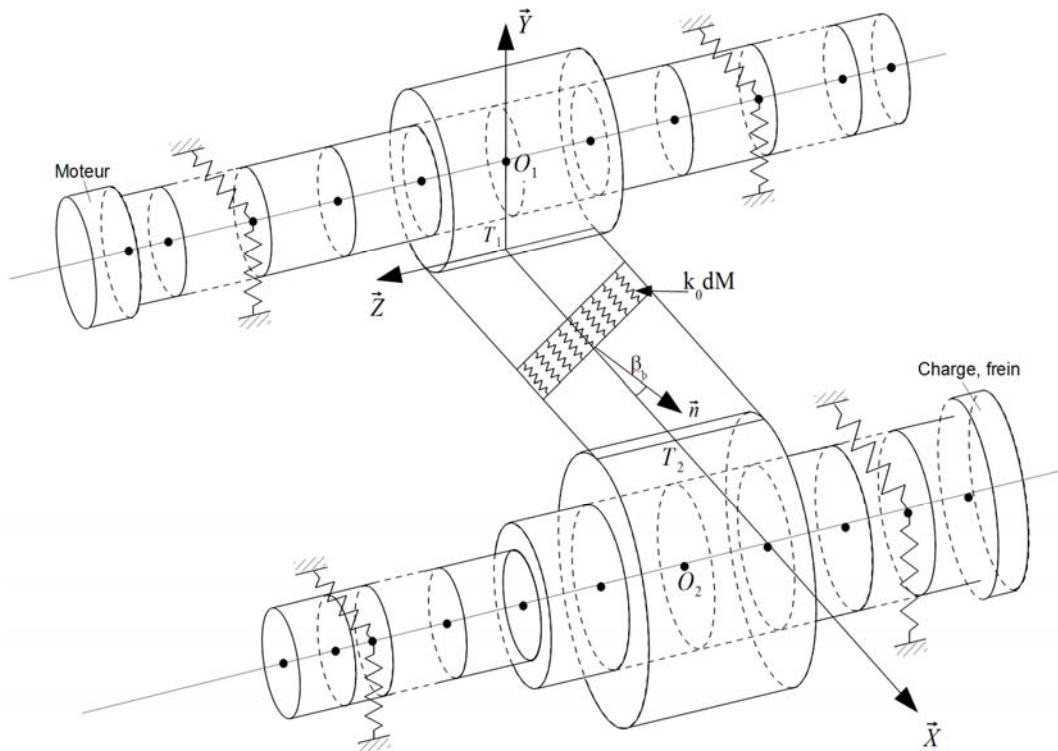


Figure I-7 : Modèle global d'un réducteur [35]

### I.2.3. Modélisation de l'interface d'engrènement

Le contact entre les roues dentées est constitué d'un ensemble de lignes de contact appartenant au plan d'engrènement. Pour estimer la charge locale sur ces lignes, elles sont discrétisées en segments (voir paragraphe I.2.1.2 - Ecarts géométriques), puis, sur chaque segment et à tout instant, l'écrasement et la raideur sont calculés.

#### I.2.3.1. Ecrasement au point de contact

La connaissance de l'aire de contact réelle et de la charge dynamique instantanée sur les couples de dents en prise nécessite le calcul de l'écrasement associé à chaque point de contact potentiel  $(M_{ij})$ . Sous l'action de l'ensemble des déplacements de chacune des deux roues de l'engrenage par rapport aux mouvements de corps rigides, le rapprochement normal (ou l'éloignement) de chaque point de contact  $(M_{ij})$  s'écrit :

$$\delta(M_{ij}) = \vec{u}_1^R(M_{ij}) \cdot \vec{n}_1 - \vec{u}_2^R(M_{ij}) \cdot \vec{n}_1 \quad (I.7)$$

Avec  $\vec{n}_1$  normale unitaire extérieure au profil du pignon (ligne de contact d'indice i)

Ce rapprochement peut aussi être exprimé via une écriture matricielle :

$$\delta(M_{ij}) = V(M_{ij})^T q \quad (\text{I.8})$$

tels que  $\{V(M_{ij})\}$  est un vecteur de structure qui dépend de la géométrie de l'engrenage et de la position du point  $M_{ij}$ , alors que,  $q$  est un vecteur d'état représentant les déplacements généralisés attribués aux engrenages.

$$V(M_{ij}) = \left\langle \vec{n}_1, \overline{O_1 M_{ij}} \wedge \vec{n}_1, -\vec{n}_1, -\overline{O_2 M_{ij}} \wedge \vec{n}_1 \right\rangle \quad (\text{I.9})$$

$$q = \left\langle \vec{u}_1(O_1), \vec{\omega}_1, \vec{u}_2(O_2), \vec{\omega}_2 \right\rangle \quad (\text{I.10})$$

Il faut noter que, même en l'absence d'écarts de forme, le vecteur de structure dépend de la position du point de contact  $M_{ij}$  sur le plan d'action par l'intermédiaire de ses composantes suivant les rotations  $\varphi$  et  $\psi$ . En présence d'écarts de forme et/ou de défauts de montage le contact entre dentures au point  $M_{ij}$  est assuré lorsque le rapprochement  $\delta(M_{ij})$  est suffisamment important pour compenser l'écart de géométrie relatif initial  $\delta_e(M)$  dans la condition des corps rigides. La déflexion ou l'écrasement en ce point a donc pour expression :

$$\Delta(M_{ij}) = \delta(M_{ij}) - \delta_e(M_{ij}) \quad (\text{I.11})$$

### 1.2.3.2. Condition de contact

Des séparations complètes de dentures suivies de chocs lors des reprises de contact peuvent apparaître pour certains régimes de fonctionnement en dynamique. Ce phénomène violemment non linéaire est caractérisé par des sauts d'amplitudes plus ou moins complexes selon que les déplacements sont suffisants pour induire des chocs à l'arrière des dents ou non. En pratique, ce mode de vibration est à l'origine des bruits de cliquetis (rattle noise) dont l'impact sur la qualité perçue, en particulier dans le domaine automobile, est important. Il existe également un grand nombre de cas où les pertes de contact entre flancs actifs de dentures demeurent partiels et sont liés à des défauts d'alignement, des corrections longitudinales et des erreurs géométriques locales.

On définit la condition de contact en un point  $M_{ij}$  de la fenêtre d'engrènement par :

$$\begin{aligned} \Delta(M_{ij}) > 0 &\rightarrow \text{le contact au point } M_{ij} \text{ est assuré} \\ \Delta(M_{ij}) \leq 0 &\rightarrow \text{pas de contact au point } M_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

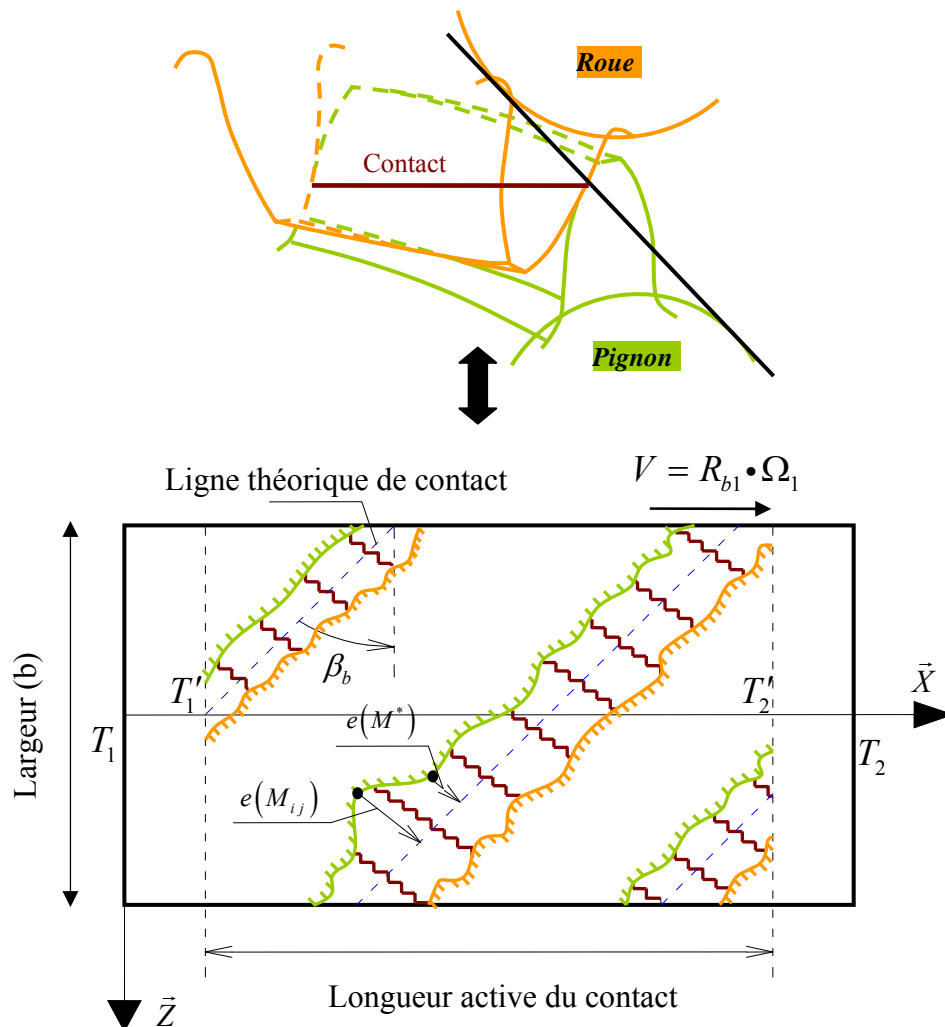
Il faut noter que les conditions de contact décrites ci-dessus sont testées à chaque instant pour toutes les cellules se trouvant à l'intérieur de la fenêtre d'engrènement, c'est à dire pour tous les points de contact potentiels.

### 1.2.3.3. Raideur d'engrènement

Au cours du fonctionnement d'un engrènement, les lignes de contact (paire de dents en prise) se déplacent sur le plan d'action avec une vitesse linéique  $V_b = R_{b1} \cdot \Omega_1$ . La configuration des lignes de contact dans la fenêtre d'engrènement évolue donc de façon cyclique.

L'élasticité du contact est simulée en affectant une raideur élémentaire ( $k_{ij}$ ) à chaque point de contact potentiel ( $M_{ij}$ ). Ces raideurs élémentaires sont supposées indépendantes. En les sommant le long des lignes théoriques de contact dans la fenêtre d'engrènement à un instant donné (Figure I-8), on obtient la raideur d'engrènement globale :

$$K(t, \Delta(M_{ij})) = \sum_{i,j} k_{ij} \quad (\text{I.13})$$



**Figure I-8 : Modélisation de l'interface d'engrènement**

L'évolution au cours du temps (ou suivant les positions angulaires) des positions relatives des dents et par conséquent les lignes de contact, engendre une variation de la rigidité de

l'engrènement ([1] – [4]). Cette variation de rigidité globale constitue une des sources principales d'excitation pour les systèmes à engrenages [1]–[4]. Sa fréquence d'évolution est nommée fréquence d'engrènement ( $f_{\text{mesh}}$ ) et peut conduire à l'apparition de régimes critiques de fonctionnement pour lesquels l'amplitude vibratoire augmente fortement.

La détermination de la raideur d'engrènement a suscité un intérêt considérable dans l'objectif d'un calcul précis des distributions statiques de charge des dents et des distributions de contraintes [2] – [3]. Dans ce contexte, plusieurs formules et approches sont présentées dans la littérature [25] – [30] parmi lesquelles nous en avons retenu deux :

- a) l'une basée sur la norme ISO 6336 [30] sous forme d'une formule analytique simple exprimant la raideur linéique d'engrènement (supposée constante)
- b) les formules classiques de Weber et Banaschek, Lundberg qui reposent sur une approche de type poutre sur encastrement élastique et conduisent à des raideurs d'engrènement évoluant avec la position du contact sur le profil des dentures [25] – [28].

#### 1.2.3.4. Raideur d'engrènement – Expression de l'ISO 6336 [30]

La raideur élémentaire d'un segment  $k_{ij}$  est supposée être simplement proportionnelle à la longueur de l'élément  $ij$  considéré. La norme ISO 6336 [30] fournit une approximation de la raideur d'engrènement par unité de longueur  $k_0$  sous la forme :

$$k_0 \cong \cos \beta_b \frac{0.8}{q} \quad (\text{I.14})$$

avec :

- $\beta_b$  : angle d'hélice de base.

$$q = C_1 + \frac{C_2}{Zn_1} + \frac{C_3}{Zn_2} + C_4 x_1 + C_5 \frac{x_1}{Zn_1} + C_6 x_2 + C_7 \frac{x_2}{Zn_2} + C_8 x_1^2 + C_9 x_2^2 \quad (\text{I.15})$$

- $C_1, \dots, C_9$  : coefficients énumérés dans le Tableau I-1.
- $Zn_i = \frac{Z_i}{\cos^3 \beta_b}$ ,  $i = 1, 2$  : le nombre de dents pour l'engrenage droit équivalent
- $Z_i$ ,  $i = 1, 2$  : nombres de dents du pignon ( $i=1$ ) et de la roue ( $i=2$ )
- $x_i$ ,  $i = 1, 2$  : coefficients de déport du pignon ( $i=1$ ) et de la roue ( $i=2$ )

**Tableau I-1 : Coefficients pour le calcul de la raideur d'engrènement (ISO 6336 [30])**

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
0,04723	0,15551	0,25791	-0,00635	-0,11654	-0,00193	-0,24188	0,00529	0,00182

Cette relation permet d'obtenir rapidement une première approximation de la raideur d'engrènement mais elle ne tient pas compte de la position de la ou des lignes de contact suivant la hauteur des dents ni de la courbure relative des surfaces.

### *1.2.3.5. Raideur d'engrènement – Modèle plus élaboré [25]–[26]*

L'approche présentée dans ce paragraphe propose des expressions de raideur d'engrènement qui dépendent de la position du point de contact dans la fenêtre d'engrènement [2] [21]. En effet, elle correspond à un calcul des déflexions des dents des engrenages en superposant :

- les déplacements qui résultent des déformations locales au contact : déflexions de types hertziennes ( $\delta_c$ ),
- les déplacements qui résultent des déformations globales correspondantes aux déformées structurelles de denture (flexion ( $\delta_b$ ), pivotement par rapport à la jante ( $\delta_{fw}$ )).

Pour un effort normal appliqué ( $F$ ), la raideur de contact  $k_{eq}$  (d'engrènement) est alors déduite sous la forme :

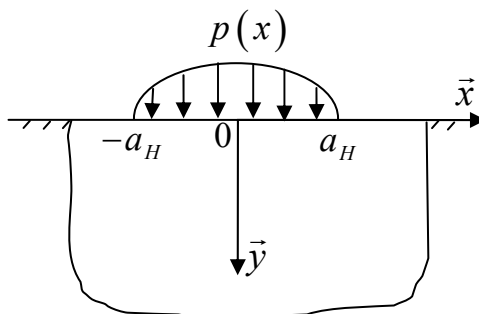
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{\partial(\delta_{fw} + \delta_b + \delta_c)}{\partial F} \quad (I.16)$$

#### *a) Raideur de contact entre les dents*

Parmi les formules les plus couramment utilisées pour modéliser le contact entre les deux flancs de dentures et par suite déterminer la raideur de contact, on trouve les deux formules analytiques de Weber et Banascheck [26] et de Lundberg [25].

##### ▪ **Formules de Weber et Banascheck**

Weber et Banascheck [26] ont proposé une formule purement bidimensionnelle. Les deux dents en contact sont localement assimilées à deux demi-plans élastiques soumis chacun à une distribution hertzienne de pression normale ( $p(x)$ ).



**Figure I-9 : Répartition de la pression hertzienne**

En considérant que la déformée due au contact est localisée au voisinage de la zone chargée et devient nulle au niveau de la fibre médiane de la dent, la déflexion de contact s'exprime alors :

$$\delta_c^{WB} = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{a_H} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right) \quad (\text{I.17})$$

avec :

- $F$  : force normale appliquée sur la dent.
- $b$  : largeur de la dent.
- $E$  : module de Young.
- $\nu$  : coefficient de Poisson.
- $k_1, k_2$  : distances entre le point de contact et la ligne médiane de la dent (l'indice 1 pour le pignon et l'indice 2 pour la roue), (Figure I-10)
- $a_H = \sqrt{8 \frac{F}{b} \rho_{eq} \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$  : demi-largeur du contact hertzien (Figure I-9).
- $\rho_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$  : rayon de courbure équivalent au point de contact considéré.
- $\rho_1, \rho_2$  : rayons de courbure, (Figure I-10).

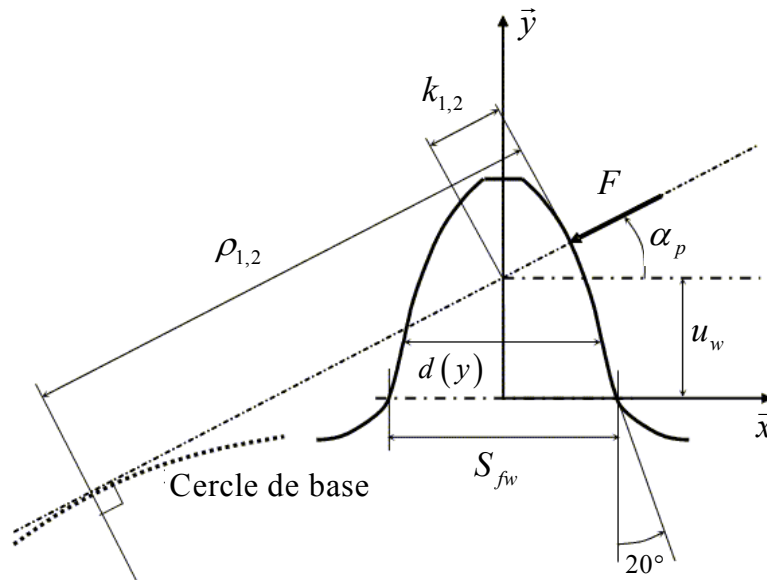


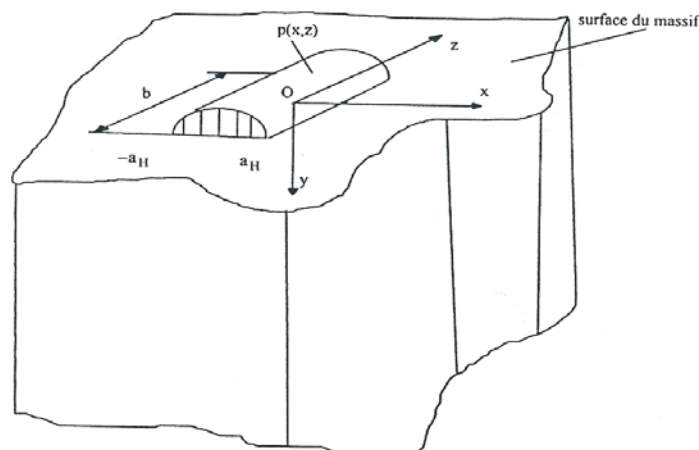
Figure I-10 : Paramètres géométriques généraux [26]

#### ▪ Formules de Lundberg

Une formulation, basée sur une pression de contact uniforme sur la largeur et semi-elliptique selon la direction du profil, a été proposée par Lundberg [25] (Figure I-11). Cette

formulation est dite « tridimensionnelle » puisque la largeur de contact  $b$  est introduite indépendamment du rapport  $F/b$  tel qu'il apparaît dans la formulation de Weber Banaschek (équation(I.17)). Le chargement est appliqué en assimilant la dent à un espace élastique semi-infini et conduit, en gardant les mêmes notations que précédemment, à l'expression suivante pour la déflexion de contact :

$$\delta_L^c = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{1}{2} + \ln 2 + \ln \frac{b}{a_H} \right) \quad (\text{I.18})$$



**Figure I-11 :** Modélisation de la pression – cas de la formule de Lundberg [25]

### **b) Raideurs structurelles**

#### ▪ Déplacement dû à la flexion de la dent

Pour caractériser les déformations dues à la flexion des dents plusieurs formules et approches ont été proposées [25] – [29]. Prenons l'étude de Weber et Banaschek [26] qui ont considéré la dent d'engrenage comme étant une poutre de section variable. Cette poutre est encastée au niveau du corps d'engrenage et libre de l'autre côté. Ainsi, en écrivant l'égalité entre le travail de l'effort extérieur et l'énergie de déformation de la dent en flexion, ils ont exprimé la déflexion de la ligne moyenne comme suit :

$$\delta_b = \frac{F}{b} \frac{1}{E} \cos^2(\alpha_p) \left[ 10.92 \int_0^{u_w} \frac{(u_w - y)^2}{d(y)^3} dy + 3.1(1 + 0.294 \text{tg}^2(\alpha_p)) \int_0^{u_w} \frac{1}{d(y)} dy \right] \quad (\text{I.19})$$

avec :

- $F$  : force normale appliquée sur la dent.
- $b$  : largeur de la dent.
- $E$  : module de Young.
- $\alpha_p$  : angle de pression.

Les autres paramètres sont définis dans la Figure I-10.



### ▪ Déplacements dus à la déformation du corps d'engrenage

Dans leur étude, Weber et Banaschek [26] ont, dans un deuxième temps, supposé la dent comme étant infiniment rigide et ont modélisé le corps de la roue par un demi-plan élastique sur lequel sont appliquées des distributions de contraintes normales et tangentielles. Les contraintes normales, supposées linéaires sont dues aux moments de flexion et à l'effort de compression alors que celles tangentielles, prises constantes, sont causées essentiellement par l'effort de cisaillement. Ainsi, en appliquant la théorie de l'élasticité bidimensionnelle, les auteurs ont proposé l'équation (I.20) pour estimer le déplacement de la dent dans la direction de la charge appliquée.

$$\delta_{fw} = \frac{F}{b} \frac{1}{E_{eq}} \cos^2(\alpha_p) \left[ L \left( \frac{u_w}{S_{fw}} \right)^2 + M \left( \frac{u_w}{S_{fw}} \right) + P \left( 1 + Q \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha_p) \right) \right] \quad (\text{I.20})$$

avec :

- $S_{fw}$  : épaisseur de la dent dans la section critique (Figure I-10).
- $E_{eq}$  : Module d'Young équivalent (égal à  $E$  pour un état de contraintes planes et  $E/(1-\nu^2)$  pour un état de déformations planes).
- $L, M, P$  et  $Q$  : constantes qui dépendent essentiellement du coefficient de poisson  $\nu$  (pour  $\nu=0.3, L=5.2, M=1, P=1,4$  et  $Q=0.3$  [26]).

Plus récemment, Sainsot et al. [29] ont proposé une formulation analytique permettant de calculer les déflexions associées aux déformations des corps d'engrenages. Cette formulation se base sur la théorie de Muskhelishvili appliquée à un anneau circulaire élastique. Ainsi, l'hypothèse de plans semi infinis élastique est remplacée par celle plus réaliste d'anneaux élastiques dont les géométries sont plus proches de celles des corps d'engrenages. Une représentation en série de puissances complexes est utilisée afin de tenir compte des déformations de la denture et de la jante. La solution analytique obtenue est en bon accord avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis. A cause de sa relative simplicité, la formulation initiale de Weber Banaschek reste toutefois la plus fréquemment utilisée.

Finalement, en chaque point de contact potentiel ( $M_{ij}$ ), la raideur élémentaire dépend principalement de :

- la longueur du segment  $ij$  ;
- la hauteur du contact sur les dents du pignon et de la roue ;
- la courbure des surfaces ;
- l'intensité de l'action normale.

L'ensemble des éléments de modélisation d'un réducteur simple étage étant maintenant connu, le paragraphe suivant présente la mise en équation globale et le principe de résolution du système.

## I.2.4. Mise en équation

### I.2.4.1. Equation du mouvement

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le modèle d'engrenage (quelque soit le nombre de ddl) et en assemblant les matrices élémentaires de masse et de raideur de l'élément d'engrenage, éventuellement des raideurs associées aux éléments supports (paliers, arbre, boîtier, etc.), des vecteurs correspondant aux forces extérieures, on obtient un système global différentiel, non linéaire, à excitations paramétrique dont la forme est donnée par l'équation (I.21).

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K(t, X)]X = F_0 + F_1(t, X, \delta_e(M)) + F_2(t, \dot{\Omega}_{1,2}) \quad (I.21)$$

avec :

- $X$  : Vecteur des degrés de liberté.
- $[M]$  : Matrice de masse totale.
- $[C]$  : Matrice amortissement visqueux équivalente (voir paragraphe suivant).
- $[K(t, X)]$  : Matrice de rigidité globale du réducteur, non linéaire et dépendante du temps et des coordonnées généralisées du système.
- $F_0$  : vecteur des forces extérieures.
- $F_1(t, X, \delta_e(M))$  : vecteur d'excitation supplémentaire introduisant l'effet des écarts géométriques.
- $F_2(t, \dot{\Omega}_{1,2})$  : vecteur d'excitation supplémentaire introduisant l'effet de la cinématique perturbée par les écarts géométriques.

### I.2.4.2. Introduction de l'amortissement

Quelque soit le système vibratoire étudié, l'introduction d'amortissement est indispensable afin d'obtenir des amplitudes de réponse finies dans les zones de résonance. La détermination du niveau d'amortissement pour une transmission de puissance par engrenages reste toutefois délicate tant les sources de dissipation sont nombreuses et de nature différentes : liaisons imparfaites, amortissement structural, etc. Pour ce faire, l'amortissement

global du système est souvent introduit dans les équations de mouvement de manière approximative [2]. Dans ce contexte, des approches modales ou pseudo modales (considération d'un certain nombre de fréquences propres) sont fréquemment utilisées ; l'amortissement est exprimé dans une base modale en tenant compte des raideurs et masses modales et est ensuite projeté dans la base physique [2]. Un amortissement visqueux équivalent est ainsi défini pour chaque mode du système, ce qui laisse la possibilité d'effectuer un recalage dans la mesure où les fréquences associées sont suffisamment éloignées (hypothèse de Basile). En pratique, les modes propres du système non amorti sont calculés à partir de la matrice masse globale  $[M]$  et de la matrice de rigidité  $[K(t,X)]$  moyennée sur le temps. Ainsi, l'amortissement est introduit de manière globale au moyen d'une matrice  $[C]$  constante supposée orthogonale par rapport à ces modes propres ([2] – [3]).

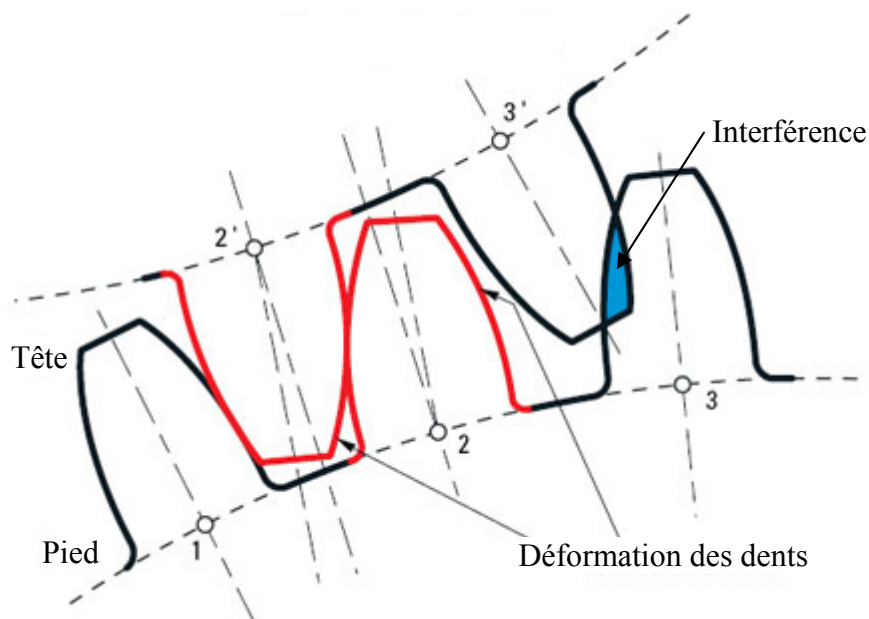
### I.2.5. Résolution des équations du mouvement

Pour résoudre ce type d'équations, la plupart des travaux s'appuient sur des méthodes numériques telles que les schémas d'intégrations pas à pas dans le temps et les transformés intégrales. En effet, la forme explicite de la relation qui décrit la dépendance de la raideur d'engrènement, des variables d'état et des écarts géométriques est généralement inconnue. Les algorithmes de résolution sont fréquemment itératifs et couplent des méthodes d'intégration pas à pas dans le temps et des algorithmes de contact. L'originalité introduite par Vexel [2] pour l'étude du comportement statique et dynamique des engrenages a été de tenir compte des conditions instantanées lors du processus d'intégration des équations du mouvement. Le schéma implicite de Newmark a été retenu et a été couplé à un algorithme de contact normal unilatéral (voir annexe A). Les conditions initiales sont déterminées à partir de la solution statique puis, à chaque incrément de temps, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

- l'effort normal en chaque point de contact d'une ligne de contact potentielle doit être positif.
- En tout point extérieur à la fenêtre d'engrènement, l'écrasement doit être nul.

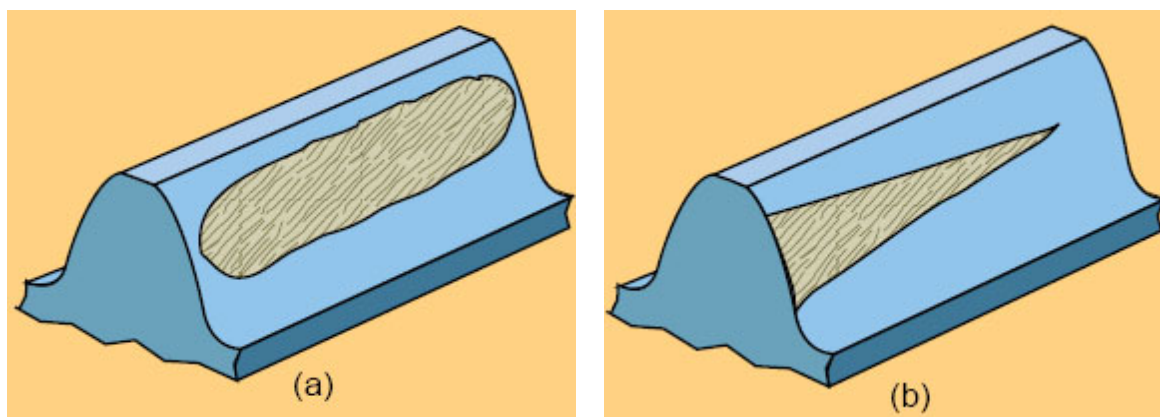
### I.3. Correction des dentures : définitions et types

Les profils des dents d'engrenages sont théoriquement conjugués et permettent théoriquement une transmission homocinétique sans choc. Les profils en développantes de cercle possèdent cette propriété si les déformations et les écarts géométriques demeurent très faibles devant les dimensions caractéristiques des dentures. En réalité, lorsqu'une charge est transmise, les systèmes se déforment et peuvent induire des interférences comme illustré schématiquement sur la Figure I-12.



**Figure I-12 :** Illustration de la déformation des dents (dents 2 et 2') et du phénomène d'interférence (dents 3 et 3')

De même, des erreurs géométriques, de forme ou de positionnement sont, dans une certaine mesure, présentes sur tous les engrenages suite aux imprécisions d'usinage, aux distorsions dues aux traitements thermiques, etc. Ces défauts, associés aux possibles déformations des autres éléments d'un réducteur (arbres, paliers, ..), peuvent entraîner une portée en « coin » [31] – [32]. Comme représenté sur la Figure I-13, cette portée correspond à une surcharge sur les extrémités de la largeur des dentures ce qui peut mettre en cause la capacité de charge de l'engrenage. Pour l'ensemble de ces considérations, des modifications de forme sont souvent introduites afin de compenser les distorsions élastiques ou thermiques, déformations, les défauts d'alignement, les erreurs de positionnement, etc., évoqués plus haut [33] – [34]. L'objectif principal de ces corrections est donc de conduire à une meilleure régularité de fonctionnement et à améliorer la répartition de la charge sur le flanc de denture en évitant, entre autres, une surcharge à l'engagement [10] – [35].

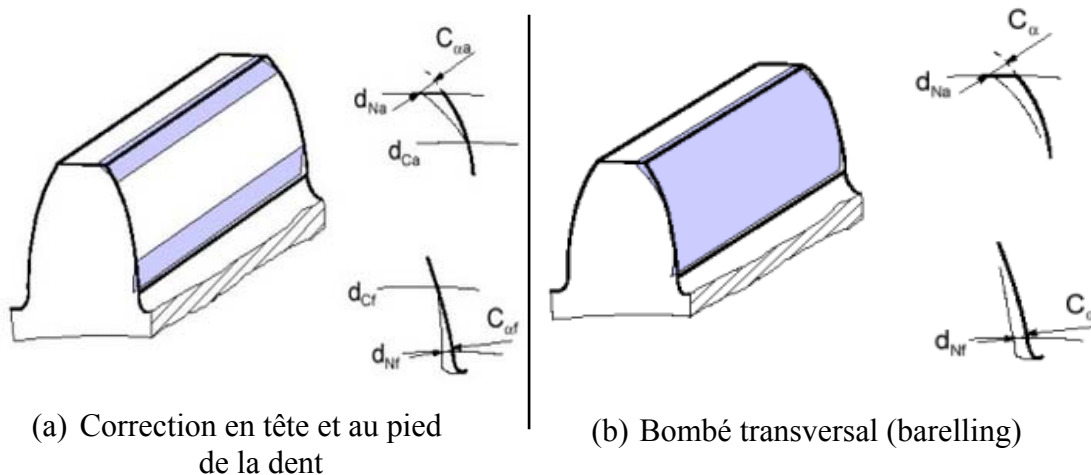


**Figure I-13 :** Aire de contact sur le flanc de la denture  
(a) Contact typique (b) Contact en « coin » (au bord)

Ces modifications effectuées sur la surface de denture du pignon correspondent fréquemment à une déviation du profil de la dent par rapport au profil théorique et peuvent être appliquées en pied de dent, en tête, sur toute ou sur une partie seulement de la largeur denture. Cette déviation correspond le plus souvent à un enlèvement de matière de l'ordre de la dizaine de micromètres [30]. Plusieurs techniques de correction sont décrites dans la littérature [33] – [35]. En premier lieu, on trouve les corrections dites conventionnelles, pour lesquelles les modifications des dentures selon le profil et la largeur de denture sont apportées de manière indépendante [36]. Une autre technique consiste à introduire simultanément des modifications sur le profil et la largeur en enlevant de la matière parallèlement aux lignes de contact (« cross modification » généralement appliquées aux engrenages hélicoïdaux [36]). Enfin, un dernier type de correction, connu sous le nom « correction topographiques », consiste à corriger point par point les flancs actifs des dentures [36].

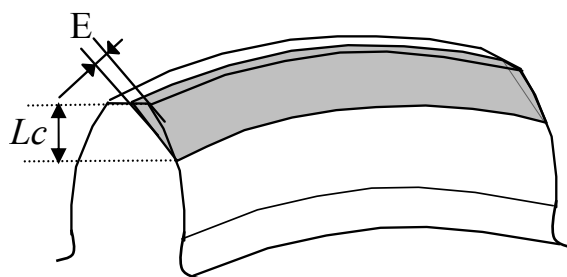
### I.3.1. Modifications du profil apparent

Ces corrections ont pour fonctions principales de supprimer les contacts prématurés dus aux déformations des dentures sous charge (voir Figure I-12) et d'améliorer la régularité de l'engrènement. Elles permettent ainsi d'assurer une mise en charge progressive de chaque couple de dents ([1] et [7]). Elles peuvent être appliquées sur tout ou une partie du flanc actif de dent. La norme ISO 21771 [36] définit plusieurs variétés de modifications de profil possibles, avec différents paramétrages, dont les plus utilisées sont présentées dans la Figure I-14.



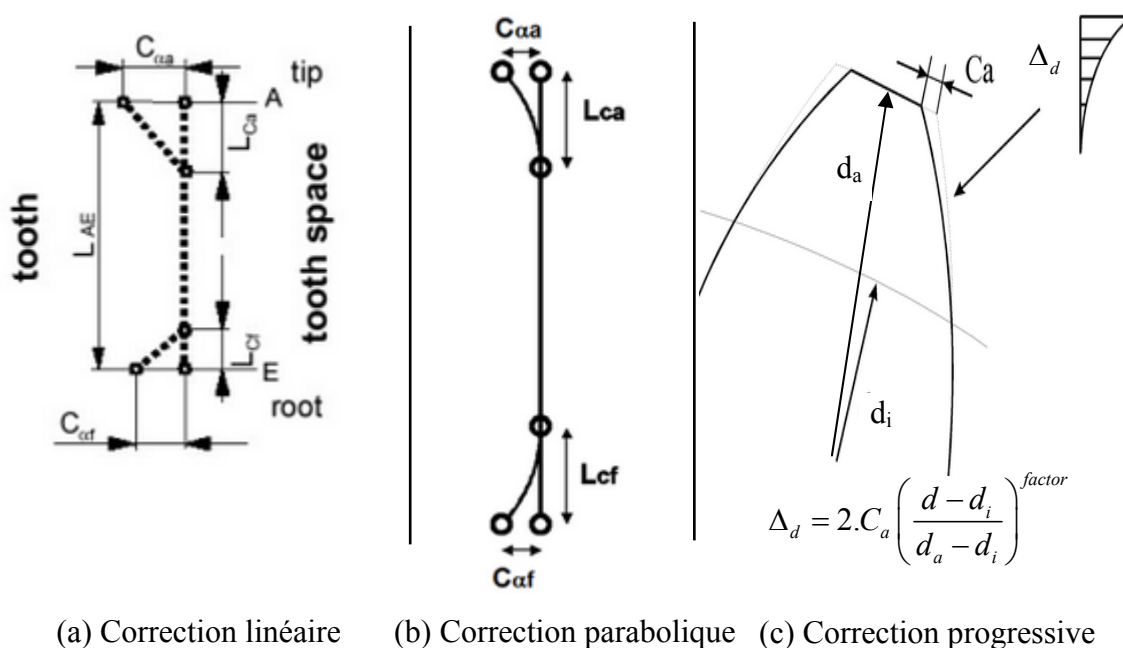
**Figure I-14 :** *Quelques types de correction de profil [36]*

Le paramétrage d'une correction de profil type en tête (la plus utilisée), est donné dans la Figure I-15. Ces modifications sont, en général, définies par une profondeur normale au profil au sommet de la dent ( $E$ ) et une longueur de correction sur le profil ( $L_c$ ). Ces paramètres sont couramment identiques pour les dents des deux roues conjuguées en contact d'où le nom correction de profil « symétrique ».



**Figure I-15 :** Principaux paramètres d'une correction linéaire de profils, en tête

Une caractérisation complète de la correction de profil nécessite, en outre, la définition de la forme de modification introduite. La Figure I-16 illustre les principales formes de correction trouvées dans la littérature [36] : corrections linéaires, paraboliques ou progressives dans laquelle la forme est définie par une loi en puissance [36] – [38]. Pour un facteur égal à l'unité on retrouve le cas de la correction linéaire.

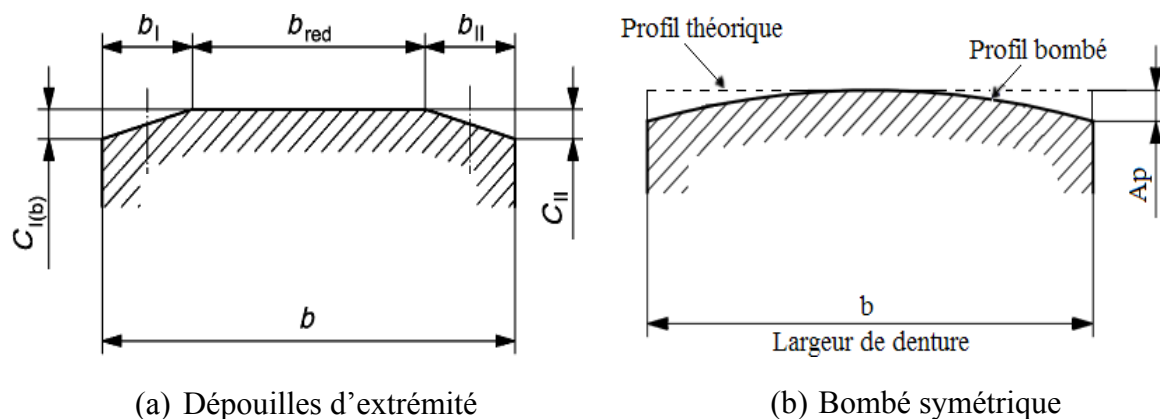


**Figure I-16 :** Principales formes de correction de profil [36]

### I.3.2. Corrections longitudinales

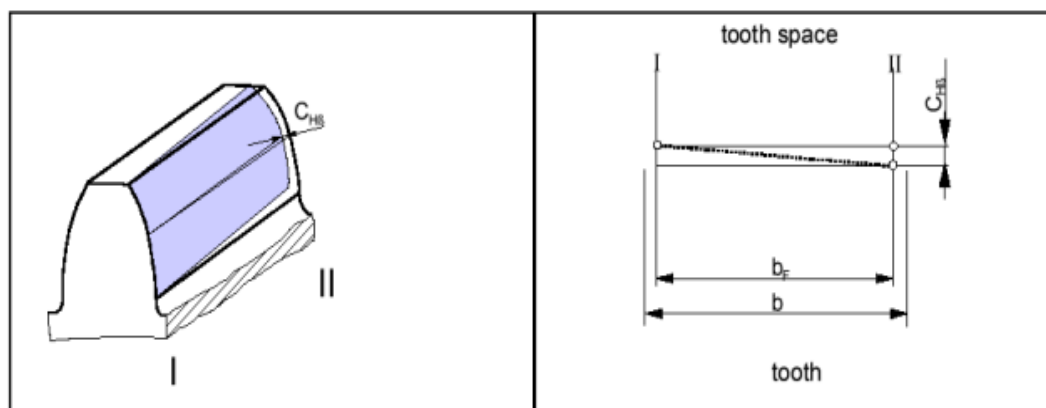
Suite à des défauts de montage, aux déformations des supports et aux divers jeux de fonctionnement, les contacts peuvent être localisés sur une partie de la largeur de denture et conduire à des surcontraintes néfastes en termes de durée de vie (voir Figure I-13). Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre ce problème de chargement sur les bords consiste à introduire des corrections de forme dans la direction longitudinale [31] – [36], généralement sous forme linéaire ou parabolique [36]. Ces modifications peuvent être introduites

partiellement ou intégralement, c'est à dire sur toute la surface de la denture. Pour les corrections partielles, on définit des dépouilles d'extrémité caractérisées par une profondeur  $C_i$  et une largeur  $b_i$  de chaque côté (voir Figure I-17 (a)). La correction longitudinale la plus répandue est une correction intégrale et symétrique centrée sur la demi-largeur de la dent [36] et caractérisée par une amplitude de bombé  $A_p$  (Figure I-17 (b)).



**Figure I-17 :** Principales configurations de la correction du bombé

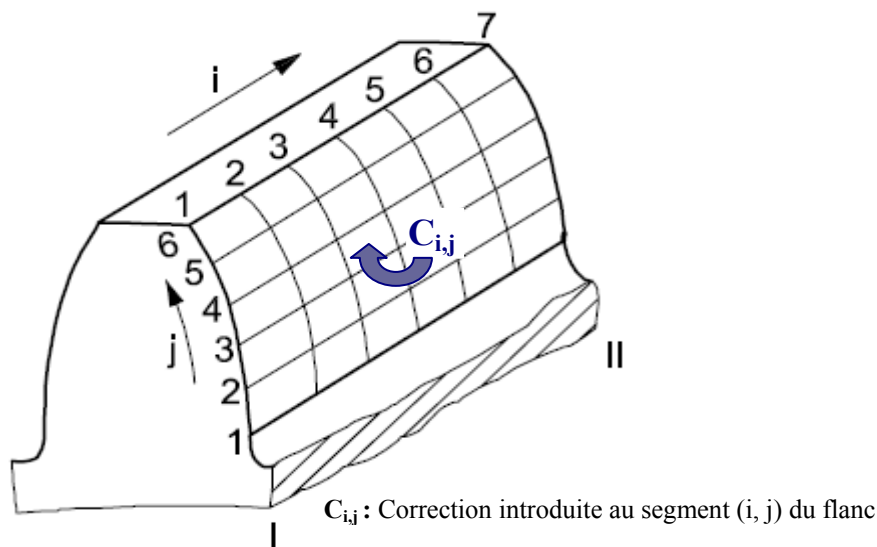
Pour des engrenages de largeurs importantes à dentures droites ou hélicoïdales, des corrections d'hélice sont généralement introduites pour compenser l'évolution de l'angle de torsion suivant la largeur de denture et recentrer la portée sous charge [36]. Elles sont définies par une variation  $C_{H\beta}$  de l'angle d'hélice par rapport à l'angle d'hélice de base  $\beta_b$ . (voir Figure I-18). Ainsi, dans le cas de déformations importantes, une correction d'angle d'hélice peut être superposée à une correction du bombé.



**Figure I-18 :** Illustration de la correction d'hélice [36]

### I.3.3. Modification topographique du flanc

Au-delà des modifications "standard" (de profil et dans la direction longitudinale), il est également possible de définir des modifications dites « topographiques » où chaque point sur le flanc de dent possède sa propre modification [36]. En effet, la déviation désirée par rapport au profil initial en développante est déterminée à chaque point d'intersection sur une grille théorique déposée sur le flanc de la dent (voir Figure I-19). Ce type de modification est beaucoup plus difficile à produire que les modifications standard.



**Figure I-19 :** Illustration de la modification topographique

Les différentes corrections que l'on peut apporter aux surfaces actives des dentures n'ont pas systématiquement un effet bénéfique sur le comportement de l'engrenage. Suivant le critère observé, l'optimisation peut conduire à des solutions très différentes.

## I.4. Optimisation des corrections de dentures : Etat de l'art

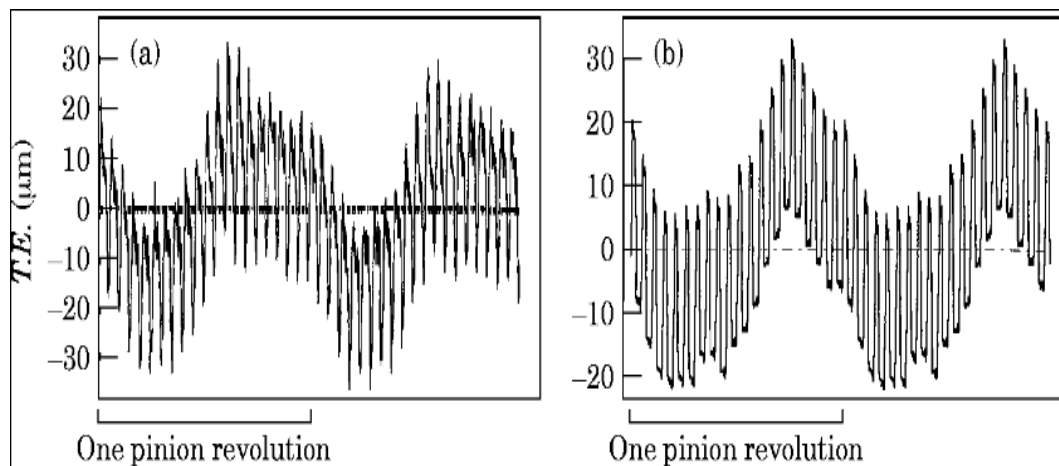
Une étape importante en termes d'optimisation de la conception des engrenages consiste en la détermination des paramètres micro-géométriques définissant les corrections de dentures. En effet, étant donné qu'elles introduisent des écarts de forme, ces corrections de dentures influent nécessairement sur les écarts de transmission à vide et/ou sous charge, en quasi-statique ou en dynamique [33]–[35]. De même, ces corrections modifient les caractéristiques du champ de pression dans la surface de contact (valeur et position de la pression maximale, contrainte de flexion au pied des dents, ...). En conséquence, les corrections de forme des dentures, ont un impact sur un ensemble des critères qui reflètent les performances d'un engrenage (pertes, échauffement, ...).



### I.4.1. Erreur de transmission quasi-statique sous charge

Pour les mécanismes à engrenages, l'erreur de transmission est un indicateur global du comportement traduisant aussi bien les effets des défauts de fabrication que les phénomènes cinématiques et dynamiques. Elle traduit directement les effets des imperfections et des déformations des dentures sur la transmission du mouvement de rotation qui est le mouvement fonctionnel. Welbourn [14] définit l'erreur de transmission comme l'écart entre la position réelle de la roue menée et la position idéale qu'elle devrait occuper si la transmission était parfaite (profils parfaitement conjugués) avec un engrenage infiniment rigide. Elle peut être exprimée sous forme angulaire ou sous forme linéaire si elle est ramenée dans le plan d'action.

L'erreur de transmission quasi-statique sous charge (**TEs**) est la superposition de l'erreur de transmission quasi-statique sans charge et de l'effet de déformations des dentures lorsque l'engrenage transmet une charge à très faible vitesse. Elle fait intervenir les effets périodiques des déformations des dentures et de l'ensemble du système (arbres, paliers, roulements...). Ce paramètre est alors couramment utilisée afin d'étudier les effets d'écarts géométriques tels que les corrections de profils, les défauts de montage, etc. ([33]–[35]). La Figure I-20 présente des tracés typiques de l'erreur de transmission sous charges pour un engrenage droit. On observe la présence d'une forme porteuse qui correspond aux fluctuations basses fréquences associées à un tour d'une ou des deux roues. Cette forme contient (ou enveloppe) des motifs qui reflètent les fluctuations hautes fréquences associées à la fréquence d'engrènement ( $f_m$ ) et ses harmoniques.

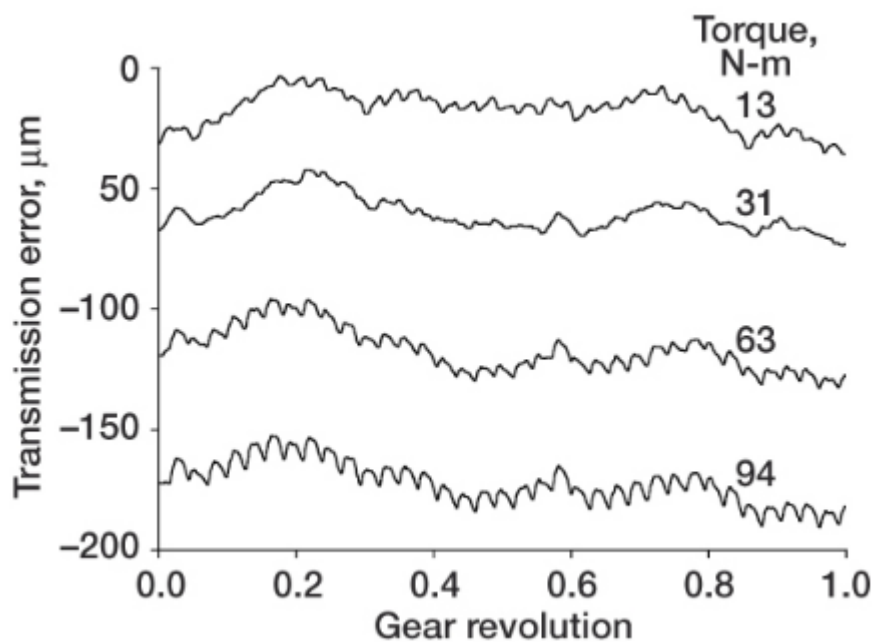


**Figure I-20 :** Erreur de transmission quasi-static \_Engrenage droit

(a) mesures expérimentales (b) simulations numériques (Velex et Maatar 1996 [1])

De nombreux travaux de recherche menés sur le comportement des transmissions par engrenages ont montré une influence prépondérante des corrections de forme sur l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, les vibrations, le bruit, etc. [33] et [40]–[42]. A la suite des travaux de Harris [39], Gregory et al [18] ont constaté que, pour un engrenage droit,

les corrections de profils longues (pour une longueur  $L_c$  qui dépasse le quart de la longueur active du profil) sont capables de réduire considérablement les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique. Des tendances similaires ont été observées pour les cas d'engrenages hélicoïdaux [33]. Cependant, il faut noter que ces constatations sont valables uniquement pour une charge transmise dite « nominale » ou « design load ». De même, la profondeur de la correction de profil varie en fonction de la charge transmise. Dans ce contexte, la Figure I-21, montre une importante variation du niveau et des fluctuations de l'erreur de transmission en fonction de la charge transmise [43]. D'où la difficulté de définir une correction de profil optimale valable pour une large plage de variation du chargement.



**Figure I-21 :** *Erreur de transmission quasi-static pour différentes charges\_Engrenage hélicoïdal. Mesures NASA [43]*

#### 1.4.1.1. Corrections de profils seules

Depuis une quarantaine d'années, un grand nombre de travaux illustrant les applications des corrections de profils dans les engrenages droits et hélicoïdaux ont été présentés. Une modification de profil de forme linéaire introduite en tête est la correction de profil la plus répandue [40]–[42]. Dans ce contexte, la formulation approximative proposée par Munro et al. [44] et Yildirim et Munro [45], [46] pour minimiser les fluctuations de l'erreur de transmission est particulièrement utile pour les engrenages droits. Elle présente des règles de conception simples et illustre l'influence combinée de la charge transmise et de la correction de profil. Toutefois, cette analyse se limite aux seules dentures droites [40]–[42]. Dans le cas d'engrenages hélicoïdaux, des simulations numériques sont généralement utilisées, qui conduisent à des résultats précis pour un cas particulier mais ne fournissent pas nécessairement une compréhension complète des effets des paramètres de conception

(géométrie initiale, corrections de profils) ou des paramètres fonctionnels tels que le chargement transmis. Récemment, Velex et al. [35] ont proposé une approche analytique qui peut être vue comme une généralisation de l'approche de Munro. Dans le cas d'une denture étroite ( $b < 16 \cdot m$ ) et avec des écarts de montage faibles, les auteurs ont proposé, dans un premier temps, une formulation adimensionnelle de TEs indépendante du nombre de degrés de liberté du modèle utilisé. Les résultats analytiques obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus par différents modèles numériques sophistiqués (Sundaresan et al. [47]–[48]), (Velex et al. Maatar [1]), (Komori et al. [50]), etc. La relation proposée est paramétrée par :

- les deux rapports, de conduite apparent  $\varepsilon_\alpha$  et de recouvrement  $\varepsilon_\beta$  caractérisant la géométrie initiale de l'engrenage ;
- les deux paramètres de correction de profil  $E^*$  et  $\Gamma$ .  $E^*$  est la profondeur de la correction (E) adimensionnée par rapport à la déflexion statique moyenne de référence  $\delta_{mref}$  (sans correction) alors que  $\Gamma$  est la fraction du segment de conduite impacté par la correction.

$$E^* = E / \delta_{mref} \quad (I.22)$$

$$\delta_{mref} = \frac{Cm}{Rb_1 b k_0 \varepsilon_\alpha}, \text{ déflexion statique moyenne de référence, sans correction}$$

Dans un deuxième temps, les auteurs ont défini un domaine de l'espace des corrections pour lequel les fluctuations de TEs sont nulles caractérisé par :

$$E^* = \Gamma \varepsilon_\alpha K(\varepsilon_\alpha, \Gamma) \quad (I.23)$$

$K(\varepsilon_\alpha, \Gamma)$  est un paramètre qui ne dépend que du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$  et de la longueur  $\Gamma$ , il est défini dans le tableau suivant:

**Tableau I-2 :** Définition des corrections de profil optimales vis à vis les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique [35]

Rapport de conduite $\varepsilon_\alpha$	$K(\varepsilon_\alpha, \Gamma)$	Conditions
$\varepsilon_\alpha \leq 2$	$\frac{2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma \geq \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$
$\varepsilon_\alpha > 2$	$\frac{2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma \geq \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$

	$\frac{2\Gamma - 1 + \frac{4}{\varepsilon_\alpha}}{2\left(2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}\right)}$	$\Gamma \geq \frac{\varepsilon_\alpha - 2}{2\varepsilon_\alpha}$
	$\frac{1 - 2\Gamma + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{1 - 2\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	

Malgré la diversité des formes de corrections illustrée au paragraphe I.3.1, les topographies linéaires et paraboliques sont les plus courantes et les plus étudiées dans la littérature. Une correction de profil linéaire est intéressante puisqu'elle peut conduire, pour une charge transmise définie (« design load ») à une minimisation considérable de l'erreur de transmission. Cependant, ce type de correction est sensible aux variations de chargement et aux éventuelles erreurs et incertitudes de réalisation [37], [48]. Lin et al. [37] se sont intéressés aux modifications paraboliques de profil et ont constaté que ce type de correction était moins sensible aux variations de chargement et aux erreurs de fabrication tout en gardant des niveaux comparables de réduction des fluctuations de l'erreur de transmission (en comparant avec les corrections linéaires, voir Figure I-22) [37].

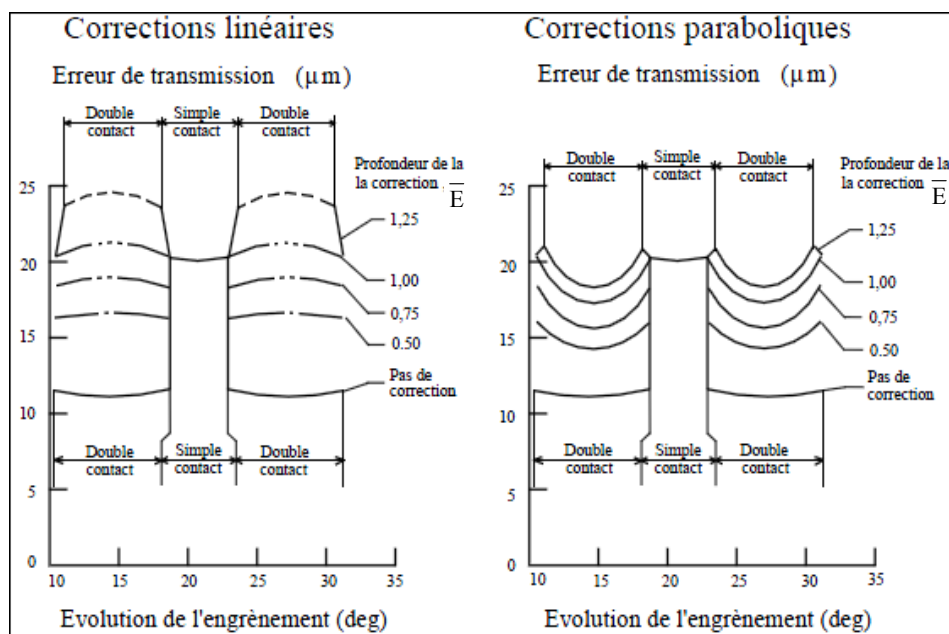


Figure I-22 : Erreur de transmission - Lin et al. [37]

#### 1.4.1.2. Corrections de profils et longitudinales combinées

Afin d'améliorer la répartition de charge sur les dentures et d'augmenter les portées des dentures, les corrections longitudinales sont couramment utilisées. Ces corrections

généralement introduites à travers un bombé parabolique symétrique sur la largeur de la dent du pignon, influent sur l'erreur de transmission quasi-statique [35]-[51]. En effet, pour une denture hélicoïdale, l'introduction du bombé tend à augmenter l'amplitude de l'erreur de transmission [51]. Maatar et Vexex [10] ont analysé l'influence des corrections de profil combinées avec un bombé parabolique symétrique sur l'écart type de l'erreur de transmission quasi statique noté  $A_s$ .

Les deux figures, Figure I-23 et Figure I-24, représentent des courbes isovaleurs du paramètre  $A_s$  en fonction des deux profondeurs adimensionnelles  $\bar{E}$  et  $\bar{A}_p$  de la correction de profil linéaire et du bombé parabolique, respectivement. Les deux paramètres sont adimensionnés par rapport à la déflexion maximale au niveau de l'engrènement pour un engrenage parfait  $\delta_{\max}$ . La longueur de correction de profil  $L_c$  est prise égale à  $0.5 \cdot L_n$  dans la Figure I-23. Sachant que  $L_n$  représente une longueur dite « nominale » sur le plan d'action pendant laquelle  $\text{int}(\varepsilon_\alpha + 1)$  couples de dents sont en prises de contact. Physiquement la longueur  $L_c$  correspond à une correction de profil courte (une longueur qui ne dépasse pas le quart de la longueur active du profil). Cependant une correction dite « longue » de longueur  $L_c = L_n$  est introduite pour le cas de la Figure I-24.

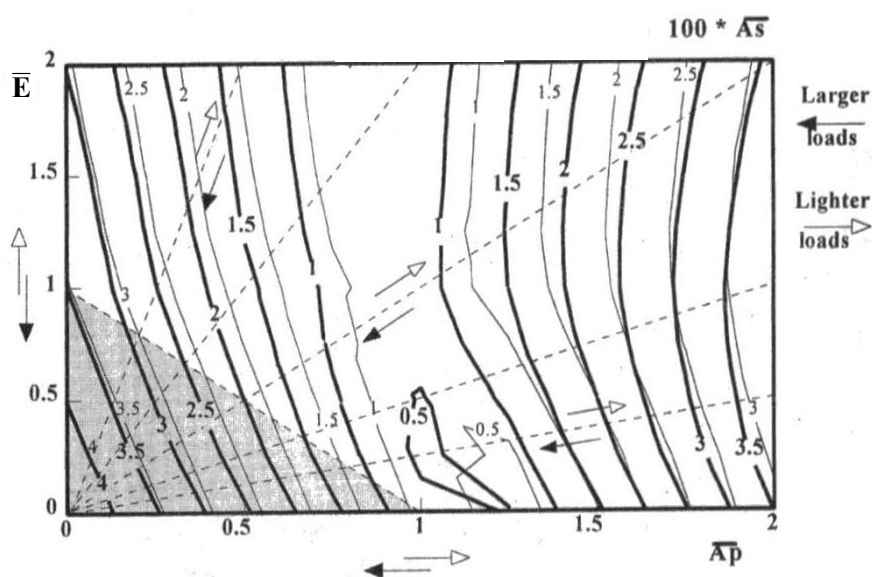
$$L_n = (\varepsilon_\alpha - \text{int}(\varepsilon_\alpha)) \cdot P_{ba} \quad (\text{I.24})$$

avec

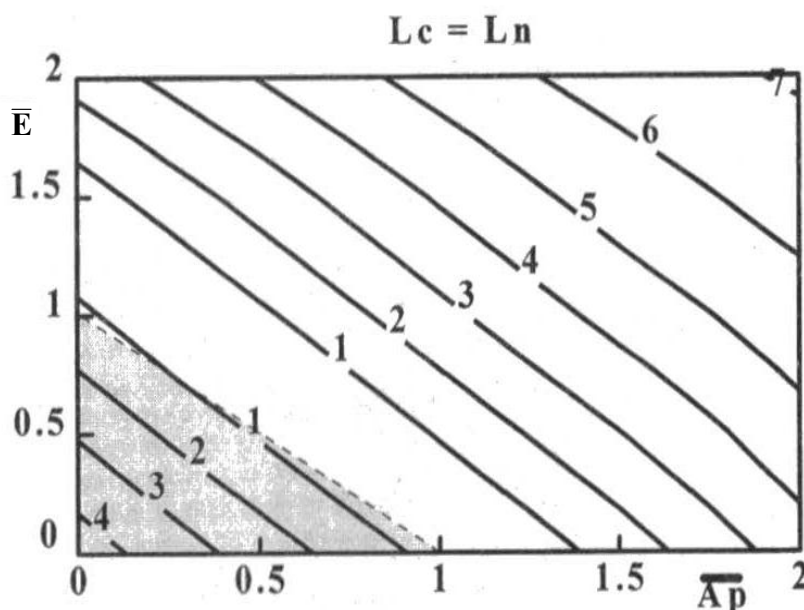
$\varepsilon_\alpha$  : rapport de conduite transversale

$\text{int}(x)$  : partie entière de  $x$

$P_{ba}$  : pas de base apparent



**Figure I-23 :** Variation du paramètre  $A_s$  en fonction de la profondeur adimensionnée de la correction de profil  $\bar{E}$  et de l'amplitude du bombé  $\bar{A}_p$  (correction courtes  $L_c = 0.5 \cdot L_n$ ) [10]



**Figure I-24 :** variation au paramètre  $A_s$  en fonction de la profondeur adimensionnée de la correction de profil  $\bar{E}$  et de l'amplitude du bombé  $\bar{A}_p$  (correction longues  $L_c = L_n$ ) [10]

NB : ( $\bar{\cdot}$ ) désigne le paramètre ( $\cdot$ ) adimensionné par rapport la déflexion maximale au niveau de l'engrènement pour un engrenage parfait.

Sur les figures ci-dessus, les limites des zones grisées (ombrées) correspondent sensiblement à la quantité minimale de modification (combinaison de correction de profil et du bombé) éliminant les conditions d'interférence à l'engagement (« corner contact »). Ainsi, en traçant plusieurs diagrammes isovaleurs semblables à ceux obtenus aux figures précédentes, et pour différentes données de géométrie et de corrections de forme, Maatar et Vexel [10] ont constaté que, pour un engrenage à dentures droites, l'ajout du bombé ne modifiait pas les constatations tirées pour le critère étudié en présence des corrections de profils seules. En revanche, les engrenages hélicoïdaux sont plus sensibles aux effets combinés des corrections de profil et longitudinales. En outre, il s'avère que les résultats dépendent fortement de la longueur de la correction de profil. Le cas d'une correction longue paraît plus sensible aux i) variations de charge transmise, pour  $\bar{A}_p$  et  $\bar{E}$  donné, puisque les lignes de niveau sont plus serrées et ii) aux erreurs de réalisation, pour une charge transmise constante. De même, pour ce cas, les courbes d'isovaleurs suivent pratiquement l'équation  $\bar{A}_p + \bar{E} = \text{constante}$ . Pour des corrections courtes, les lignes d'isovaleurs sont presque verticales, montrant ainsi que le bombé est le paramètre le plus influent pour cette configuration.

L'ensemble des travaux présentés ci-dessus, confirme l'influence des corrections des dentures sur l'erreur de transmission. Ils montrent la présence de combinaisons de paramètres de corrections de dentures qui optimisent les fluctuations de l'erreur de transmission. Dans tous les cas, des corrections trop fortes conduisent à un fonctionnement dégradé.

## I.4.2. Rendement

Plusieurs travaux de recherche ont été consacrés à l'étude du comportement des engrenages en vue d'améliorer les performances et d'accroître la puissance transmise [52] – [57]. Cette amélioration passe essentiellement par la prise en considération des phénomènes physiques qui influent sur le rendement du système. Une synthèse des différentes sources de perte de puissance dans une transmission d'engrenages a été présentée par Hoehn et al. [52]. Les auteurs ont conclu que, quel que soit le lubrifiant et la finition de surface, une réduction des pertes peut être réalisée en optimisant la géométrie des engrenages. Généralement, deux contributions principales interviennent dans la perte totale de puissance dans une transmission par engrenages :

La première est indépendante de la charge et fait intervenir l'environnement de fonctionnement du système (lubrification –piégeage d'un mélange air-huile en pied de dent, barbotage, jets- et ventilation). Tandis que la deuxième est liée à la charge, caractérisée essentiellement par le frottement entre les dentures au cours d'engrènement. Son impact est marquant pour les vitesses de rotation modérées [53]-[54] et [57]. La quantification des pertes liées à la charge transmise nécessite une bonne caractérisation du coefficient de frottement dans des contacts entre dentures d'engrenages. Un grand nombre de formules empiriques peuvent être trouvées dans la littérature [53] dont la forme générale peut s'écrire :

$$f = f(v_k, \nu, V_s, V_r, R, W, P_{max}, S, \dots) \quad (I.25)$$

Avec  $v_k$ , la viscosité cinématique et  $\nu$ , la viscosité dynamique du lubrifiant, qui sont des fonctions de la température et de la pression de l'huile au contact. Les paramètres  $V_s$ ,  $V_r$  et  $R$  représentent la vitesse de glissement relative, la somme des vitesses de roulement et le rayon de courbure, respectivement. Les paramètres de charge sont la charge normale par unité de longueur  $W$  ou la pression de contact  $P_{max}$ .  $S$  est un paramètre de finition, représentant la rugosité initiale des deux surfaces de contact [52]. Ces formules proposées s'appuient, au moins pour partie, sur des résultats expérimentaux obtenus sur des bancs d'essais spécifiques (machine bi-disques).

Les corrections de denture apparaissent comme un paramètre influent sur les niveaux de perte de puissance d'une transmission par engrenage [53]-[54]. Dans le but de cerner cette influence, Velex et Ville [56] ont proposé une formule analytique définissant le rendement  $\rho$  du train d'engrenage en supposant que le coefficient de frottement reste constant au cours du contact. Les comparaisons avec les résultats numériques sont généralement satisfaisantes [56]. D'après les auteurs, ce rendement dépend essentiellement de quelques paramètres géométriques, du coefficient de frottement  $f$  et d'un facteur des pertes noté  $\Lambda_p$  (voir équation(I.26)) sous la forme :

$$\rho = 1 - f(1+u) \frac{\pi}{Z_1 \cos \beta_b} \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \times \Lambda_p \quad (\text{I.26})$$

avec :

$Z_1, Z_2$  : Nombre de dents du pignon, de la roue

$f$  : Coefficient de frottement

$\varepsilon_\alpha$  : Rapport de conduite

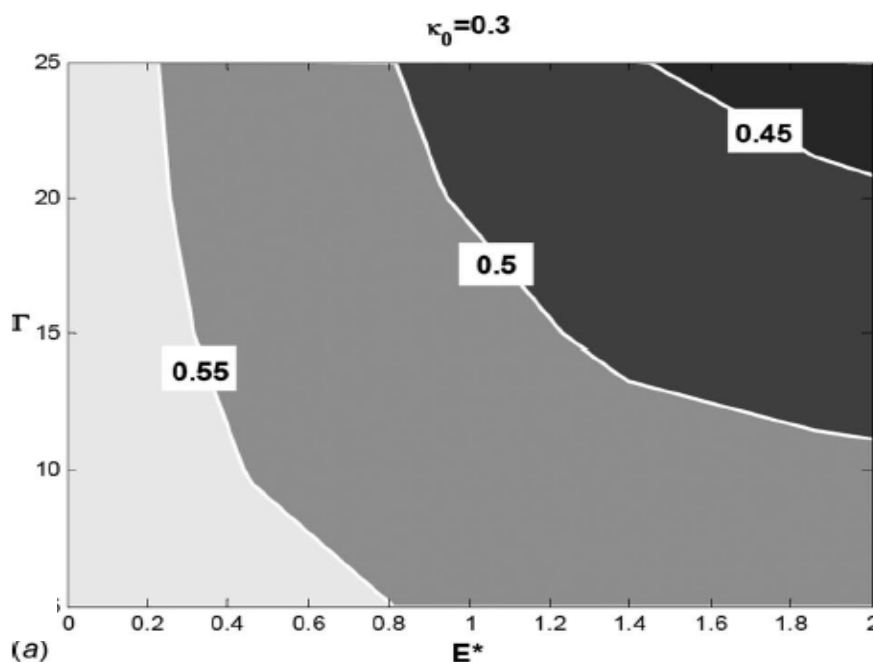
$u = \frac{Z_1}{Z_2}$  : Rapport de réduction

$\Lambda_p$  : Facteur des pertes

Le facteur de perte proposé dépend à son tour de paramètres géométriques incluant les paramètres de correction de profil et la position du point primitif I, caractérisée par une position adimensionnée par rapport à la ligne d'action notée  $\kappa_0$  (Equation(I.27)).

$$x(I) = \kappa_0 \varepsilon_\alpha P b_a \quad (\text{I.27})$$

Les auteurs [56] ont tracé, pour différentes positions du point I (différentes valeurs de  $\kappa_0$ ), l'évolution de ce facteur en fonction des paramètres,  $E^*$  et  $\Gamma$ , de correction de profil symétrique en tête (voir Figure I-25). Ils ont constaté que les corrections de profil réduisent effectivement les pertes par frottement puisque le rendement devient meilleur lorsque la profondeur ou la longueur de correction augmentent. Les courbes d'isovaleurs suivent pratiquement une loi de la forme  $\Gamma \cdot E^* = \text{constante}$ .

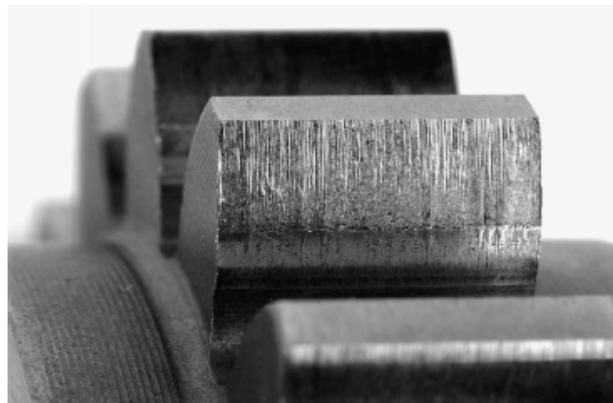


**Figure I-25** : Variation du facteur des pertes  $\Lambda_p$  en fonction de la profondeur adimensionnée  $E^*$  et de la longueur adimensionnée de la correction de profil [56]



### I.4.3. Usure

L'usure des surfaces en contact est l'un des modes de défaillance dans les systèmes d'engrenage, particulièrement pour les dentures en aciers traitées dans la masse [59]-[63]. Elle est un processus continu de défaillance combinant un ensemble complexe de phénomènes conduisant, à une émission de débris caractérisée par une perte de masse, de côtes, de forme ainsi que des transformations physico-chimiques des surfaces [58] (voir Figure I-26). Elle peut également provoquer un changement significatif des caractéristiques de vibration et de bruit du système d'engrenages. L'usure peut également affecter les contraintes et les distributions de charge ce qui peut accélérer l'apparition d'autres modes de défaillance.



**Figure I-26 : Défaut d'usure [63]**

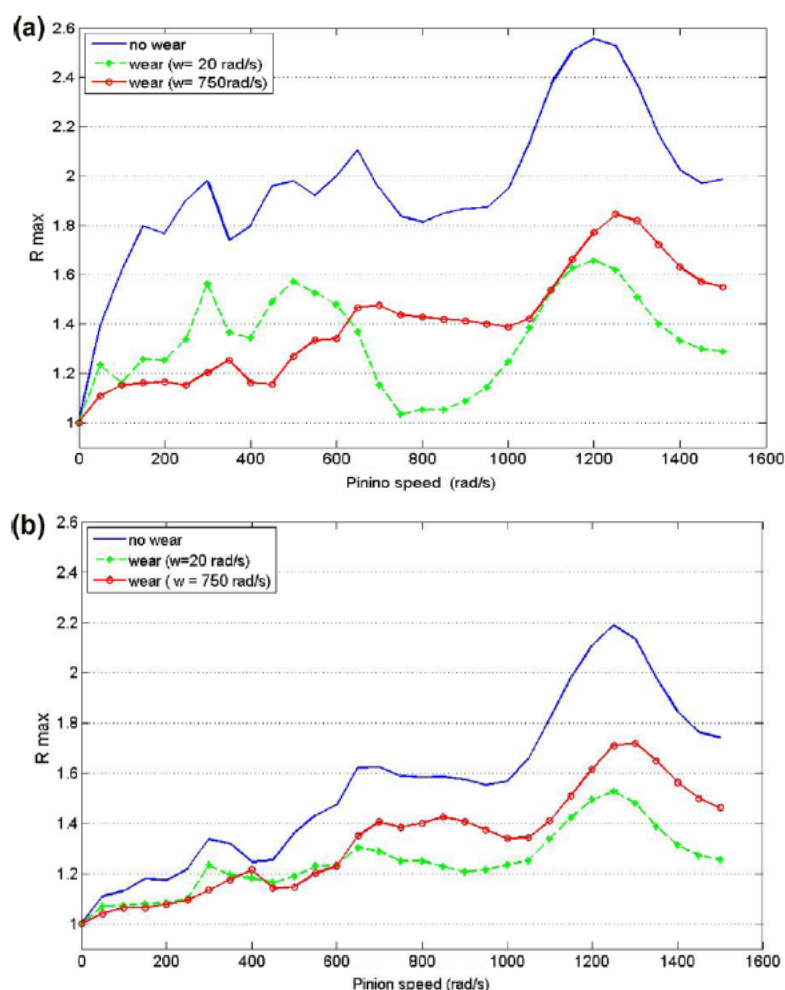
Plusieurs lois d'usure dans les engrenages ont été proposées [63], elles sont principalement basées sur la loi d'Archard [58] pour laquelle la profondeur d'usure, en un point donné sur une des surfaces de contact en glissement relatif, est exprimée par l'équation (I.28) :

$$h = \int kPds \quad (\text{I.28})$$

où  $k$  est un coefficient d'usure ( $\text{m}^2/\text{N}$ ),  $P$  est l'amplitude de la pression de contact ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) et  $s$  est la distance de glissement (m).

Dans ce cadre, Bajpai et al. [60] ont proposé une formulation d'estimation de l'usure entre les dentures d'engrenages droits et hélicoïdaux plus adéquate. Les auteurs ont utilisé un modèle d'usure semblable à celui d'Archard combiné avec une méthode de calcul des déflexions par éléments finis et un modèle tridimensionnel de contact. Dans la continuité de cette approche, Kahraman et al. [62] ont exploité cette loi pour étudier l'influence des corrections de forme sur l'usure des surfaces des dentures. Ils ont montré un impact significatif des paramètres de corrections de forme sur l'usure induite et en ont déduit qu'il existe une combinaison optimale de corrections de denture conduisant à une meilleure distribution d'usure (distribution uniforme) sur les flancs en contact. Récemment, Osman et Velex [64] ont montré qu'en introduisant une correction de profil donnée, on peut réduire

d'une manière significative les effets dynamiques en présence d'usure des surfaces (voir Figure I-27). Cependant, à notre connaissance, il n'y a pas d'étude traitant clairement de l'optimisation des paramètres de correction par rapport à l'usure des dentures.



**Figure I-27 :** Courbes de réponse dynamique pour un engrenage droit –Influence combinée d'usure et de correction de profil [64].

(a) Sans correction (b) Avec correction de profil ( $E=10 \mu\text{m}$ ,  $\Gamma=0.3$ )

#### I.4.4. Grippage : scuffing

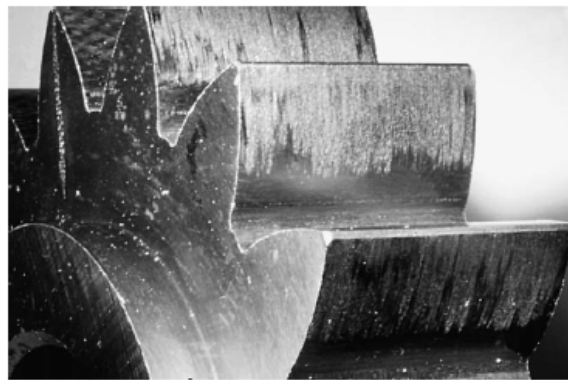
Il s'agit d'une avarie instantanée et brutale des surfaces de dentures qui se produit typiquement à grande voire moyenne vitesse suite à une destruction soudaine du film de lubrifiant qui, normalement, sépare les surfaces en prises. Ce type de défaillance est fortement influencé par l'état physico-chimique du lubrifiant et les conditions de mise en service. En effet, le grippage se produit lorsque la lubrification échoue en raison d'une pression de contact trop élevée associée à des vitesses de rotation importantes causant une augmentation conséquente de la température locale. Dans ce cadre, le concept de « flash temperature » défini initialement par Block [65] et repris dans le cas d'engrenages par Tobe et Kato [66]

apporte un éclairage intéressant. Les auteurs ont modélisé la zone d'échauffement au contact par une source de chaleur en mouvement le long d'un axe x (représentant l'arc de conduite) et ont ainsi mis en évidence que la température des surfaces de dentures lors de la période d'engrènement était très supérieure à la température de masse des engrenages. L'élévation instantanée de température (température flash)  $T_f$  s'exprime :

$$T_f = 1.6 f P_0 |U_1 - U_2| \sqrt{2a} / \left( \sqrt{\pi K_1 \rho_1 C_1 U_1} + \sqrt{\pi K_2 \rho_2 C_2 U_2} \right) \quad (I.29)$$

où :

- $C_1, C_2, \rho_1, \rho_2, K_1$  et  $K_2$  sont respectivement les chaleurs spécifiques, les masses spécifiques et les conductivités thermiques des matériaux des roues 1 et 2,
- $U_1$  et  $U_2$  sont les vitesses de roulement,
- $P_0$  est la pression maximale hertzienne,
- $f$  est le coefficient de frottement,
- $a$  est la demi-largeur du contact hertzien.



**Figure I-28** : Défaut de grippage

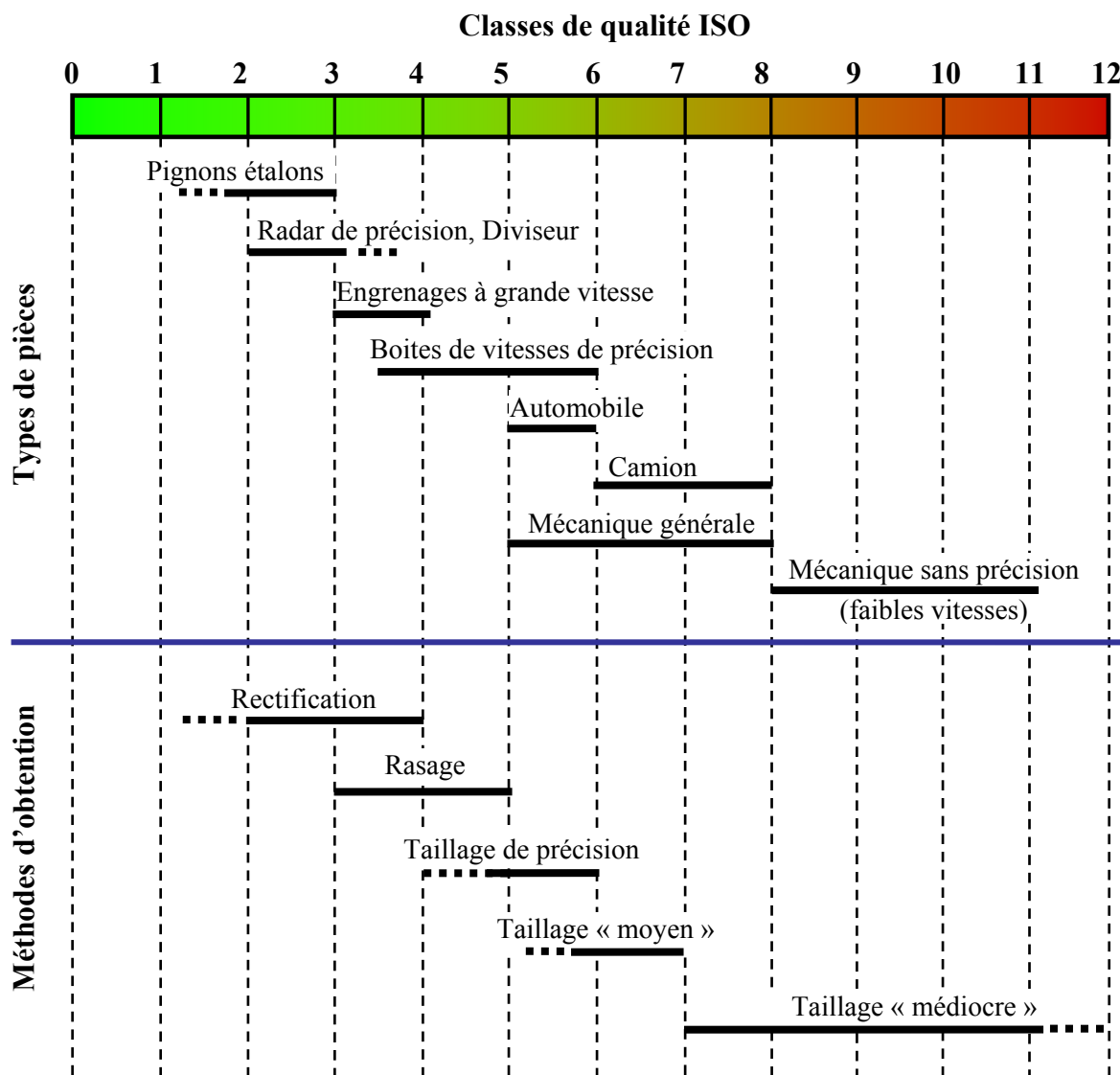
Comme montré par Diab et al. [53] et [54], la présence de corrections de profil engendre une chute de la pression de contact dans les zones où le glissement est le plus élevé. Le comportement de la température flash vis-à-vis des paramètres de correction est à rapprocher de celui des pertes de puissance, les formulations étant proches. Il faut noter que, à notre connaissance, l'influence des modifications de forme sur ce critère a été très peu étudiée dans la littérature.

## I.5. Optimisation robuste

Parmi les différentes approches possibles de l'optimisation, le concepteur s'intéresse généralement à celles qui permettent la prise en compte de la variabilité des paramètres voire du modèle. Ce paragraphe présente le principe de l'optimisation robuste, les différentes méthodes couramment employées, la gestion des incertitudes et quelques applications publiées dans le domaine de la conception des engrenages.

### I.5.1. Engrenages et tolérancement

Il existe différentes normes qui présentent les spécifications propres aux engrenages cylindriques à axes parallèles [72] : [ANSI/AGMA 2009-B1], [AGMA 390.03a], [ISO/TR 10064-1], [NF ISO 1328]. Les spécifications proposées sont très nombreuses et de natures différentes (dimensionnelles, par zone et vectorielle), et leur définition est, en pratique, pilotée par les moyens de métrologie. Dans cette étude, on s'intéressera essentiellement à la norme NF ISO 1328 [69] qui établit un système de classe de précision relatif aux écarts géométriques dans les roues cylindriques avec des dentures aux profils en développante de cercle. Les classes de précision sont définies en considérant les domaines d'application et les attentes fonctionnelles du système d'engrenages. La norme ISO propose ainsi 13 classes de précision, en passant de la classe 0 (la plus précise) à la classe 12 (la moins précise). Plus le chiffre de la classe de qualité diminue, meilleure est la précision, et plus le processus de fabrication s'avère coûteux, un mode et un moyen de réalisation spécifiques étant généralement associé à chacune des classes de précision, (Henriot [72] et Figure I-29). La norme ISO 1328 a proposé, pour une classe de qualité donnée, des écarts admissibles en se basant sur trois paramètres géométriques de références : le diamètre de référence  $d_0$ , le module de taillage  $m_0$  et la largeur de denture  $b$ . Des valeurs tabulées peuvent être trouvées dans [69] et l'annexe E de ce mémoire.



**Figure I-29 : Tolérancement - Domaine d'application [72]**

### I.5.2. Concept de robustesse

L'objectif de la conception robuste est la définition d'un produit qui maintient ses performances en présence de variations limitées de ses paramètres et des conditions de fonctionnement. Il est généralement reconnu qu'il existe plusieurs origines aux incertitudes dans les systèmes d'ingénierie :

- variations dans les conditions de production (dispersions de fabrication, variations des propriétés des matériaux, ..)
- variation des conditions d'assemblage (jeux de montage, ...)
- variations dans l'environnement de fonctionnement (chargement, température, ...)
- variations d'usure et d'autre forme de détérioration (vieillessement,..).

Ces variations peuvent donner lieu à des changements radicaux des performances du système, pouvant s'avérer pénalisants. La Figure I-30 illustre le concept de conception robuste. La conception d'un système est dite robuste au regard d'une prestation  $Y$  délivrée si cette dernière n'est pas ou est peu sensible aux dispersions de fabrication ainsi qu'à la variabilité dans laquelle le système est amené à fonctionner. Cette variabilité étant presque toujours inconnue, elle est caractérisée par une distribution aléatoire du paramètre de conception  $X$  dans un intervalle de tolérance  $IT-X$ , centré sur une valeur nominale, à optimiser.

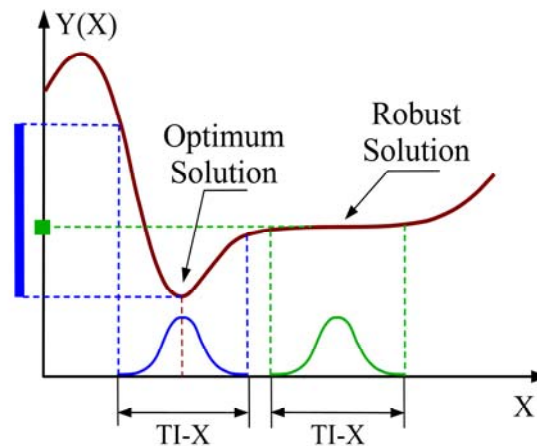


Figure I-30 : Illustration du concept de robustesse [88]

### I.5.3. Différentes approches de la robustesse

Taguchi [73]-[74] fut l'un des premiers à proposer une approche originale dont l'objet était, simultanément, d'optimiser les performances du produit et de minimiser la sensibilité aux perturbations. L'idée directrice consiste à déterminer des valeurs nominales pour lesquelles la mesure de performance varie peu dans le voisinage de chacune des valeurs nominales. Au problème initial d'optimisation, s'ajoute donc un impératif de stabilité de la performance vis-à-vis des incertitudes.

Cette approche met l'accent sur la qualité dans les activités de conception, phase dans lesquelles les gains en qualité sont les plus significatifs, et peut ainsi apporter des réductions considérables de coûts de réalisation et de développement d'un produit. En effet, en atténuant la sensibilité aux possibles perturbations au cours du processus de fabrication et de fonctionnement, les exigences au niveau de la précision pour diverses caractéristiques (matériaux, maintien rigoureux des paramètres fonctionnels) seront moindres conduisant à moins de pièces rebutées, moins d'inspection et, par suite, moins de pièces retravaillées.

Le concept de robustesse nécessite donc une bonne caractérisation de la sensibilité de la performance aux éventuelles variations. Pour ce faire, Taguchi a proposé le paramètre signal-bruit déduit à partir des plans d'expériences et une analyse de variance [73]. En suivant la même approche, d'Entremont et Ragsdell [76] ont adopté le concept de perte de qualité et

Sandgren [77], Sundaresan et al. [49] ont formulé une fonction « objectif robuste » en fonction de la moyenne pondérée et la variance de la performance. Cette variance de performance est représentée par un indice de sensibilité caractérisé à travers un plan d'expérience. Il convient de noter que cet indice de sensibilité ne tient pas compte de possibles interactions entre les paramètres d'optimisation ce qui pourrait entraîner des erreurs d'estimation de la variance. D'Errico et Zaino [85] ont présenté une approximation modifiée à l'aide de d'intégration par les formules de quadrature de Gauss Hermite. Yu et Ishii [81] ont introduit une fonction objectif qui combine, moyennant un coefficient de qualité, la moyenne et la variance de la performance. Cette dernière est caractérisée par un nouveau paramètre appelé « indice de qualité » déterminé par un plan factoriel quadratique ce qui permet de prendre en compte les interactions significatives et les effets non linéaires. La modélisation elle-même est susceptible de présenter des incertitudes comme évoqué par Soize [107] qui a étudié les domaines de validité d'une modélisation retenue (généralement de type éléments finis), à travers un processus de Monte Carlo. Les matrices de base de l'équation de mouvement (masse, raideur et amortissement) sont ainsi obtenues par des tirages aléatoires. L'auteur distingue deux type d'incertitudes [110] : les incertitudes aléatoires (ou statistiques) et épistémiques (ou systématiques). Le premier type fait référence aux incertitudes provenant de la variabilité connue ou observable des paramètres représentée par des aléas statistiques. Du point de vue de l'analyse, le traitement de ces incertitudes répond à la question «Que peut-il vraiment arriver et avec quelle probabilité ?». La deuxième catégorie d'incertitude est traitée en répondant aux questions «Quelle valeur est exacte ?» ou «Que savons-nous d'un problème donné et quelles connaissances supplémentaires pourraient réduire les doutes ?». Ces incertitudes découlent alors d'un manque d'informations ou de méconnaissances à propos d'un phénomène fondamental et correspondent à des quantités non observables. Pour cela, l'élaboration d'une probabilité associée à ces incertitudes nécessite généralement des jugements d'experts ou des preuves scientifiques solides.

#### I.5.4. Modélisation de l'incertitude / Approche probabiliste

Pour intégrer l'incertain et l'imprécis lors des études de robustesse, et selon l'information que l'on peut avoir sur l'état à modéliser, on distingue deux catégories d'approches basées sur des concepts et des théories différents à savoir l'approche probabiliste et l'approche possibiliste [108]–[109]. Dans ce travail, on s'intéresse uniquement à la première méthodologie qui est largement admise comme étant un outil efficace et complet pour mesurer l'impact de l'incertain. L'approche probabiliste constitue le plus ancien formalisme permettant de traiter les incertitudes et s'appuie sur une expérience solide et des fondements mathématiques développés durant les trois derniers siècles. En effet, les incertitudes sont considérées comme des événements ou des phénomènes «aléatoires» ou « stochastiques » caractérisés à travers des densités de probabilité. Ces densités représentent la probabilité d'occurrence d'une valeur dans un domaine associé à une variable aléatoire (incertaine) et

elles peuvent être déterminées en pratique par la connaissance de l'espérance mathématique et de la variance :

a) l'espérance  $E(X)$  d'une variable aléatoire  $x$  représente la moyenne d'une série statistique. Elle évalue le résultat moyen d'une expérience aléatoire et, dans le domaine de la conception, correspond à la cote nominale théorique.

b) la variance  $\text{Var}(X)$  ou le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire  $x$  mesure la variabilité et la dispersion associée à cette variable. Ce paramètre est généralement lié à l'intervalle de tolérance  $IT$ , via sa racine carrée dite « écart type » et notée  $\sigma_p(X)$ . En effet, en production, il est fréquent d'estimer une étendue de l'intervalle de tolérance égale à six fois l'écart type du processus de fabrication ( $IT=6 \cdot \sigma_p(X)$ ). Cet écart traduit ainsi la performance du procédé puisqu'il mesure la capacité d'une machine ou d'un procédé à réaliser des pièces dans l'intervalle de tolérance (défini par ses bornes inférieures et supérieures) mentionné dans le cahier des charges [101].

En outre, la densité de probabilité est caractérisée par la forme de la distribution associée. Dans le cadre de la conception en présence d'incertitude, les distributions les plus répandues possèdent des formes uniformes ou normales (gaussienne). La distribution uniforme sur un intervalle donné, signifie intuitivement, que toutes les valeurs de l'intervalle ont les mêmes chances d'apparaître. Cependant, la forme normale ou gaussienne, correspond à une loi centrale en théorie des probabilités et en statistique. Elle décrit le comportement des séries d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'essais est très grand. Elle est caractérisée par une courbe en cloche.

### I.5.5. Propagation de l'incertitude

Une fois les incertitudes classées et modélisées, l'étape suivante est de propager l'incertitude à travers le code d'analyse. En effet, lorsque les modèles probabilistes avec des statistiques précises sont utilisés pour représenter l'incertitude, le problème de propagation d'incertitude consiste essentiellement à calculer les statistiques d'une ou de plusieurs fonctions objectifs. Les méthodes probabilistes en ingénierie peuvent être classées en deux grandes catégories [110] – [112]: On présente ainsi dans ce paragraphe un rapide aperçu des principales méthodes de calcul de propagation. Une première catégorie comprend essentiellement la simulation Monte Carlo et les méthodes d'échantillonnage. Ces méthodes impliquent l'échantillonnage et l'estimation qui sont dans la plupart des cas simples à appliquer. Toutefois, vu que la précision de ces techniques dépend de la taille de l'échantillon, les temps de simulation peuvent devenir prohibitifs, en particulier pour les systèmes qui sont déjà complexes dans le cas déterministe. Ainsi, ces méthodes sont souvent utilisées en dernier recours et des efforts de recherche ont été réalisés en développant des méthodes non-stochastiques telles que les méthodes de perturbation et la méthode du chaos polynomial.



---

- **Méthode Monte Carlo**

Pour résoudre les problèmes de conception en présence d'incertitudes, l'approche la plus simple et la plus populaire consiste à imbriquer l'estimation des critères probabilistes dans une boucle basée sur la méthode de simulations de Monte Carlo [113] – [116]. Elle consiste à calculer plusieurs fois (simulations) la valeur dont on veut évaluer les caractéristiques statistiques avec des paramètres variant aléatoirement d'une simulation à l'autre selon leur distribution de probabilité. On obtient ainsi à l'issue de l'ensemble des simulations, un échantillon aléatoire de la réponse, représentatif de la dispersion des variables d'entrée selon leur loi propre. Cette technique est considérée comme une méthode « exacte » pour la quantification de l'incertitude dans le sens où elle ne nécessite pas des approximations ou des hypothèses. Bien que simple et très utile, cette méthode possède des inconvénients : elle est gourmande en puissance de calcul surtout pour les problèmes de grandes tailles.

- **Méthode d'échantillonnage structuré**

Afin d'optimiser le nombre de tirages effectués dans la méthode de simulation de Monte Carlo, il est possible d'appliquer des méthodes d'échantillonnage structuré [102], [104] – [106] qui s'inspirent des techniques d'intégration numérique en prenant des points particuliers de l'intervalle considéré et en les affectant d'une pondération propre à la méthode. Ainsi, le calcul déterministe inclus dans le code d'analyse est lancé pour des valeurs particulières et réduites des paramètres aléatoires ce qui permet de diminuer considérablement les temps de calcul par rapport la méthode basique de Monte Carlo. Les différentes combinaisons de ces valeurs constituent ce qu'on appelle un « plan d'expérience ». Le choix de ces combinaisons particulières est décrit dans les travaux de Taguchi et nécessite souvent de bonnes connaissances a priori de l'impact des paramètres sur le système mécanique. Ce type de méthodologie permet des estimations précises, particulièrement en ce qui concerne les premiers moments d'une fonction à plusieurs variables.

- **Méthode de perturbation**

Une autre façon de quantifier l'incertitude est fournie par la méthode de perturbations qui repose sur le développement en série de Taylor de la réponse autour des valeurs moyennes des variables aléatoires [111]–[120]. En prenant les hypothèses nécessaires sur les paramètres (type de distribution, linéarité et indépendance), et en tronquant généralement à l'ordre deux, on peut calculer les moments de la variable (les moyennes et écarts types des solutions) en fonction de la variance des données et de leurs dérivées. Des développements à des ordres supérieurs rendent les systèmes d'équations plus compliqués. Cette méthode analytique permet avec les mêmes variables de calculer la sensibilité des données, c'est-à-dire la variation relative induite dans un résultat par la variation relative d'une donnée. Une limitation inhérente à la méthode de perturbation provient de l'hypothèse des petites perturbations, c'est-à-dire, dans ce cas particulier, des incertitudes qui demeurent modérées,

c'est à dire des écarts du champ aléatoire faibles devant les valeurs moyennes (typiquement inférieure à 10% [112]).

- **Méthode de chaos polynomial**

Ghanem et Spanos [117] ont mis au point une méthode dite de chaos polynomial et ont réussi à l'appliquer principalement dans le domaine de la mécanique des structures [119]. Cette méthode est basée sur les travaux de Wiener [118] et consiste à projeter les variables du problème sur un espace stochastique engendré par un ensemble de fonctions complet de polynômes orthogonaux. Les grandeurs aléatoires sont ainsi décomposées suivant un chaos polynomial que l'on introduit dans un système d'équations. Les variables statistiques sont ensuite évaluées en résolvant le système obtenu, linéarisé grâce aux propriétés d'orthogonalité des polynômes. Selon la forme de la distribution de la variable aléatoire, une variété de polynômes chaotiques est proposée. Pour une variable gaussienne on retient les polynômes d'Hermite. Il s'agit de la forme originale de l'œuvre de Wiener, appelée le chaos homogène. D'autres extensions sont possibles : polynômes de Laguerre avec une distribution Gamma variables, polynômes de Jacobi avec une distribution Beta, etc. Cette méthode permet la représentation d'ordre élevé et promet une convergence rapide. Il en résulte des algorithmes de calcul efficaces pour les systèmes d'ingénierie de grandes tailles [120].

### I.5.6. Robustesse et engrenages

Bien que les engrenages ont été conçus et largement étudiés depuis longtemps, le contrôle de leurs performances en présence d'incertitudes est relativement récent. Dans ce contexte, certains auteurs se sont intéressés à implémenter le concept de robustesse dans la phase de conception des engrenages [47] – [48] et [81]. Leur but essentiel était de définir, pour les engrenages, des paramètres de conception optimale et robuste, c'est à dire peu sensible aux éventuelles variations. Sundaresan et al [48] et Yu [81], ont montré que la variation des paramètres géométriques, et surtout micro-géométriques, influait considérablement sur la performance du système caractérisé via les fluctuations de l'erreur de transmission. En effet, l'erreur de transmission dépend entre autres (via les conditions instantanées de contact) de la géométrie de surface de la dent. De nombreuses études ont porté sur la détermination, pour une charge spécifique, de la géométrie optimale aboutissant à des fluctuations d'erreur de transmission minimales [32]-[35] mais la présence d'aléas de fabrication, d'assemblage, etc... rend nécessaire une analyse de robustesse.

Ce sujet a été abordé dans plusieurs études antérieures utilisant des plans d'expériences, des surfaces de réponse et des analyses de variance [47] – [48] et [81]. Elles ont révélé que les paramètres micro-géométriques caractérisant la modification effectuée sur les dentures, sont parmi les paramètres les plus sensibles aux éventuelles variations de fabrication [81]. Ceci se justifie en partie par le fait, qu'en pratique, à ces paramètres micro-géométriques, d'ordre de quelques micromètres sont associés des intervalles de tolérance de même ordre de grandeur.

Parmi les rares approches expérimentales traitant ce type de problème, on note les travaux de Nonaka et al [103] qui ont montré un écart considérable du bruit rayonné par différents échantillons d'engrenages présentant la même géométrie nominale. En effet, pour certaines vitesses et pour une série comportant 5 engrenages, l'écart entre échantillons a dépassé 10dB [103]. Malgré le nombre restreint d'engrenages testés (5), ils restent représentatifs d'une population d'engrenages fabriqués en grande série. Driot et al. [102] ont présenté des résultats de simulations numériques qui sont corrélés avec les résultats expérimentaux de Nonaka et al.[103] . Dans l'optique de déterminer une conception optimale en présence des erreurs de fabrication, Houser et al. [34] ont présenté une méthode nommée « run-all-the-cases ». Cette approche explore la totalité des combinaisons possibles, en incluant les tolérances et conduit naturellement à des larges espaces de recherche qui nécessite d'importants moyens de calcul. Elle est aussi prohibitive en temps de calcul.

## I.6. Méthodes numériques d'optimisation

Un problème fréquemment rencontré dans tous les domaines de l'ingénierie concerne la meilleure politique à adopter pour améliorer les performances d'un système physique. Dans ce contexte, l'optimisation est définie comme le processus qui permet de trouver parmi toutes les possibilités les meilleures valeurs des variables d'entrée sans l'évaluation explicite de chacune d'elles. Les problèmes d'optimisation sont généralement formulés à travers un modèle mathématique qui inclut une fonction objectif à optimiser (maximiser ou minimiser) et éventuellement à un ensemble de contraintes à respecter (équations algébriques et / ou inégalités). On recherche ainsi les meilleures valeurs (admissibles) des variables de contrôle de telle sorte que l'indice de performance (une fonction objective) soit optimisé (réduit ou agrandi). Dans sa forme la plus générale, un problème général d'optimisation peut être formulé comme suit :

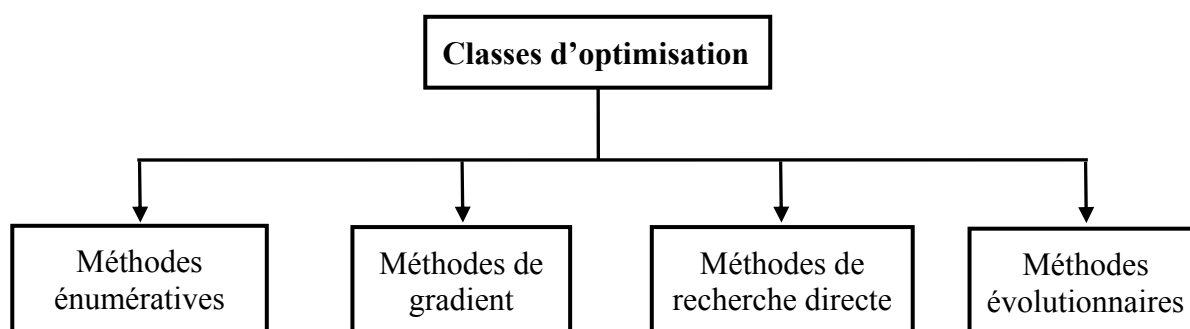
$$\begin{array}{l} \text{Minimiser ou maximiser : } F(X) \\ \text{soumis à:} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(X)=0 \\ h(X)>0 \\ X_{\min} < X < X_{\max} \end{array} \right. \quad (I.30)$$

Où  $X$  représente un vecteur de variables d'optimisation (de décision),  $F(X)$  représente la fonction objectif à maximiser ou minimiser,  $g(X)$  désigne les contraintes à respecter du système, exprimées par des égalités tandis  $h(X)$  est associée les contraintes traduites par des inégalités.  $X_{\min}$  et  $X_{\max}$  représentent les contraintes explicites associées aux variables d'optimisation.

Pour résoudre ce type de problèmes, divers algorithmes d'optimisation ont été développés. Différentes classifications des méthodes numériques d'optimisation sont données dans la littérature [121] – [133] et une tentative de lister les principaux groupes de méthodes

est présentée dans ce paragraphe. Il faut noter que la classification donnée n'est pas exhaustive et l'intérêt majeur est d'exposer les principales caractéristiques de chacune des classes d'optimisation ainsi que leurs avantages et inconvénients.

En général, les algorithmes d'optimisation peuvent être subdivisés en quatre catégories principales à savoir : 1) la recherche exhaustive ou les méthodes énumératives, 2) les méthodes de gradient, 3) les méthodes de recherche directes et, enfin, 4) les méthodes évolutionnaires (voir Figure I-31). Le choix d'une méthode particulière dépend de nombreux paramètres tels que la forme de la fonction objectif, les contraintes associées, les préférences de l'utilisateur, la connaissance de la technique, la complexité de l'application et de ses besoins spécifiques...



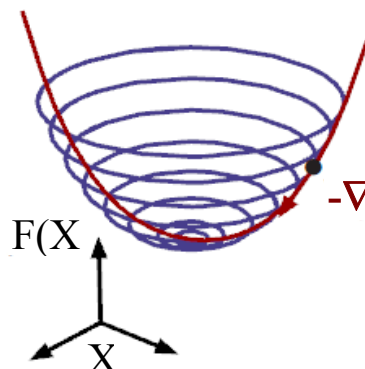
**Figure I-31** : Principales méthodes numériques d'optimisation

### I.6.1. Méthode énumérative

Dans les méthodes d'énumération optimales, l'algorithme de recherche évalue la valeur de la fonction objectif à chaque point possible de l'espace de recherche énumérant ainsi toutes les possibilités. Elles peuvent s'appliquer dans un espace de recherche infini mais discrétisé. Bien que cette méthode soit triviale et très simple à mettre en place, elle est souvent mise en défaut devant des problèmes de grandes tailles [121] – [122], en particulier les problèmes ayant un grand nombre d'attributs impliquant de très grands espaces de recherche.

### I.6.2. Méthodes de gradient

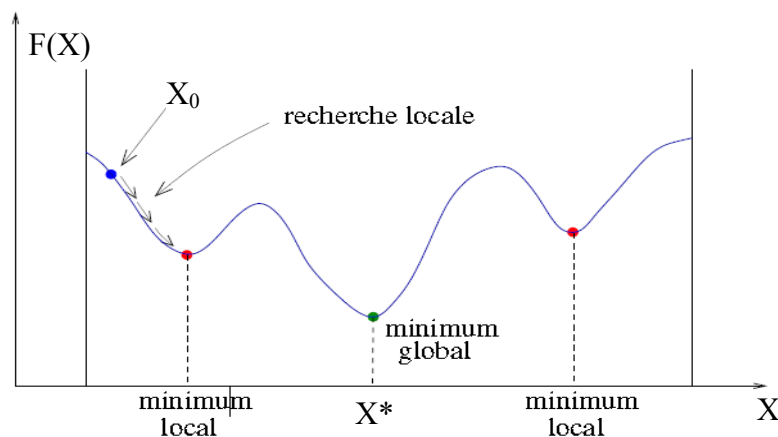
Les méthodes de gradient sont destinées à minimiser une fonction réelle différentiable. Il s'agit d'un algorithme itératif qui procède donc par des améliorations successives. Au point courant, le déplacement est effectué dans une direction opposée au gradient ( $\nabla F$ ), appelée direction de descente, de manière à faire décroître la fonction objectif.



**Figure I-32 :** Principe de la méthode de gradient

Les variétés traditionnelles des méthodes de gradient comprennent la méthode de descente de Cauchy [121], les méthodes de quasi-Newton [123] – [124] et la méthode du gradient conjugué [125]. Pour résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes (Equation(I.30)), on définit généralement une nouvelle fonction objectif, plus étendue, constituée de la fonction objectif initial  $F(X)$  et d'un terme de pénalité traduisant le degré de violation des contraintes associées. Abadie et al. [126] ont mis au point une méthode de gradient appelé la méthode du gradient réduit qui est capable de traiter explicitement des contraintes sans avoir recours à une fonction de pénalité, en transformant le problème initial en une série de problèmes sans contraintes résolus à l'aide de la méthode de gradient conjugué ou des méthodes quasi-Newton.

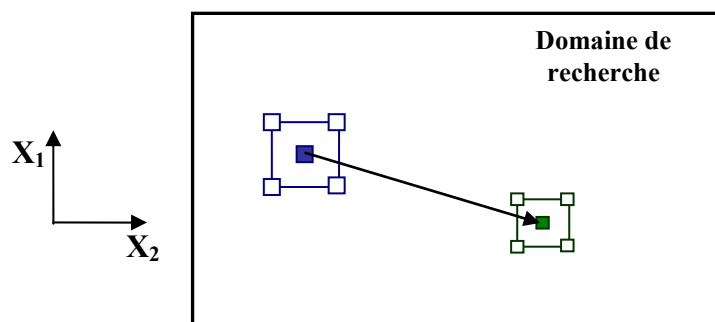
Ce type de méthodes possède des bases et des qualités théoriques intéressantes. Il est aisé à implémenter et converge en un nombre fini d'itérations. Les principales limites de la méthode sont dues à la nécessité de calculer les gradients ou les dérivés d'ordre supérieur de la fonction objectif. Ainsi, elle n'est adaptée que pour des formes particulières de fonctions, notamment des formes strictement convexes. De plus, suite à un mauvais préconditionnement, ces méthodes peuvent être facilement piégées par des minimums locaux [121]. La Figure I-33 illustre la définition des minimums locaux et d'un minimum global pour l'exemple d'une fonction à une variable.



**Figure I-33 :** Définition des minimums locaux et d'un minimum global

### I.6.3. Méthode de recherche directe

En pratique, un grand nombre de fonctions à optimiser ne sont pas dérivables ou l'obtention de leurs dérivés est prohibitive. Pour pallier à ce problème, la littérature [127] – [129] propose des approches d'optimisation dite « d'ordre zéro » qui ne requièrent que l'évaluation de la fonction objectif, sans recours à ses dérivées. Parmi les méthodes les plus répandues de cette approche, on note la méthode de recherche directe « direct research ». Cette méthode est caractérisée par une série de déplacements explorateurs autour d'un point courant. Ainsi, à chaque itération, la fonction objectif est réévaluée sur les points limites du motif. Suivant l'évolution de la fonction objectif, la taille et la position du motif varient. Une diminution (amélioration) de la fonction conserve la taille et la position du motif pour une itération ultérieure tandis qu'une dégradation induit nécessairement une diminution de la taille du motif. Des exemples de recherche directe comprennent l'algorithme de Rosenbrock [127], la méthode de la direction conjugué (Powell, [128]), et la méthode du Simplex de Nelder et Mead [129]. En plus de leur concept simple et leur robustesse, ces méthodes sont généralement bien adaptées au calcul parallèle ce qui conduit à une réduction considérable du temps de calcul. Cependant, malgré leur efficacité et popularité, ces méthodes sont dépourvues de propriétés théoriques de convergence. De même, le risque de rester bloquer dans des minima locaux, reste toujours présent.



**Figure I-34 :** Principe de la méthode de recherche directe

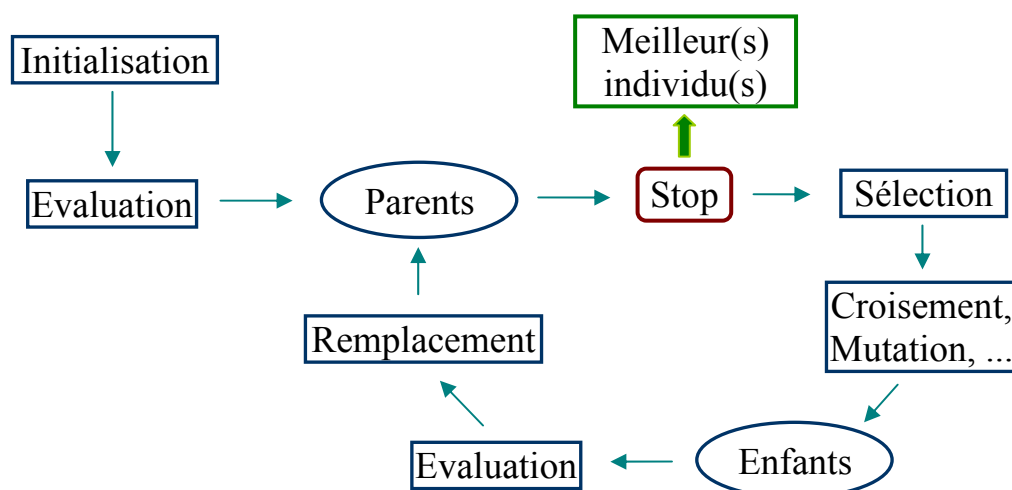
### I.6.4. Méthodes évolutionnaires

Les méthodes d'optimisation évolutionnaires trouvent leur inspiration dans la théorie de l'évolution de Darwin. Elles sont caractérisées par une population de solutions qui évoluent vers de meilleures solutions grâce à un processus ou un mécanisme qui est analogue au processus de sélection naturelle (Goldberg, [130]). Les individus les plus adaptés se reproduisent plus « efficacement », leurs caractéristiques ont donc de plus grande probabilité de survivre et de se reproduire dans la population donnant lieu ainsi à des descendants encore mieux adaptés (voir Figure I-35). Il s'agit de méthodes stochastiques puisqu'ils utilisent itérativement des processus aléatoires [134] – [137]. Ainsi, il existe plusieurs types

d'algorithmes évolutionnistes qui ont en commun de faire évoluer des populations d'individus. Leurs différences principales sont dues à l'ordre historique de leurs apparitions. Les algorithmes évolutionnistes ont été d'abord proposés par Rechenberg et al. en 1965 [121] en tant que méthode d'optimisation numérique pour les problèmes continus. Dans la même période, Fogel et al. [131] ont conçu la programmation évolutive comme une méthode d'intelligence artificielle pour la conception d'automates à états finis. Ensuite, J. H. Holland [132] a proposé les premiers algorithmes génétiques (GA : Genetic Algorithm). Ces derniers (GA) sont devenus probablement la branche la plus connue et la plus développée du calcul évolutif [133] (les GAs seront détaillés dans le chapitre suivant).

Les avantages des méthodes évolutionnaires par rapport aux méthodes traditionnelles, déterministes d'optimisation sont résumés comme suit :

- Elles ne demandent pas le calcul des dérivés de la fonction objectif, ainsi elles appartiennent aux approches d'ordre zéros
- Elles peuvent traiter un grand nombre de paramètres d'optimisation
- Elles fournissent un ensemble de solutions et non pas seulement une solution
- Elles ont la capacité de trouver le minimum global
- Leur concept est facile à comprendre
- Elles sont bien adaptées pour les calculs parallèles ; recherche simultanée à partir d'une population de solutions.
- Elles supportent l'optimisation multi objectif



**Figure I-35** : Principe général de la méthode évolutionnaire

Il convient toutefois de noter que les méthodes évolutionnaires ne sont pas la réponse à chaque problème d'optimisation et elles aussi, comme d'autres méthodes d'optimisation traditionnelles ont certaines limites. En effet, Il n'y a pas de preuve formelle mathématique

pour ces méthodes. En conséquence, il faut être conscient que l'algorithme évolutionniste est une technique d'optimisation heuristique et ne garantit pas une solution globalement optimale. Mais comme il est souligné dans la majorité de la littérature [121] – [137], ces méthodes ont la capacité d'obtenir des solutions quasi-globales, supérieures à celles trouvées par des méthodes d'optimisation traditionnelles, notamment dans le cas de fonctions objectifs non-linéaires, non-convexes ou multi-modales.

## **I.7. Conclusion**

Au terme de cette introduction bibliographique, on constate que les travaux relatifs à la modélisation des engrenages sont nombreux. Ils montrent la nécessité d'introduire des modifications de forme au niveau des dentures pour améliorer le comportement (en termes de bruit et vibrations à la source). On peut également dégager quelques tendances concernant l'influence des corrections de formes sur les différents critères qui reflètent la performance des engrenages (rendement, erreur de transmission, ..). Cependant, ces tendances sont souvent liées à une application donnée ce qui rend les généralisations délicates. En ce qui concerne l'aspect de robustesse des corrections de forme des dentures, les résultats publiés sont peu abondants et les travaux d'optimisation menés sont généralement associés à un seul critère. L'évolution de différents critères de performance vis-à-vis des corrections de dentures est souvent contradictoire.

Suite aux travaux antérieurs réalisés au laboratoire, nous disposons d'un modèle pertinent pour analyser l'impact des corrections de forme sur différents critères de performance de l'engrenage. L'optimisation des corrections est diversement traitée dans la littérature, suivant les critères de performances étudiés. Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer les paramètres optimums mais toutes ne sont pas utilisables dans notre cas. Le chapitre 2 se focalise sur différentes techniques permettant la résolution de ce problème.

La conception robuste permet la prise en compte de la variabilité de certains paramètres de conception ou de fonctionnement. La bibliographie montre la difficulté de la mise en œuvre de cette démarche. Le chapitre 3 est consacré à son application pour la détermination des corrections de forme des engrenages cylindriques.



# **Chapitre II : Optimisation des corrections de forme – Approches multivariables**

- 1. Introduction**
- 2. Problème d'optimisation : critères et contraintes**
- 3. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique –  
Approche analytique**
- 4. Optimisation multi-variables simple critère**
- 5. Conclusion**

## II.1. Introduction

Il est généralement admis que les modifications volontaires des dentures d'engrenages servent essentiellement i) à compenser les déformations des dents transmettant le couple afin de leur assurer une mise en charge progressive et ii) à centrer la portée, même en présence d'écarts de montage ou déformation des arbres. Ces modifications ont un impact sur l'ensemble des paramètres qui reflètent les performances du système. Aussi, avant de conduire un processus d'optimisation, le concepteur doit-il avoir une idée de l'influence des variables de conception sur les performances du système, afin de bien définir les critères et le(s) fonction(s) objectif(s). Dans ce contexte, la première partie de ce chapitre consiste à appréhender l'influence des corrections de dentures sur les différents critères de performance d'un engrenage avec l'objectif d'identifier une fonctionnelle à optimiser ainsi que les contraintes à respecter.

Une approche analytique originale caractérisant les fluctuations de l'erreur de transmission quasi statique est ensuite présentée. Cette formulation analytique permet une estimation rapide de la relation entre la fonction objectif et les paramètres de conception. Dans l'étude la plus simple, elle permet de résoudre exactement le problème d'optimisation.

Enfin, l'optimisation est étendue à des problèmes plus complexes, tant au niveau des modèles employés que du nombre de variables impliquées dans le processus de conception. Les corrections des 2 roues dentées sont considérées indépendantes et la forme des corrections est paramétrée par une loi en puissance. Cette approche permet, entre autre, d'examiner la validité de l'hypothèse de symétrie des corrections de profil largement utilisée dans les travaux de recherches publiés. Pour ce faire, un algorithme génétique est utilisé comme méthode d'optimisation.

## II.2. Problème d'optimisation : critères et contraintes

Comme tout autre processus de conception, celui des engrenages est en constante évolution pour répondre aux demandes et aux attentes des clients sur le produit final. En raison des exigences d'économie d'énergie de plus en plus fortes, de nombreux travaux se focalisent sur l'amélioration du rendement, la réduction de la masse et de l'encombrement tout en gardant une tenue à la pression de contact et à la rupture suffisante. Il s'agit également de conserver la durée de vie dans des conditions de fonctionnement de plus en plus sévères, tout en réduisant les risques d'usures et l'élévation de la température en service. De plus, pendant ces trente dernières années, la réduction des vibrations et du niveau sonore des engrenages est devenu un critère crucial pour un certain nombre d'applications (dans le domaine automobile, en particulier).

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier l'impact de corrections de dentures sur les principaux paramètres qui caractérisent le comportement d'un engrenage afin de cerner les cibles potentielles d'optimisation et les éventuelles contraintes associées. Pour mettre en évidence l'influence des corrections de dentures sur les différents critères, on considère le cas particulier d'une correction linéaire de profil symétrique (valeurs identiques sur la roue et le pignon) appliquée en tête de dents. La longueur adimensionnée ( $\Gamma$ ) par rapport à la longueur du segment de conduite  $T_1T_2'$ , varie dans un intervalle de [0.05, 0.45] tandis la profondeur adimensionnée ( $E^*$ ) en tête de dent évolue entre 0 et 4 fois la déflexion statique moyenne de référence ( $\delta_{mref}$ ). Cette déflexion, associée à chacun des cas pour un couple moteur égal à 850 Nm, est donnée dans le Tableau II-1. Elle correspond à la géométrie initiale, sans correction de dentures.

$$\delta_{mref} = \frac{Cm}{Rb_1bk_0\varepsilon_\alpha} \quad (II.1)$$

On considère l'étude des trois configurations d'engrenages présentées dans le Tableau II-1. La première configuration correspond à un engrenage hélicoïdal traditionnel avec un rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$  égal à 1.48 et un rapport de recouvrement  $\varepsilon_\beta$  égal à 1.34. La deuxième configuration représente le cas d'un engrenage droit standard tandis que la troisième configuration est typique d'un engrenage droit à dentures hautes, dit « engrenage HCR : High Contact Ratio », pour lesquels le rapport de conduite est supérieur à 2. Ce type d'engrenage, est utilisé dans les cas où la limitation du bruit est une contrainte importante [139]-[140]. Il est obtenu, en introduisant des modifications au niveau de l'angle de pression et/ou des coefficients de saillie et de creux.

Les résultats présentés dans cette section reposent sur les modèles numériques développés au LaMCoS, déjà présentés au premier chapitre qui prennent en compte les déformations des corps mobiles et des structures supports. Le calcul de la raideur d'engrènement (modèle Lundberg et Weber-Banashek) est réactualisé pour chaque position des lignes de contact ainsi que la prise en compte des écarts de forme et des défauts de montages (voir chapitre 1). Toute correction de forme génère des écarts par rapport aux développantes de cercles et aux hélices qui, dans la modélisation retenue, sont numérisés et introduits en tout point de discrétisation des lignes de contact. Leurs valeurs sont réactualisées en fonction du temps afin de tenir compte des mouvements relatifs des flancs de denture au cours de l'engrènement.

**Tableau II-1 : Caractéristiques des différentes configurations d'engrenages proposées**

	<b>Cas 1</b> <b>Engrenage</b> <b>Hélicoïdal</b> ----- <b>Pignon/ roue</b>	<b>Cas 2</b> <b>Engrenage Droit</b> ----- <b>Pignon/ roue</b>	<b>Cas 3</b> <b>Engrenage Droit (HCR)</b> ----- <b>Pignon/ roue</b>
Nombre de dents	28/56	28/56	28/56
Largeur (mm)	40/40	40/40	40/40
Angle de pression (deg)	20	20	20
Angle d'hélice (deg)	25	0.	0.
Module (mm)	4	4	4
Entraxe	Sans jeu de denture (backlash)	Sans jeu de denture (backlash)	Sans jeu de denture (backlash)
Coefficient de saillie	1/1	1/1	1.3/1.3
Coefficient de creux	1.4/1.4	1.4/1.4	1.4/1.4
Coefficient de déport	0/0	0/0	0/0
Couple moteur (Nm)	850	850	850
Rapport de conduite ( $\epsilon_\alpha$ )	1.48	1.7	2.2
Rapport de recouvrement ( $\epsilon_\beta$ )	1.34	0.	0.
Déflexion statique moyenne de référence ( $\delta_{mref}$ , 850 Nm)	<b>20<math>\mu</math>m</b>	<b>16<math>\mu</math>m</b>	<b>13<math>\mu</math>m</b>

### II.2.1. Cibles d'optimisation

Plusieurs simulations ont été conduites afin de tracer des courbes de performances en isovaleurs. Ces courbes représentent, pour une large gamme de corrections, les variations des principaux paramètres qui représentent les performances du système, à savoir :

- les variations de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge (image des excitations et du bruit généré)
- le rendement caractérisé par un facteur de pertes.
- la valeur maximale du produit pV (pression\*vitesse) qui reflète, dans une certaine mesure, l'apparition possible de l'usure et du grippage.

- la température éclair (ou température « flash ») indicateur pertinent vis à vis d'un certain nombre de phénomènes destructeurs (grippage, usure, ..).

### II.2.1.1. Erreur de transmission quasi-statique sous charge

Comme indiqué au chapitre I, l'erreur de transmission quasi-statique (TEs) est unanimement considérée comme un indicateur global du comportement d'une transmission par engrenages. Elle traduit les effets périodiques des déformations de dentures, des écarts de forme, des défauts d'assemblage, et des déformations de l'ensemble du système (arbres, paliers, roulements...). Il s'agit, comme illustré dans la Figure II-1, d'une fonction périodique dont on a intérêt à limiter les fluctuations temporelles. Ces fluctuations peuvent être caractérisées par l'amplitude crête à crête ou la moyenne quadratique (RMS : Root Mean Square). Ce dernier paramètre a été retenu dans cette étude car il est moins sensible aux éventuellement problèmes numériques de résolution que l'amplitude crête à crête. La définition suivante a été retenue :

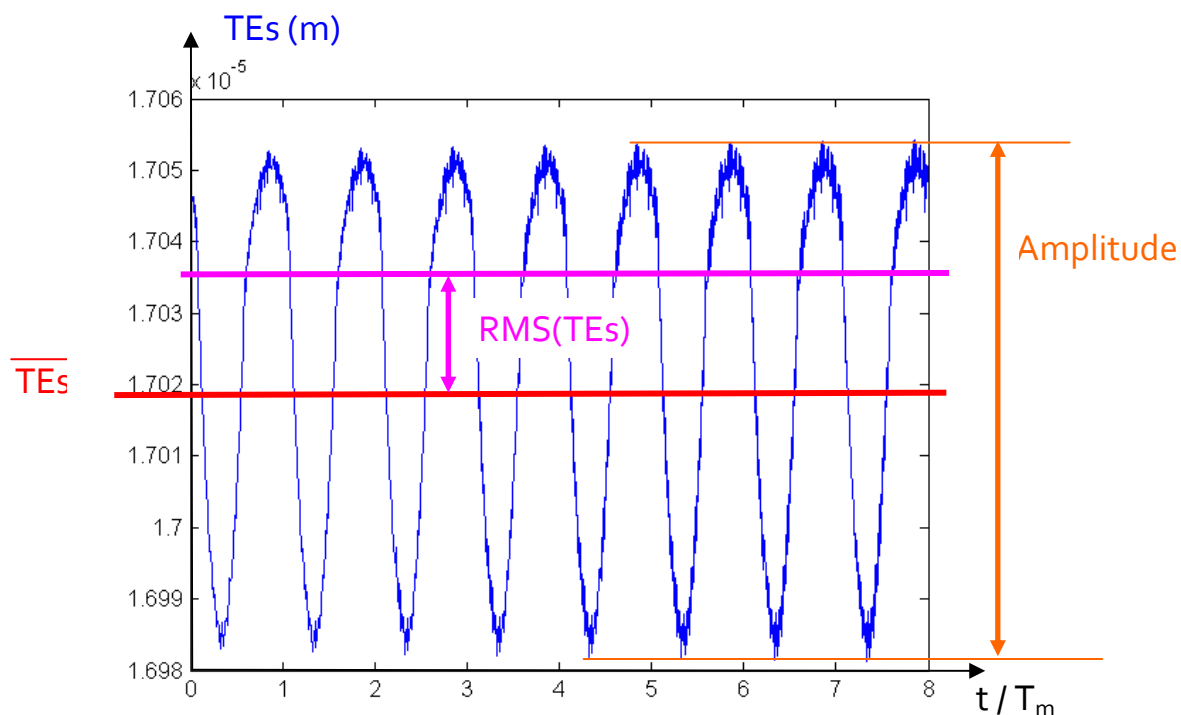
$$RMS(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{II.2})$$

avec,

$n$  : nombre total des points

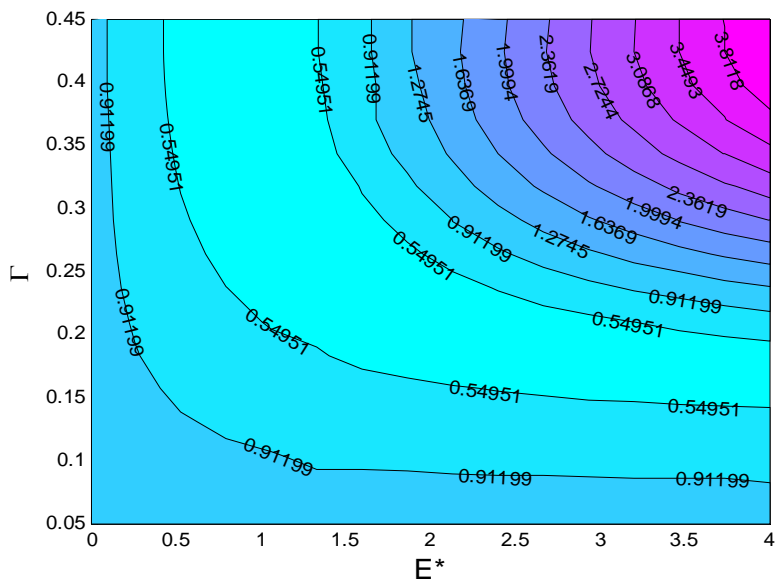
$x_i$  : Valeur de la performance (X) en un point d'indice  $i$

$\bar{x}$  : Valeur moyenne de la performance (X)

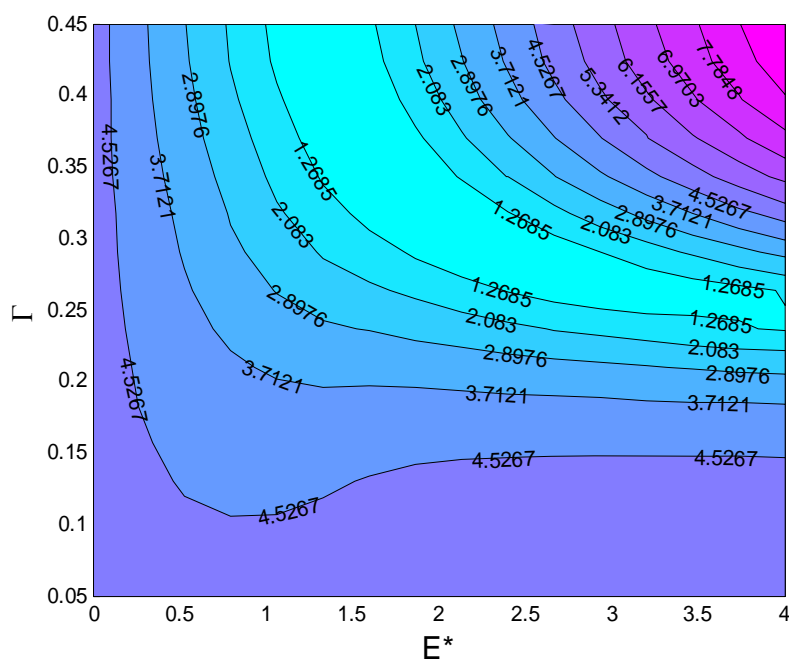


**Figure II-1 :** Variation et fluctuation de l'erreur de transmission quasi-statique (TEs)

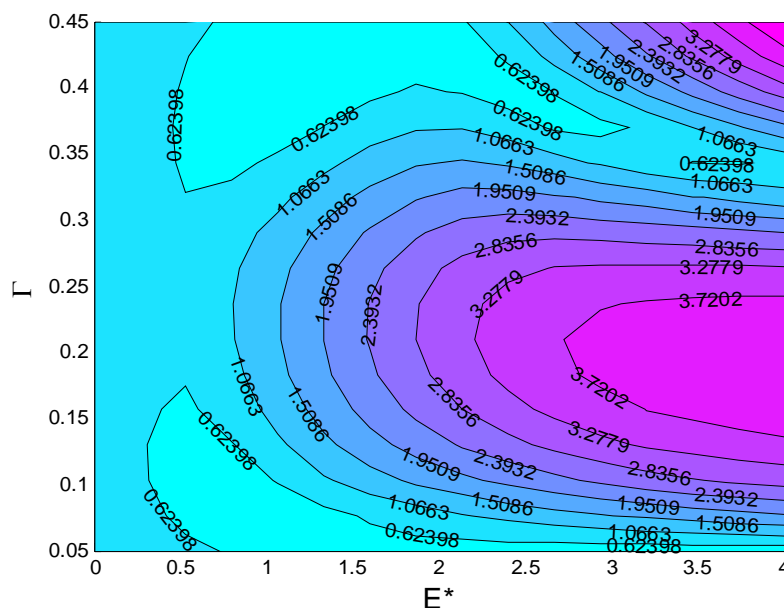
Les Figure II-2, Figure II-3 et Figure II-4 représentent les variations du RMS de l'erreur de transmission quasi-statique pour les différents cas d'étude décrits dans le Tableau II-1, en fonction des paramètres de correction de profil ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) en l'absence de bombé longitudinal. On peut vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux de Sundaresan et al. [48].



**Figure II-2 :** RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$   
(Cas 1 \_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ )



**Figure II-3 :** RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$   
(Cas 2 \_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.7$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.0$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ )

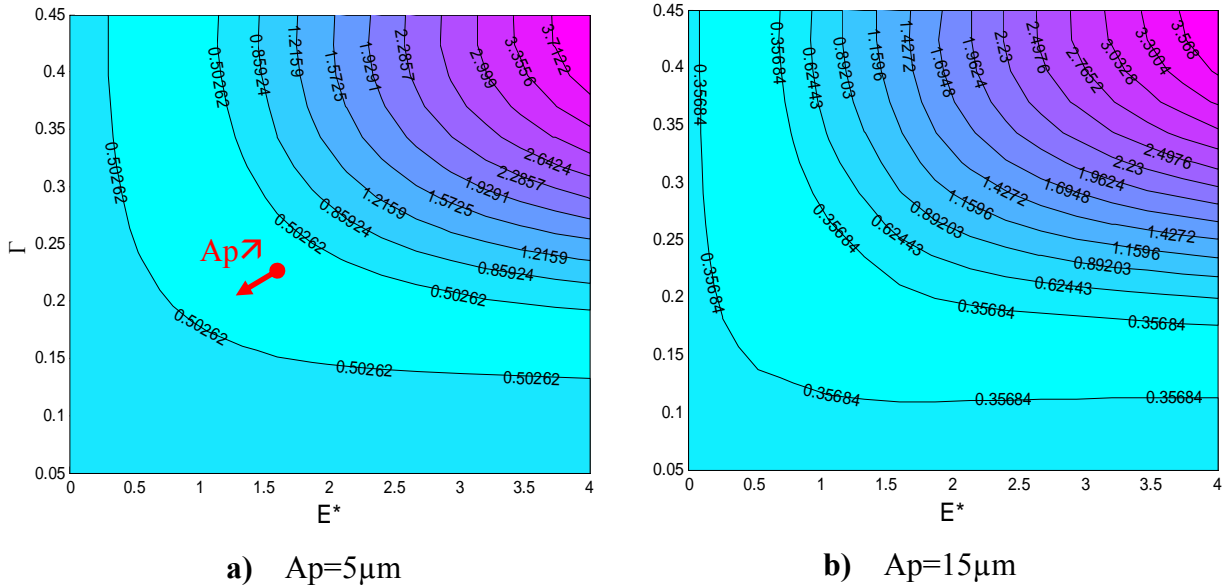


**Figure II-4 :** *RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$*   
 (Cas 3\_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 2.2$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.0$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ )

On constate pour l'ensemble des figures obtenues, la présence de zones de corrections optimales des dentures (en clair) pour lesquelles le RMS de l'erreur de transmission quasi-statique est minimal. Ces zones sont relativement étendues et montrent l'existence de plusieurs combinaisons possibles de paramètres de correction conduisant à des performances proches. On vérifie, par ailleurs, que le niveau du RMS(TEs) est, en général, nettement plus faible pour la denture hélicoïdale (cas 1) que pour la denture droite classique (cas 2). Cependant, une denture droite à haut rapport de conduite (HCR) conduit à des performances tout à fait comparables à celles relevées pour un engrenage hélicoïdal.

Pour les deux cas d'engrenages standards avec  $\varepsilon_\alpha$  inférieur à 2 (cas 1 et 2), les figures indiquent une seule zone de minimum alors que, pour un engrenage à rapport de conduite élevé (HCR:  $\varepsilon_\alpha$  supérieur à 2), plusieurs zones d'optimum peuvent coexister, rendant ainsi la détermination des paramètres optimaux plus complexe.

Notons que pour les deux cas d'engrenage droit, le fait d'introduire un bombé longitudinal ( $A_p^*$ ) ne modifie en rien les zones de corrections qui minimise le RMS(TEs) dans le plan ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) et ce, quelque soit l'amplitude du bombé. La situation est totalement différente pour un engrenage hélicoïdal (cas 1) pour lequel le bombé influe au même titre que les profondeurs et longueurs de correction de profil dans la définition de la zone optimale. En effet, comme illustré sur les Figure II-5 a) et b), une augmentation de l'amplitude du bombé orientent les combinaisons optimales vers des corrections de profil de profondeurs et longueurs plus faibles (voir le sens de la flèche  $\rightarrow$  dans la Figure II-5 a). Cette remarque illustre le fait que pour les dentures hélicoïdales, au moins trois paramètres de correction de forme doivent être pris en compte dans l'optimisation du RMS de l'erreur de transmission TEs.



**Figure II-5 :** RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$   
 (Cas 1\_ Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m=850\text{Nm}$ )

II.2.1.2. Rendement (Pertes par frottement)

Le frottement entre dentures est un paramètre majeur dans le calcul des pertes pour des engrenages chargés, tournant à des vitesses de rotation modérées. Il a été montré que, pour un coefficient de frottement constant, la macrogéométrie des dentures ainsi que les corrections de profil éventuelles étaient susceptibles de fortement influencer sur cette source de dissipation [56].

Le rendement peut être défini par l'équation suivante :

$$\rho \cong 1 - \frac{E_{\text{dissipée}}}{E_{\text{entrée}}} \quad (\text{II.3})$$

$E_{\text{dissipée}}$  : Energie dissipée due au frottement entre les dentures, pendant une période d'engrènement

$E_{\text{entrée}}$  : Energie d'entrée, fournie pendant une période d'engrènement.

En utilisant une loi de frottement de type Coulomb, la puissance dissipée par frottement peut s'exprimer en fonction des vitesses de glissement et des forces tangentielles instantanées conduisant ainsi à l'expression discrétisée suivante :

$$\rho \cong 1 - \frac{\sum_k^{N_t} \sum_{i,j}^{N_s} f_{ij} dN_{2ij}^1 V_2^1(M_{ij})}{\sum_k^{N_t} C_m \Omega_1} \quad (\text{II.4})$$



avec

$f_{ij}$  : coefficient de frottement au segment (i, j) lié au point  $M_{ij}$

$dN_{2ij}^1$  : effort normal élémentaire associé au point  $M_{ij}$

$V_2^1(M_{ij})$  : vitesse de glissement des surfaces des dents du pignon et de la roue

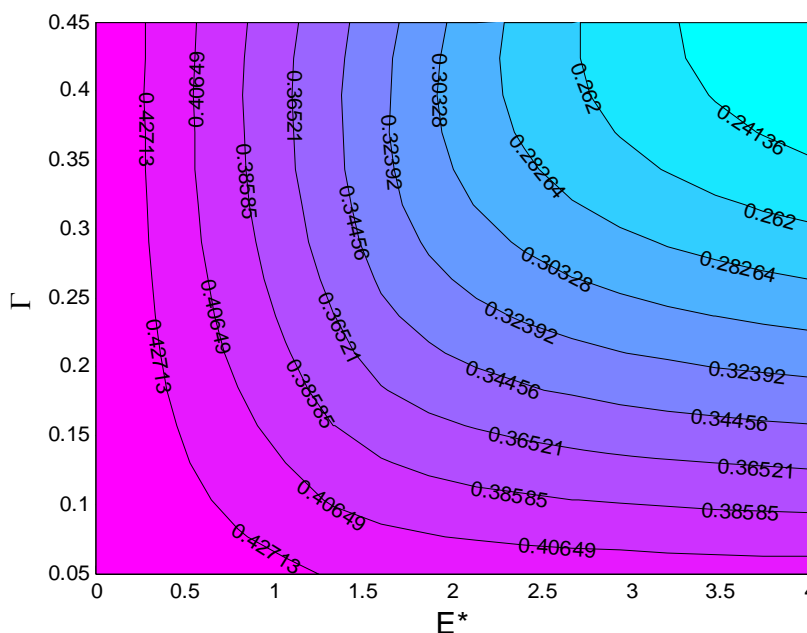
$Nt$  : nombre d'incrément du temps, dans un période d'engrènement

$Ns$  : nombre de segments en contact dans la fenêtre d'engrènement

Suivant Velex et Ville [56], le calcul de rendement peu être ramené à la détermination d'un facteur de pertes ( $\Lambda_p$ ) de sorte que le rendement puisse être exprimé sous la forme :

$$\rho = 1 - f(1+u) \frac{\pi}{z_1} \frac{\varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b} \Lambda_p \quad (\text{II.5})$$

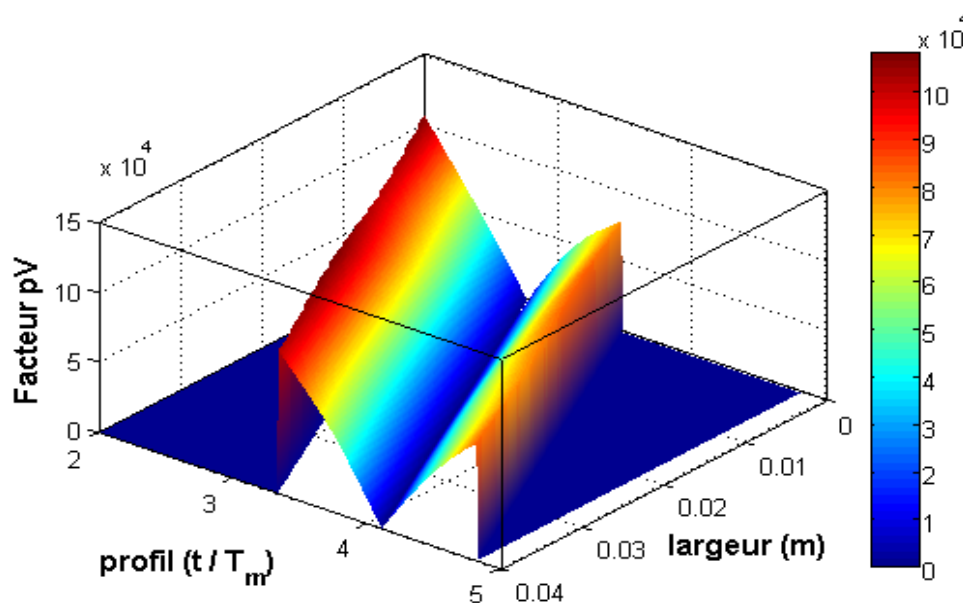
Un exemple caractéristique de résultats est présenté dans la Figure II-6 montrant l'influence des paramètres de corrections de profil ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) sur les pertes entre dentures qui décroissent de manière monotone à mesure que les amplitudes de profondeur et longueur de correction augmentent. Les meilleurs comportements au regard de ce critère sont obtenus pour des corrections très profondes (plusieurs fois la déflexion statique) et très longues (du cercle de tête jusqu'au cercle de référence), ce qui n'est pas acceptable vis à vis de l'ensemble des autres critères.



**Figure II-6 : Facteur des pertes  $\Lambda_p$**   
(Cas 1 \_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ )

### II.2.1.3. Facteur $pV$

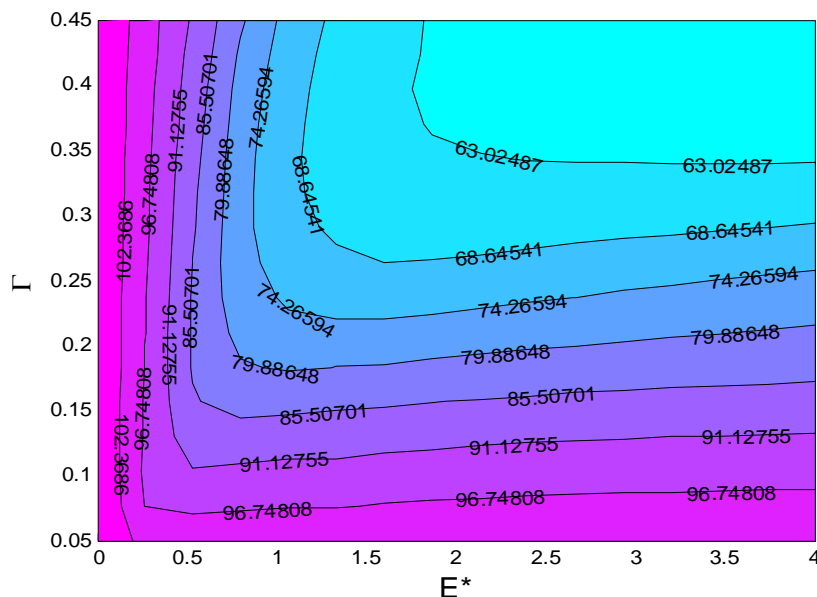
La pression ( $p$ ) et la vitesse de glissement ( $V$ ) influent considérablement sur le taux d'usure d'un matériau [63]. A ce titre, le produit  $pV$  est souvent employé pour décrire la sévérité d'une usure car, à une température donnée, il est approximativement proportionnel au taux d'usure. La Figure II-7 représente la distribution 3D de ce facteur sur les dents de l'engrenage hélicoïdal (cas 1 du Tableau II-1) sans correction de forme. On constate que ce facteur est maximal à l'engagement et au retrait et qu'il est nul au voisinage du point primitif.



**Figure II-7 : Distribution 3D du facteur  $pV$**   
(Cas 1\_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m=850\text{Nm}$ )

La Figure II-8, présente la variation de la valeur maximale du facteur ( $\max(pV)$ ) en fonction des paramètres de correction des dents. On s'aperçoit que l'introduction des corrections de profil fait décroître d'une façon considérable l'amplitude de ce critère. En effet, ces corrections tendent à limiter la pression de contact en têtes des dents (engagement et retrait), là où les vitesses de glissement sont maximales. Les mêmes tendances sont relevées pour les deux autres cas d'engrenage droits (Tableau II-1), avec des amplitudes un peu plus importantes.

Comme pour les pertes par frottement, ce critère est minimal pour de fortes corrections de profil. Son optimisation consiste « seulement » à prendre des paramètres de correction de profil les plus forts possibles.

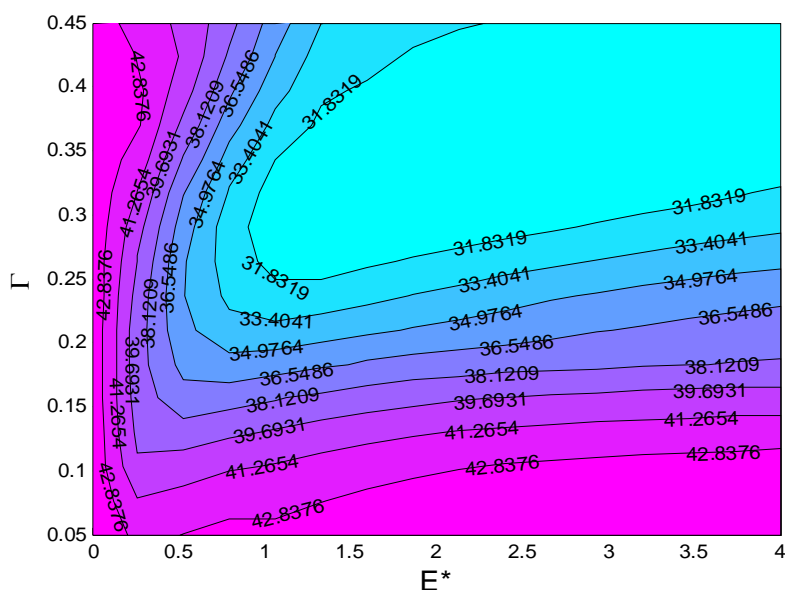


**Figure II-8 :**  $\max(pV)$  en  $\text{GPa.m.s-1}$

(Cas 1\_ Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 \text{Nm}$ )

#### II.2.1.4. Température éclair

Une élévation considérable de la température des surfaces de dents est constatée lors de l'engrènement. Cette élévation de la température est appelée « température flash » ou « température éclair ». Des valeurs importantes de cette température associées aux effets tangentiels de frottement peuvent donner naissance à des avaries de surface telles que le grippage [4], [65] et [66]. La température étant très influente sur la viscosité des lubrifiants donc sur les conditions de contact au niveau des dents, il paraît donc essentiel de tenter de réduire cette grandeur.



**Figure II-9:** Variation de la température flash (K)

(Cas 1\_ Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 \text{Nm}$ )

La figure II-9 présente l'évolution de la température flash en fonction des paramètres de correction du profil. Pour obtenir une élévation marquante, la simulation est conduite pour une vitesse de rotation du pignon égale à 3000 tr/min. L'influence des corrections de denture est assez semblable aux 2 critères précédents : des valeurs importantes de la correction de profil ont tendance à diminuer l'élévation locale de la température. La zone de correction optimale est cependant plus étendue :  $E^* \sim 1$  et  $\Gamma \sim 0,25$ .

#### II.2.1.5. Synthèse sur les critères d'optimisation

A l'issue de cette analyse, on constate une influence marquante des paramètres de correction des dentures sur les performances du système. Différents critères d'optimisation ont été introduits qui, généralement, réagissent différemment vis-à-vis des corrections de dentures. De ce fait, il est important de définir la fonctionnelle à optimiser avec soin. Afin d'introduire une gradation dans les problèmes que nous cherchons à résoudre, nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre 3, à la résolution du problème de conception avec un seul critère de dimensionnement. Une approche multi objectifs est présentée en dernière partie de ce mémoire.

Le critère d'optimisation retenu est la fluctuation (RMS) de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge et ce, pour les raisons suivantes :

- Des zones optimales ont été identifiées en fonction des paramètres de corrections.
- La minimisation de ce paramètre quasi-statique garantie généralement un fonctionnement dynamique peu bruyant et générant peu de vibrations.
- Les autres critères présentés varient de façon plus ou moins monotone et semblent conduire systématiquement à une maximisation des paramètres de correction.

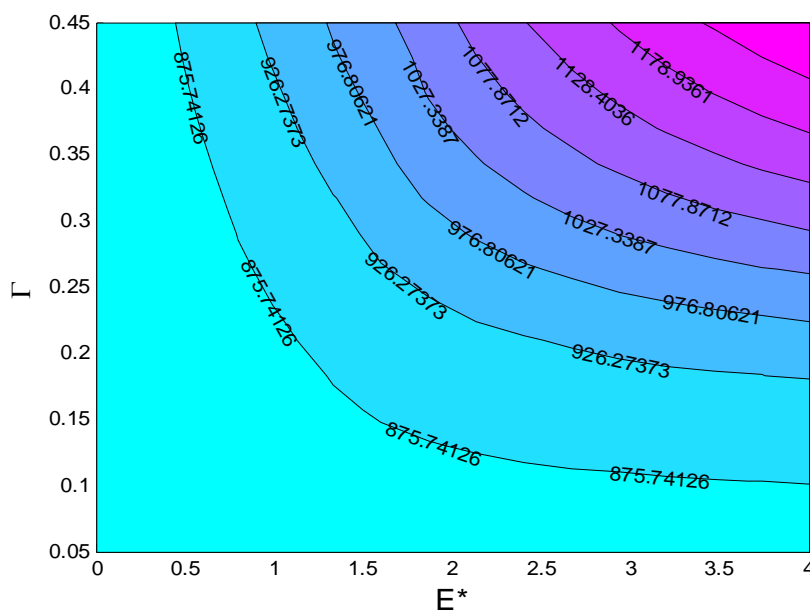
Les critères de dimensionnements classiques, à savoir la résistance à la pression superficielle et à la contrainte maximale de flexion en pied de dent, seront, par la suite, considérés comme des contraintes à respecter en toute circonstance et seront, par conséquent, écartés des critères à optimiser.

#### II.2.2. Contraintes à respecter

Lors de toute étape de conception et d'optimisation d'un engrenage, plusieurs conditions doivent être simultanément vérifiées pour éviter une dégradation prématurée, voire brutale, du système : limitation de la pression maximale de contact et de la contrainte maximale de flexion en pied de dent ainsi que l'évitement de chocs à l'engagement.

### II.2.2.1. Contrainte maximale de contact

L'intensité des pressions de contact au cours de l'engrènement est à l'origine des détériorations des surfaces de dentures (cas de défaillance par écaillage). La prise en compte de ces pressions est donc nécessaire pour évaluer la tenue mécanique des dentures. La norme ISO-6336 [30] propose, en se basant sur la théorie de Hertz, des formulations simplifiées exprimant ces pressions superficielles. Ces formulations font intervenir un certain nombre de coefficients correcteurs prenant en compte les conditions de fonctionnement, la qualité de réalisation, les aspects liés aux chocs, ... [141].



**Figure II-10 :** *Contrainte maximale de contact en MPa*  
(Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 Nm$ )

La Figure II-10 montre l'évolution de la contrainte maximale de contact en fonction des paramètres de correction de dentures. Cette contrainte augmente sensiblement lorsque la profondeur ou la longueur de correction croît. En conséquence, lors de l'étape d'optimisation il est nécessaire de tenir compte de la condition de résistance mécanique à la pression superficielle. Cette condition consiste à comparer la pression maximale de contact  $\sigma_{Hmax}$  calculée par le modèle, à la pression superficielle admissible du matériau  $\sigma_{Hadm}$  qui traduit une contrainte limite d'endurance à la pression superficielle ( $\sigma_{Hlim}$  qui dépend de la nuance du matériau de l'acier, du traitement thermique et de la dureté obtenue), pondérée par des coefficients dépendants des conditions de fonctionnement de l'engrènement.

$$\sigma_{Hmax} \leq \sigma_{Hadm} \quad (II.6)$$

Considérons pour notre étude, l'acier 17 Cr Ni Mo 6 cémenté trempé et en respectant la méthode ISO-6336 [30], la condition de résistance à la pression superficielle est satisfaite si la contrainte maximale ne dépasse pas  $\sigma_{Hadm} = 1500 MPa$ .

### II.2.2.2. Contraintes en pied de dents

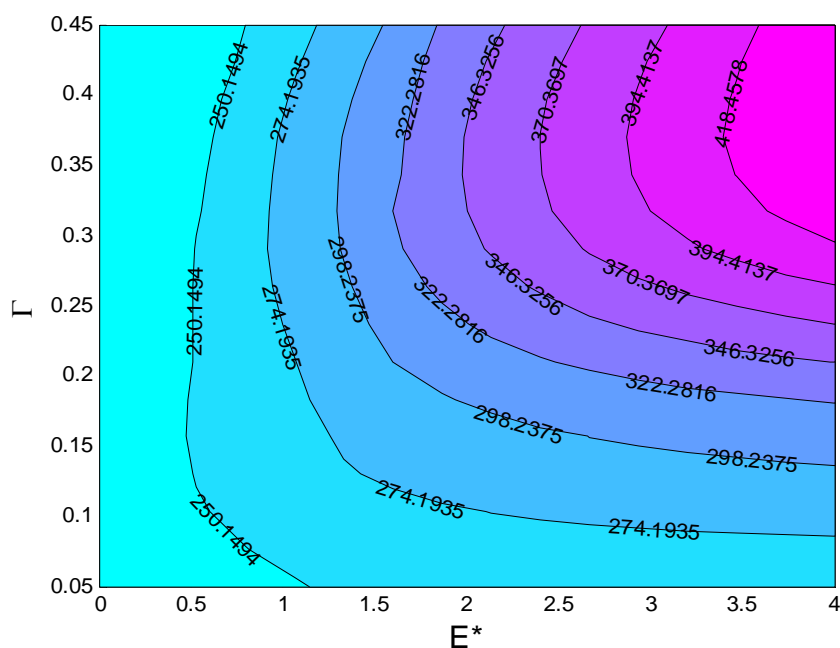
Au cours de l'engrènement, il y a apparition d'une zone de concentration de contraintes à proximité des raccordements en pied de dent. Cette zone correspond au domaine où la flexion d'ensemble de la dent engendre les plus fortes contraintes de traction. Ces contraintes peuvent être responsable, par effet de fatigue cyclique et cumulée, de l'amorçage de fissures en pieds de dent et mener à une rupture prématurée. Dans ce contexte, la norme ISO-6336 [30] préconise une démarche de calcul de la contrainte en pied de dent  $\sigma_F$  basée sur la théorie de la résistance des matériaux. La dent est assimilée à une poutre encastée – libre soumise à un effort normal au sommet du profil (méthode C) ou au point de plus haut contact unique (méthode B). Plusieurs coefficients correcteurs sont introduits pour tenir compte des approximations faites, de la qualité de réalisation, des conditions de fonctionnement réelles [141], etc. Pour qu'il y ait résistance à la flexion en pied de dent, il faut vérifier pour chacun des deux mobiles (roue et pignon) l'inégalité suivante :

$$\sigma_F \leq \sigma_{Fadm} \quad (II.7)$$

$\sigma_F$  : Contrainte maximale au pied de dent, corrigée par un certain nombre de facteurs qui dépendent notamment de la géométrie de la dent et de la répartition des charges.

$\sigma_{Fadm}$  : Contrainte admissible à la rupture. Elle est définie par la contrainte limite d'endurance ( $\sigma_{Flim}$ ) corrigée également par un certain nombre de facteurs de services.

Pour notre cas d'application, et pour un acier 17 Cr Mi Mo 6 cémenté trempé, on a d'après la formulation ISO-6336 [30]  $\sigma_{Fadm}=460$  MPa avec les facteurs de service égaux à 1.

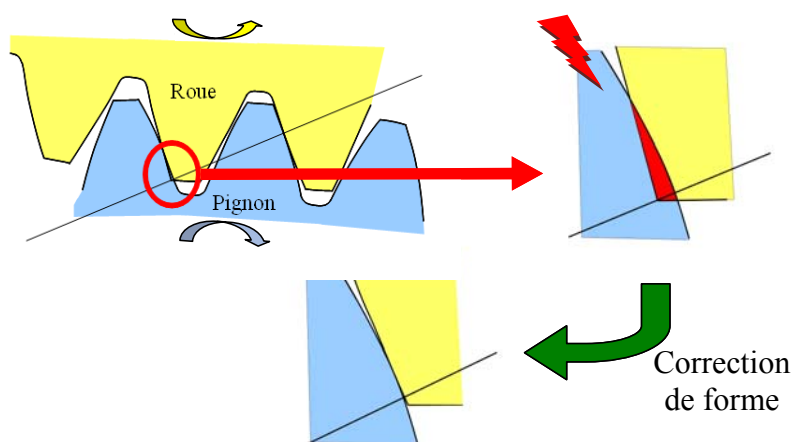


**Figure II-11 :** Contrainte aux pieds de dents du pignon en MPa  
(Cas 1\_ Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m=850$ Nm)

### II.2.2.3. Contrainte d'évitement du choc à l'engagement

Comme illustré dans la Figure II-12, une zone d'interférence peut apparaître à l'engagement suite à la déformation des dentures, conduisant à un choc entre des surfaces actives non conjuguées. Pour éviter ce choc, une contrainte géométrique supplémentaire est à appliquer (voir Equation (II.8)). Elle traduit le fait que l'écart de forme introduit par la correction en tête de dentures (profil et longitudinale) doit être supérieur à la valeur maximale de la déflexion statique ( $\delta_{\max}$ ) [88], ce qui se traduit en paramètres adimensionnés par la relation :

$$E^* + Ap^* > \varepsilon_\alpha \quad (\text{II.8})$$



**Figure II-12 :** Illustration du principe d'interférence

### II.2.2.4. Formulation générale du problème d'optimisation

Compte tenu de ce qui a été exposé sur les critères d'optimisations et sur les contraintes de conception, le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\underset{X \in \Omega}{\text{minimiser}} \text{ RMS}(TEs(X)), \Omega = \{X = [E^*, \Gamma, Ap^*, \dots]; E^* : 0 \rightarrow 4; \Gamma : 0 \rightarrow 0.45; Ap^* : 0 \rightarrow 2, \dots\} \quad (\text{II.9})$$

en respectant ces contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : \sigma_{H\max} < \sigma_{Hadm} \\ C_2 : \sigma_{F\max} < \sigma_{Fadm} \\ C_3 : E^* + Ap^* > \varepsilon_\alpha \end{array} \right.$$

## II.3. Optimisation des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique – Approche analytique

On propose dans cette section de traiter le problème de l'optimisation du RMS(TEs) de manière analytique. Pour cela, le problème doit être formulé avec quelques hypothèses supplémentaires :

- la raideur linéique d'engrènement est constante,
- les écarts de montage et les déformations des lignes d'arbre sont faibles,
- la denture est étroite ( $b < 16 m_0$ ).

L'optimisation est réalisée sur 2, puis sur 3 paramètres de correction de forme.

Selon cette formulation, un ensemble de solutions exactes est proposé dans le cas de l'optimisation de la correction de profil seule (2 paramètres) et une approximation du domaine optimal est proposée dans le second cas.

### II.3.1. Correction linéaire de profil

#### II.3.1.1. *Théorie*

Les excitations dans un système d'engrenages sont principalement contrôlées par les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique définie par la superposition de l'erreur de transmission quasi statique sans charge (No-Load Transmission Error, NLTE) et des effets de déformation des dentures lorsque l'engrenage transmet une charge à faible vitesse. Typiquement, le contenu spectral de NLTE comprend des composants de basses fréquences associées à des défauts de positionnement tel que le défaut d'excentricité. La contribution de ces défauts, au niveau de la dérivation temporelle du second ordre, peut être négligée. En conséquence, l'excitation d'engrènement est dominée essentiellement, même à grandes vitesses par la dérivée seconde de l'erreur de transmission quasi-statique. Ceci justifie qu'en pratique, on s'intéresse principalement à l'optimisation de l'erreur de transmission quasi-statique puisqu'elle mène, dans un certain sens, à une optimisation du comportement dynamique (Velex et Ajmi [1]). Une telle optimisation est obtenue à travers des corrections de forme des dentures (de profil et longitudinales). Dans ce contexte, il a été montré récemment par Velex et al. [35] que l'erreur de transmission quasi-statique peut être exprimée à travers une seule et unique équation scalaire et ceci quelque soit le nombre des degrés de liberté pris en compte dans le modèle. Les auteurs [35] ont considéré une correction de profil linéaire, symétrique appliquée en tête de denture caractérisée par une profondeur  $E$  ( $E^* = E/\delta_m$ ) et une longueur  $\Gamma$  (longueur adimensionnée par rapport à la longueur active de profil (voir Figure II-13)). En supposant constante la raideur par unité de longueur de contact



( $k_0$  donnée par la norme ISO-6336 [30]), l'expression suivante de l'écart de transmission quasi statique adimensionné au cours du temps a été obtenu :

$$TE_s^*(\tau) = \frac{1 - I_{kE}}{\cos \beta_b I_k} ;$$

$$I_{kE} = \int_{L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) e^*(M) dM$$

$$I_k = \int_{L(\tau, X)} \hat{k}(M) dM$$
(II.10)

Avec

$TE_s^*(\tau)$  : écart de transmission quasi-statique adimensionnée par rapport à  $\delta_m$

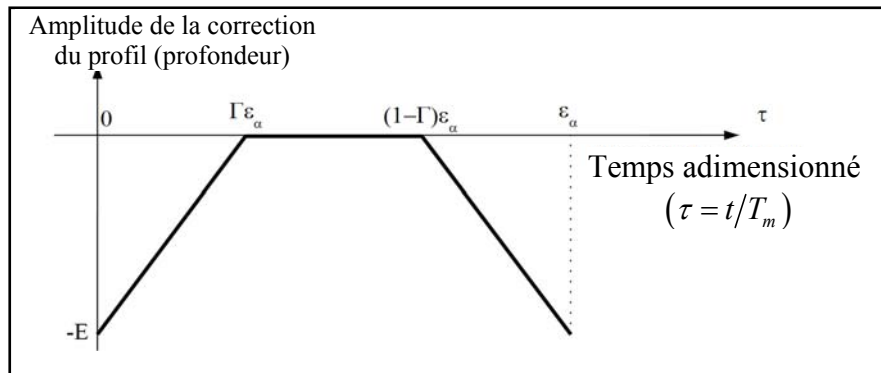
$\delta_m$  : déflexion statique moyenne associé à chaque nouvelle géométrie corrigée

$e^*(M)$  : écart normal au point M, adimensionné par rapport à  $\delta_m$

$\hat{k}(M) = \hat{k}_0$  : raideur par unité de longueur au point M, adimensionnée par rapport à  $k_m$

$k_m = \frac{k_0 b \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b} (1 - 2\lambda)$  : raideur moyenne d'engrènement

$L(\tau, X_s)$  : Longueur de contact, non linéaire, à l'instant adimensionné  $\tau$



**Figure II-13** : Définition des paramètres de correction de profil

Les intégrales sur chaque ligne de contact potentiel sont remplacées par des sommes de Riemann et la limite est prise lorsque le nombre de segments élémentaires tend vers l'infini (voir Annexe B), ce qui donne :

$$I_{kE} = \int_{L(\tau, X)} \hat{k}(M) e^*(M) dM = -\frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \frac{E}{\delta_m^*} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{kE} \cos(\pi n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)) \right]$$
(II.11)

$$I_k = \hat{k}(\tau, X_s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_k \cos(\pi n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau))$$
(II.12)

avec :

$$\Omega_{kE} = \frac{2}{\Gamma - \lambda} \text{sinc}(n\varepsilon_\beta) \left[ (2\lambda - 1) \text{sinc}(n\varepsilon'_\alpha) + (1 - \Gamma - \lambda) \text{sinc}(n(\Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha) \text{sinc}(n(1 - \Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha) \right]$$

$$\Omega_k = 2 \text{sinc}(n\varepsilon'_\alpha) \text{sinc}(n\varepsilon_\beta)$$

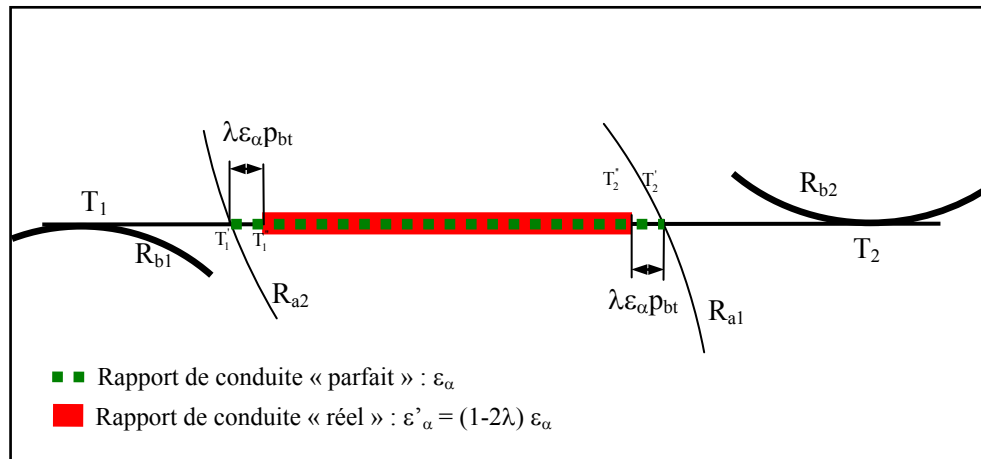
$\varepsilon'_\alpha = (1 - 2\lambda) \varepsilon_\alpha$  : rapport de conduite actuel

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \text{ fonction sinus cardinal}$$

$$\delta_m = \frac{\delta_{mref}}{1 - 2\lambda}$$

$$\delta_{mref} = \frac{Cm}{Rb_1 b k_0 \varepsilon_\alpha}, \text{ déflexion statique moyenne de référence, sans correction}$$

Où,  $\lambda$  est un paramètre qui caractérise les éventuelles réductions de longueur de contact dues à la présence des corrections de profil (voir Figure II-14).



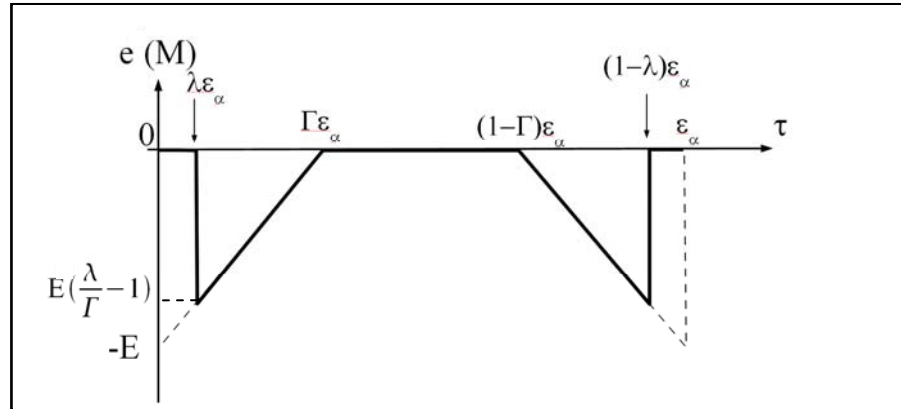
**Figure II-14 : Illustration du paramètre de réduction ( $\lambda$ )**

Pour des configurations particulières, ce paramètre peut être défini par des expressions explicites directes (engrenage droit, engrenage avec un rapport de recouvrement entier). Cependant, dans le cas général, sa détermination nécessite la résolution numérique d'une équation implicite. Dans ce mémoire, seul le principe de sa détermination est présenté, le détail de la méthode fera prochainement l'objet d'une publication des encadrants de cette thèse.

On montre qu'en tout point de contact effectif, l'effort linéique de contact est donné par la relation :

$$F(M) = \frac{k_m \delta_m}{(1 - 2\lambda) N \varepsilon_\alpha} \left[ TE^*(\tau) \cos \beta_b + e^*(M) \right] \quad (\text{II.13})$$

S'il y a réduction de la longueur de contact ( $\lambda$  non nul), L'effort de contact est nul à l'engagement.



**Figure II-15 :** Réduction de longueur de contact ( $\lambda$ ) ramenée au plan d'action

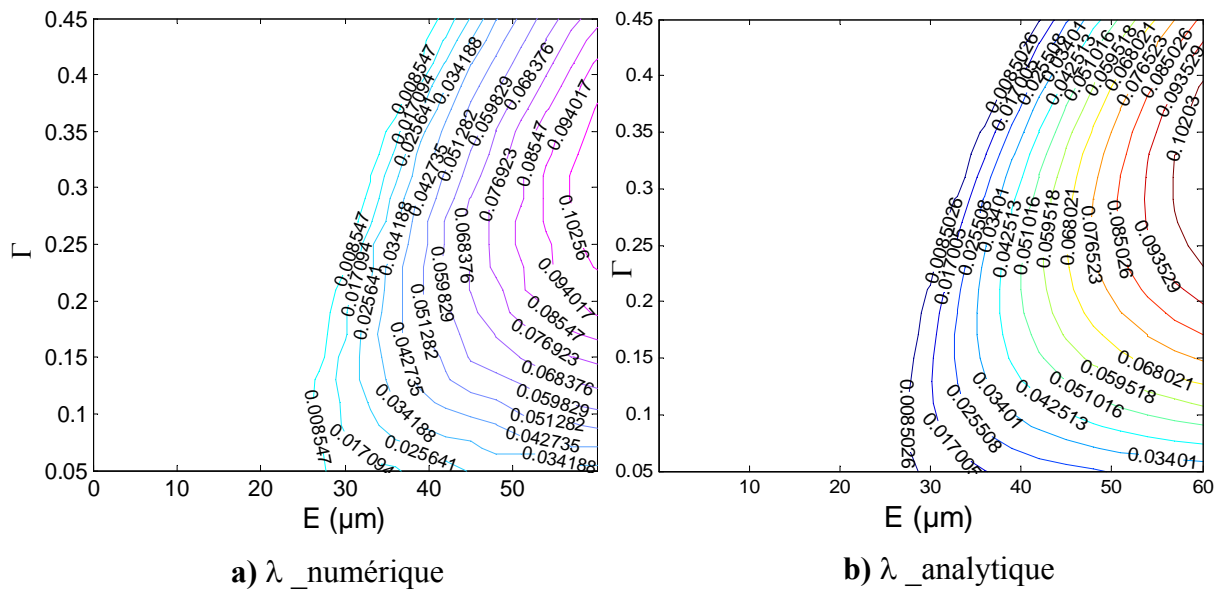
Après quelques manipulations de l'équation (II.13), on obtient l'équation à résoudre pour déterminer  $\lambda$  :

$$-\lambda^2 E^* + \lambda(E^* - 2\Gamma) + \Gamma(1 - E^*(1 - \Gamma)) = E^* \Delta(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \Gamma, \lambda, \tau) \quad (\text{II.14})$$

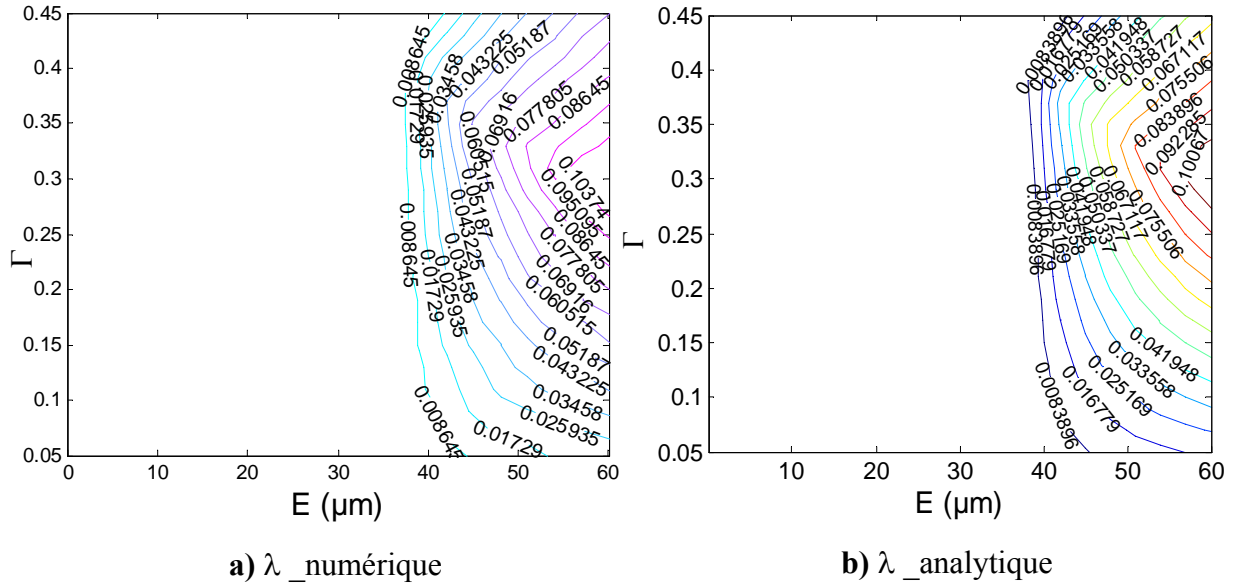
avec

$$\Delta(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \Gamma, \lambda, \tau) = \frac{2}{\pi^3 \varepsilon_\alpha^2 \varepsilon_\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)) \sin(\pi k \varepsilon_\beta) \\ \sin(\pi k(\Gamma - \lambda)) \sin(\pi k(1 - \Gamma - \lambda)) \end{array} \right\}$$

La Figure II-16 et la Figure II-17 représentent l'évolution du paramètre de réduction de conduite ( $\lambda$ ), obtenu respectivement par simulation numérique et par la formule donnée dans l'équation (II.14). On remarque ainsi une bonne concordance entre les deux résultats, ce qui valide l'approche analytique proposée.



**Figure II-16 :** Paramètre de réduction du contact ( $\lambda$ )  
(Cas 1\_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850 \text{Nm}$ )



**Figure II-17 :** Paramètre de réduction du contact ( $\lambda$ )

(Cas 2\_Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.7$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.0$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ )

### II.3.1.2. Expression du RMS de l'écart de transmission

A partir de l'expression analytique [35] des écarts de transmission (TEs), la fluctuation temporelle de l'erreur de transmission dimensionnelle peut être vue comme une fonction de 2 variables aléatoires  $I_{kE}$  et  $I_k$ . Ainsi, la variance de cette fonction s'exprime de la façon suivante :

$$Var_\tau(TE_s) = \frac{\delta_m^2}{\cos^2 \beta_b} Var_\tau \left( \frac{1 - I_{kE}}{I_k} \right) \quad (\text{II.15})$$

Ce qui conduit, en utilisant le développement de Taylor au premier ordre (voir annexe C), à l'équation (II.16) :

$$Var_\tau(TE_s) \cong \frac{\delta_m^2}{\cos^2 \beta_b} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(E_\tau[I_k])^2} Var_\tau(I_{kE}) + \frac{(1 - (E_\tau[I_{kE}]))^2}{(E_\tau[I_k])^4} Var_\tau(I_k) + \\ \frac{(1 - (E_\tau[I_{kE}]))}{(E_\tau[I_k])^3} (Var_\tau(I_{kE} + I_k) - Var_\tau(I_{kE}) - Var_\tau(I_k)) \end{array} \right\} \quad (\text{II.16})$$

Tel que  $E_\tau[\bullet]$  désigne l'espérance mathématique et  $Var_\tau(\bullet)$  représente la variance (moment centré d'ordre 2).

Or, les variables aléatoires  $I_{kE}$  et  $I_k$  s'expriment sous forme de série de Fourier :

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n\tau}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n\tau}{P}\right) \quad (\text{II.17})$$

où  $a_0$  est la valeur moyenne de la fonction et sa variance se calcule simplement :

$$Var_{\tau}(f(\tau)) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

On obtient alors une expression de la moyenne quadratique (RMS) de TEs.

$$RMS(TEs) = \left( \frac{\delta_m^2}{2 \cos^2 \beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_{kE} \Omega_{kE} + (1 + \mu_{kE}) \Omega_k]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{avec } \mu_{kE} = \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \frac{E}{\delta_m}$$

En développant les expressions, il vient:

$$RMS^2(TEs^*) = \frac{1}{2 \cos^2 \beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(\Gamma - \lambda)(1 - \Gamma - \lambda)E^*}{\Gamma(1 - 2\lambda)} (\text{sinc}(n\varepsilon_{\beta})^* \text{sinc}(n(\Gamma - \lambda)\varepsilon_{\alpha}) \text{sinc}(n(1 - \Gamma - \lambda)\varepsilon_{\alpha})) \right]^2 + \frac{2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} [\Gamma(1 - 2\lambda) + E^*(\Gamma - \lambda)(\Gamma + \lambda - 1)] \text{sinc}(n\varepsilon'_{\alpha}) \text{sinc}(n\varepsilon_{\beta}) \quad (\text{II.19})$$

Dans le cadre des hypothèses formulées précédemment, la relation (II.19) exprime le RMS(TEs) de façon générale, pour tout engrenage cylindrique ayant une correction de profil linéaire. Le nombre de paramètres intervenant dans cette relation est très réduit :  $\varepsilon_{\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\beta}$ ,  $E$ ,  $\Gamma$ ,  $\beta_b$  et  $\delta_m$ .

### II.3.1.3. Eléments de validation

La validité de la formulation analytique proposée dans l'équation (II.19) est examinée pour les différentes configurations d'engrenages décrites dans le Tableau II-1. En considérant une raideur par unité de longueur constante (Formule ISO-6336 [30]), les Figure II-18, Figure II-19 et Figure II-20, présentent les courbes d'isovaleurs de la moyenne quadratique du (RMS) de TEs en fonction des paramètres de corrections de dentures. Une correction linéaire de profil symétrique, caractérisée par une profondeur adimensionné  $E^*$  et une longueur adimensionné  $\Gamma$ , est appliquée en têtes des dents. Les résultats analytiques qui dérivent de l'équation (II.19) sont présentés dans les figures b). Tandis les résultats de la simulation obtenus par le modèle numérique, sont tracés dans les figures a). On s'aperçoit que les valeurs associées aux courbes obtenues par les deux approches (numérique et analytique) sont très proches. Une excellente concordance a été constatée pour les différentes comparaisons qui ont été menées pour une variété de géométries et différentes conditions de chargement.

II.3.1.4. Solution du problème d'optimisation

La formulation analytique de la fonctionnelle à optimiser permet dans le cas présent de déterminer un ensemble de solutions exactes du problème sous la forme :

$$E^* = \frac{\Gamma(1-2\lambda)}{(\Gamma-\lambda)(1-\Gamma-\lambda)} \tag{II.20}$$

$$\text{et } \begin{cases} (\Gamma-\lambda)\varepsilon_\alpha = L \text{ avec } L \text{ un entier relatif} \\ \text{ou } (1-\Gamma-\lambda)\varepsilon_\alpha = M \text{ avec } M \text{ un entier relatif} \end{cases}$$

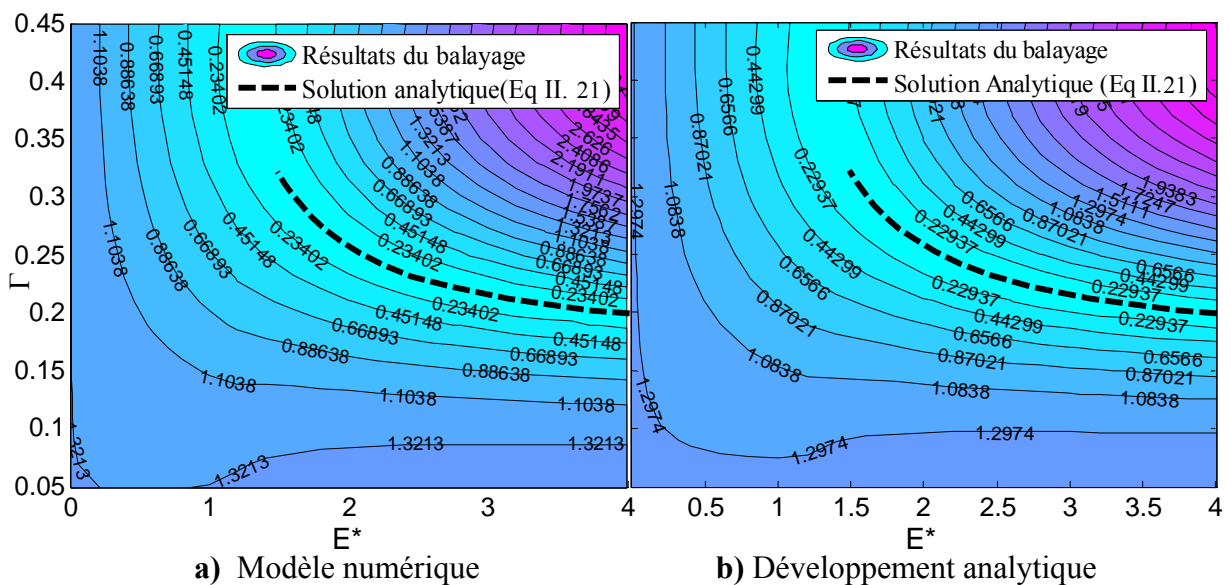
Après avoir analysé les solutions, on en déduit que les relations possibles entre les paramètres de correction de profil ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) qui annulent les fluctuations de TEs sont les suivantes :

▪ **Cas 1 :  $\varepsilon_\alpha < 2$**

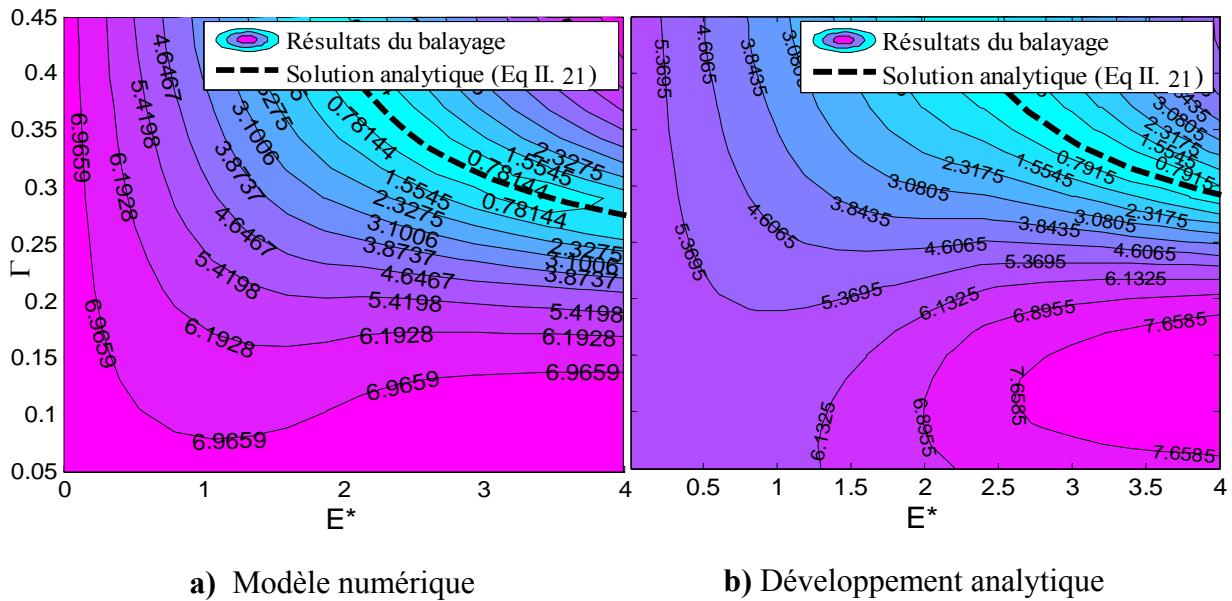
$$E^* = \Gamma \varepsilon_\alpha \frac{2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \tag{II.21}$$

avec  $\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha} \geq \Gamma \geq \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$

Cette expression correspond aux courbes de traits discontinues (---) tracées dans la Figure II-18 et la Figure II-19. On observe que ces courbes se localisent bien au milieu des zones optimales trouvées par balayage numérique.



**Figure II-18 :** Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 1\_ Tableau II-1)  
 Comparaison entre les résultats numériques et analytiques, raideur linéique constante



**Figure II-19 :** Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 2\_Tableau II-1)  
 Comparaison entre les résultats numériques et analytiques, raideur linéique constante

▪ **Cas 2 :  $3 > \varepsilon_\alpha > 2$**

Pour une denture HCR, il y a 3 combinaisons annulant le RMS(TEs) :

i) 
$$E^* = \Gamma \varepsilon_\alpha \frac{2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad (\text{II.22})$$

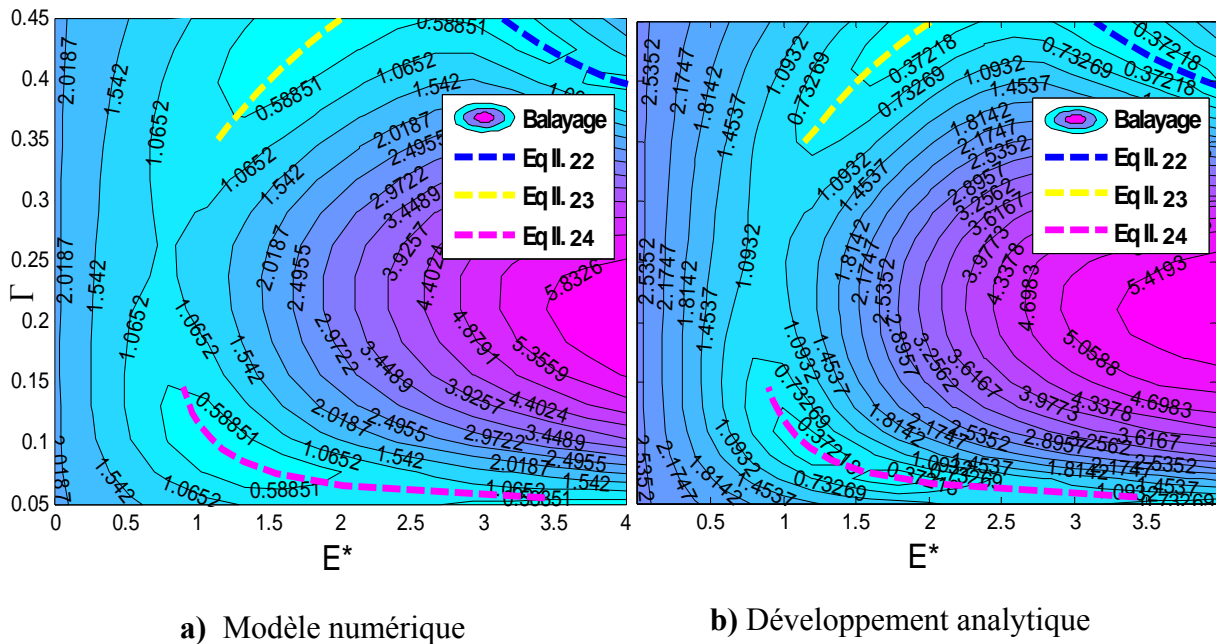
avec 
$$\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha} \geq \Gamma \geq \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$$

ii) 
$$E^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2} \frac{2\Gamma - 1 + \frac{4}{\varepsilon_\alpha}}{2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}} \quad (\text{II.23})$$

avec 
$$\frac{\varepsilon_\alpha - 2}{\varepsilon_\alpha} > \Gamma > \frac{\varepsilon_\alpha - 2}{2\varepsilon_\alpha}$$

iii) 
$$E^* = \Gamma \varepsilon_\alpha \frac{1 - 2\Gamma + \frac{2}{\varepsilon_\alpha}}{1 - 2\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad (\text{II.24})$$

avec 
$$\frac{\varepsilon_\alpha + 1}{2\varepsilon_\alpha} \geq \Gamma \geq \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$$



**Figure II-20** : Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 3\_Tableau II-1)  
 Comparaison entre les résultats numériques et analytiques, raideur linéique constante

On vérifie que ces expressions sont identiques à celle trouvée par Vexel et al. [35] : Elles sont les solutions exactes d'un problème de conception simplifié mais elles constituent une base solide pour la validation de méthodes numériques et pour initier la recherche de solutions à partir de modèles plus complexes.

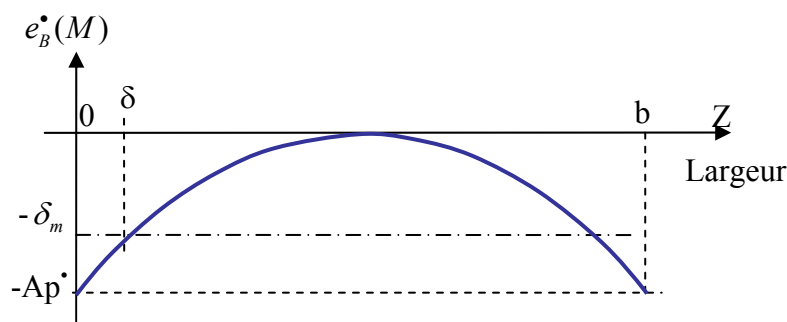
### II.3.2. Correction linéaire de profil combinée avec un bombé

#### II.3.2.1. Théorie

Comme précédemment, on cherche dans ce paragraphe à établir une formulation analytique exprimant les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique (RMS(TEs)) en présence d'une correction linéaire symétrique ( $E, \Gamma$ ) combinée avec un bombé parabolique longitudinal ( $A_p$ ). Une raideur linéique d'engrènement constante, donné par ISO-6336 [30], est considérée. Pour ce faire, on reprend l'équation, exprimant l'erreur de transmission quasi-statique adimensionnée  $TE_s^*(\tau)$ . Dans cette expression, l'écart normal  $e^*(M)$  se compose de deux contributions :

- correction de profil caractérisée par  $e_E^*(M)$  (voir Figure II-13).
- correction longitudinale (bombé parabolique) caractérisée par  $e_B^*(M)$  (voir Figure II-21).

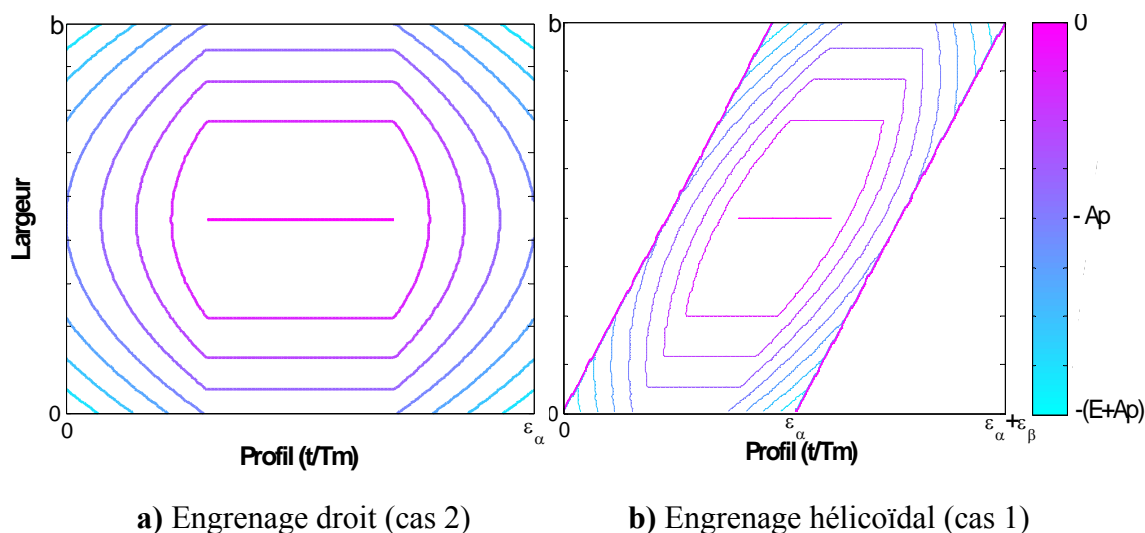




**Figure II-21** : Evolution de l'écart  $e_b^*(M)$  due au bombé introduit

L'écart total  $e^*(M)$  est alors la somme de deux écarts introduits par les deux types de corrections. La figure II-22 présente l'évolution de cet écart total associé à un couple de dents pour deux configurations d'engrenage : droit et hélicoïdal.

$$e^*(M) = e_E^*(M) + e_B^*(M) \quad (\text{II.25})$$



**a)** Engrenage droit (cas 2)

**b)** Engrenage hélicoïdal (cas 1)

**Figure II-22** : Evolution de l'écart  $e(M)$  du aux corrections introduites (profil et longitudinal)

Les intégrations figurant dans les équations (II.11) et (II.12) se font sur la longueur de contact ( $L(\tau, X_s)$ ) qui doit tenir en compte de l'éventuelle réduction de la longueur réelle de contact due à l'introduction des corrections de formes. Cette réduction est paramétrée par 2 coefficients sans dimension ;  $\lambda$  dans la direction de l'engrènement et  $\delta$  suivant la largeur. Comme illustré dans la Figure II-23, on supposera que la zone effective de contact est rectangulaire. La détermination du paramètre  $\lambda$  repose sur l'équation (II.14). De même, il existe certainement une réduction de la largeur de la zone de contact si l'amplitude  $Ap$  est supérieure à la déflexion statique moyenne  $\delta_m$  (voir Figure II-21). Ainsi, on propose l'expression approchée suivante pour déterminer  $\delta$  :

Si  $Ap^*(= Ap/\delta_m) < 1$  alors  $\delta = 0$

$$\text{Sinon } \delta = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{Ap^*(1-2\lambda)(1-2\delta)}} \right) \quad (\text{II.26})$$

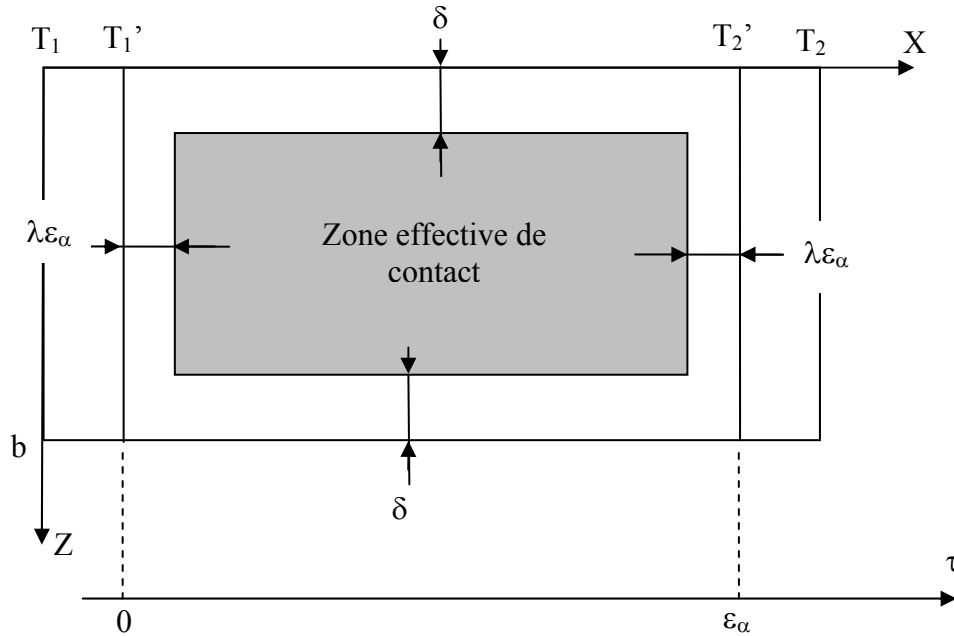


Figure II-23 : Illustration des réductions de contact dues aux corrections de dentures

On obtient ainsi l'expression de la variation temporelle de l'erreur de transmission quasi-statique :

$$TE_S^*(\tau) = \frac{1 - I_{kE} - I_{kB}}{\cos \beta_b I_k} \quad (\text{II.27})$$

avec,

$$I_{kE} = \int_{L(\tau, \mathbf{x}_s)} \hat{k}(M) e_E^*(M) dM = -\frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \frac{E}{\delta_m} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{kE} \cos(\pi n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)) \right]$$

$$\Omega_{kE} = \frac{2}{\Gamma - \lambda} \text{sinc}(n\varepsilon_\beta) \left[ (2\lambda - 1) \text{sinc}(n\varepsilon'_\alpha) + (1 - \Gamma - \lambda) \text{sinc}(n(\Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha) \text{sinc}(n(1 - \Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha) \right]$$

$$I_{kB} = \int_{L(\tau, \mathbf{x}_s)} \hat{k}(M) e_B^*(M) dM = -\frac{Ap}{\delta_m} \left[ \frac{(1 - 2\delta)^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{kB} \cos(\pi n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)) \right]$$

$$k_m = \frac{k_0 b \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b} (1 - 2\lambda)(1 - 2\delta) : \text{raideur moyenne d'engrènement}$$

$$\Omega_{kB} = \text{sinc}(n\varepsilon'_\alpha) \left[ \left( (1 - 2\delta)^2 - \frac{2}{(\pi n \varepsilon_\beta)^2} \right) \text{sinc}(n\varepsilon'_\beta) + \frac{2}{\pi n \varepsilon_\beta} (1 - 2\delta) \frac{\cos(\pi n \varepsilon'_\beta)}{\pi n \varepsilon'_\beta} \right]$$

$$I_k = \hat{K}(\tau, X_s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_k \cos(\pi n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau))$$

$$\Omega_k = 2 \operatorname{sinc}(n\varepsilon'_\alpha) \operatorname{sinc}(n\varepsilon'_\beta)$$

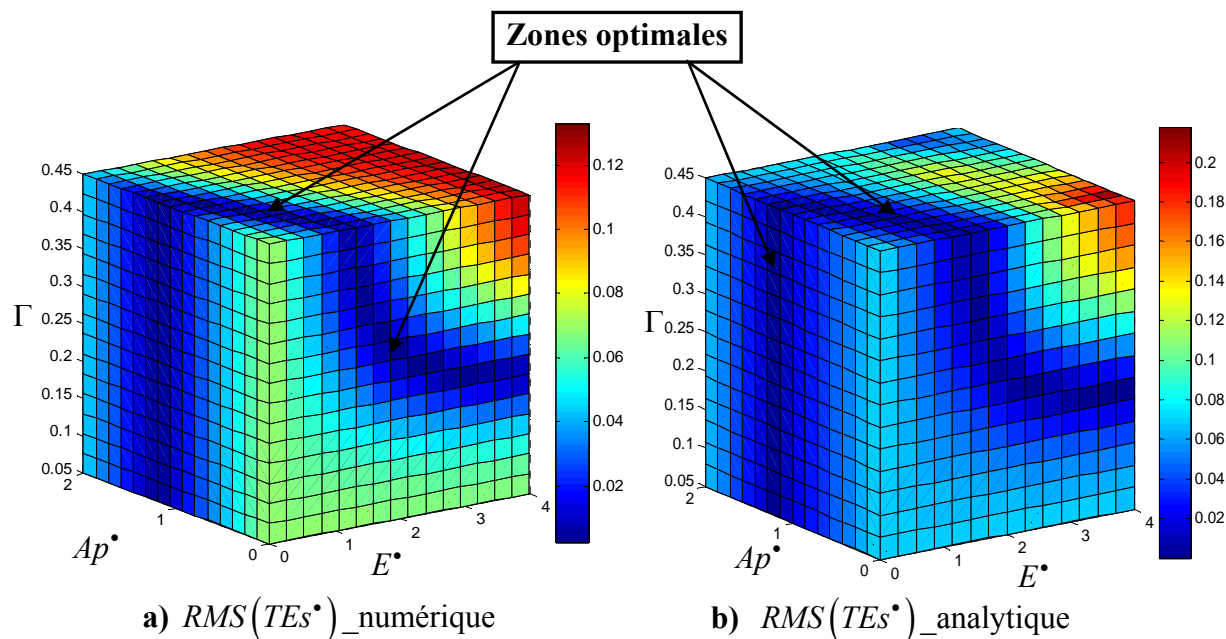
$$\varepsilon'_\alpha = (1 - 2\lambda)\varepsilon_\alpha : \text{rapport de conduite réel}$$

$$\varepsilon'_\beta = (1 - 2\delta)\varepsilon_\beta : \text{rapport de recouvrement réel}$$

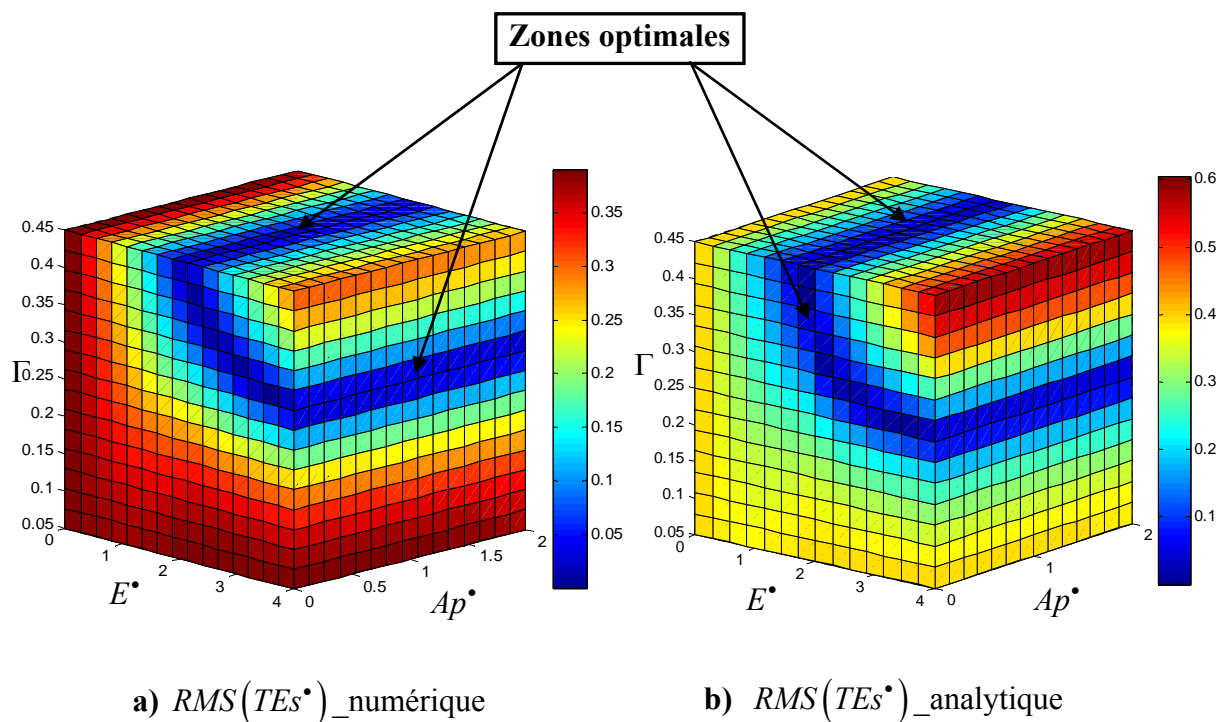
La fluctuation temporelle (RMS) de l'erreur de transmission peut être estimée à travers le calcul de la variance de  $TEs$ . En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre et après quelques manipulations, on obtient l'équation suivante pour le RMS( $TEs$ ) qui dépend essentiellement des paramètres :  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $E$ ,  $\Gamma$ ,  $Ap$ ,  $\beta_b$  et  $\delta_m$ .

$$\begin{aligned} RMS^2(TEs) = & \frac{2\delta_m^2}{\cos^2 \beta_b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{\pi^2 k^2 \varepsilon'_\alpha \varepsilon'_\beta} \left\{ \frac{\sin \pi k \varepsilon'_\alpha \sin \pi k \varepsilon'_\beta}{1 - 2\delta} \left[ 1 - \frac{E}{\delta_m} \frac{(\Gamma - \lambda)(1 - \Gamma - \lambda)}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{2Ap}{3\delta_m} \left( (1 - 2\delta)^2 - \frac{3}{(\pi k \varepsilon_\beta)^2} \right) \right] + \frac{E}{\delta_m} \frac{\sin \pi k \varepsilon'_\beta \sin \pi k \varepsilon_\alpha (1 - \Gamma - \lambda) \sin \pi k \varepsilon_\alpha (\Gamma - \lambda)}{\pi k \varepsilon_\alpha (1 - 2\delta) \Gamma} \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{2Ap}{\delta_m} \frac{\sin \pi k \varepsilon'_\alpha \cos \pi k \varepsilon'_\beta}{\pi k \varepsilon_\beta} \right\} \right\rangle^2 \end{aligned} \quad (II.28)$$

Les deux figures, Figure II-24 et Figure II-25, présentent une comparaison entre les résultats numériques et analytiques proposés dans l'équation (II.28) pour les deux premières configurations d'engrenages données dans le Tableau II-1. On constate que le développement analytique proposé mène à des résultats comparables avec ceux obtenus numériquement. En effet, malgré la présence d'une petite différence au niveau de l'amplitude de RMS( $TEs$ ) surtout lorsque les paramètres de correction prennent des valeurs importantes, on aboutit aux mêmes zones optimales qui minimisent le RMS( $TEs$ ). Par conséquent ce développement présente un support fiable pour caractériser et localiser analytiquement la zone optimale. Ceci sera l'objet du paragraphe suivant.



**Figure II-24 :**  $RMS(TEs^*)__{(Cas\ 1\_Tableau\ II-1)}$  :  $\epsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\epsilon_\beta = 1.34$



**Figure II-25 :**  $RMS(TEs^*)__{(Cas\ 2\_Tableau\ II-1)}$  :  $\epsilon_\alpha = 1.7$ ,  $\epsilon_\beta = 0.$

Pour obtenir le  $RMS(TEs)$  pour un engrenage à denture droite, on utilise les développements limités des sinus et cosinus contenant  $\epsilon_\beta$  à l'ordre 3 au moins. Après simplification et en prenant la limite lorsque  $\epsilon_\beta$  tend vers 0, on obtient :

$$RMS^2(TEs^*) = \frac{2}{\cos^2 \beta_b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{\pi k \varepsilon'_\alpha} \left\{ \sin \pi k \varepsilon'_\alpha \left[ 1 - E^* \frac{(\Gamma - \lambda)(1 - \Gamma - \lambda)}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. E^* \frac{\sin \pi k \varepsilon_\alpha (1 - \Gamma - \lambda) \sin \pi k \varepsilon_\alpha (\Gamma - \lambda)}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \Gamma} \right\} \right\rangle^2 \quad (II.29)$$

La valeur du bombé n'intervient pas alors dans l'expression du RMS(TEs). Ce résultat rejoint les observations faites en (II.2.1.1).

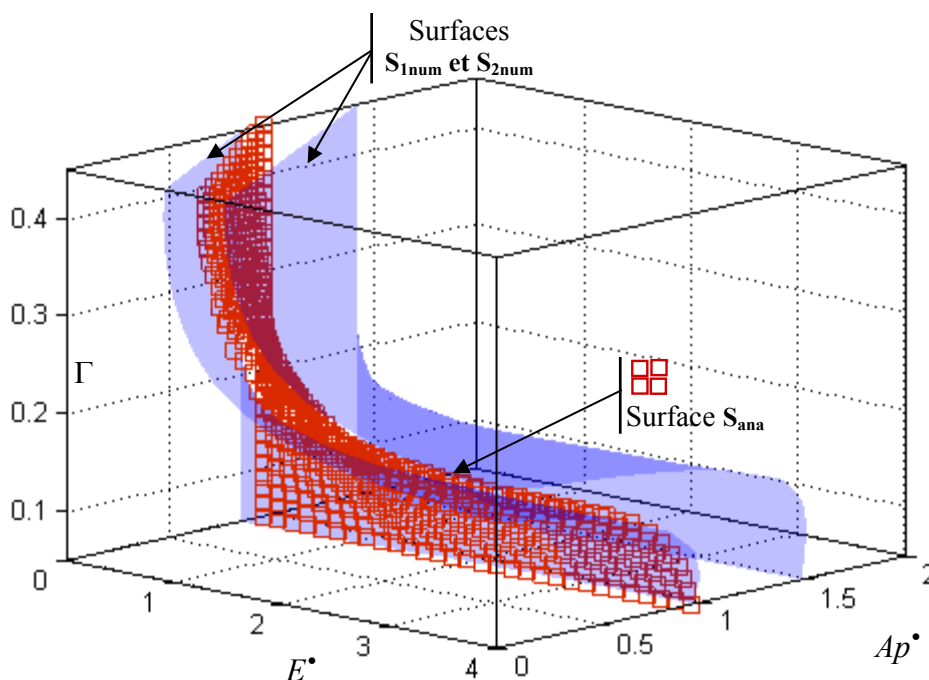
### II.3.2.2. Recherche des minimums de fluctuations de TEs

Minimiser les variations de TEs revient à rechercher les combinaisons de paramètres qui annulent ou minimisent l'équation (II.28). En denture droite, les valeurs qui annulent le RMS(TEs) sont les mêmes que celles déterminées au paragraphe précédent (II.3.1). Ce résultat confirme que pour les dentures droites, l'optimisation des corrections de forme pour la minimisation des écarts de transmissions est indépendante de la valeur du bombé.

Pour les dentures hélicoïdales, la complexité de l'équation obtenue rend l'expression de toute solution explicite difficile. Cependant, on peut remarquer dans cette équation que les termes qui composent le  $RMS^2(TEs)$  sont en  $k^{-n}$  avec  $n$  au moins égal à 4. Le premier terme (avec  $k=1$ ) est donc le terme prépondérant puisqu'il est au moins 10 fois plus grand que le second. Tous les termes suivants convergent très rapidement vers zéro et leur somme est négligeable. Cette prépondérance du premier terme est vérifiée numériquement. En prenant alors ce terme, et sous le couvert de l'hypothèse que la réduction de la largeur de contact est négligeable, et pour un engrenage hélicoïdal (avec  $\varepsilon_\beta > 1$ ), il est possible de définir une formule approchée qui lie les 3 paramètres de correction dans la zone optimale ;

$$Ap = \frac{\delta_m + E \left[ \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} - \frac{\Gamma - \lambda}{\Gamma} + \frac{\sin[\pi \varepsilon_\alpha (\Gamma - \lambda)] \sin[\pi \varepsilon_\alpha (1 - \Gamma - \lambda)]}{\Gamma \pi \varepsilon_\alpha \sin \pi \varepsilon'_\alpha} \right]}{2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi \varepsilon_\beta^2} + \frac{1}{\pi \varepsilon_\beta \tan(\pi \varepsilon_\beta)} \right)}, \quad \text{pour } \varepsilon_\beta > 1 \quad (II.30)$$

Cette équation caractérise la surface  $S_{ana}$ , tracée dans la Figure II-26, et qui se situe bien entre les deux surfaces  $S_{1num}$  et  $S_{2num}$  obtenues par balayage numérique et qui délimitent la zone optimale. De plus, nous avons constaté sur plusieurs cas que la relation (II.30) donne également des résultats satisfaisants pour un rapport de recouvrement plus faible.



**Figure II-26 :**  $RMS(TEs^*)_{(Cas\ 1\_Tableau\ II-1)}$  :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$

### II.3.2.3. Synthèse de l'approche analytique

Les deux formulations analytiques présentées permettent d'obtenir des combinaisons de paramètres qui résolvent de manière exacte ou approchée le problème d'optimisation du RMS(TEs) avec 2 ou 3 paramètres de correction. Même si les solutions proposées ne sont qu'approximatives, dans une problématique moins idéalisée, elles donnent un éclairage très intéressant sur l'influence de la géométrie initiale des engrenages ( $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ), sur les valeurs des paramètres de corrections de dentures ( $E$ ,  $\Gamma$ ,  $Ap$ ) qui optimisent le comportement. Ces solutions peuvent fournir aux concepteurs des valeurs initiales dans un processus itératif d'optimisation de corrections de formes des dentures quand des modèles plus réalistes doivent être utilisés.

## II.4. Optimisation multi-variables simple critère

Les résultats associés au modèle numérique présentés précédemment sont obtenus par des balayages énumératifs de l'espace des paramètres de corrections. Cette approche présente l'avantage d'explorer tout l'espace de solutions et le temps de calcul demeure raisonnable pour 2 ou 3 paramètres. Elle est similaire à ce que Houser et al. [34] appellent méthode de « run-all-the-cases ». Cependant, dans le cas où le nombre des variables augmente, le balayage classique impliquerait des temps de calcul prohibitifs, ce qui rend cette méthode inadaptée. De même, les méthodes du gradient ne sont pas applicables puisqu'elles exigent la

détermination du gradient qui demande un effort de calcul considérable surtout en absence de formulation analytique.

Face à ces difficultés, et dans le but d'optimiser une fonction objectif à plusieurs variables, on a eu recours à une méthode d'optimisation non déterministe basée sur des algorithmes génétiques. Les Algorithmes Evolutionnaires (AE) et plus spécialement les Algorithmes Génétiques (AG) sont principalement connus comme des méthodes d'optimisation stochastiques efficaces pour des problèmes très complexes et sont employés dans des domaines d'application extrêmement variés (voir chapitre 1).

#### II.4.1.Méthode d'optimisation : Algorithme génétique

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation très robustes particulièrement adaptés aux problèmes où l'initialisation n'est pas intuitive et lorsque la fonctionnelle (fonction objectif) peut présenter plusieurs minima locaux [127]–[137] . Il s'agit d'un algorithme initié avec un ensemble de solutions possibles du problème (individus), constituant une population. Les individus sont formés par des variables (chromosomes) qui sont les paramètres à ajuster dans le dispositif. L'idée est de prendre un ensemble de solutions plus ou moins bonnes et d'appliquer des transformations (opérations) sur ces solutions afin d'améliorer leur performance (fitness). Ces transformations consistent essentiellement à introduire des croisements et des mutations entre les individus choisis (sélectionnés) d'une façon aléatoire et suivant leur performance (élitisme). L'occurrence de ces transformations est caractérisée par des probabilités (pc et pm). Ainsi, en répétant ces opérations d'une itération (génération) à une autre, on espère aboutir au voisinage d'une ou plusieurs zones optimales.

Le principe de fonctionnement d'un algorithme génétique est simple et se décompose en :

1. Génération aléatoire d'une population. Celle-ci contient un ensemble de solutions possibles (individus)
2. Calcul d'une valeur d'adaptation pour chaque individu (fitness). Elle sera fonction directe de la proximité des différents individus avec l'objectif
3. Sélection des individus devant se reproduire en fonction de leurs parts respectives dans l'adaptation globale
4. Croisement des génomes des parents
5. Appliquer la mutation aux génomes ce qui permet de maintenir une diversité des solutions ;
6. Sur la base de la nouvelle population obtenue, on repart à partir du point 2.

⇒Arrêt au nombre prédéfini de générations qui assurent la convergence du processus.

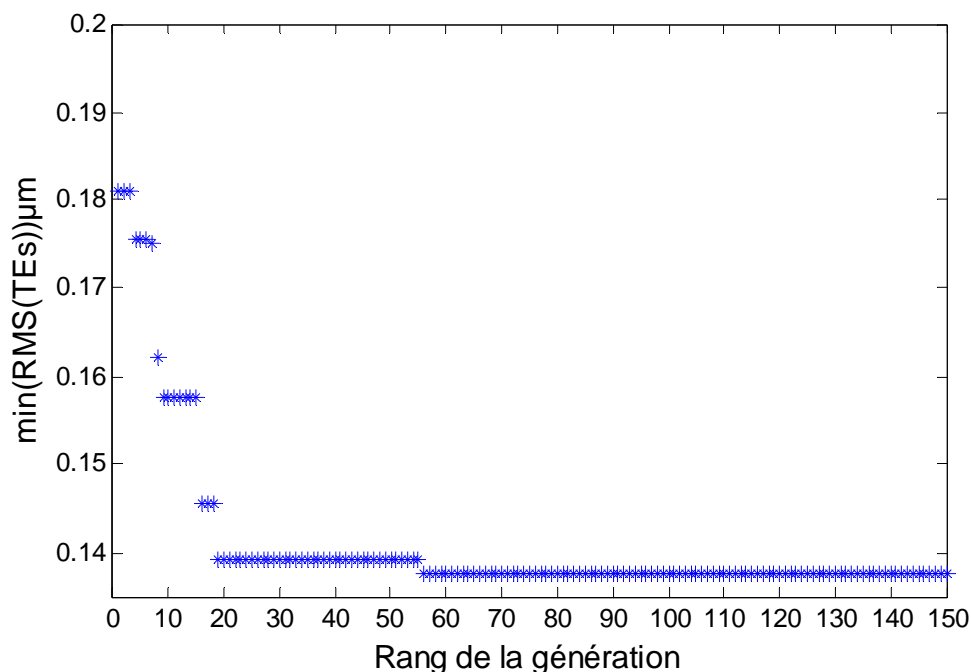
Pour de plus amples détails, on propose dans l'annexe C un descriptif détaillé de l'algorithme génétique utilisé. Il faut noter qu'une difficulté rencontrée avec ce type de méthode réside dans le choix des types de croisement et de mutation et dans l'ajustement de leurs probabilités.

#### *II.4.1.1. Validation de l'algorithme génétique*

Avant d'étendre l'étude, la validité de la méthode d'optimisation basée sur l'algorithme génétique est examinée pour différentes configurations d'engrenage et en présence d'un ensemble de paramètres de corrections de forme des dentures. La figure II-27 montre l'évolution, en fonction du nombre de générations de la moyenne (rouge) et de la valeur minimale obtenue de la fonction objectif (RMS(TEs)). On s'aperçoit que l'algorithme génétique converge bien vers une valeur minimale du RMS de l'erreur de transmission après un nombre modéré de générations ce qui se reflète directement sur le temps du calcul nécessaire.

Dans cette étude, les paramètres introduits à l'algorithme génétique lors de la procédure d'optimisation sont les suivants (voir Annexe C) :

- Taille de la population : 30
- Nombre de générations : 80
- Probabilité du croisement (pc) : 0.65
- Probabilité de mutation (pm) : 0.3
- Coefficient d'élitisme : 0.2

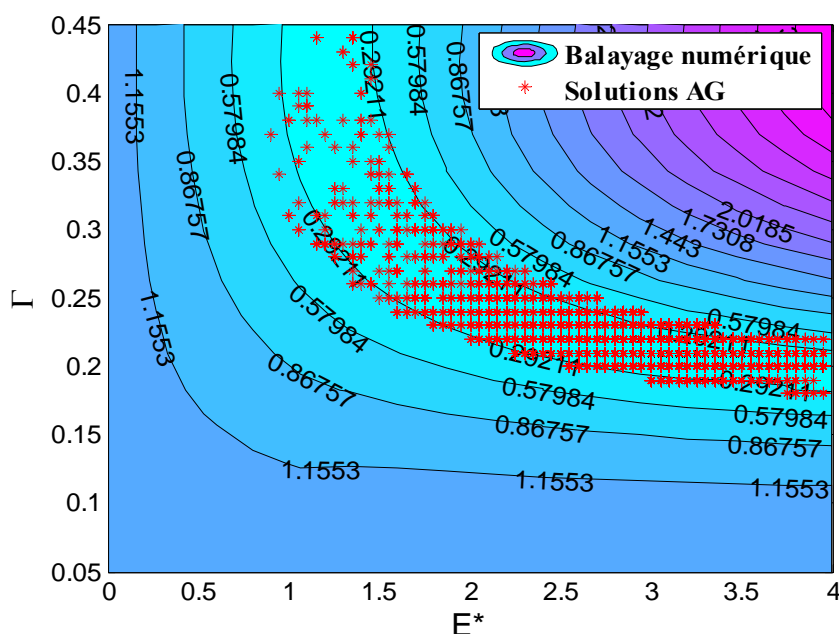


**Figure II-27 :** Evolution de la fonction objectif (RMS(TEs)) en fonction du rang des générations (Cas 1\_Tableau II-1)



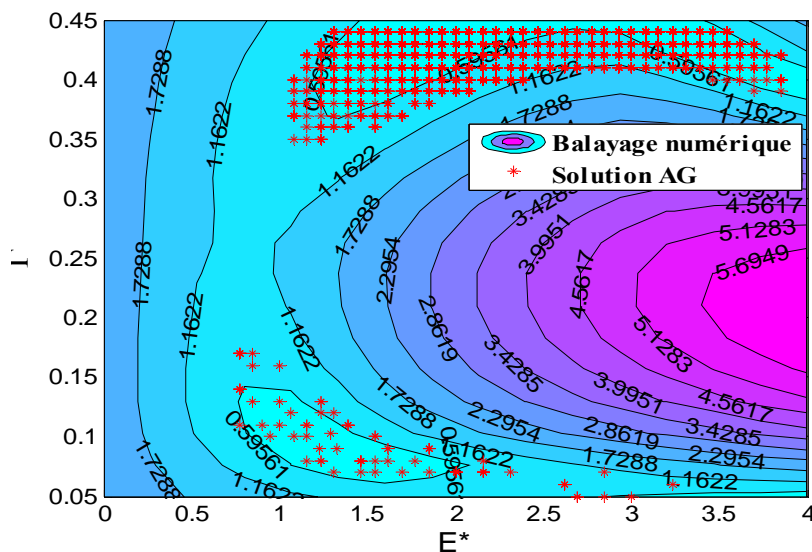
▪ **1<sup>er</sup> cas : 2 variables d'optimisation ( $E^*$ ,  $\Gamma$ )**

Les profils des dents sont modifiés en tête par une correction linéaire identique sur la roue et le pignon (correction symétrique). La Figure II-28 correspond au premier cas d'engrenage dans le Tableau II-1. Elle présente les courbes isovaleurs du RMS(TEs) en fonction de la profondeur adimensionnée  $E^*$  et la longueur adimensionnée  $\Gamma$ . Ces résultats sont superposés à ceux obtenus avec un balayage de l'espace de recherche. Les individus optimaux trouvés par l'algorithme génétique sont représentés par un ensemble (nuage) d'astérisque (\*). Ceux-ci semblent disposés sur une grille, cette effet est dû à l'arrondi des corrections : le micromètre pour la profondeur,  $10^{-3}$  pour la longueur de correction adimensionnée.



**Figure II-28 :** Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 1\_Tableau I-1)  
Validation de l'algorithme génétique (AG) \_ raideur linéique constante (ISO)

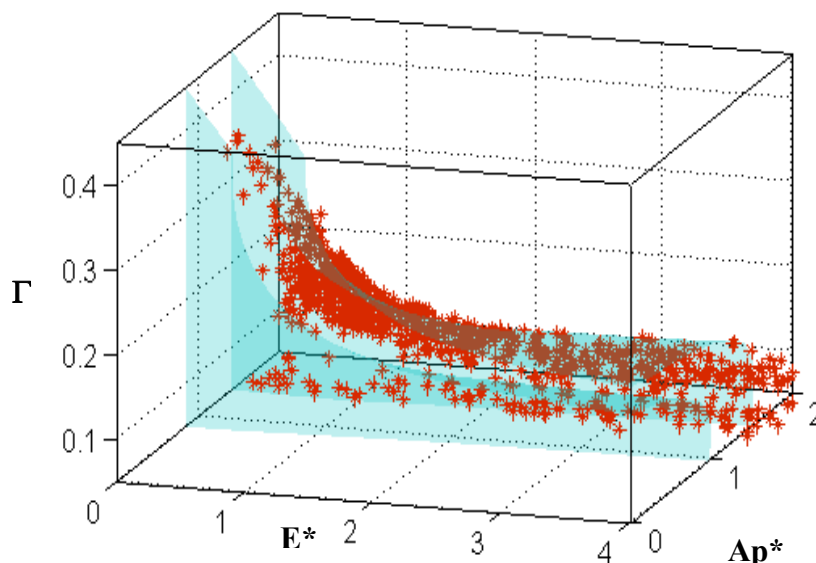
On constate que les astérisques (\*) sont bien localisés dans la zone optimale trouvée par le balayage numérique. Le cas d'un engrenage HCR (cas 3\_Tableau I-1) est également traité (voir Figure II-29). Les solutions obtenues par l'algorithme génétique sont correctement réparties dans les différentes zones optimales. Ceci montre nettement que cette méthode (AG) ne converge pas vers un optimal local mais assure plutôt une exploration « économique » de tout l'espace de recherche.



**Figure II-29 :** Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 3\_ Tableau II-1)  
Validation de l'algorithme génétique (AG) \_ raideur linéique constante (ISO)

▪ **2ème cas : 3 variables d'optimisation ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ,  $Ap^*$ )**

La validité de la méthode (AG) est aussi examinée en présence d'un bombé (correction longitudinale) paramétré par  $Ap^*$  et dont les résultats sont présentés dans la Figure II-30. Le nuage de points obtenu par l'AG se localise bien entre les deux surfaces trouvées par balayage et qui délimitent la zone optimale qui minimise le RMS(TEs). Ainsi, les résultats du balayage sont obtenus avec  $15^3 = 3375$  calculs du RMS(TEs) tandis ceux de l'algorithme génétique ont nécessités  $80 \times 30 = 2400$  calculs. Le gain relatif en temps de calcul avec 3 paramètres est de 28%. Ce gain augmente fortement avec le nombre de variables de l'étude.



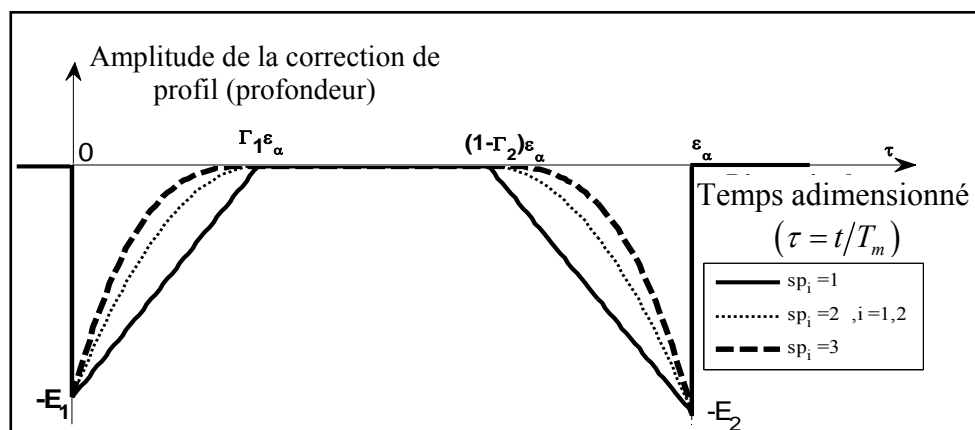
**Figure II-30 :** Courbes isovaleurs du RMS(TEs) en  $\mu\text{m}$  (Cas 1\_ Tableau II-1)  
Validation de l'algorithme génétique (AG) \_ raideur linéique constante (ISO)

Les résultats précédents illustrent clairement la capacité de l'algorithme génétique (AG) à répondre aux différents problèmes d'optimisation des engrenages vis à vis des corrections de forme de dentures.

### II.4.1.2. Formulation du problème avec plus de 3 variables

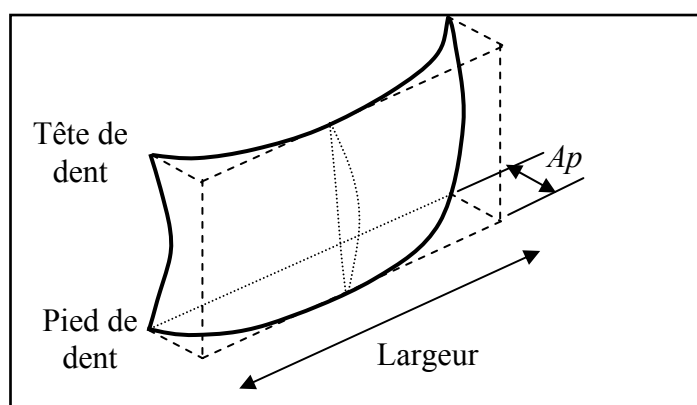
Une des principales modifications effectuées sur les dentures est la correction de profil qui génère une zone de correction constante le long de la largeur de dent. Ce type de correction assure essentiellement une progression uniforme de la mise en charge de la dent et participe à éviter le choc à l'engagement [35], [88]. Cette correction est fréquemment appliquée en tête uniquement afin d'éviter d'accroître les contraintes de flexion induites en pied de dent. Jusqu'à présent, la forme de cette correction était imposée (correction linéaire), nous nous proposons maintenant d'inclure la forme de la correction de profil dans l'ensemble des variables à optimiser. Comme précédemment, celle-ci est paramétrée (Figure II-31) par une profondeur  $E$ , une longueur de correction sur la ligne d'engrènement ( $\Gamma$ ) adimensionnée par rapport à la longueur du segment de conduite ( $T_1 T_2$ ). La forme de la correction est définie par une loi en puissance caractérisée par l'exposant  $sp$ . Ce dernier paramètre traduit la forme de la correction introduite, le cas  $sp = 1$  correspond à une correction linéaire et pour  $sp = 2$ , il s'agit d'une correction parabolique du profil. De plus, les paramètres de correction sont fréquemment pris symétriques, c'est à dire identiques entre pignon et roue. Dans cette section, on cherche à examiner ce choix de symétrie et à étudier l'influence de la forme de la correction de profil. Alors, on définit des variables de conception caractérisées par une profondeur  $E_i$ , une longueur adimensionnée  $\Gamma_i$  et une forme définie par l'exposant  $sp_i$ , avec  $i=1$  pour un paramètre associé au pignon et  $i = 2$  pour ceux correspondant à la roue (voir Figure II-31). L'équation (II.31) présente une formulation mathématique de l'écart  $e(M)$  induit par ces corrections de dentures :

$$e(M) \begin{cases} = -E_1 \left( \frac{-\tau}{\Gamma_1 \varepsilon_\alpha} + 1 \right)^{sp_1} & \text{pour } 0 \leq \tau \leq \Gamma_1 \varepsilon_\alpha \\ = -E_2 \left( \frac{\tau}{\Gamma_2 \varepsilon_\alpha} - \frac{1}{\Gamma_2} + 1 \right)^{sp_2} & \text{pour } (1 - \Gamma_2) \varepsilon_\alpha \leq \tau \leq \varepsilon_\alpha \\ = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$



**Figure II-31 :** Définition des paramètres de correction de profil différents entre roue et pignon

De plus, afin de rétablir des portées raisonnablement centrées sur la largeur des dentures qui peuvent être désalignées, un bombé longitudinal parabolique, est ajouté.



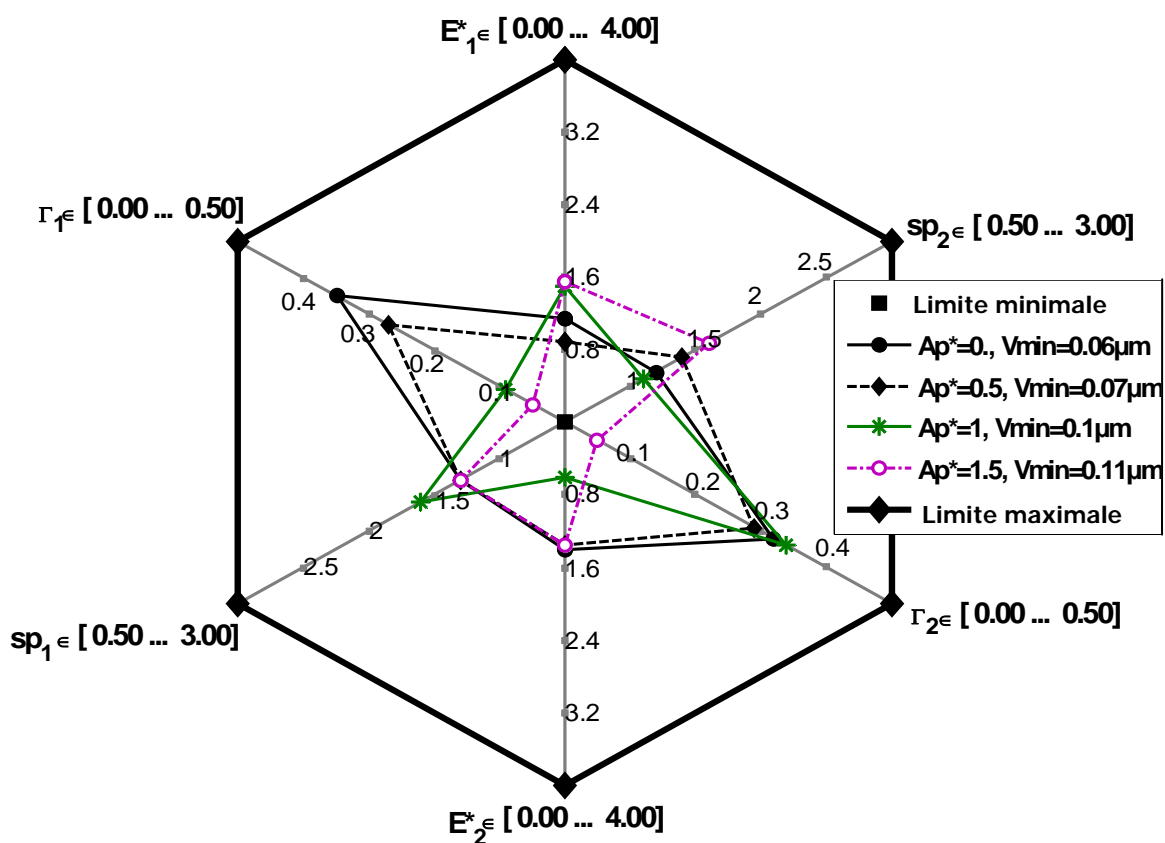
**Figure II-32 :** Bombé longitudinal ( $A_p$ )

On est donc en présence d'un problème d'optimisation avec sept variables de conception ce qui justifie le recours à un algorithme génétique comme méthode d'optimisation.

### II.4.1.3. Résultats numériques

Les engrenages considérés, hélicoïdal (cas 1) et droit (cas 2), sont décrits dans le Tableau II-1. Le modèle de Weber et Banaschek [26] est utilisé pour la détermination de la raideur de flexion et de fondation des dents des deux roues (pignon et roue) tandis que la formulation analytique de Lundberg [25] est employée pour calculer la raideur de contact. Ce modèle conduit à une modélisation plus réaliste de la raideur d'engrènement par unité de longueur de contact qui, dans ces conditions, devient dépendante de la position du point du contact dans les directions selon le profil et la largeur de denture. Pour un bombé donné, l'approche proposée cherche à définir les combinaisons optimales des paramètres de corrections de profil, qui aboutissent à minimiser le RMS de l'erreur de transmission quasi-statique. Afin

d'afficher les résultats multi variables obtenus sur une seule figure en deux dimensions, des digrammes de type "radar" ont été utilisés. Comme décrits dans la Figure II-33, chaque axe du diagramme correspond à un paramètre donné variant dans un intervalle prédéfini. Cette figure correspond aux résultats trouvés pour le cas d'engrenage hélicoïdal, tandis la Figure II-35 correspond à ceux trouvés pour le cas d'engrenage droit.



**Figure II-33 :** *Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé ( $Ap^*$ ) – (cas 1\_ Tableau II-1)*

Les Figure II-34 et Figure II-36 représentent les variations temporelles de l'erreur de transmission quasi-statique associées aux différentes combinaisons des corrections de dentures obtenues par l'approche d'optimisation proposée.

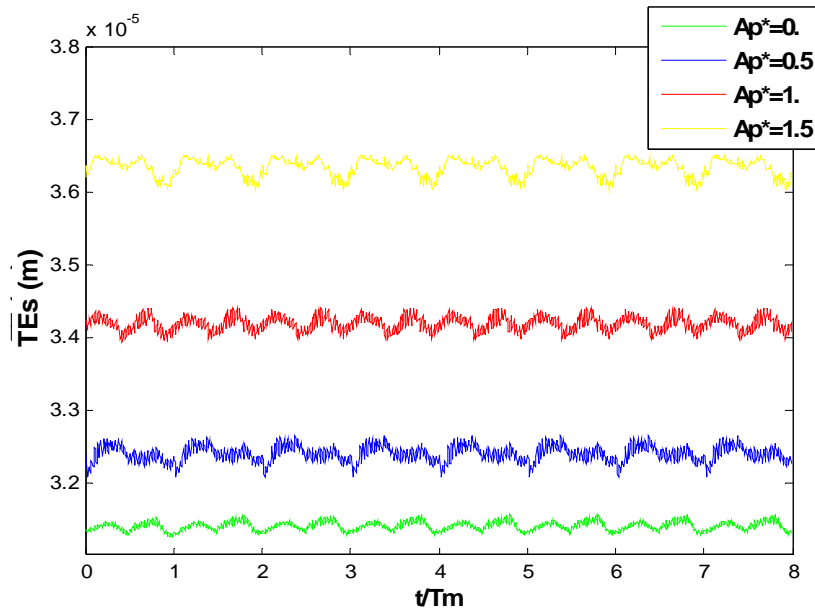


Figure II-34 : Evolution des erreurs de transmission quasi-statique correspondantes aux solutions présentées dans la FigureII-33

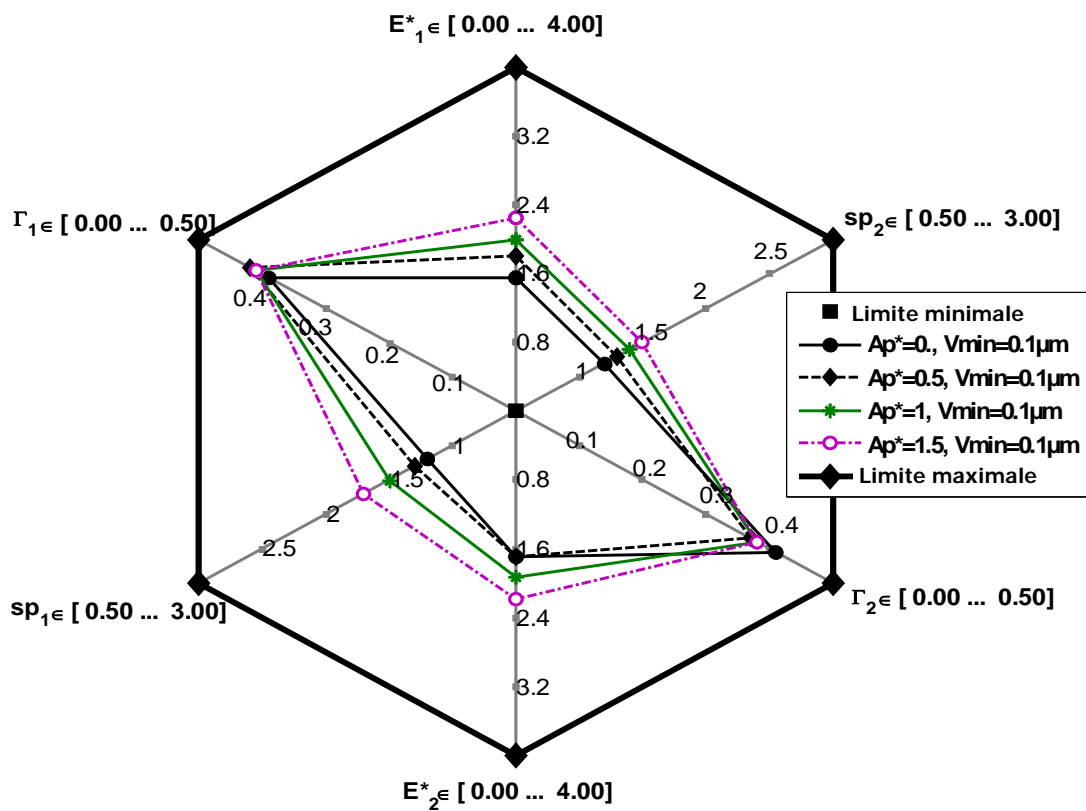
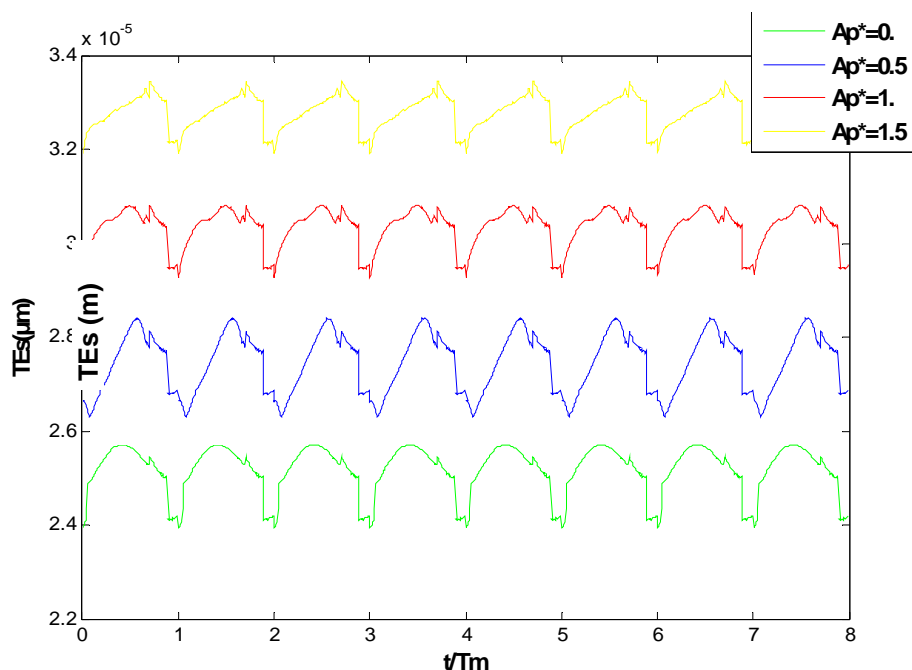


Figure II-35 : Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé ( $Ap^*$ ) – (cas 2\_Tableau II-1)



**Figure II-36 :** Evolution des erreurs de transmission quasi-statique correspondantes aux solutions présentées dans la Figure II-35

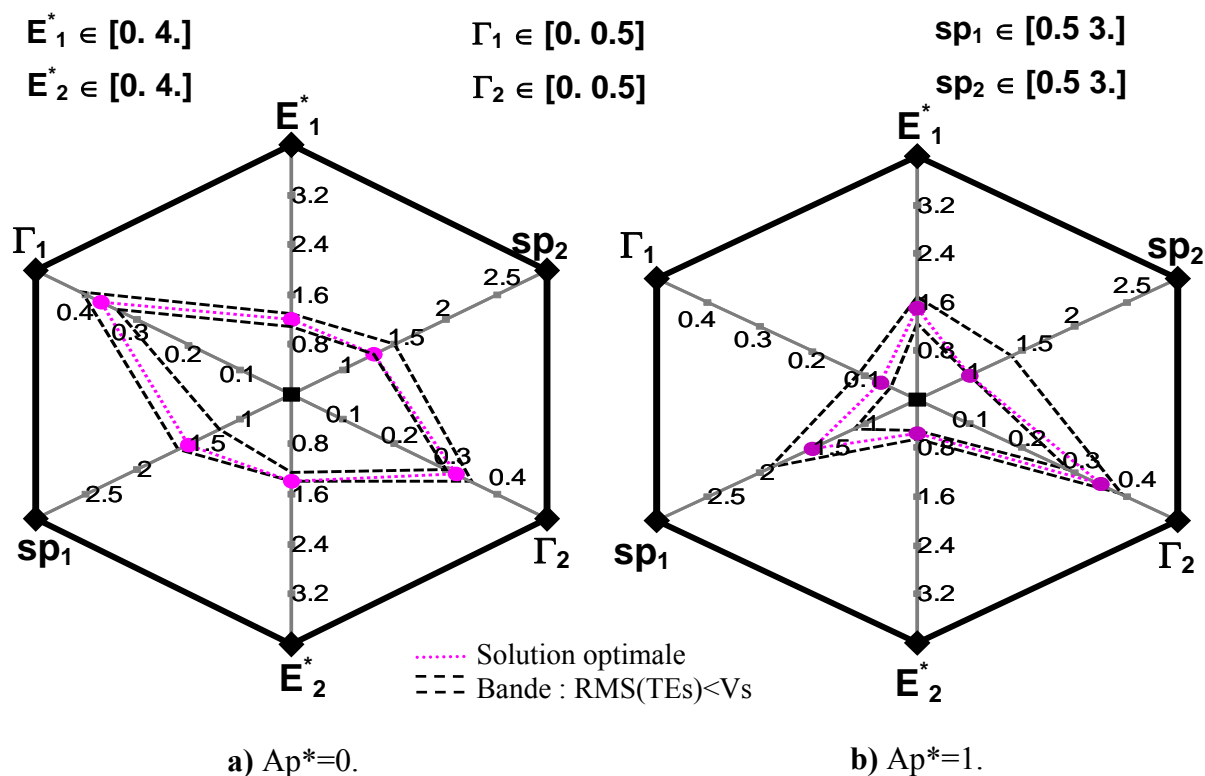
En examinant les différentes figures obtenues on constate que :

- Pour le cas de l'engrenage hélicoïdal la valeur minimale du RMS(TEs) croit légèrement avec la valeur du bombé introduit tandis que le bombé n'a quasiment aucune influence dans le cas de l'engrenage droit.
- Pour l'engrenage hélicoïdal, la valeur du bombé joue un rôle prépondérant dans la définition des paramètres de corrections de profil optimaux. Pour certaines valeurs du bombé, les corrections de profil deviennent presque inutiles dans la procédure d'optimisation. En effet, dans le cas traité, on s'aperçoit que pour une valeur du bombé  $Ap^*=1.5$ , les solutions optimales s'orientent vers des corrections très courtes ( $\Gamma < 0.05$ ).
- Pour les dents droites et hélicoïdales, les corrections de profil optimales correspondent à un coefficient de forme  $sp$  non entier, compris entre 1 et 2, et ce quelque soit l'amplitude du bombé.
- Les corrections de profil symétriques semblent généralement les plus intéressantes avec, toutefois, une exception pour un bombé d'amplitude  $Ap^*=1$ , pour lequel une correction de profil non symétrique conduit au minimum de fluctuation de l'erreur de transmission.

Il paraît également intéressant d'étudier la sensibilité de la localisation des solutions optimales. Pour ce faire, on a tracé les deux figures : Figure II-37 et Figure II-38 qui présentent l'étendue de la zone optimale pour une valeur donnée du bombé. Dans ces zones (ou bandes) les différentes combinaisons possibles des paramètres de correction de profil aboutissent à une valeur de RMS(TEs) inférieure à une valeur seuil  $V_s$ . Cette valeur seuil

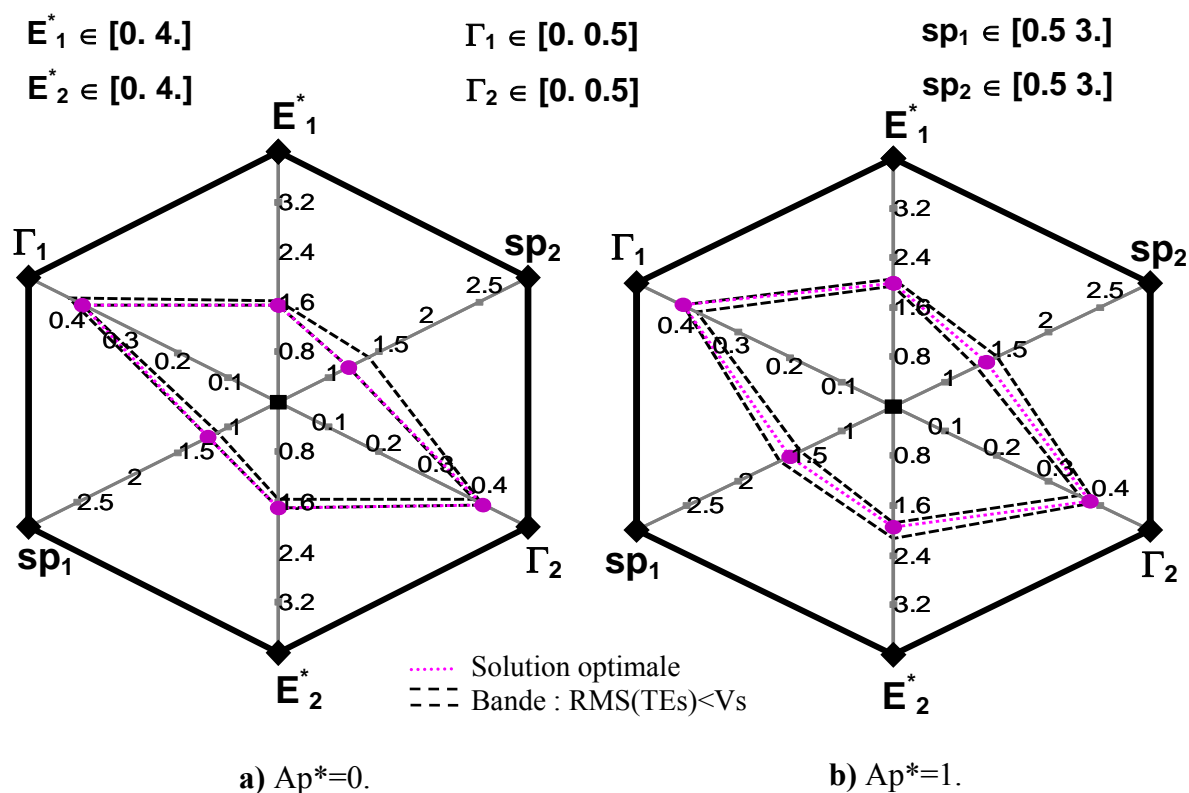
dépend essentiellement du bombé et elle correspond à 1.1 fois la valeur minimale ( $V_{min}$ ) obtenue lors de la procédure d'optimisation par l'algorithme génétique (marge de 10% de  $V_{min}$ ). Notons qu'il n'a pas été possible de fixer une valeur seuil commune, particulièrement pour le cas de l'engrenage hélicoïdal, car l'amplitude du bombé influe sur la valeur minimale obtenue pour le RMS(TEs).

En examinant ces figures, on constate que pour le cas de l'engrenage droit, la bande 'optimale' est plus réduite, ce qui traduit une plus forte sensibilité du RMS(TEs) par rapport aux paramètres de correction. D'autre part, pour le cas de l'engrenage hélicoïdal, la bande s'élargit suivant les axes définissant la forme ( $sp$ ), ce qui reflète alors une importance secondaire de la forme de correction dans la définition des solutions optimales. Néanmoins, pour les deux cas le paramètre de forme ( $sp$ ) associé à la zone optimale demeure compris entre 1 et 2.



**Figure II-37 :** *Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé ( $Ap^*$ ) – (cas 1\_Tableau II-1)*





**Figure II-38 :** *Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé ( $Ap^*$ ) – (cas 2\_Tableau II-1)*

## II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, en s'appuyant sur les modèles numériques développés au sein du laboratoire, l'influence des corrections de forme des dentures sur différents paramètres caractérisant la performance des engrenages est analysée. Ces corrections influent sur l'ensemble des critères étudiés. Cependant, les résultats montrent que l'erreur de transmission quasi-statique est le seul critère qui présente une (ou plusieurs) zone bien définie d'optimisation (pas de variations monotones). Ensuite, une approche analytique exprimant, les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est présentée. Cette approche fournit des relations exactes (2 paramètres) ou approchées (3 paramètres) originales caractérisant les paramètres optimaux de correction de dentures. Ces relations sont valables sous certaines hypothèses (raideur linéique constante) et pour des types restreints de correction. Pour étendre l'étude à un modèle d'engrènement plus réaliste et pour un nombre de variable de conception plus important, on utilise un algorithme génétique. Suite aux optimisations menées pour 2 configurations d'engrenages et pour différentes valeurs du bombé, nous montrons les points suivants :

- Les corrections optimales de profil sont pratiquement identiques sur les deux dentures. Ce résultat montre que de supposer des corrections de profil symétriques n'est pas pénalisant pour l'optimisation.
- Des corrections de profils avec des formes particulières (loi en puissance avec un exposant  $(sp)$  variant entre 1 et 2) semblent être les plus intéressantes.
- Enfin, les résultats obtenus montrent que l'engrenage droit nécessite plus d'attention pendant la réalisation des corrections puisqu'il est plus sensible à la localisation des solutions optimales.

Ce dernier point illustre la nécessaire prise en compte de la variabilité des paramètres et des conditions de fonctionnement lors de la conception d'un système mécanique. Cette approche robuste de la conception des corrections de forme fait l'objet du chapitre suivant.

# **Chapitre III : Optimisation des corrections de forme –Approches probabilistes**

- 1. Introduction**
- 2. Robustesse : formulation**
- 3. Estimation des paramètres statistiques**
- 4. Optimisation des corrections de profil**
- 5. Robustesse des corrections combinées**
- 6. Variabilité entre dents des paramètres de correction du profil**
- 7. Conclusion**

### III.1. Introduction

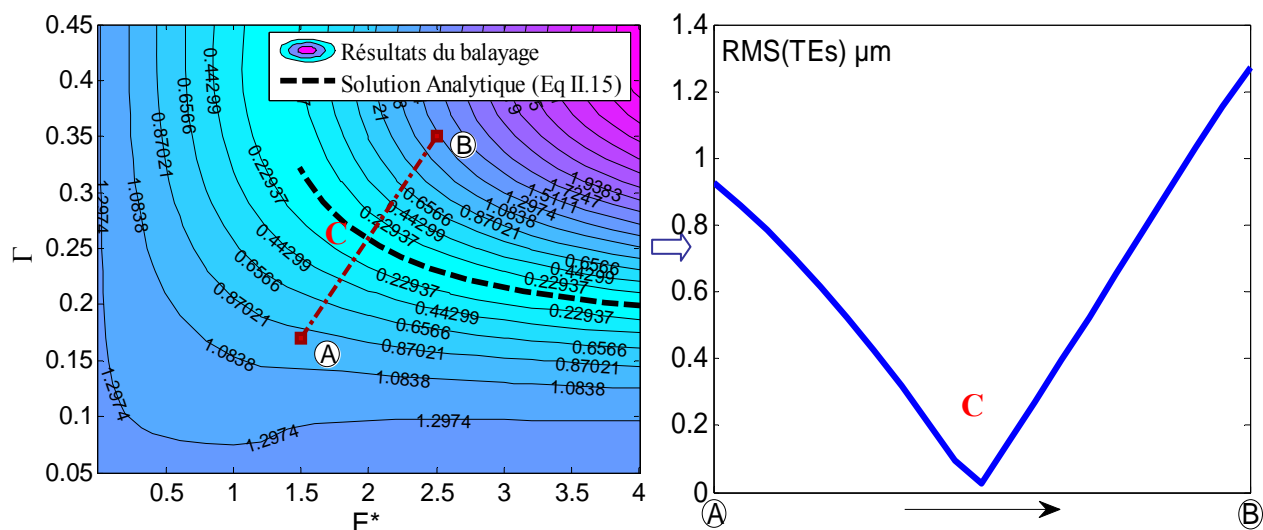
L'optimisation conventionnelle minimise la fonction de performance (objectif) prise aux valeurs nominales des paramètres de conception, tandis que la variabilité inévitable et en partie incontrôlable de ces grandeurs est négligée. En effet, plusieurs phénomènes sont susceptibles de produire des variations de paramètres : dispersions de fabrication et de montage, variations de l'environnement et du fonctionnement, vieillissement, etc. et peuvent provoquer des perturbations marquantes aux niveaux des performances du système. Pour tenir compte de ces effets, nous allons suivre la démarche de la conception robuste qui est le processus de conception qui optimise à la fois la valeur nominale attendue et les déviations de la fonction objectif.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'optimisation robuste des corrections de forme minimisant les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique (RMS(TEs)). Pour ce faire, une première partie vise à définir clairement la fonction objectif robuste. Cette fonction contient des paramètres statistiques qui sont, dans la seconde partie, estimés en utilisant des approches analytiques, numériques et combinées (analytique-numérique). Une étude détaillée de la robustesse des corrections de forme est ensuite présentée pour un engrenage droit et un engrenage hélicoïdal, en présence d'incertitudes géométriques et/ou fonctionnelles. Enfin, différentes études paramétriques sont menées pour caractériser au mieux les solutions robustes.

### III.2. Robustesse : formulation

Afin de montrer l'influence de la variabilité des paramètres micro géométriques de corrections de dentures sur les fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique, l'évolution du RMS(TEs) le long d'un segment AB dans le plan  $(E^*, \Gamma)$ , normal à la courbe analytique optimale [35], est représentée sur la Figure III-1.

On peut observer que le RMS(TEs) varie rapidement au voisinage de la correction optimale avec une dégradation notable de la performance dès que la correction s'éloigne de la solution optimale (point **C**). Bien que plusieurs techniques soient disponibles pour contrôler et réduire la variabilité des paramètres de conception, les déviations de la surface des flancs des dents sont inévitables en pratique. Il est alors important de prendre en compte ces variations dès la phase de conception : c'est le principe de la conception robuste. Cette approche permet de déterminer les variables de conception qui rendent le système capable de maintenir son niveau de performance malgré la variabilité des ses paramètres et de son environnement.



**Figure III-1 :** Variation du RMS(TEs) le long du segment AB

La méthodologie de conception robuste a été popularisée par les travaux de Taguchi (Taguchi, 1987) et Phadke (Phadke, 1989) dans les années 80 et 90, qui ont établi la conception robuste comme l'une des principales méthodes pour l'amélioration de la qualité et de la performance des produits. Taguchi [74] a proposé l'utilisation d'un ratio nommé « signal-bruit (S/B) » pour étudier la robustesse. En effet, le signal représente la moyenne de la performance recherchée (à maximiser) et le bruit désigne la dispersion de la réponse en fonction des facteurs incertains (à minimiser). Dans le cas où le but de la procédure d'optimisation est de minimiser la fonctionnelle, le ratio signal-bruit est exprimé par [74] :

$$S/B = 10 \log \frac{\mu_Y^2}{\sigma_Y^2} \quad (\text{III.1})$$

avec  $\mu_Y$  et  $\sigma_Y$  la valeur moyenne et l'écart type de la performance Y respectivement.

L'approche initiale de Taguchi cherche à maximiser ce ratio sans prendre en compte la valeur minimale absolue du problème [48]-[49] et [81] pouvant ainsi conduire à des solutions très éloignées de la solution optimale (« peak optimum »), comme l'ont montré Box et al. [82]. Pour pallier à ce problème, Taguchi [75] a intégré ultérieurement la valeur optimale au niveau de la valeur moyenne de la performance, en gardant la même expression du ratio signal-bruit. Sundaresan et al [47] ont utilisé la même approche basée sur les plans orthogonaux de Taguchi et ont proposé une fonction objectif qui prend la forme d'une somme pondérée entre la valeur de la performance au centre du plan et un indice de sensibilité :

$$F_{rob}(X) = \alpha L_c + (1 - \alpha) SI \quad (\text{III.2})$$

$$SI = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (L_i - L_c)^2} \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$\alpha$  : Facteur de pondération,  $0 \leq \alpha \leq 1$

m : Nombre total des points au plan orthogonal

$L_c$  : réponse au centre du plan

$L_i$  : réponse au point i du plan

Pour une performance linéaire,  $L_c$  et  $SI$  caractérisent les paramètres statistiques ; la valeur moyenne et l'écart type, respectivement. Ce qui n'est pas vrai en présence de non linéarité comme dans notre cas d'étude puisqu'il n'y a pas de relation linéaire entre le RMS(TEs) et les paramètres de corrections [80]. Pour ce faire, Yu et Ishii [78] ont proposé une autre forme de la fonction objectif, basée sur le concept de la pire éventualité « statistical worst case », présentée dans l'équation qui va être utilisée dans cette étude de robustesse.

$$F_{rob}(X) = \mu_Y + \beta * \sigma_Y \quad (III.4)$$

Avec :

$\mu_Y$  : Moyenne de la performance,

$\sigma_Y$  : Ecart type de la performance,

$\beta$  : coefficient de qualité,

$X$  : Vecteur regroupant les variables aléatoires.

Il faut noter que le coefficient de qualité est ajusté par le concepteur : une valeur de  $\beta$  faible permet de privilégier la performance et une valeur de  $\beta$  élevée met l'accent sur la robustesse. Pour notre étude, le coefficient de qualité est fixé à 2 puisque dans la plupart des cas, on a obtenu des valeurs d'écart type de RMS(TEs) qui sont de l'ordre de 1/10 de celles des valeurs moyennes. La fonction robuste à optimiser qui est utilisée dans la suite de ce chapitre est définie par :

$$F_{rob}(E, \Gamma, \dots) = \mu_{RMS(TEs)} + 2\sigma_{RMS(TEs)} \quad (III.5)$$

Les paramètres de correction étant des variables aléatoires indépendantes.

### III.3. Estimation des paramètres statistiques

L'optimisation robuste de la conception est basée, comme présenté dans l'équation(III.5), sur le calcul de la valeur moyenne  $\mu_Y$  et l'écart type  $\sigma_Y$  de la fonction objectif  $Y$ . Ces paramètres statistiques sont définis mathématiquement par les relations (III.6) et (III.7) :

$$\mu_Y = \int_{\Omega} Y(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) dx_i \quad (III.6)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\int_{\Omega} (Y(\mathbf{X}) - \mu_Y)^2 \prod_{i=1}^n p_i(x_i) dx_i} \quad (III.7)$$

Où  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  est un vecteur des variables aléatoires pris à l'intérieur du domaine de définition  $\Omega$  et  $p_i(x_i)$  est la densité de probabilité de la variable  $x_i$ .

Ainsi, selon la façon dont on peut calculer la performance  $Y$ , on distingue essentiellement deux approches d'estimation et de calcul de ces formes intégrales. La première approche est analytique, basée sur un développement de Taylor, tandis la deuxième fait intervenir des méthodes numériques (méthode de simulation de Monte Carlo, formules de quadrature de Gauss).

### III.3.1. Développement analytique

En se basant sur les travaux de Vexel et al. [35], on a développé dans le chapitre précédent une approche analytique qui permet d'estimer la variance temporelle ( $RMS^2$ ) de l'erreur de transmission. Sa validité a été montrée à travers plusieurs simulations. La performance considérée est la variance temporelle :

$$Y = RMS^2(TE_s) \quad (III.8)$$

La performance est une fonction de 2 variables aléatoires supposée indépendantes :  $E$  et  $\Gamma$ . On cherche à déterminer analytiquement l'expression des formes intégrales données dans les équations (III.6) et (III.7), à partir d'un développement de Taylor d'une fonction à plusieurs variables (voir Annexe C) en supposant que la fonction est dotée d'une régularité suffisante. L'équation (III.9) présente l'expression retenue pour l'estimation de la valeur moyenne de la performance  $\mu_Y$ , autour d'une valeur nominale  $\bar{x}(\bar{E}, \bar{\Gamma})$ , avec un développement de Taylor du second ordre (Méthode des moments ou méthode Delta [98]) :

$$\mu_Y \approx \left[ RMS(TE_s) \right]_{\bar{x}} + \frac{Var(E)}{2} \left[ \frac{\partial^2 RMS_\tau(TE_s)}{\partial E^2} \right]_{\bar{x}} + \frac{Var(\Gamma)}{2} \left[ \frac{\partial^2 RMS_\tau(TE_s)}{\partial \Gamma^2} \right]_{\bar{x}} \quad (III.9)$$

avec,

$$Y = RMS^2(TE_s) = \left( \frac{\delta_m^2}{2 \cos^2 \beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_{kE} \Omega_{kE} + (1 + \mu_{kE}) \Omega_k]^2 \right) \quad (\text{voir équation (II.18)})$$

De la même façon, il est possible d'exprimer la variance de la performance  $Y$  au second ordre par la relation (III.10):

$$\sigma_Y^2(\bar{E}, \bar{\Gamma}) = Var_{E, \Gamma}(Y(\bar{E}, \bar{\Gamma})) = Var^2(E) \left[ \frac{\partial Y}{\partial E}(\bar{E}, \bar{\Gamma}) \right]^2 + Var^2(\Gamma) \left[ \frac{\partial Y}{\partial \Gamma}(\bar{E}, \bar{\Gamma}) \right]^2 \quad (III.10)$$

$\sigma_Y$  est l'écart type géométrique (puisque'il dépend des variables géométriques) de la fonction objectif analytique (RMS temporelle de l'erreur de transmission quasi-statique). Ce paramètre

représente la variabilité de la performance en présence de variations aléatoires des paramètres géométrique ( $E, \Gamma$ ). Il reflète la robustesse de la fonction en un point donné.

Les relations analytiques (III.9) et (III.10) expriment les paramètres statistiques de la fonction robuste. Ces relations sont utilisées dans l'application présentée au paragraphe III.4.1.

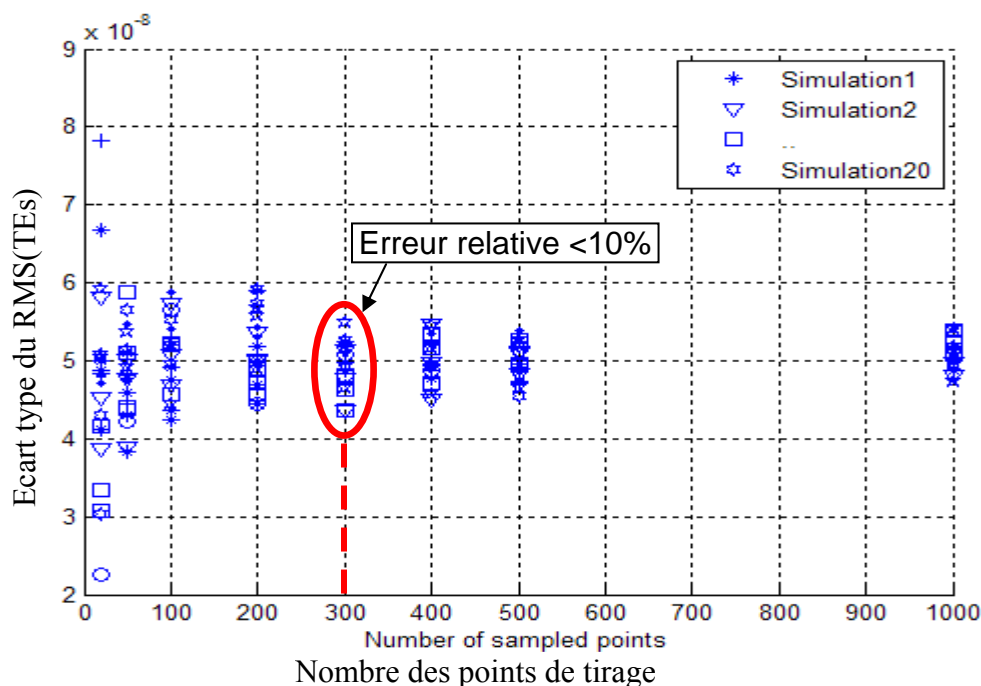
Notons, que la formulation analytique proposée du RMS(TEs) n'est valable que pour un modèle simplifié, où la raideur linéique d'engrènement est supposée constante. Pour étendre l'étude à des corrections plus complexes et à des modèles plus sophistiquées, on a eu recours à des méthodes numériques pour estimer les paramètres statistiques.

### III.3.2. Méthodes numériques

#### *III.3.2.1. Méthode des simulations de Monte Carlo*

Dans le but d'évaluer les paramètres statistiques définissant la fonction robuste (équation (III.5)) dans le cas d'utilisation de modèles plus complexes que celui de l'étude analytique, on a utilisé en premier lieu à la méthode de simulation de Monte Carlo (SMC) qui est une technique classique d'estimation des intégrales multi variables, comme celles dans les équations (III.6) et (III.7). Le principe consiste à générer aléatoirement des valeurs dans un intervalle spécifique à chacune des variables avec des fréquences proportionnelles à la densité de probabilité. Malgré sa simplicité, la méthode SMC a la capacité de faire face à un large éventail de problèmes quelque soit leur complexité. Cependant, dans la plupart des cas, la convergence ne peut être obtenue qu'en utilisant un grand nombre d'échantillons conduisant ainsi à d'importants temps de calcul. A titre d'exemple, la Figure III-2 montre l'évolution de la variation de  $\sigma_{\text{RMS(TEs)}}$  par rapport au nombre de points tirés pour 20 simulations différentes. Les points de tirage représentent des combinaisons de profondeur  $E$  et de la longueur adimensionnée  $\Gamma$  d'une correction de profil linéaire symétrique introduite pour le cas d'engrenage hélicoïdal tabulé en Tableau II-1. Ces points sont générés de façon aléatoire en considérant une distribution normale centrée sur la paire de valeurs ( $E=20 \mu\text{m}, \Gamma=0.25$ ). Il peut être observé qu'au moins 300 tirages ( $SP = 300$ ) sont nécessaires pour estimer l'écart type de RMS(TEs) avec une erreur relative inférieure à 10% assurant une bonne convergence de SMC.





**Figure III-2 :** Evaluation de la convergence de la méthode de simulations de Monte Carlo

### III.3.2.2. Méthode d'intégration numérique : Quadrature de Gauss

D'autres méthodes pour estimer la moyenne et l'écart type de la fonction de performance ont été introduites par Taguchi [75] et développées par D'Errico et Zaino [85] ainsi que par Duffy et al [83]. Ces auteurs proposent des techniques de discrétisation basées sur un plan factoriel complet, qui consiste à prendre en compte des combinaisons particulières des valeurs associées aux différentes variables de conception. En s'appuyant sur la méthode d'intégration numérique par quadrature de Gauss appliquée au calcul d'intégrales à variable simple, et en supposant que les variables sont indépendantes, Duffy et al. [83] ont proposé un système linéaire d'équation dont la résolution permet en premier lieu la détermination des points de calcul dits « points de Gauss » et en second lieu l'estimation des poids associés à chaque point. Ainsi, les formes intégrales théoriques des paramètres statistiques se transforment en des sommes pondérées de la forme :

$$\mu_Y \cong \sum_{k=1}^N \left( \prod_{\ell=1}^n w_{k\ell} \right) Y(\mathbf{X}_k) \quad (\text{III.11})$$

$$\sigma_Y^2 \cong \sum_{k=1}^N \left( \prod_{\ell=1}^n w_{k\ell} \right) (Y(\mathbf{X}_k) - \mu_Y)^2 \quad (\text{III.12})$$

avec

$w_{k\ell}$ , le poids associé à la  $k^{\text{ème}}$  combinaison des variables aléatoires ( $\mathbf{X}_k$ )

$\ell$ , indice de la variable de conception

$n$ , nombre des variables de conception

$N = H^n$ , nombre total des points tel que  $H$  est le nombre d'échantillons discrétisés, utilisés pour modéliser la distribution de probabilité (nombre identique pour toutes les variables). Usuellement  $H$  est compris entre 3 et 5.

Il est à remarquer que le choix des points et des poids ne dépend que de la probabilité conjointe du paramètre de conception. Dans ce contexte, pour des distributions normales, la formule de quadrature de Gauss-Hermite est employée [86] alors que pour des distributions uniformes, ce sera la formule de quadratures Gauss-Legendre avec changement de variable [86]. Duffy et al. [83] ont proposé une procédure plus générale pour des distributions autres (Bêta par exemple). De plus amples détails sur la détermination des points de Gauss et des coefficients de pondération associés à chaque variable sont donnés dans l'Annexe D.

Le nombre d'échantillons requis pour représenter de façon adéquate une distribution par la méthode des points discrétisés (ou méthode de Quadrature de Gauss QG) est moindre que celui demandé par la méthode de Monte Carlo MCS tant que le nombre de variables n'est pas trop grand. Ceci conduit à une réduction conséquente du temps de calcul nécessaire pour évaluer les intégrales multi variables. La pertinence de cette méthode est illustrée sur la Figure III-3 en comparant les performances des simulations Monte Carlo (MCS) et la méthode de quadrature de Gauss (QG). La valeur moyenne et l'écart type du RMS(TEs) ont été calculés en utilisant une variété de valeurs nominales pour des paramètres de correction de profil linéaire symétriques en tête de dent (profondeur adimensionnée  $E^*$  et longueur adimensionnée  $\Gamma$ ) réparties sur tout l'espace du domaine de recherche (voir Tableau III-1). Un nombre de 300 échantillons (SP) a été utilisé dans les SMC, alors qu'avec la méthode **QG**, les densités de probabilité des deux variables de conception ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) ont été discrétisées en 4 points seulement, ce qui conduit à un nombre total de points égal à 16 ( $4^2$ ). Nous constatons que les deux méthodes conduisent à des résultats très proches avec une réduction considérable du coût de calcul lors de l'utilisation de la méthode QG.

**Tableau III-1 : Points de validation de la méthode Gauss quadrature QG**

Point (Pti)	Pt1	Pt2	Pt3	Pt4	Pt5	Pt6
( $E^*, \Gamma$ )	(0.25,0.1)	(0.25,0.4)	(1.2,0.1)	(1.2,0.4)	(3,0.1)	(3,0.4)

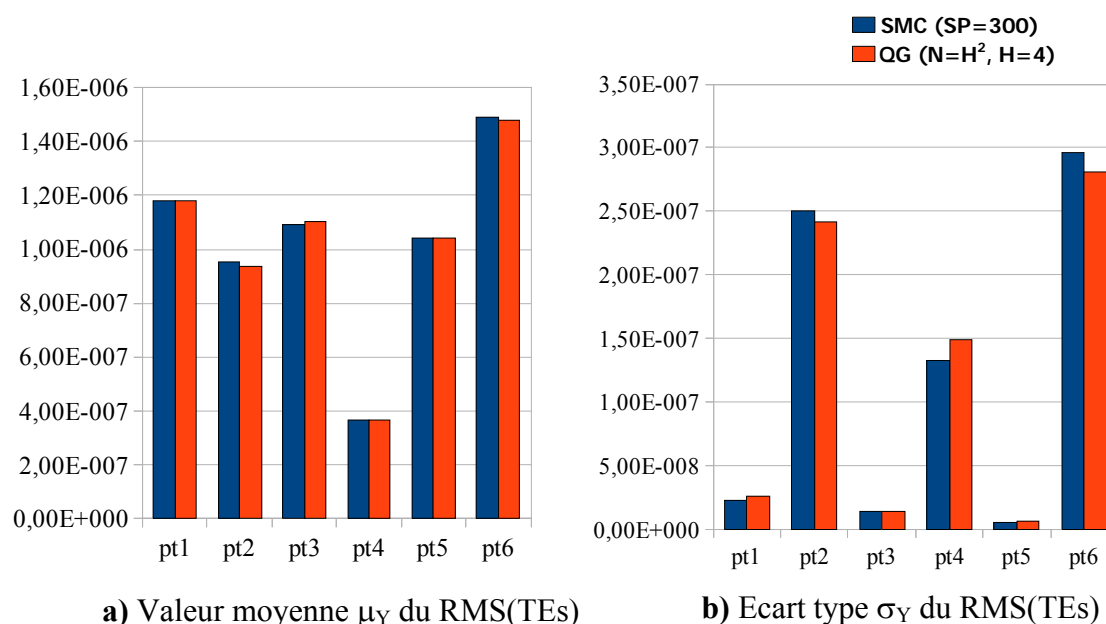


Figure III-3 : Comparaison entre les méthodes SMC et QG

### III.4. Optimisation des corrections de profil

#### III.4.1. Approche semi-analytique /Modèle de raideur simplifié

Dans ce paragraphe, les résultats des développements analytiques proposés dans la section III.3.1 sont utilisés pour estimer rapidement la valeur de la fonction robuste  $F_{rob}$ . Les relations (III.9) et (III.10) font intervenir les caractéristiques statistiques (variances) des variables d'entrée ( $E$ ,  $\Gamma$ ) et des termes de dérivation de la fonction de performance (RMS (TEs)) par rapport aux 2 paramètres de correction. Le développement des dérivées partielles pose problème pour 2 raisons :

- Les séries de Fourier supportent mal la dérivation ;
- Dans la zone où les paramètres de corrections de profils induisent une réduction de longueur de contact caractérisée par  $\lambda$  (voir Equation (II.10)), la dérivation est rendue délicate par l'absence d'une équation unique explicite de cette réduction en fonction des paramètres géométriques de correction de profil ( $E$ ,  $\Gamma$ ).

Pour pallier à ces difficultés, une méthode semi-analytique a été mise en place. Il s'agit de reprendre la formulation analytique proposée dans les équations (III.9) et (III.10) et d'évaluer numériquement les dérivées partielles en utilisant par exemple, le module gradient du logiciel Matlab ®.

Cette approche semi-analytique est confrontée avec l'approche numérique, dans laquelle on a utilisé la méthode de quadrature de Gauss (QG), imbriquée avec le modèle numérique initial,

afin d'évaluer la fonction objectif robuste ( $F_{rob}$ , équation). La configuration 1, du Tableau II-1 est traitée avec la prise en compte d'une raideur linéique d'engrènement constante. Une distribution normale, centrée sur les valeurs moyennes, caractérise la variabilité de chaque paramètre de correction ( $E$ ,  $\Gamma$ ). Des intervalles de tolérance ( $IT-E=5\mu\text{m}$ ) et ( $IT-\Gamma=5\%T_1'T_2'$ ) associés respectivement aux paramètres  $E$  et  $\Gamma$ , sont considérés (voir Figure III-8). Les figures, Figure III-4 et Figure III-5, présentent respectivement les résultats de l'espérance  $\mu_{RMS(TEs)}$  (voir Equation(III.9)) et de l'écart type  $\sigma_{RMS(TEs)}$  (voir Equation(III.10)), issus des deux approches ; numérique (QG) et semi-analytique.

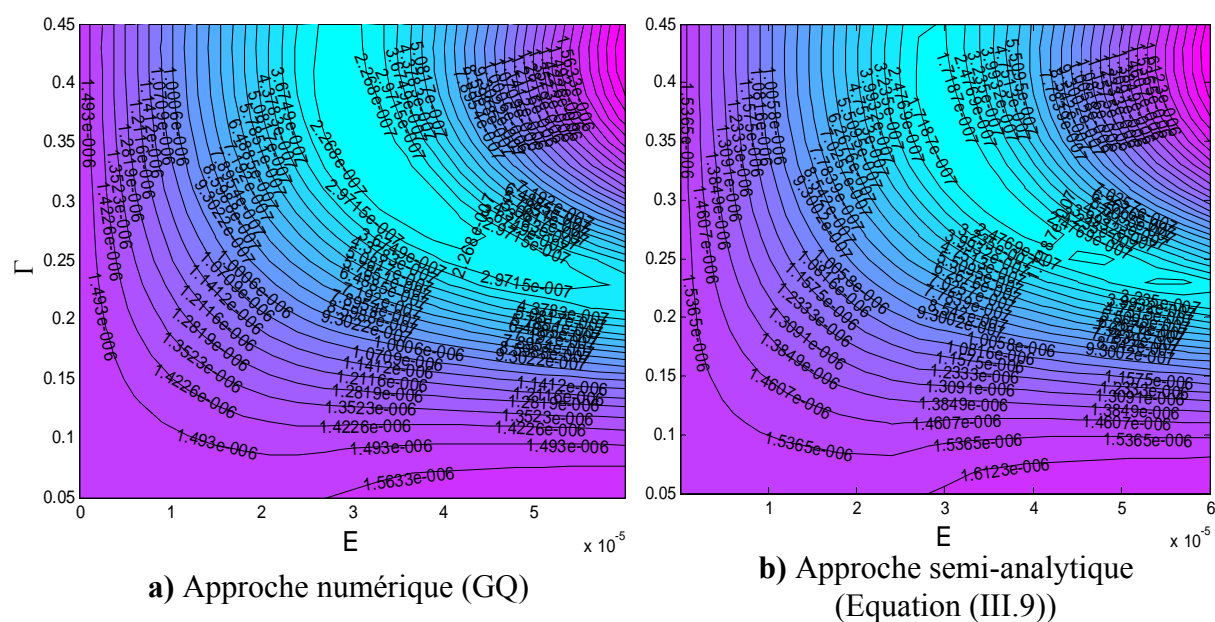


Figure III-4 : Estimation de la valeur moyenne  $\mu$

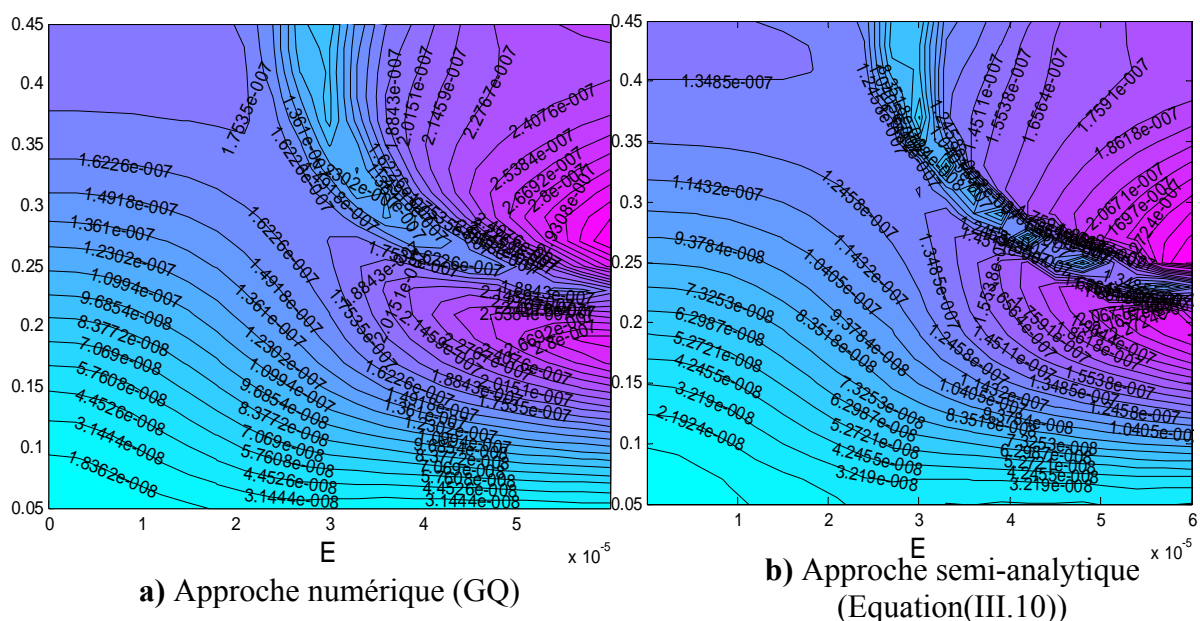
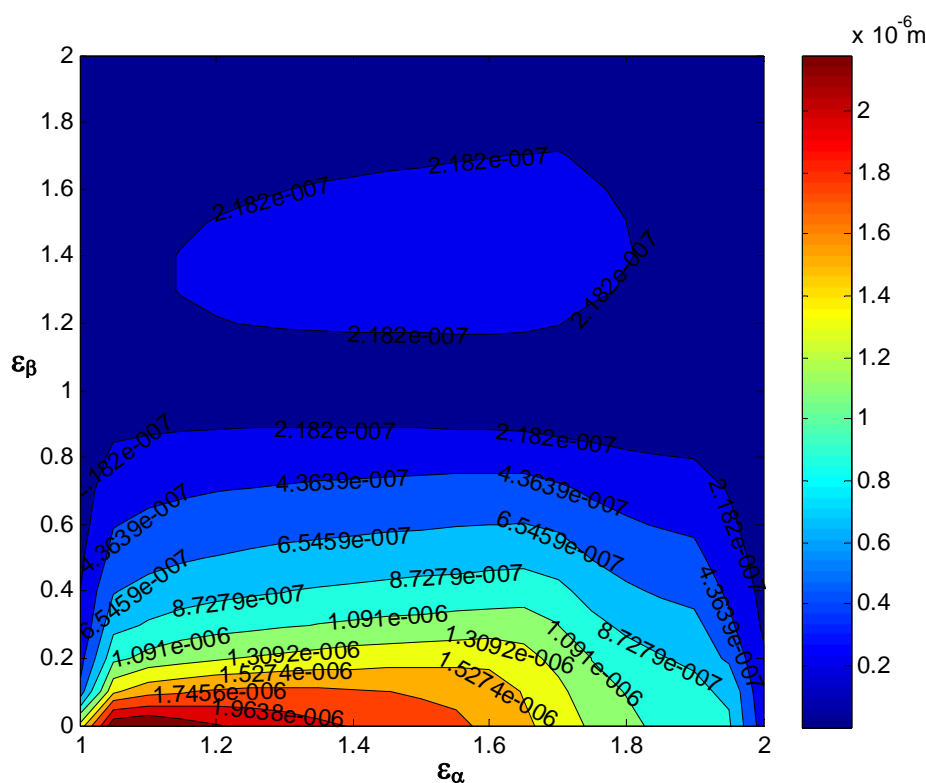


Figure III-5 : Estimation de l'écart type  $\sigma$

En examinant les deux figures, Figure III-4 et Figure III-5, il est possible de constater qu'avec les deux approches, on obtient les mêmes amplitudes et les même variations des deux termes statistiques ( $\mu_{\text{RMS}(TE_s)$ ,  $\sigma_{\text{RMS}(TE_s)}$ ) caractérisant la robustesse. On peut donc en déduire que l'estimation semi-analytique à partir du développement de Taylor, donne des résultats en bonne concordance avec ceux obtenus par la méthode de quadrature de Gauss imbriquée au modèle numérique. Il faut signaler que l'approche semi-analytique conduit à un gain considérable en temps de calcul (une dizaine de secondes par rapport à 4 heures) ce qui permet de conduire des études paramétriques poussées. Ceci est confirmé à travers la Figure III-6 qui présente l'évolution de la valeur minimale (min) de  $F_{rob}$  (en fonction des paramètres géométriques généraux  $\varepsilon_\alpha$  et  $\varepsilon_\beta$ ). Cette figure est obtenue à partir de la formulation semi-analytique, pour une raideur linéique constante et en appliquant un chargement égal à 850 Nm. On constate ainsi, que les engrenages droits ( $\varepsilon_\beta=0$ ) sont plus sensibles aux variations géométriques des paramètres de corrections. De même une valeur entière du rapport de recouvrement ( $\varepsilon_\beta$ ) tend à donner des géométries plus robustes.



**Figure III-6 :** Courbes isovaleurs de  $\min(F_{rob})$ ,  $C_m=850$  Nm, Distribution normale, IT-E:Qp7, IT-F:2.5%

L'approche semi-analytique, présentée ci-dessus, a été élaborée pour un modèle d'engrènement simplifié avec raideur linéique d'engrènement constante. Une étude d'optimisation plus pertinente doit tenir compte d'un modèle plus réaliste (modèle Weber-Banashek) pour la raideur d'engrènement.

### III.4.2. Optimisation numérique

Dans le but de définir les modifications de profil robustes et optimisées pour les fluctuations d'erreurs de transmission (RMS(TEs)), des simulations massives par balayage de tout l'espace de recherche (ici, la profondeur et l'étendue des modifications de la correction de profil) peuvent être effectuées. Cependant, ces méthodes énumératives demandent des temps de calcul prohibitifs. Pour palier à ce problème, une approche alternative plus rapide est proposée pour les engrenages LCR (Low Contact Ratio :  $\varepsilon_\alpha < 2$ ). Cette démarche repose sur la combinaison des résultats analytiques et numériques pour réduire le domaine de recherche. En effet, il a été démontré par Vexlex et al [35] que les solutions fournies par le modèle analytique (équation(II.21)), sont relativement proches des résultats obtenus par les modèles numériques les plus élaborés. On supposera, dans ce qui suit, que, pour un modèle plus sophistiqué, la zone robuste (minimisant  $F_{rob}$ ) pour les paramètres de correction de profil, se situe également au voisinage de la solution analytique. La démarche de recherche de la zone robuste se compose alors de trois étapes (Figure III-7) :

- a) D'après les résultats (Equation (II.19)) du modèle analytique (la raideur par unité de longueur de contact est supposée constante), une famille de solutions initiales pour des corrections optimales de profil est définie. L'ensemble de ces solutions représente une courbe dans le plan ( $E^*-\Gamma$ ) dénommée «courbe initiale».
- b) Un modèle plus raffiné du comportement de l'engrenage est ensuite considéré avec une modélisation plus réaliste de la raideur d'engrènement (Weber et Banaschek [23], Lundberg [24]). Une nouvelle courbe optimale est alors recherchée en utilisant la méthode du gradient selon E, initiée à l'aide des résultats précédents. Ainsi, on obtient comme l'illustre la Figure III-7, une courbe de référence actualisée et plus précise appelée « courbe maîtresse».
- c) Enfin, la fonction robuste (Equation (III.5)) est estimée en utilisant la méthode de Quadrature de Gauss (Equations (III.11) et (III.12)) et en balayant une plage réduite de paramètres de modification de profil centrées sur la courbe maîtresse. En agissant ainsi, le coût de calcul est considérablement réduit puisque seule une partie limitée de l'espace de conception est explorée. Le balayage de tout un domaine est conservé afin de pouvoir délimiter une zone robuste et pas seulement un point dans l'espace des paramètres. Il est à noter que les contraintes à respecter sur la pression de contact maximale et les contraintes aux pieds des dents sont incluses dans le processus d'optimisation.

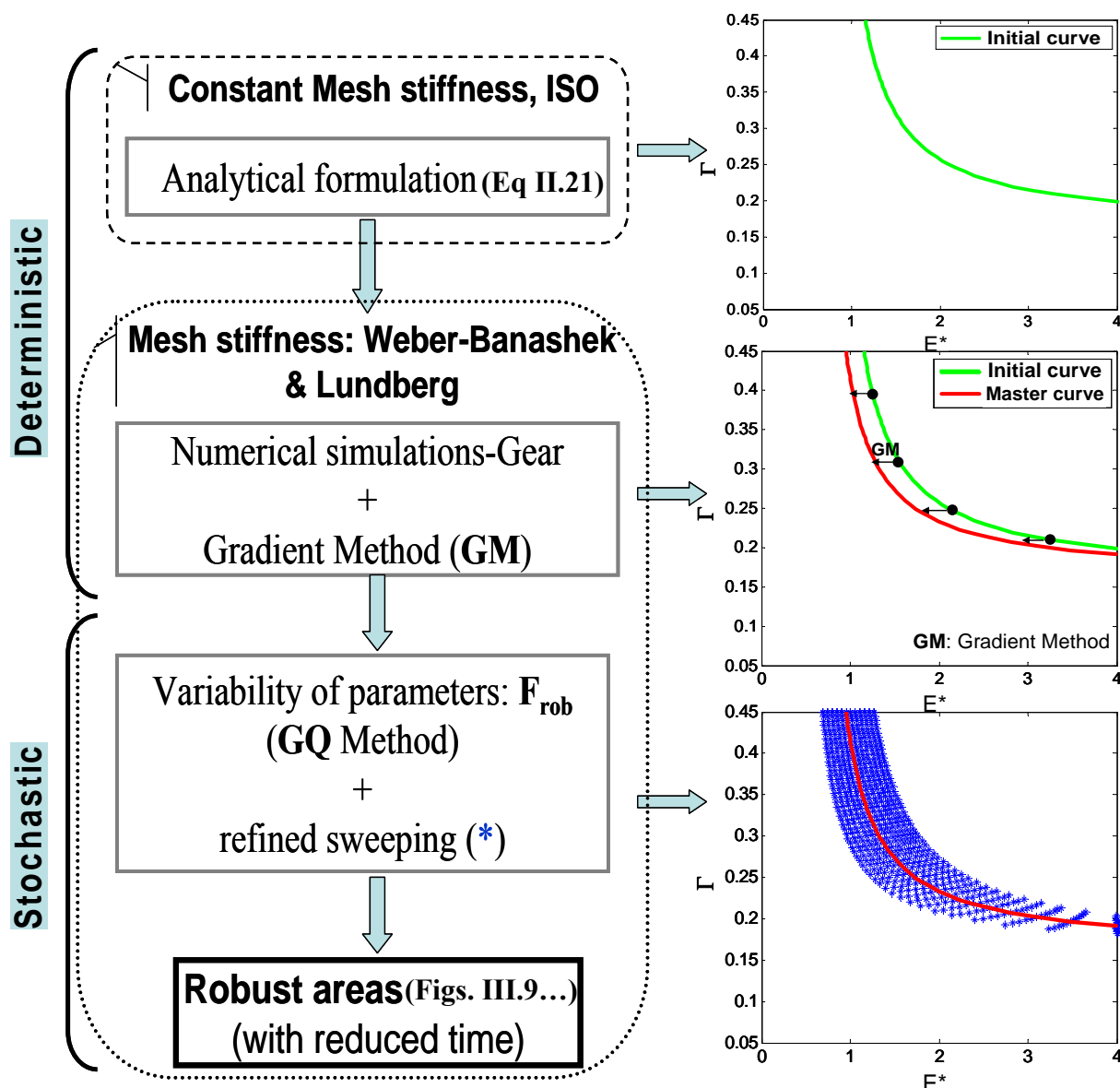


Figure III-7 : Procédure de résolution - Approche combinée (analytique et numérique)

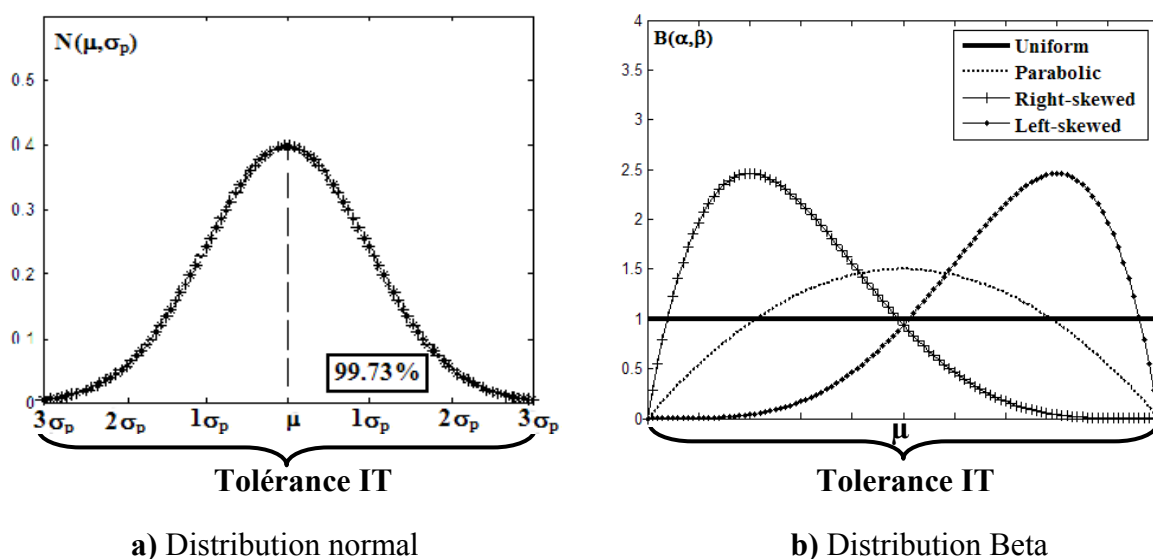
### III.4.2.1. Influence de la loi de probabilité

Les informations sur la distribution de probabilité dans l'intervalle de tolérance sont rarement disponibles. Les distributions normales (gaussiennes) sont souvent utilisées mais il semble intéressant d'analyser l'influence d'autres lois de probabilité sur la localisation des paramètres robustes de correction de profil. La Figure III-8(a) représente une distribution normale centrée sur une valeur nominale donnée avec un écart type communément lié à l'intervalle de tolérance tel que  $IT = 6\sigma_p$  ( $\sigma_p$  représente la dispersion du processus de fabrication). Des distributions alternatives peuvent être modélisées en utilisant des distributions Bêta  $B(\alpha, \beta)$  qui permettent, de simuler une grande variété de possibilités en modifiant les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  comme illustré dans la Figure III-8(b). A partir d'une même

base, il est en effet possible de générer des distributions asymétriques ainsi qu'une distribution uniforme (en choisissant  $B(1,1)$ ). Avec cette distribution, les notions de valeur nominale et d'intervalle de tolérance restent applicables. Dans ce qui suit, chaque composante du vecteur des variables aléatoires de conception (comprenant la profondeur  $E$  et longueur  $\Gamma$  de correction) sera caractérisée par une valeur nominale et un intervalle de tolérance  $IT$  qui, en théorie, peut être déduit à partir de la classe de qualité de l'engrenage (norme ISO 1328 [69]). Toutefois, cette norme [69] ne fournit pas d'éléments pour quantifier la tolérance sur la longueur de correction selon le profil et les valeurs suivantes, considérées comme réalistes, de l'intervalle de tolérance associé à  $\Gamma$  ( $IT-\Gamma$ ) ont été choisies : 1,25%, 2,5% et 5% de la ligne de conduite. Par contre, les intervalles de tolérance pour la profondeur de la modification ( $IT-E$ ) sont définis et illustrés dans le Tableau III-2 pour trois niveaux de qualité différents.

**Tableau III-2 : Intervalles de tolérance du profil pour différentes classes de qualité [69]**

	Qp6	Qp7	Qp8
TI-E ( $\mu\text{m}$ )	10	15	21

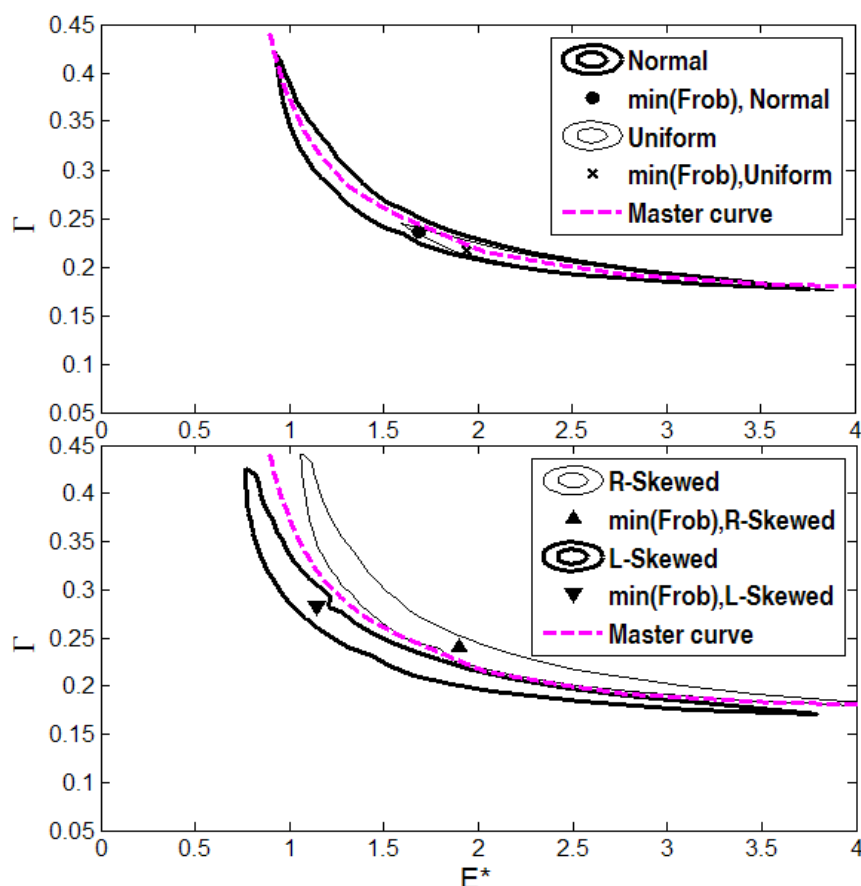



**Figure III-8 : Formes probables de variabilité**

L'engrenage hélicoïdal (cas1\_Tableau II-1) est analysé pour un couple moteur constant de 850 Nm et en supposant que i) les têtes des dents du pignon et de la roue sont modifiées par une correction de profil symétrique linéaire (paramètres adimensionnés  $E^*$  et  $\Gamma$ ), et ii) la même forme de distribution de probabilité s'applique pour chaque variable de conception. Les résultats fournis par la procédure décrite ci-dessus sont synthétisés dans la Figure III-9. Cette figure montre la zone robuste optimale obtenue en utilisant différentes distributions de probabilité pour une classe de qualité de 7 et un intervalle de tolérance de la longueur de correction adimensionnée  $IT-\Gamma$  égal à 2,5% du segment de conduite. La zone



optimale correspond à l'intérieur de la courbe fermée, pour laquelle la robustesse peut être considéré comme acceptable (un seuil arbitraire  $V_s = 0,3 \mu\text{m}$  a été retenu dans ces exemples). Il faut signaler que des tendances similaires ont été constatées pour les deux modèles de rigidité d'engrènement (raideur linéique constante ou modèle plus élaboré (Weber Banachek et Lundberg)), même si les zones de modification robustes sont légèrement décalées.



**Figure III-9 :**  Zones des corrections robustes de profil,  $F_{rob} < 0.3 \mu\text{m}$   
 $C_m = 850 \text{ Nm}$ ,  $IT-E: Qp7$ ,  $IT-F: 2.5\%$

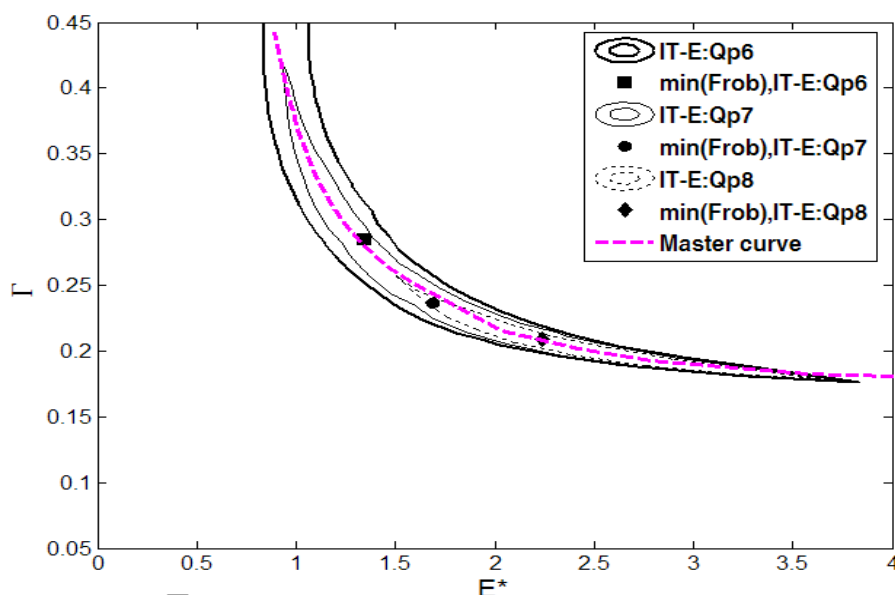
Ainsi, la forme de la distribution de probabilité apparaît comme influente et les observations suivantes peuvent être formulées :


- a) Comme prévu, une distribution uniforme est plus sévère dans le sens où elle conduit à des zones de corrections robustes plus restreintes correspondant, pour la plupart, à une correction de profil dite « courte » ( $\Gamma < 0.25$ ).
- b) Les distributions de probabilité symétriques conduisent à des zones robustes centrées sur la courbe maîtresse obtenue par une méthode déterministe. Cette courbe représente alors une bonne approximation de la zone robuste, dont la taille est commandée uniquement par la forme de la distribution symétrique et le niveau d'optimisation (valeur seuil de  $F_{rob}$ ).

- c) Les distributions asymétriques déplacent la zone robuste, de part et d'autre, de celle correspondant à des distributions symétriques (normales et uniformes). Dans ces conditions, des corrections de profil longues ( $\Gamma > 0.25$ ) associées à de faibles profondeurs semblent plus intéressantes pour la distribution asymétrique.

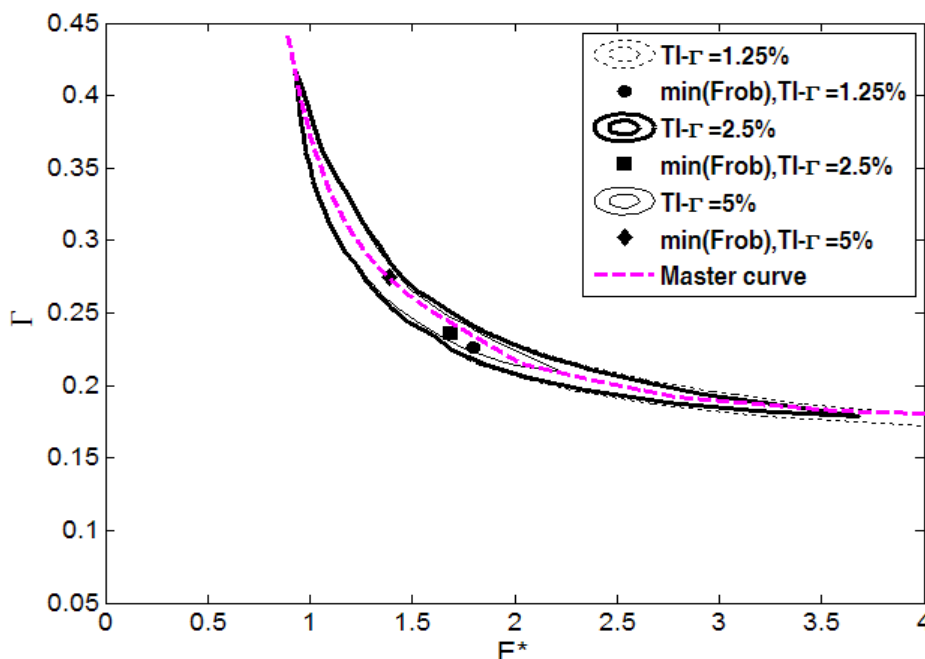
### III.4.2.2. Influence de l'étendu de l'intervalle de tolérance


L'influence de la classe de qualité est analysée en prenant l'hypothèse d'une distribution gaussienne pour les deux paramètres de conception ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ). Les tolérances sur la modification des profondeurs  $IT - E$  sont données dans le Tableau III-2 et celles relatives à  $IT - \Gamma$  varient entre 1,25 et 5%. La Figure III-10 illustre l'influence de la tolérance sur  $E$  tout en gardant  $IT - \Gamma$  constant.



**Figure III-10 :**  Zones des corrections « robustes » de profil,  $F_{rob} < 0.3 \mu m$   
Distribution normale,  $C_m = 850 Nm$ ,  $IT - \Gamma : 2.5\%$

Nous observons qu'une qualité moins élevée (c'est-à-dire un intervalle de tolérance plus grand) tend à déplacer les modifications robustes vers le domaine des corrections courtes alors que des géométries plus précises peuvent accepter des corrections plus longues. Cependant, des modifications de profil longues sont à manier avec précaution car elles correspondent à un domaine de fonctionnement au voisinage des conditions d'interférence à l'engagement.



**Figure III-11 :**  Zones des corrections « robustes » de profil,  $F_{rob} < 0.3 \mu m$   
Distribution normale,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ ,  $IT-E: Qp7$

Dans la Figure III-11, on considère un niveau de qualité constant pour  $E^*$  tout en faisant varier la tolérance sur la longueur de modification ( $\Gamma$ ). On constate que les solutions robustes s'orientent vers des corrections de profil moins profondes lorsque l'intervalle de tolérance de la longueur corrigée augmente.

Quelque soit la classe de qualité de réalisation des dentures, la zone robuste demeure centrée sur la courbe maîtresse. L'augmentation de l'intervalle de tolérance de chacun des paramètres de correction de profil conduit à des déplacements opposés de cette zone. Il n'est donc pas possible de prédire a priori, pour une dégradation de la qualité de réalisation des corrections, quelle correction sera plus robuste.

#### III.4.2.3. Influence de la variation du chargement

Dans un certain nombre d'applications industrielles, la définition des modifications optimales des dentures doit prendre en compte un domaine plus ou moins étendu de conditions de fonctionnement. Ceci implique généralement que le couple transmis est variable et que le rapport entre la profondeur de correction et la déflexion statique moyenne ( $E^\bullet$  et  $E^*$ ) évolue.

Cette contrainte supplémentaire est aisément prise en compte dans la démarche présentée ci-dessus. La méthodologie est étendue en considérant le couple moteur comme une variable aléatoire supplémentaire mais ne faisant pas partie des paramètres à optimiser. En désignant par  $C_{m_{\min}}$  et  $C_{m_{\max}}$ , respectivement, les limites inférieure et supérieure de variation du couple

moteur  $Cm$ , la fonction robuste initiale (Equation (III.5)) est redéfinie en utilisant les paramètres statistiques modifiés suivants :

$$\mu_Y = \int_{Cm_{\min}}^{Cm_{\max}} \int_{\Omega} Y(\mathbf{X}, Cm) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) p(Cm) dx_i dCm \quad (\text{III.13})$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\int_{Cm_{\min}}^{Cm_{\max}} \int_{\Omega} (Y(\mathbf{X}, Cm) - \mu_Y)^2 \prod_{i=1}^n p_i(x_i) p(Cm) dx_i dCm} \quad (\text{III.14})$$

avec

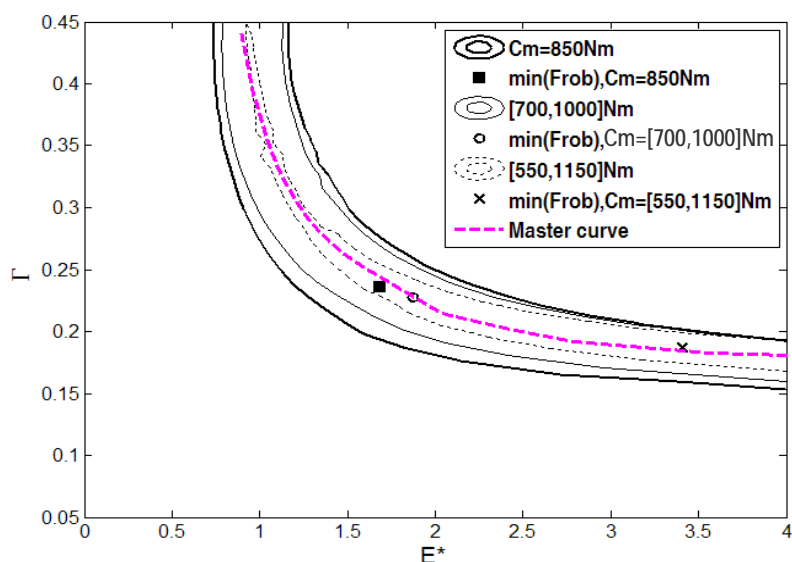
$$Y = RMS(TEs)$$


$\mathbf{X}$  : Vecteur regroupant les variables aléatoires définissant les paramètres de correction et dont on cherche à optimiser les valeurs moyennes.

On cherche alors à définir la localisation des solutions optimales robustes vis à vis des variations géométriques et des variations du chargement. Ces solutions sont définies par les valeurs moyennes des paramètres de correction de profil ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ).

Pour l'étude de cas suivante, deux distributions uniformes sont considérées pour le couple moteur ( $Cm$ ) ; l'une variant de 700 Nm à 1000 Nm et l'autre de 550 Nm et 1150 Nm, la loi uniforme de la distribution du chargement traduisant une probabilité égale d'occurrence dans la plage de variation. On notera que ces deux distributions uniformes sont centrées autour du même chargement nominal de référence de 850 Nm. Les dispersions des paramètres de correction de profil ( $E$ ,  $\Gamma$ ) sont, quant à elles, représentées par l'intermédiaire de distributions gaussiennes.

Les corrections robustes correspondantes sont présentées dans la Figure III-12 dans laquelle les profondeurs de modifications ont été normalisées par rapport à la déflexion statique moyenne de référence obtenue pour un couple moteur égal à 850 Nm avec une géométrie non corrigée. Les résultats indiquent qu'il est possible d'optimiser la correction de profil pour une plage de variation de la charge et qu'une augmentation de l'étendue de la plage de variation en chargement conduit à des corrections de profil robustes courtes ( $\Gamma < 0.25$ ).



**Figure III-12 :**  Zones des corrections « robustes » de profil,  $Frob < 0.3\mu\text{m}$   
Distribution normale, IT-E: Qp7, IT-F: 2.5%

#### III.4.2.4. Synthèse

La procédure d'optimisation présentée cherche spécifiquement à définir les modifications de profil robustes au regard des fluctuations de l'erreur de transmission dans les engrenages. L'originalité de la méthode repose sur le couplage entre les résultats donnés par une approche analytique et une analyse numérique ciblée. Les relations analytiques s'appuient sur un modèle de rigidité d'engrènement simplifié et sont utilisées comme solutions initiales d'une méthode de descente du gradient appliquée à des modèles plus généraux d'engrenages. A ce stade, une «courbe maîtresse» est définie qui représente l'ensemble des profondeurs et des longueurs de correction de profil minimisant les fluctuations d'erreur de transmission, sans tenir compte de la variabilité des paramètres. Dans une troisième phase, les calculs systématiques de la fonction robuste sont réalisés sur une plage limitée de paramètres de conception, au voisinage de la courbe maîtresse. Au lieu d'utiliser la méthode classique de Simulation de Monte-Carlo (SMC) pour estimer les caractéristiques statistiques figurant dans la fonction robuste, une méthode rapide de quadrature de Gauss (QG) utilisant un nombre réduit de points de discrétisation, a été retenue. L'intérêt de la méthodologie est illustré par un certain nombre de résultats sur la robustesse des modifications de profil (supposées ici être linéaires et symétriques), montrant l'influence de la distribution de probabilité et des intervalles de tolérance ou des classes de qualité des engrenages. Enfin, une étude de robustesse en présence d'une variation de chargement est menée.

Pour l'engrenage à dentures hélicoïdales, les résultats obtenus peuvent être synthétisés de la façon suivante :

- Si les distributions de probabilité des variables aléatoires sont symétriques, alors la zone des paramètres de conception conduisant à une performance optimale et robustes, est centrée sur la courbe maîtresse,
- Les valeurs minimales de la fonctionnelle ‘robuste’ sont peu sensibles au choix des lois de probabilité,

Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas d'engrenage droit, mais, pour des raisons de concision, seuls les résultats relatifs aux engrenages hélicoïdaux ont été présentés. D'un point de vue pratique, il semble que des corrections de profil profondes et courtes sont les plus efficaces pour les engrenages de faible qualité et/ou fonctionnant sur de larges gammes de chargement.

### III.5. Robustesse des corrections combinées

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude de robustesse des corrections de dentures en introduisant un bombé longitudinal (amplitude :  $A_p$ ) combiné avec les paramètres de correction de profil ( $E$ ,  $\Gamma$ ).

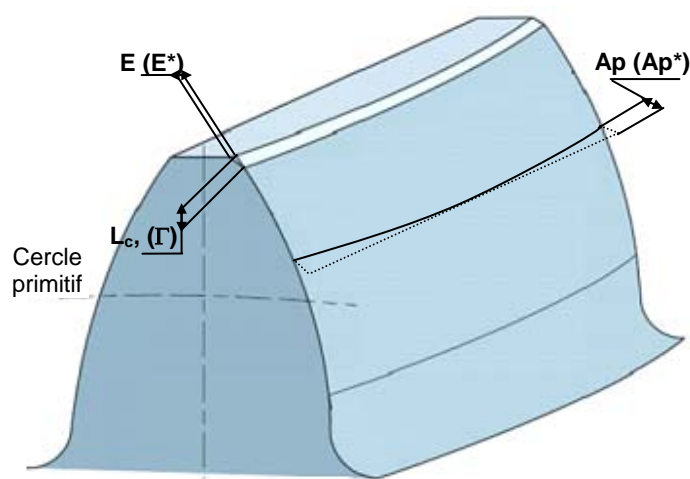
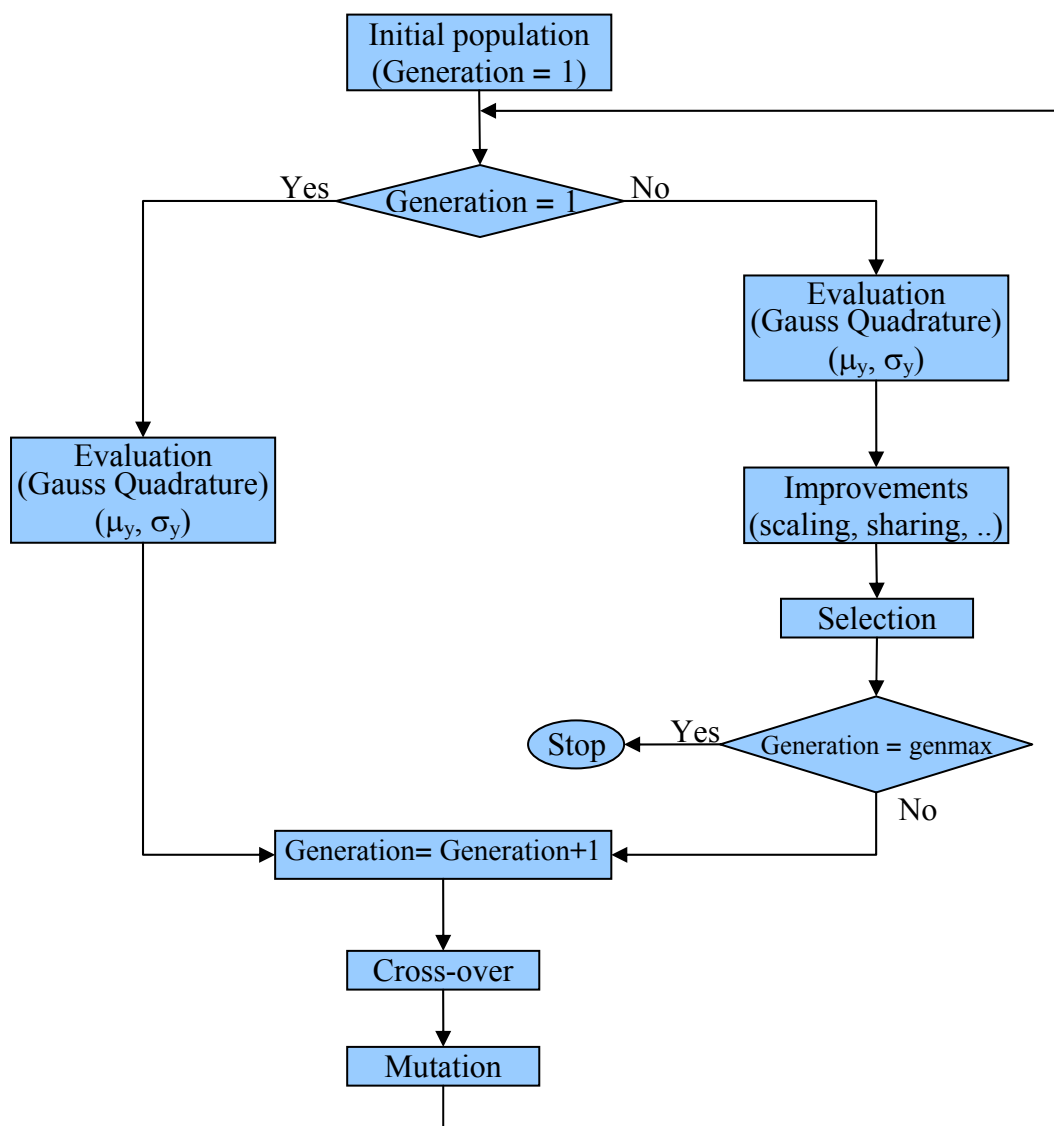


Figure III-13 : Présentation des paramètres de correction de denture (à optimiser)

#### III.5.1.1. Méthode

L'augmentation du nombre de paramètres de conception nécessite le recours à une méthode employant un algorithme génétique, particulièrement adaptée pour les problèmes d'optimisation à plusieurs variables. Un algorithme génétique combiné avec une méthode de quadrature de Gauss (QG) a été retenu afin d'évaluer la fonction objectif robuste (l'équation est conservée) en utilisant seulement quatre points pour l'intégration ( $H = 4$ ). Le modèle numérique du comportement de l'engrenage avec les raideurs de Lundberg [25] et Weber-Banaschek [26], est utilisé pour estimer la fonction de performance initiale RMS(TEs).

Le diagramme de la Figure III-14 schématise la procédure de résolution proposée.



**Figure III-14 :** Digramme de résolution – Algorithme génétique+QG

A l'issue de la procédure d'optimisation, l'algorithme génétique (AG) fournit un ensemble d'individus (solutions) répartis sous forme d'un nuage de point dans l'espace de recherche. Afin de mieux visualiser la localisation de ces solutions, on substitue à ce nuage une surface délimitée par un contour fermé estimée par la méthode des moindres carrés (voir le schéma descriptif de la Figure III-15).

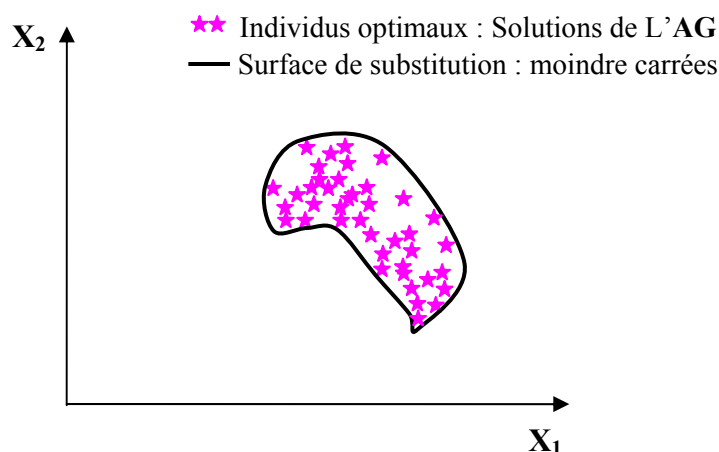


Figure III-15 : Principe de traçage des zones robustes

### III.5.1.2. Influence de la classe de qualité

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'influence de la classe de qualité des paramètres de corrections de dentures (en présence de bombé longitudinal) sur la localisation des solutions robustes. Pour cela, un bombé parabolique d'amplitude adimensionnée  $Ap^*$  est superposé à une correction linéaire de profil symétrique caractérisée par une profondeur adimensionnée  $E^*$  et une longueur adimensionnée  $\Gamma$  pour les deux premières géométries d'engrenage définies dans le Tableau II-1. Le vecteur de variables (aléatoires) de conception comprend donc  $E^*$ ,  $\Gamma$  et  $Ap^*$  qui sont supposées être indépendantes.

De plus, à chacune des variables est attribuée une valeur nominale et une distribution normale dans un intervalle de tolérance  $IT-X$  ( $X=E^*$ ,  $\Gamma$  et  $Ap^*$ ). Pour une classe de qualité donnée, les intervalles  $IT-E^*$  et  $IT-Ap^*$  ont été définis sur la base de la norme NF-ISO 1328 [69], au contraire de  $IT-\Gamma$  qui n'est pas défini dans la norme et est exprimés ici en tant que pourcentage de la longueur du segment de conduite (Tableau III-3).

Tableau III-3 : Paramètres proposés pour la classe de qualité

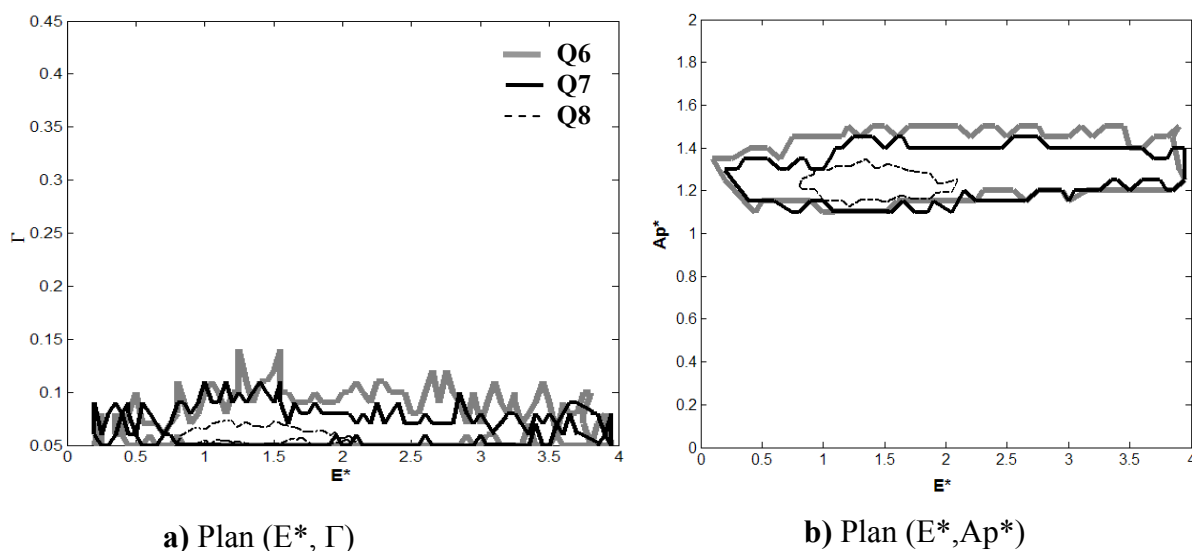
Quality class	IT-E ( $\mu\text{m}$ )	IT- $\Gamma$ (% $T_1T_2'$ )	IT- $Ap$ ( $\mu\text{m}$ )
Q6	10	1.25 %	0.425
Q7	15	2.5 %	0.6
Q8	21	5 %	0.85

Les limites des zones pour lesquelles la fonction robuste ( $F_{\text{rob}}$ ) est inférieure à un seuil  $V_s$  donné, sont tracées dans les deux figures, Figure III-16 et Figure III-17, pour les 3 niveaux de qualité définis dans le Tableau III-3 (en deux plans de projection différents pour plus de clarté). En examinant ces figures, on s'aperçoit que l'emplacement des zones robustes est presque le même pour tous les niveaux de qualité testés et que leur étendue augmente en



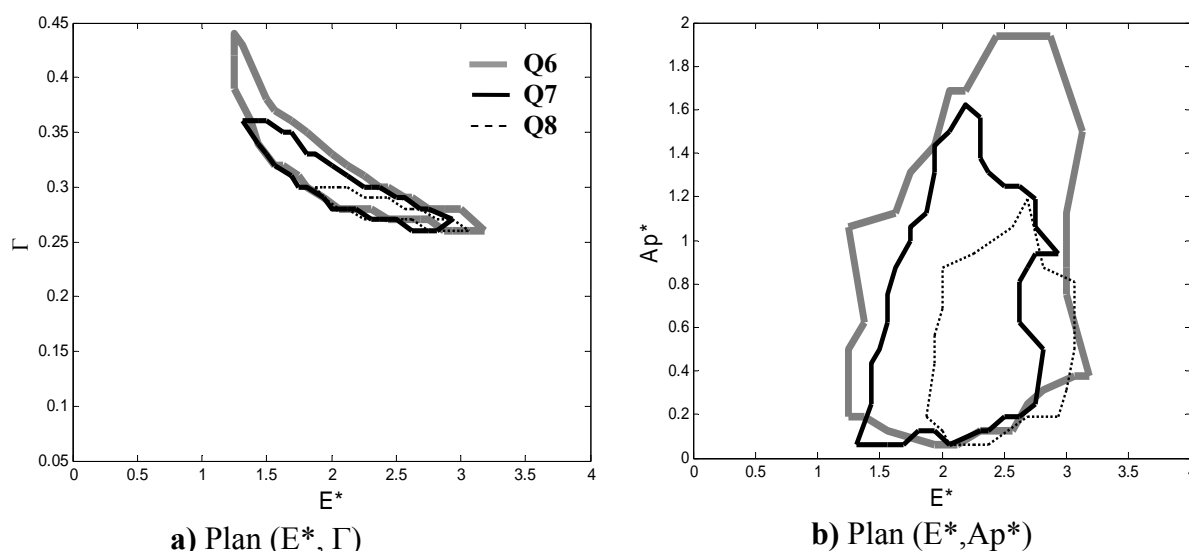
considérant des classes de qualité supérieures (pour les deux cas étudiés, la plus petite surface robuste est associée à la qualité la moins bonne Q8).


Pour l'engrenage hélicoïdal, on peut observer que, quelque soit le niveau de qualité, la robustesse des corrections dépend essentiellement de l'amplitude du bombé  $Ap^*$  et de la longueur de correction  $\Gamma$ . En effet, une valeur de  $Ap^*$  approximativement comprise entre 1,2 et 1,4 ainsi qu'une longueur de correction relative comprise entre 0,05 et 0,1 apparaissent comme optimales et robustes. En ce qui concerne la profondeur de la modification de profil, l'amplitude  $E^*$  a très peu d'influence pour les meilleures classes de qualité. Même pour la classe la moins bonne (Q8), on constate que  $E^*$  varie dans une plage considérable ( $0,8 < E^* < 2,2$ ).



**Figure III-16 :** Projections des zones des corrections « robustes »  
Engrenage hélicoïdal\_  $F_{rob} < 0.125 \mu m$ , Distribution normale,  $C_m = 850 Nm$

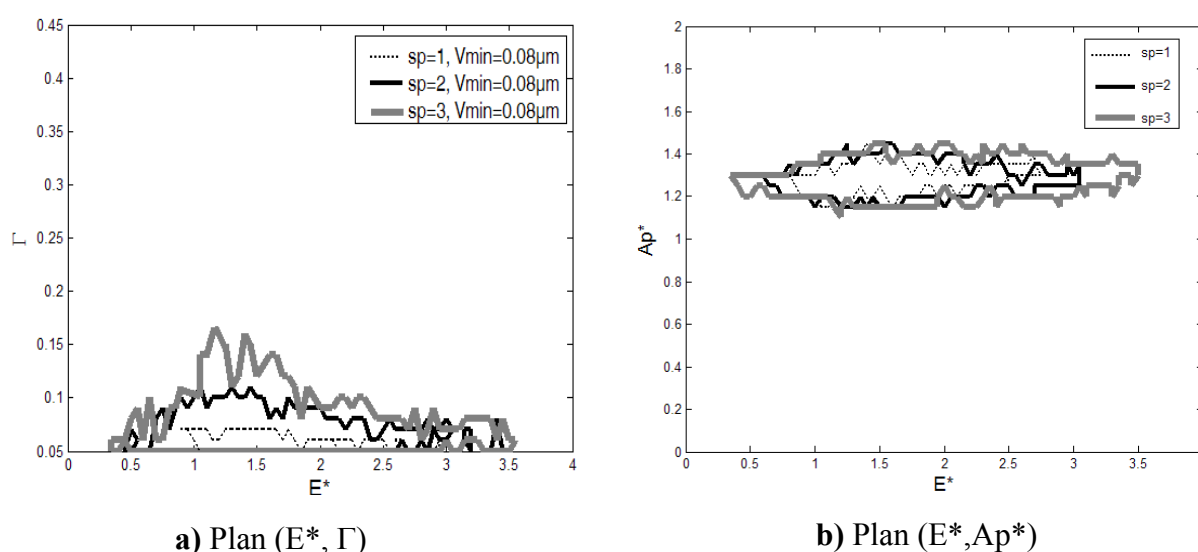
D'autre part, pour le cas d'engrenage droit (Figure III-17), nous observons que dans le plan ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ), la zone robuste demeure centrée sur la courbe maîtresse définie précédemment L'amplitude du bombé  $Ap^*$  est d'une importance secondaire dans la définition de la zone robuste correspondant à ce cas d'étude.




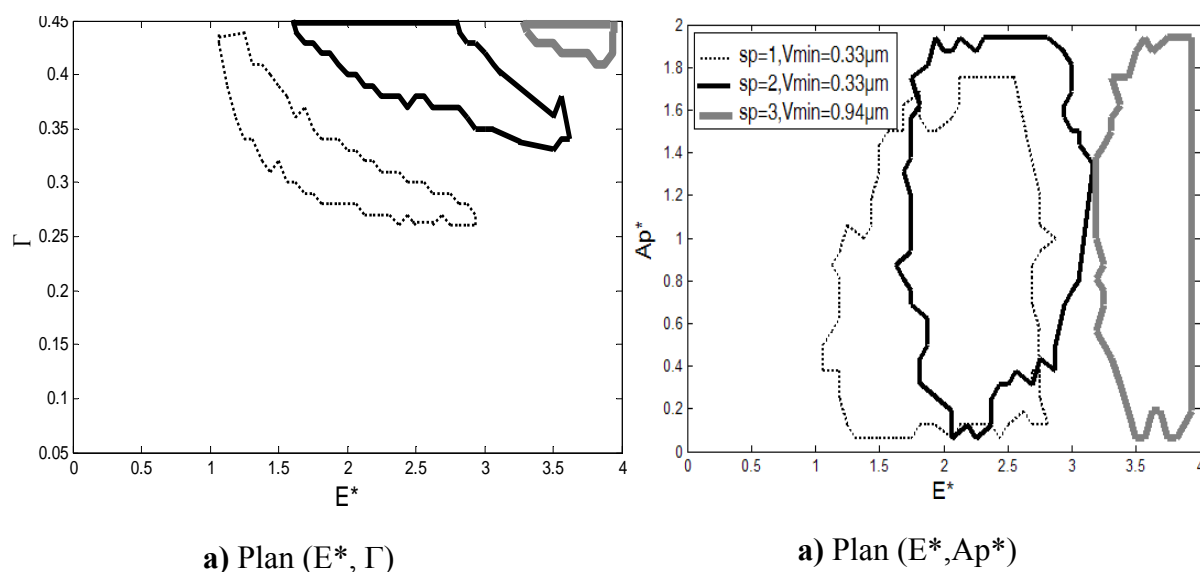
**Figure III-17 :**  Projections des zones des corrections « robustes »\_ Engrenage droit  
 $F_{rob} < 0.5 \mu\text{m}$ , Distribution normale,  $C_m = 850 \text{ Nm}$


### III.5.1.3. Influence de la forme de la correction

Dans ce paragraphe, nous cherchons à étudier l'influence de la forme de correction de profil sur l'emplacement des zones de robustesse des paramètres de correction des dents. Pour ce faire, une correction paramétrique est caractérisée par le paramètre de forme  $sp$  défini précédemment (voir Figure II-31 et équation (II.31)). Les résultats correspondants, portés sur les deux figures, Figure III-18 et Figure III-19, sont les projections des zones robustes obtenus pour les cas d'engrenage hélicoïdal et droit respectivement. Une qualité de classe Q7 avec une variabilité des paramètres de correction suivant une distribution normale ont été considérées.



**Figure III-18 :**  Projections des zones des corrections « robustes »  
 Engrenage hélicoïdal \_  $F_{rob} < 0.11 \mu\text{m}$ , Distribution normale,  $IT-X : Qp7$ ,  $C_m = 850 \text{ Nm}$

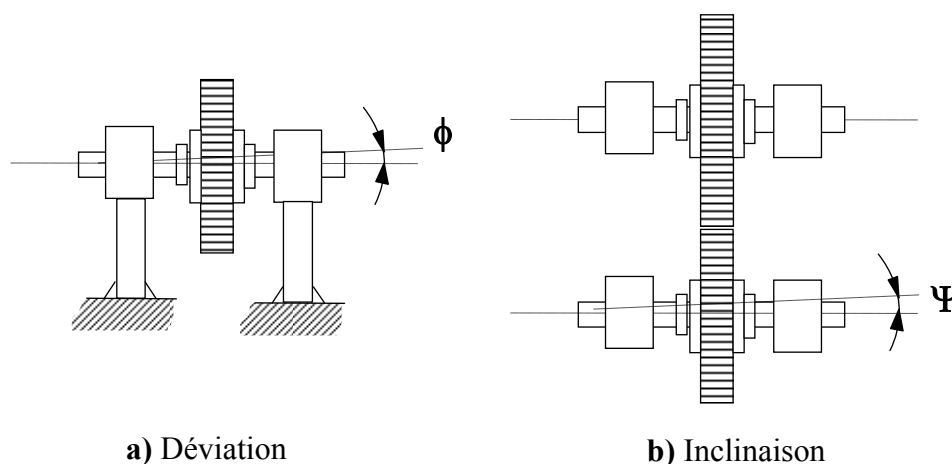


**Figure III-19 :**  Projections des zones des corrections « robustes »\_ Engrenage droit  
 $F_{rob} < 0.7 \mu\text{m}$ , Distribution normale, IT-X : Qp7, Cm=850 Nm

En examinant ces deux figures, on constate que la forme de la correction de profil a très peu d'influence sur la localisation des solutions robustes dans le cas de l'engrenage hélicoïdal (Figure III-18) et, de plus, lors de la procédure d'optimisation, sensiblement la même valeur minimale de  $F_{rob}$  a été obtenue. On peut noter aussi, que la simulation avec  $sp = 3$  donne une zone un peu plus étendue que celle obtenue avec une correction linéaire. Cependant, ce paramètre est beaucoup plus influent dans le cas de l'engrenage droit (Figure III-19) où une augmentation de  $sp$  oriente la zone robuste vers des corrections de profil plus profondes et plus longues. Pour  $sp = 1$  ou  $sp = 2$  on obtient sensiblement la même valeur minimale de  $F_{rob}$  ( $V_{min}=0.33\mu\text{m}$ ). Cette valeur augmente, en revanche, pour le cas de  $sp = 3$  ( $V_{min}=0.94\mu\text{m}$ ).

#### III.5.1.4. Introduction de désalignements

En réalité, les erreurs de transmission sont modulées par toutes sortes d'erreurs géométriques parmi lesquelles on trouve les erreurs de désalignement des axes. Ces défauts peuvent avoir diverses origines : écarts de fabrication, et / ou une installation inadéquate, l'asymétrie de la charge appliquée, la déviation du carter,... [36]. La norme ISO définit deux types de désalignements à savoir l'écart de déviation et l'écart d'inclinaison. Comme schématisé dans la Figure III-20, l'écart de déviation est paramétré par un angle  $\phi$  introduit du côté pignon et l'inclinaison est caractérisée par un angle  $\Psi$  également imposé sur l'arbre du pignon.



**Figure III-20 :** Définitions des défauts d'alignement (déviation et inclinaison)

Les défauts d'alignement représentent un problème réel de fonctionnement. Ces écarts sont aléatoires et indépendants. Afin d'analyser la sensibilité des solutions robustes par rapport aux écarts d'orientation, une nouvelle formulation des paramètres statistiques de la fonction robuste est proposée. Un défaut d'alignement  $\phi$  ou  $\Psi$ , nommé de façon générique  $Ms$ , est considéré comme une variable aléatoire du problème. Il est modélisé par une distribution normale variant entre une limite inférieure  $Ms_{\min}$  et une limite supérieure  $Ms_{\max}$ .

Dans cette nouvelle configuration, la fonction robuste (Equation (III.5)) est redéfinie en utilisant les paramètres statistiques modifiés suivants :

$$\mu_Y = \int_{Ms_{\min}}^{Ms_{\max}} \int_{\Omega} Y(\mathbf{X}, Ms) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) p(Ms) dx_i dMs \quad (\text{III.15})$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\int_{Ms_{\min}}^{Ms_{\max}} \int_{\Omega} (Y(\mathbf{X}, Ms) - \mu_Y)^2 \prod_{i=1}^n p_i(x_i) p(Ms) dx_i dMs} \quad (\text{III.16})$$

avec,

$$Y = RMS(TEs)$$

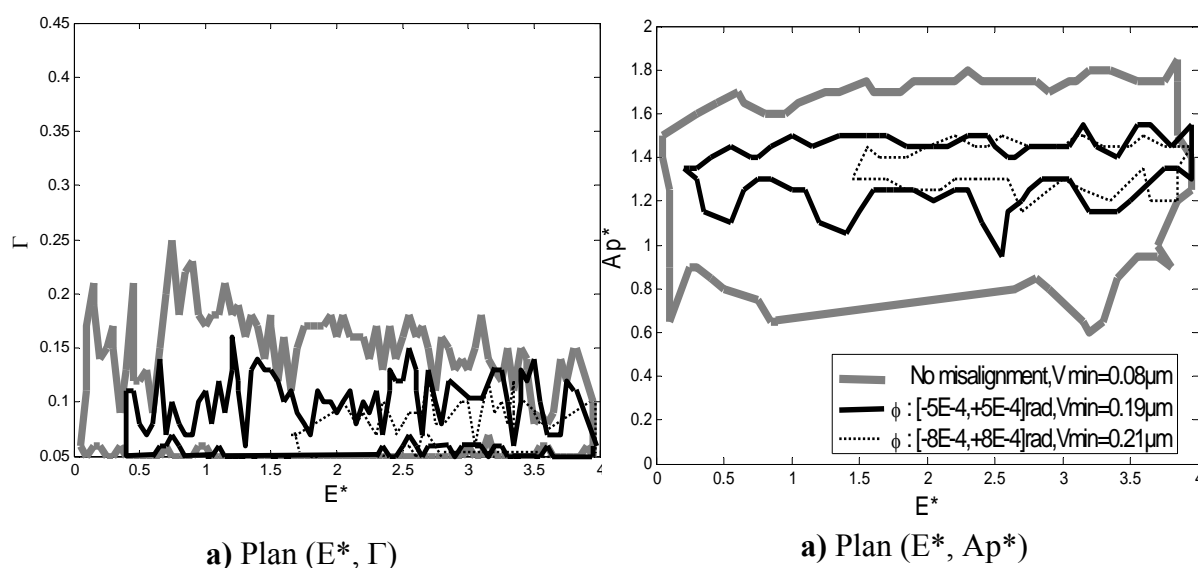
$Ms$ : désalignement introduit; ( $\phi$ : déviation ou  $\Psi$ : inclinaison)


$\mathbf{X}$ : Variables aléatoires définissant les paramètres de correction et dont on cherche à optimiser les valeurs moyennes.

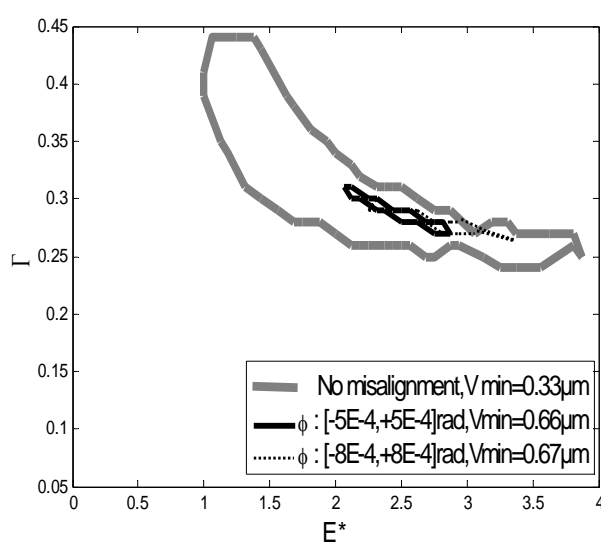
On cherche alors à définir la localisation des solutions robustes vis à vis des variations géométriques associées, d'une part aux variables de corrections et d'autre part, aux erreurs d'orientation. Ces solutions sont définies par les valeurs moyennes des paramètres de correction de dentures ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ,  $Ap^*$ ).

Les 2 mêmes engrenages sont pris comme support de l'analyse et une classe de qualité Q7 avec des distributions normales est considérée. Les figures, Figure III-21 et Figure III-22, sont relatives à la prise en compte de la déviation et représentent les contours des zones robustes projetées sur les plans  $(E^*, \Gamma)$  et  $(E^*, Ap^*)$ . Les résultats obtenus avec l'introduction de l'inclinaison sont montrés dans les deux figures, Figure III-23 et Figure III-24. De ces graphes, il est possible de tirer les constatations suivantes :

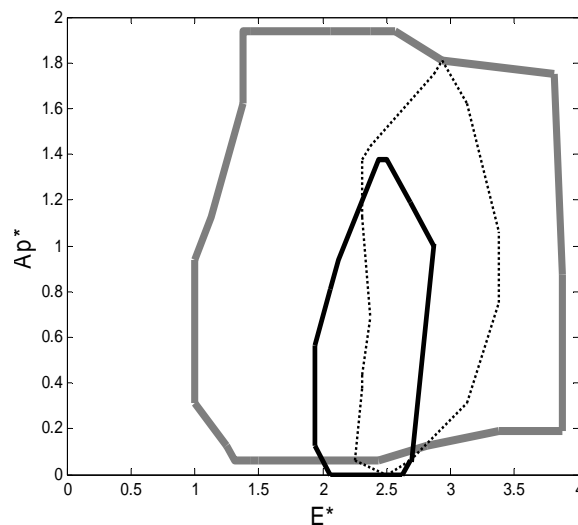
- Pour les solutions optimales, les valeurs de la fonctionnelle robuste ( $F_{rob}$ ) augmentent sensiblement en présence d'écart d'orientation. Il n'est plus possible de conserver un seuil commun ( $V_s$ ) pour la représentation des domaines optimaux.
- Pour la denture hélicoïdale : le bombé adimensionné optimal est situé entre 1,2 et 1,4 et la longueur de correction est inférieure à 0,15. La profondeur de correction de profil a peu d'influence.
- Pour la denture droite : les corrections de profils optimales se localisent à proximité de la courbe maîtresse et le bombé a peu d'influence. La fonction principale du bombé est d'améliorer la portée des dentures pour un fonctionnement avec des écarts d'orientation des axes. Il semble donc que l'effet bénéfique du bombé ne concerne que l'état de contraintes et pas les fluctuations d'erreurs de transmission.




**Figure III-21 :**  Projections des zones des corrections « robustes »  
Engrenage hélicoïdal\_  $F_{rob} < 0.25 \mu\text{m}$ , Distribution normale, IT-X : Qp7,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ ,  
défaut de déviation

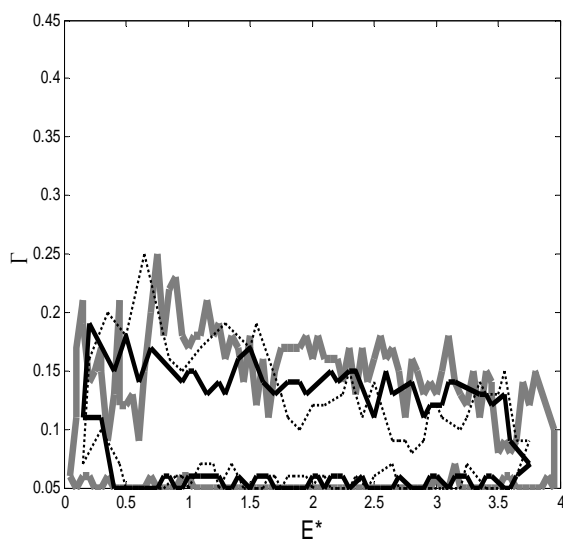


a) Plan ( $E^*$ ,  $\Gamma$ )

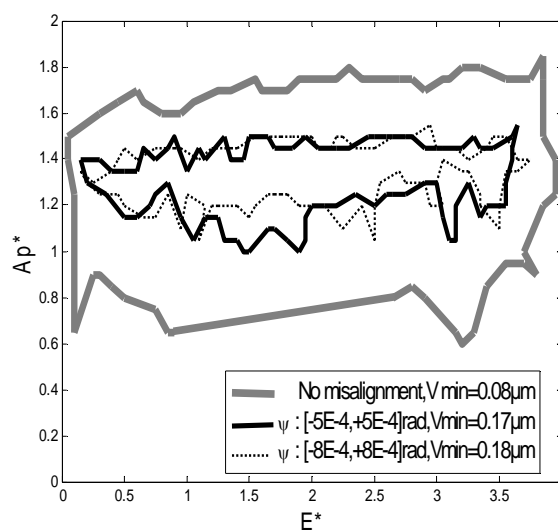


a) Plan ( $E^*$ ,  $A_{p^*}$ )


**Figure III-22 :**  Projections des zones des corrections « robustes »\_Engrenage droit  
 $F_{rob} < 0.85 \mu m$ , Distribution normale, IT-X : Qp7,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ , défaut de déviation

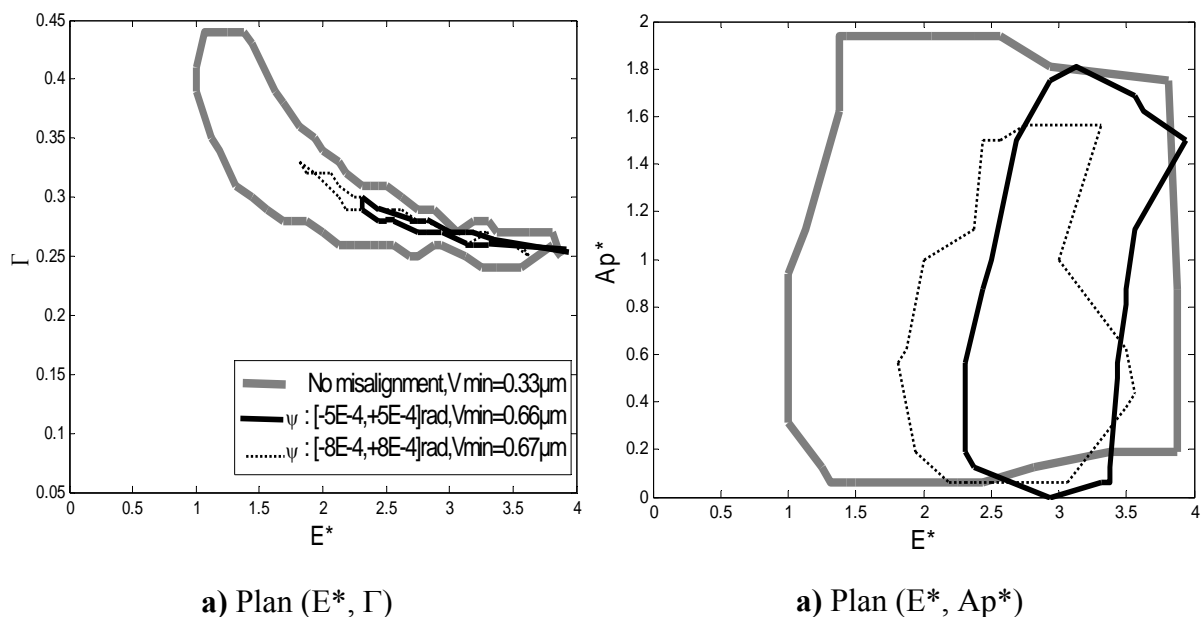



a) Plan ( $E^*$ ,  $\Gamma$ )



a) Plan ( $E^*$ ,  $A_{p^*}$ )

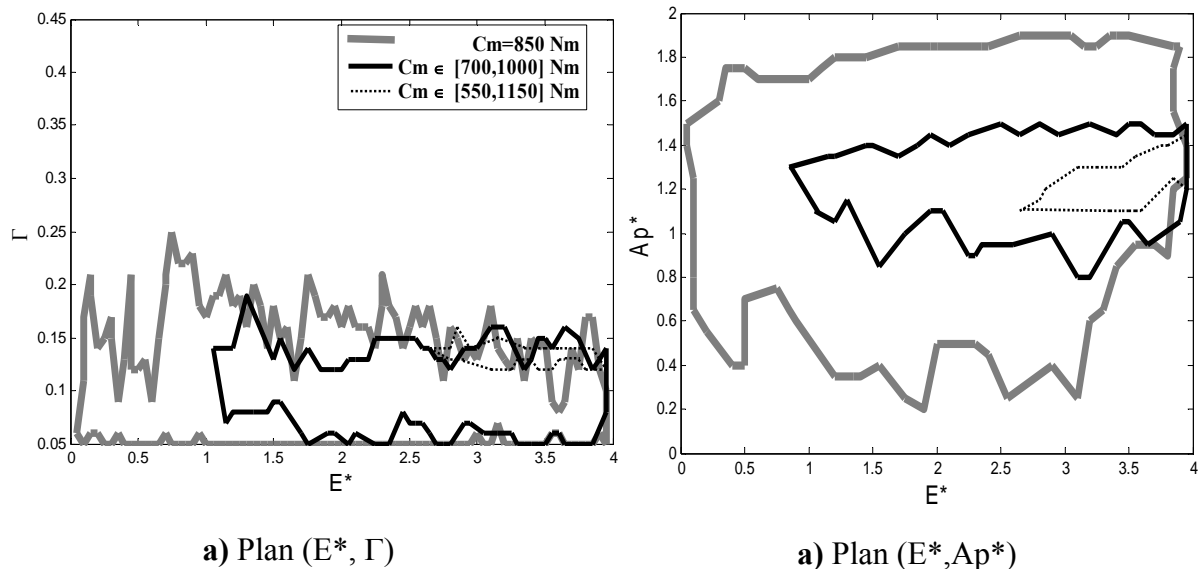
**Figure III-23 :**  Projections des zones des corrections « robustes »  
 Engrenage hélicoïdal \_  $F_{rob} < 0.25 \mu m$ , Distribution normale, IT-X : Qp7,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ ,  
 défaut d'inclinaison




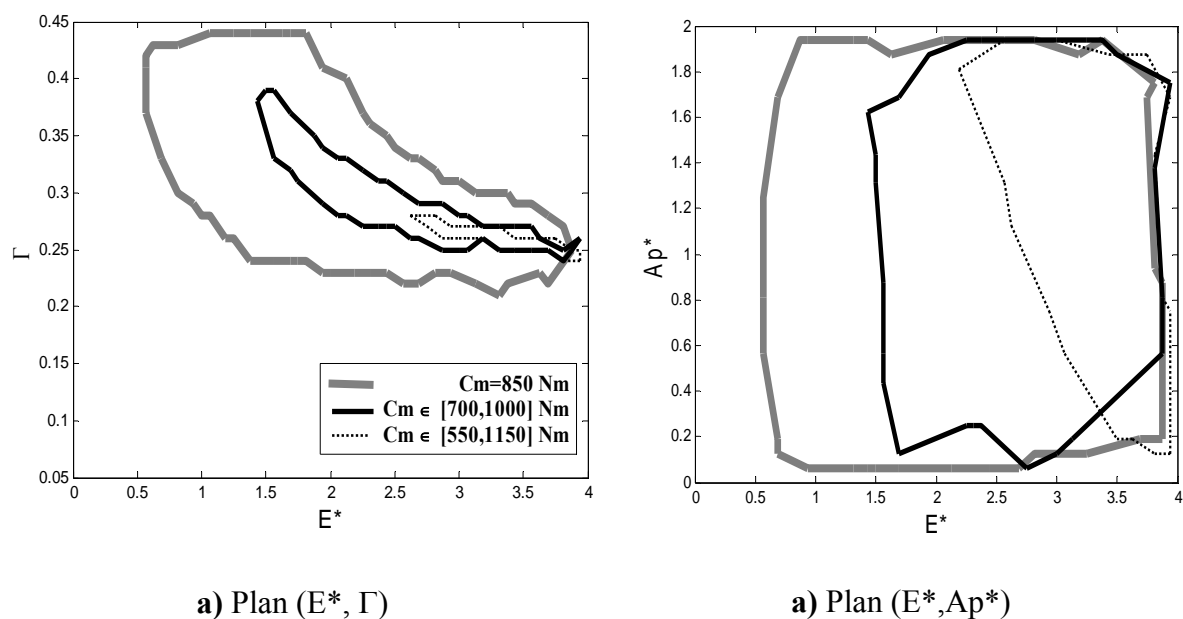
**Figure III-24 :**  Projections des zones des corrections « robustes »\_ Engrenage droit  
 $F_{rob} < 0.85 \mu\text{m}$ , Distribution normale, IT-X : Qp7,  $C_m = 850 \text{ Nm}$ , défaut d'inclinaison


### III.5.1.5. Influence de la variation du chargement

On propose ici l'étude de l'influence de variations du chargement sur la localisation des corrections de dentures robustes. On garde donc pour ce faire les mêmes équations (III.13) et (III.14) définissant les deux composants statistiques de la fonction robuste. Deux distributions uniformes pour le couple moteur sont considérées : la première varie de 700 Nm à 1000 Nm et la deuxième de 550 Nm à 1150 Nm. La dispersion des paramètres de correction de denture est représentée par l'intermédiaire des distributions gaussiennes pour une classe de qualité Q7. Les profondeurs de modification de profil  $E$  et l'amplitude du bombé  $Ap$  ont été normalisées par rapport à la déflexion statique moyenne obtenue pour un couple moteur égal à 850 Nm. Les modifications robustes correspondantes au cas de l'engrenage hélicoïdal sont présentées dans la Figure III-25, tandis la Figure III-26 présente celles associées au cas de l'engrenage droit (Tableau II-1). On s'aperçoit alors qu'il est possible d'optimiser la correction de profil sur une plage de charges. Le bombé reste toujours le paramètre le plus influent dans la définition des zones robustes pour le cas d'engrenage hélicoïdal. Une plage importante de variation de chargement oriente les solutions vers des corrections de profils plus profondes et plus courtes pour les deux cas d'engrenages.



**Figure III-25 :**  Projections des zones des corrections « robustes »  
 Engrenage hélicoïdal \_  $F_{rob} < 1.7 \mu\text{m}$ , Distribution normale, IT-X : Qp7

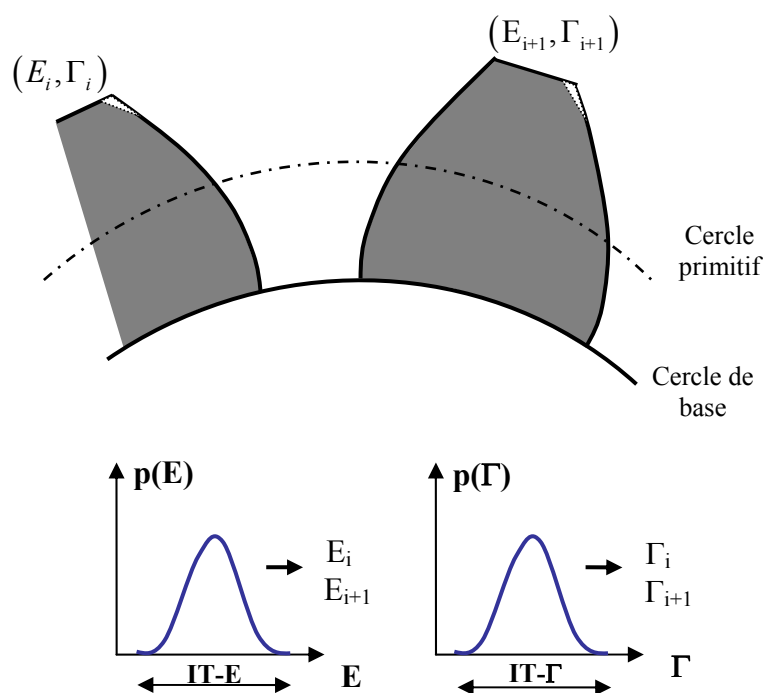


**Figure III-26 :**  Projections des zones des corrections « robustes »\_ Engrenage droit  
 $F_{rob} < 1.7 \mu\text{m}$ , Distribution normale, IT-X : Qp7



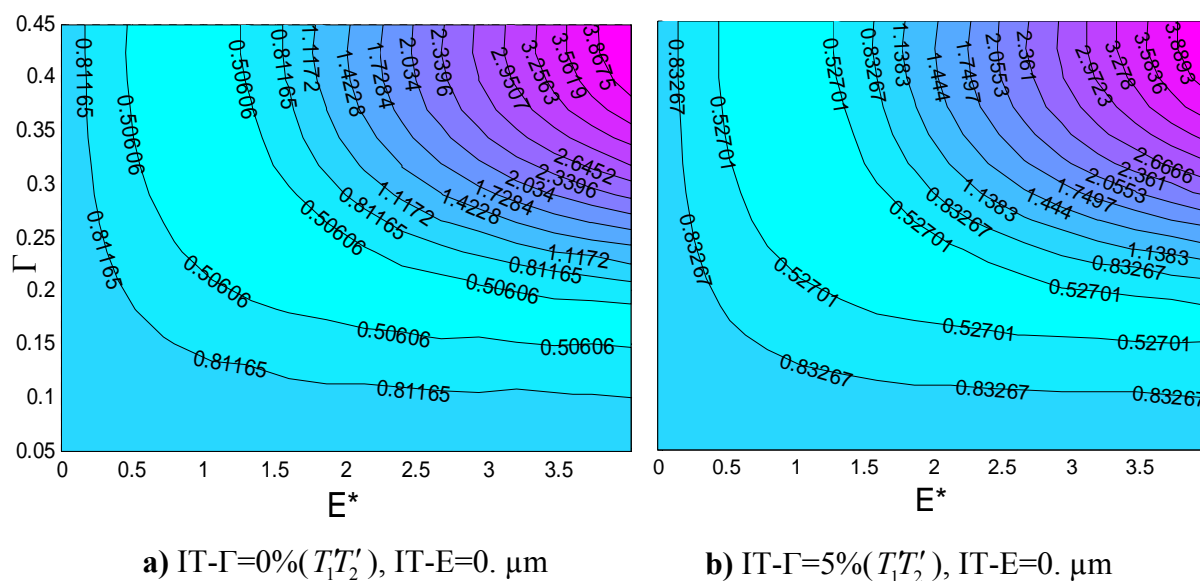
### III.6. Variabilité entre dents des paramètres de correction du profil :

Jusqu'à présent dans les travaux présentés ici, les paramètres de correction de profil sont supposés identiques sur toutes les dents d'une roue dentées. Dans ce paragraphe, on propose d'étudier l'impact de la variabilité d'une dent à une autre des paramètres de correction de profil. Cette variabilité est introduite au niveau des dents du pignon Figure III-27. La profondeur et la longueur de correction suivent, par hypothèse, une loi normale. Cette distribution est centrée pour chaque variable, au milieu d'un intervalle de tolérance donné à priori ( $IT-E$ ,  $IT-\Gamma$ ).

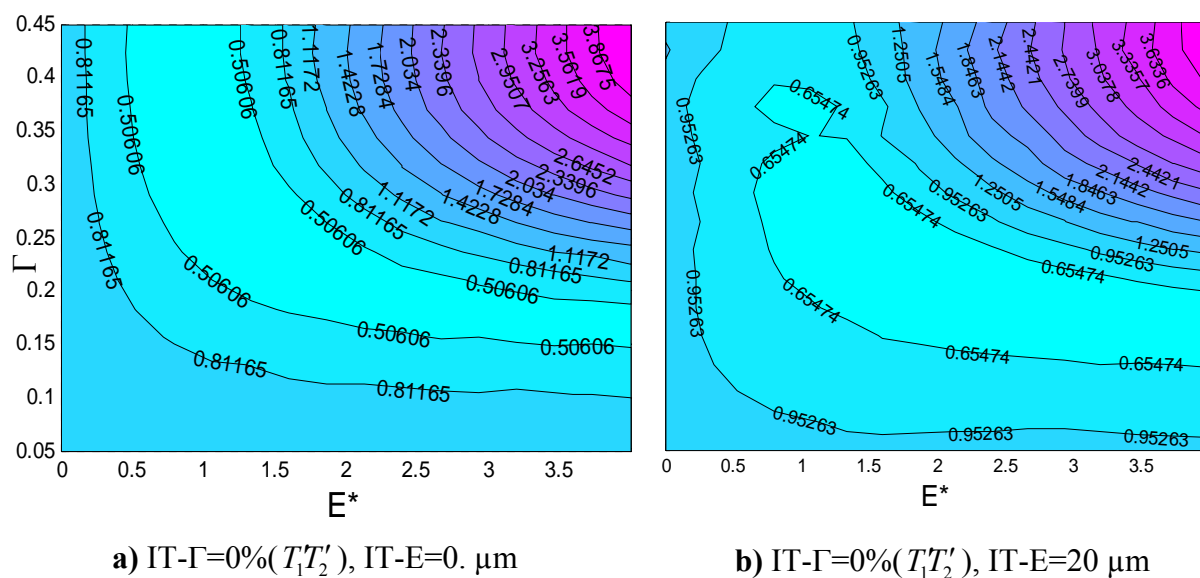


**Figure III-27 :** Schéma descriptif de la variabilité, entre dents, des paramètres de corrections

Pour l'exemple de l'engrenage hélicoïdal (cas 1, Tableau II-1), la Figure III-28 présente les évolutions du RMS(TEs) obtenus par balayage pour  $IT-\Gamma=0$  ; c'est à dire une longueur de correction identique sur toutes les dents du pignon (voir Figure III-28.a) et  $IT-\Gamma=2.5\%$  (voir Figure III-28.b). On procède de la même façon pour étudier l'influence de la variabilité de la profondeur adimensionnée  $E^*$  entre dents du pignon sur la localisation des corrections optimales. La Figure III-29 présente les évolutions du RMS(TEs) obtenues par balayage pour  $IT-E^*=0$  ; c'est à dire une profondeur de correction identique pour toutes les dents du pignon et  $IT-E^*=1$ .



**Figure III-28 :** RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$   
(Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m=850\text{Nm}$ )



**Figure III-29 :** RMS de l'erreur de transmission quasi-statique en  $\mu\text{m}$   
(Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m=850\text{Nm}$ )

En examinant ces figures on constate que la variabilité introduite entre dents du pignon sur la longueur  $\Gamma$  est sans influence sur la localisation des corrections optimales. De même son impact sur l'amplitude de la fonction objectif (RMS(TEs)) est très peu marquant. Cependant, la variabilité de  $E^*$  entraîne une orientation de la zone optimale vers des corrections plus courtes.

### III.7. Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier la conception robuste de corrections de denture (profil et bombé). Dans cette optique, plusieurs méthodologies ont été proposées : un développement analytique, une approche « hybride » qui combine des résultats analytiques et numériques et finalement une approche purement numérique basée sur un algorithme génétique. Ces différentes approches présentent un niveau de complexité croissant au niveau des modèles utilisés et du problème de conception qu'on cherche à résoudre. Trois méthodes d'estimation des paramètres statistiques sont présentées : développement de Taylor, Simulation de Monte Carlo et méthode de quadrature de Gauss. La robustesse des paramètres des corrections de dentures est étudiée en présence des écarts géométriques (classes de qualité, lois de distribution, ...), de défauts d'alignement et de variations de paramètres fonctionnels tels que le chargement.

On présente ici les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes utilisées pour étudier la robustesse des corrections de forme :

- Approche analytique : C'est une approche directe, extrêmement rapide, qui permet de tirer des relations générales. Cependant, elle est adossée à un modèle de rigidité d'engrènement simplifié. Par ailleurs, la complexité des formules obtenues rend délicat le calcul des dérivées requises pour évaluer les termes statistiques par un développement de Taylor.
- Approche combinée : les développements analytiques précédents sont utilisés comme étape initiale permettant de réduire l'espace de recherche et, par conséquent, les temps de calcul. Les résultats sont obtenus avec un modèle d'engrènement plus réaliste. Cette approche est naturellement limitée aux cas où la solution demeure au voisinage de la solution analytique. Il est à noter que les solutions robustes pour la correction de profil demeurent proches de la courbe maîtresse.
- Approche numérique : C'est la méthode choisie pour étudier la robustesse en présence de plusieurs variables (3 ou plus). Les avantages de cette méthode sont liés à ceux des algorithmes génétiques : optimum global, temps de calcul réduit par rapport à d'autres méthodes, adaptée au calcul parallèle, etc. Ainsi, grâce à cette méthode on a pu conduire un grand nombre d'études paramétriques au prix, toutefois, d'un effort particulier de paramétrage pour un certain nombre de coefficients et de paramètres caractéristiques tels que les probabilités de mutation et de croisement, nombre de générations qui assure la convergence, etc.

# **Chapitre IV : Optimisation multi objectifs des corrections de forme**

- 1. Introduction**
- 2. Optimisation multi objectif : Etat de l'art**
- 3. Engrenages : Optimisation multicritères**
- 4. Conclusion**

## IV.1. Introduction

La performance d'un système d'engrenages est plurielle et multidimensionnelle (dépendante de plusieurs variables). Idéalement, le processus de conception devrait permettre de définir la solution qui réalise simultanément le meilleur compromis entre les différents critères définissant la qualité du système. Cependant, les difficultés de mise en œuvre sont importantes et un tel processus est rarement possible. Cette démarche est complexe et pour en garder la maîtrise, il est nécessaire que la méthode soit claire et rigoureuse et que les outils d'évaluation des différents critères soient les plus justes possibles.

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en place des outils pour réaliser une optimisation simple (chapitre 2) ou une optimisation robuste (chapitre 3) pour un seul critère. L'objectif de ce dernier chapitre est d'explorer des démarches qui permettent de réaliser l'optimisation simple de la conception suivant plusieurs critères simultanément. Après avoir précisé l'approche que nous proposons basée sur la méthode de Pareto, un algorithme approprié sera présenté afin de conduire des études visant à optimiser un ensemble de performances d'engrenages à travers des corrections de formes de dentures.

## IV.2. Optimisation multi objectif : Etat de l'art

### IV.2.1. Définitions :

On suppose que la réponse du système est caractérisée par un vecteur  $f$  de dimension  $p$  :

$$f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)]^T \quad (\text{IV.1})$$

avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  un vecteur regroupant  $n$  variables de conception.

La formulation générale d'un problème d'optimisation multi objectifs est la suivante :

$$\text{minimiser } f_i(X) \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \quad \text{et } X \in D$$

soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} g_j(X) \leq 0 & \text{pour } j = 1, \dots \\ h_k(X) = 0 & \text{pour } k = 1, \dots \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Il n'existe généralement pas de solution qui optimise simultanément tous les critères et il est, par conséquent, nécessaire de mettre en place une méthode qui puisse réaliser un compromis entre les différents objectifs. Pour traiter ce type de problème, deux approches sont proposées dans la littérature [142]–[147]. La première consiste à transformer le problème multi-objectif initial en un problème mono-objectif (une seule fonction objectif) en combinant

linéairement l'ensemble des critères. Le compromis est ainsi fixé à priori par des termes de pondération associés à chacun des critères (équation (IV.3)) :

$$\begin{cases} F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N w_i f_i(\mathbf{X}) \\ \text{Avec } 0 \leq w_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

La valeur prise par le terme de pondération reflète l'importance (le poids) de la fonction objectif associée. La résolution du nouveau problème obtenu se fait par le biais de techniques classiques telles que la méthode de gradient, un algorithme génétique, etc.

La formulation (IV.3) présente l'avantage d'être simple à comprendre mais elle ne tient pas vraiment compte des valeurs numériques des critères : certains peuvent avoir des valeurs numériques élevées (par exemple le produit  $p.V : 10^{11}$  SI) et d'autres, des valeurs très faibles (RMS(TEs) :  $10^{-6}$  SI). Afin d'homogénéiser les valeurs prises par les différents critères, il existe différentes techniques. L'une d'elles consiste à définir une valeur cible pour chaque critère  $f_i^0$  et d'utiliser la fonctionnelle suivante :

$$\begin{cases} F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N w_i \frac{|f_i(\mathbf{X}) - f_i^0|}{f_i^0} \\ \text{Avec } 0 \leq w_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

D'autre part, les valeurs des termes de pondération sont déterminées d'une manière subjective avant la recherche de solutions alors que leur influence sur les résultats obtenus est considérable. De plus, si le concepteur souhaite modifier ces valeurs, il doit lancer une nouvelle recherche. La seconde approche des problèmes multi objectifs retarde la pondération relative des différents critères en recherchant simultanément les solutions qui optimisent un critère, les autres étant fixés.

## IV.2.2. Méthode de Pareto

A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, l'économiste Vilfredo Pareto [143] a formulé une nouvelle approche de l'optimisation multicritère qui permet la comparaison des solutions relatives à un problème donné. Une solution est définie comme un optimal au sens de Pareto, si elle n'est pas dominée par une autre dans le même espace des solutions. Autrement dit, une solution « Pareto optimale » est aussi appelée solution non-dominée.

**Définition 1 :** Dominance entre deux solutions (voir Figure IV-1)

Dans un problème possédant  $p$  critères  $f_i$  à optimiser, une solution A domine une solution B pour un problème de minimisation si :

$$f_i(A) < f_i(B), \quad \forall i=1, \dots, p \quad (\text{IV.5})$$

La Figure IV-1 illustre la définition 1 pour un problème à 2 critères.

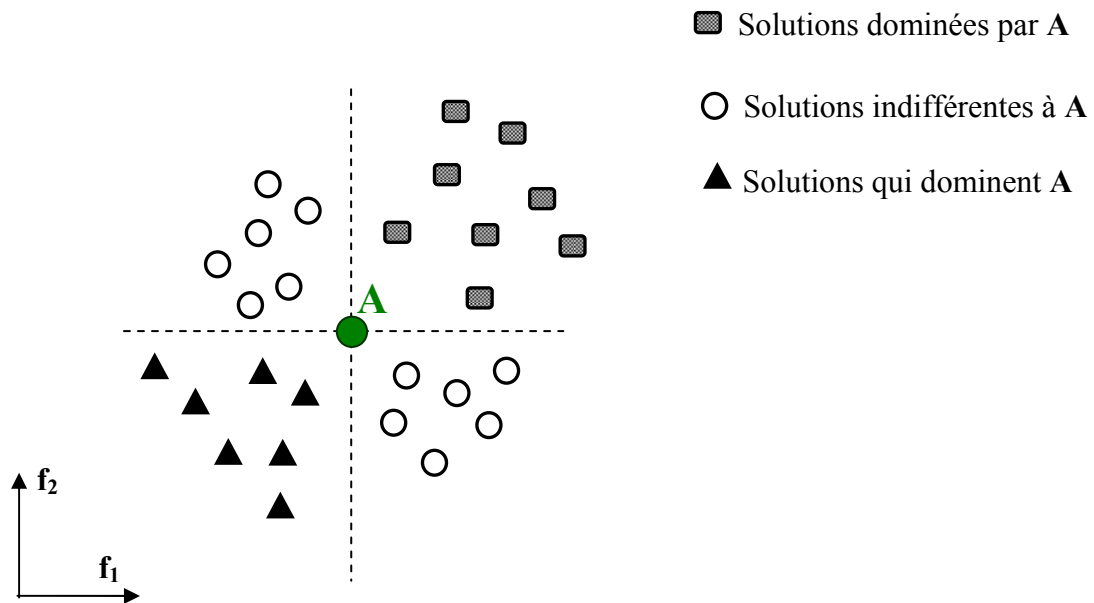
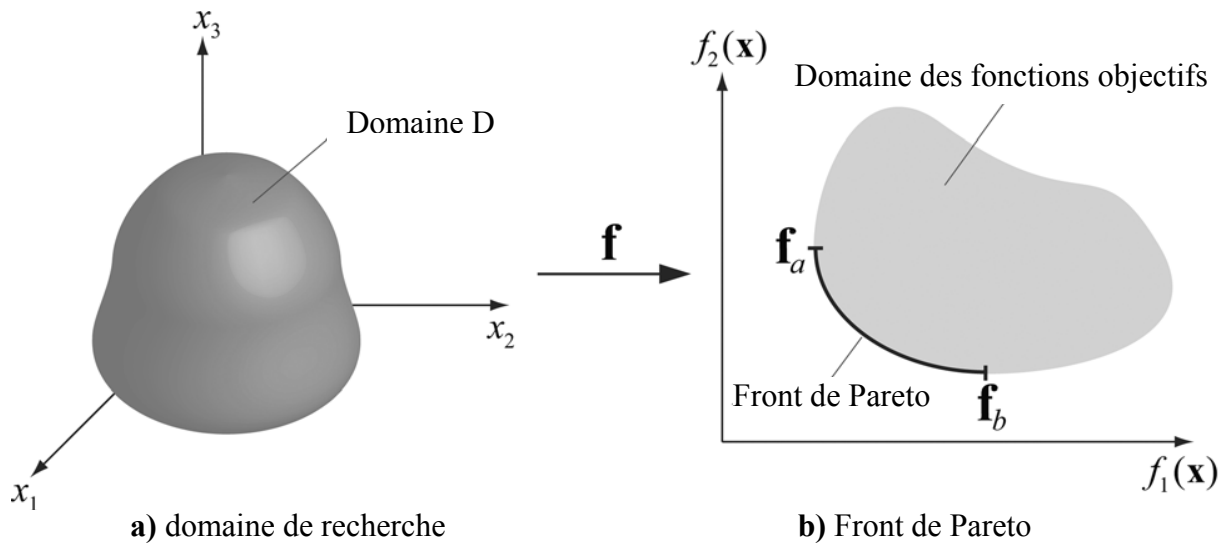


Figure IV-1 : Illustration du principe de dominance

En général, l'optimum de Pareto ne comprend pas une seule solution mais plutôt un ensemble de solutions. L'ensemble des points non dominés constitue le front de Pareto. En d'autres termes, cette définition exprime le fait que si  $X^*$  est une solution Pareto-optimale, il n'existe aucun vecteur faisable  $X^{**}$  pour lequel tous les critères sont meilleurs que ceux de la solution  $X^*$  (voir définition 2).

La Figure IV-2 illustre le concept du front Pareto en présentant un problème multi-objectifs avec trois variables de conception  $X = (x_1, x_2, x_3)$  et de deux objectifs  $f(X) = (f_1(X), f_2(X))$ . Le front de Pareto est représenté par la courbe noire épaisse allant de  $f_a$  à  $f_b$  dans la Figure IV-2.b) Elle contient toutes les solutions de compromis pour lesquelles il est impossible de réduire un objectif sans nécessairement augmenter l'autre.

**Définition 2 :** Un vecteur  $X^* \in D$  est appelé une solution de Pareto du problème (Equation (IV.2)) si et seulement si, il n'existe aucun vecteur  $X^{**}$  tel que  $f_i(X^{**}) \leq f_i(X^*) \quad \forall i=1, \dots, p$ .



**Figure IV-2 : Définition du Front de Pareto [145]**

En s'appuyant sur le concept décrit ci-dessus, l'objectif d'un algorithme d'optimisation d'un problème multi objectifs consiste dans un premier temps à déterminer le front de Pareto, c'est-à-dire l'ensemble des solutions non-dominées. Ce front constitue l'ensemble des solutions qui optimisent toutes les combinaisons linéaires des différents critères. Ensuite, le concepteur doit intervenir pour réaliser son choix.

### IV.2.3. Méthodes d'optimisation basées sur l'algorithme génétique

#### IV.2.3.1. Introduction

L'algorithme génétique est une technique d'optimisation très robuste également adaptée aux problèmes où plusieurs critères sont à prendre en considération [144]–[153]. L'idée de base consiste à prendre une population de solutions et à les manipuler grâce à différentes techniques (crossover, mutations,..) afin de déterminer le front de Pareto. Schaffer [144] est l'un des premiers à avoir appliqué un algorithme génétique à l'optimisation multicritère. Il a développé pour cela l'Algorithme Génétique à Évaluation Vectorielle ou **VEGA**. Cette méthode consiste à diviser la population en un nombre de fractions d'individus (sous-populations) égal au nombre de critères du problème. Des sélections sont réalisées pour chacune des fractions selon le critère défini, les fractions étant ensuite rassemblées pour obtenir une nouvelle population. A ce moment, interviennent les opérateurs classiques de mutation et croisement. Cette première méthode **VEGA** a toutefois conduit à des convergences prématurées vers des minimums propres à chacun des critères. Pour pallier à ce problème tout en préservant la diversité des individus, Horn et al. [146] ont proposé une méthode appelée **NPGA** (Niche Pareto Genetic Algorithm) basée sur une fonction de partage définie à travers le concept de niche. Les auteurs définissent une niche comme un



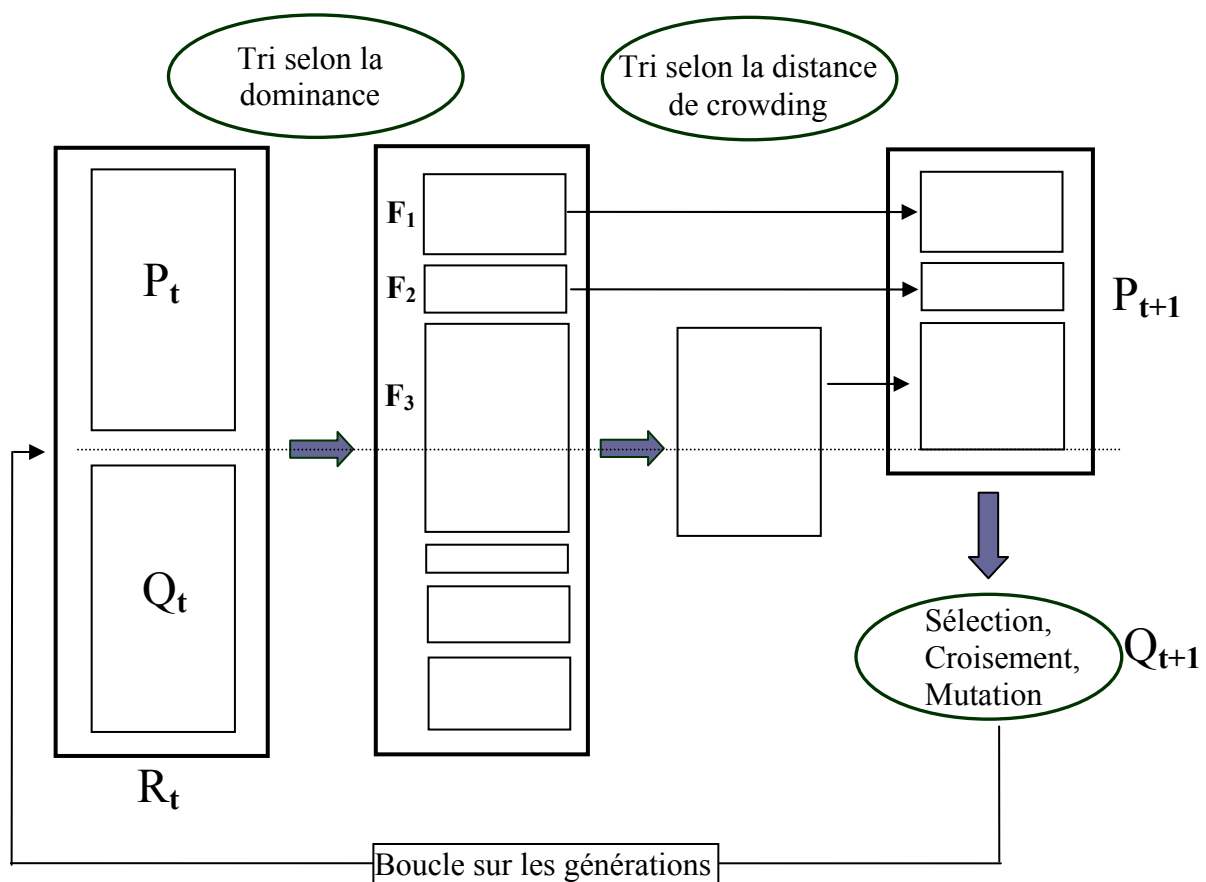
ensemble stable d'individus très proches les uns des autres et qui partagent les mêmes ressources ce qui influe sur la force d'un tel individu. L'individu, dans la plus petite niche comptant le moins d'individus sur un rayon prédéfini, est sélectionné. De même, une sélection par tournoi, basée sur le concept de dominance de Pareto est conduite d'une façon aléatoire. Une nouvelle population est ensuite obtenue à travers le croisement et la mutation. Pour faire intervenir les préférences du concepteur, Fonseca et al. [147] ont proposé la méthode **MOGA** (Multiple Objective Genetic Algorithm) où une fonction de dominance de Pareto est couplée à un module décrivant les préférences du concepteur. Ainsi, le but essentiel de la méthode n'est plus de définir toute la zone de compromis (zone de Pareto dont l'étendue peut être importante) mais de fournir un outil direct d'aide à la décision en intégrant un module sous la forme des cibles à atteindre (ou préférences). Une autre méthodologie appelée **SPEA** (Strength Pareto Evolutionary Algorithm) a été présentée par Zitzler et al. [148]. Les points de la zone de Pareto sont définis à travers leurs forces. En effet, la force attribuée à un point d'une population correspond au nombre de points qui le dominent. De ce fait, les points non-dominés, et surtout les points isolés parmi eux, auront une force exercée plus faible et par suite plus de chance de se reproduire ultérieurement lors de la sélection. Le calcul de la force peut s'effectuer, comme proposé dans **NSGA-I** (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm I) [149], en divisant la population en plusieurs sous-ensembles en fonction du degré de dominance au sens de Pareto de chaque individu. Cette méthode utilise la méthode de nichage « sharing » complexe et délicate à imbriquer puisqu'elle nécessite le réglage de plusieurs paramètres. Une amélioration a été apportée par la méthode **NSGA-II** (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm II) [150] grâce au remplacement de la fonction « sharing » par une fonction de « crowding ». A chaque individu sont désormais associées deux caractéristiques : le rang de non dominance et la distance de « crowding ». En outre, pour remédier à la critique de non élitisme présentée dans NSGA I, cette méthode utilise une sélection par tournoi tout en conservant un nombre d'individus Pareto-optimaux trouvés au cours du temps.

Toutes ces méthodes définissent généralement un ensemble de solutions non dominées (front de Pareto). Les résultats diffèrent principalement au niveau de la répartition des solutions sur le front de Pareto et de la vitesse de convergence. Un état de l'art complet peut être trouvé dans [151] et [152].

Toutefois, les fronts de Pareto étant déterminés, l'expérience du concepteur reste toujours nécessaire pour faire les bons choix parmi les solutions trouvées. Dans notre étude, pour tenir compte de l'aspect multicritère de l'optimisation recherché et pour l'ensemble des avantages présentés dans le paragraphe précédent, la méthode de NSGA-II a été retenue et son principe de fonctionnement sera détaillé dans ce qui suit.

### IV.2.3.2. L'algorithme NSGA-II

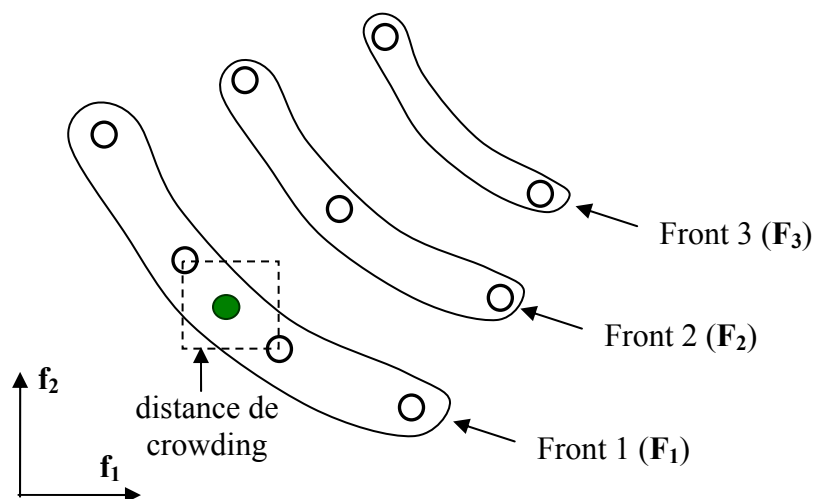
Deb et al. [153] ont proposé une nouvelle version de l'algorithme NSGA appelée le NSGA-II, qui est considéré comme étant plus efficace et plus rapide que son prédécesseur (NSGA-I). Son approche élitiste permet de sauvegarder les meilleures solutions trouvées au cours des générations précédentes. De plus, cet algorithme ne nécessite aucun réglage de paramètres et il contient une procédure de tri basée sur la non-dominance. Dans cette méthode, le double objectif convergence-diversité est atteint, d'une part, grâce à l'emploi d'un schéma de sélection (du calcul de la performance) qui favorise les solutions non-dominées et, d'autre part, par l'introduction d'une technique de mesure de densité (crowding) des solutions du front non-dominé (voir Figure IV-3).



**Figure IV-3 :** Procédure d'évolution de l'algorithme NSGA-II

Ainsi, la boucle principale de NSGA-II, commence avec la création aléatoire d'une population  $P_0$ , de taille  $N$ , à laquelle sont appliqués les opérateurs génétiques classiques (croisement et mutation) conduisant à une population d'enfants  $Q_0$  de taille  $N$ . L'ensemble obtenu de taille  $2N$ , comportant  $P_0$  et  $Q_0$  (ou en général  $P_t$  et  $Q_t$  associées à une itération quelconque  $t$ ), est évalué et ensuite trié et classé selon le principe de dominance de Pareto où à chaque individu est associé un « rang ». Le rang 1 caractérise les individus qui figurent

parmi les solutions non-dominées pour l'itération courante. Les individus de rang 2 sont ceux qui appartiennent au nouveau front de Pareto après avoir retiré du groupe les individus de rang 1. Le processus de classement est itératif jusqu'à l'épuisement de la population. Les différents fronts obtenus sont classés par ordre croissant ( $F_1, F_2, F_3, \dots$ ). Avec un cardinal ne dépassant pas  $N$ , les individus appartenant aux  $j$  premiers fronts contribuent à la construction de la population suivante des parents  $P_{t+1}$ , à partir de laquelle on va générer une nouvelle population  $Q_{t+1}$ . Les individus manquants, pour avoir une taille  $N$  pour la population  $P_{t+1}$ , sont obtenus par application de la technique de « distance de surpeuplement ou d'étalement » (crowding distance) au niveau du  $j+1^{\text{ème}}$  front. En effet, cette technique permet de préserver la diversité tout en estimant la densité des solutions voisines d'une solution ( $i$ ) dans un front donné  $F$ . La Figure IV-4 illustre une représentation en deux dimensions associée au principe de distance de crowding. Le calcul de cette distance nécessite, en premier lieu, le classement selon chaque fonction objectif et dans un ordre croissant, des différentes solutions présentes dans un front  $F$ . Ensuite, une distance infinie est associée aux individus ayant des valeurs limites (maximum ou minimum) de toute fonction objectif. Pour les autres individus intermédiaires, on détermine une distance de crowding égale à la différence normalisée des valeurs de la fonction objectif choisie calculées au niveau de deux solutions adjacentes. Le même calcul est réalisé pour toutes les fonctions objectifs et la distance de crowding d'une solution est égale à la somme des distances associées à chaque objectif. Le principe général de sélection se résume comme suit : pour deux solutions de rangs différents, la solution possédant le plus petit rang (c'est à dire le front avec le numéro le plus petit) est préférée. Pour un même front, on choisit la solution localisée dans la région où la densité de solutions est moindre, ce qui correspond à l'individu possédant la valeur la plus élevée de distance de crowding.



**Figure IV-4 :** *Classifications des individus selon leurs rangs (en fronts) et selon la distance de crowding*

#### IV.2.4. Validation de l'algorithme NSGA-II

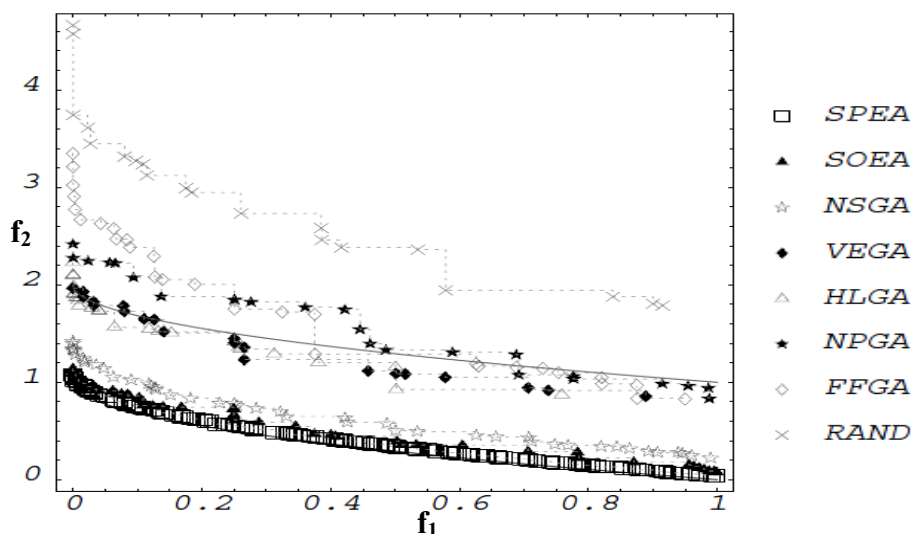
En se basant sur l'approche proposée initialement par Deb et al. [150], nous avons programmé l'algorithme NSGA-II en langage fortran 90. Dans ce contexte, et avant de pousser les travaux plus avant, nous avons réalisé une étape de comparaison et de validation de l'algorithme développé avec les résultats de la littérature. Dans ce but, un problème bi objectifs est tout d'abord traité, suivi ensuite par un problème à 3 objectifs.

##### *IV.2.4.1. Problème bi objectifs : fonction test ZDT4 [152]*

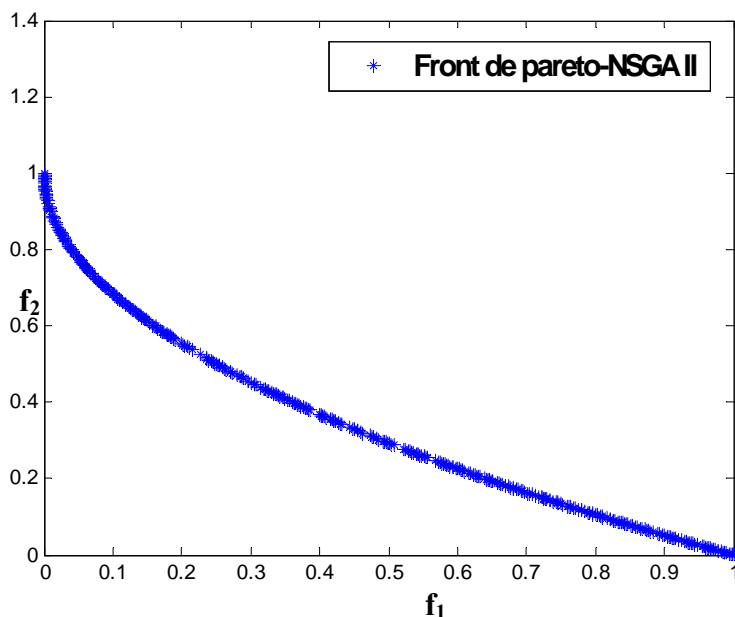
La première fonction test est donnée par l'équation. Ce problème, étudié initialement par Zitzler et al [152], est connu sous le nom de problème ZDT4 et possède la particularité de contenir un grand nombre de fronts de Pareto ( $21^9$ !) obtenus localement [152]. Le problème est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiser} && (f_1(X), f_2(X)), \quad X = [x_1, \dots, x_n] \\
 &&& f_1(X) = x_1 \quad \text{pour } j=1, \dots \\
 &&& f_2(X) = g(X) \left[ 1 - (x_1/g(X))^2 \right] \\
 &&& g(X) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) \\
 &&& 0 \leq x_1 \leq 1 \\
 &&& -5 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

La Figure IV-5 montre les résultats de convergence, pour le problème ZDT4, de différents algorithmes d'optimisation multicritères présentés dans la littérature [152]. La Figure IV-6 présente les résultats de NSGA-II développé. En comparant les deux figures, on constate que l'algorithme NSGA-II a pu trouver le front de Pareto optimal.



**Figure IV-5 :** Convergence des différentes méthodes pour le cas test de ZDT4 [152]

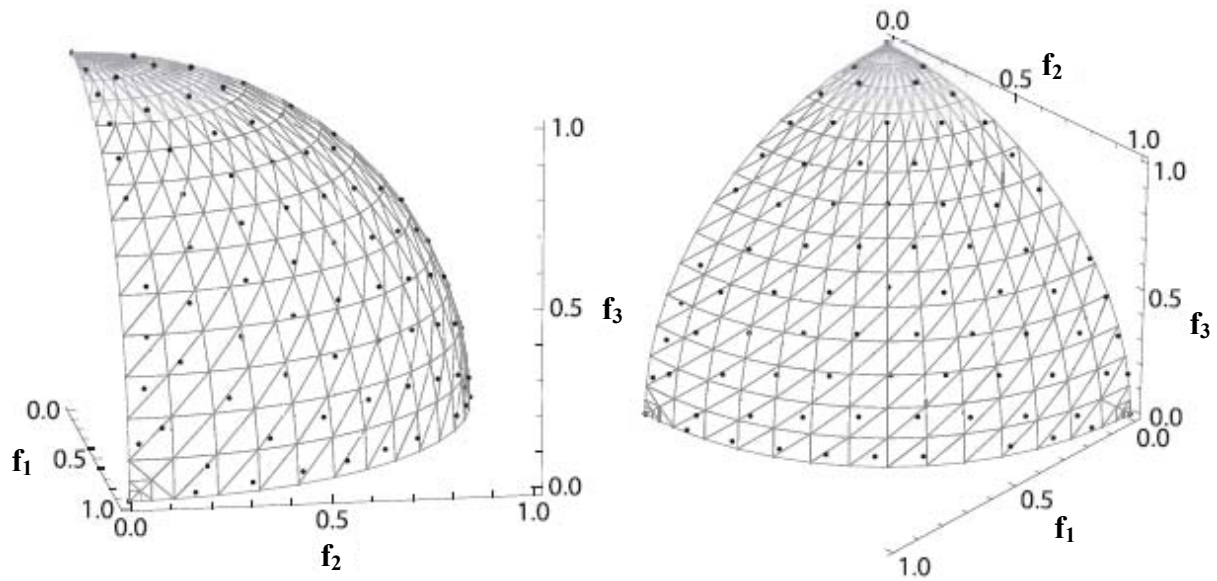


**Figure IV-6 :** Convergence de l'algorithme NSGA-II pour le cas test de ZDT4

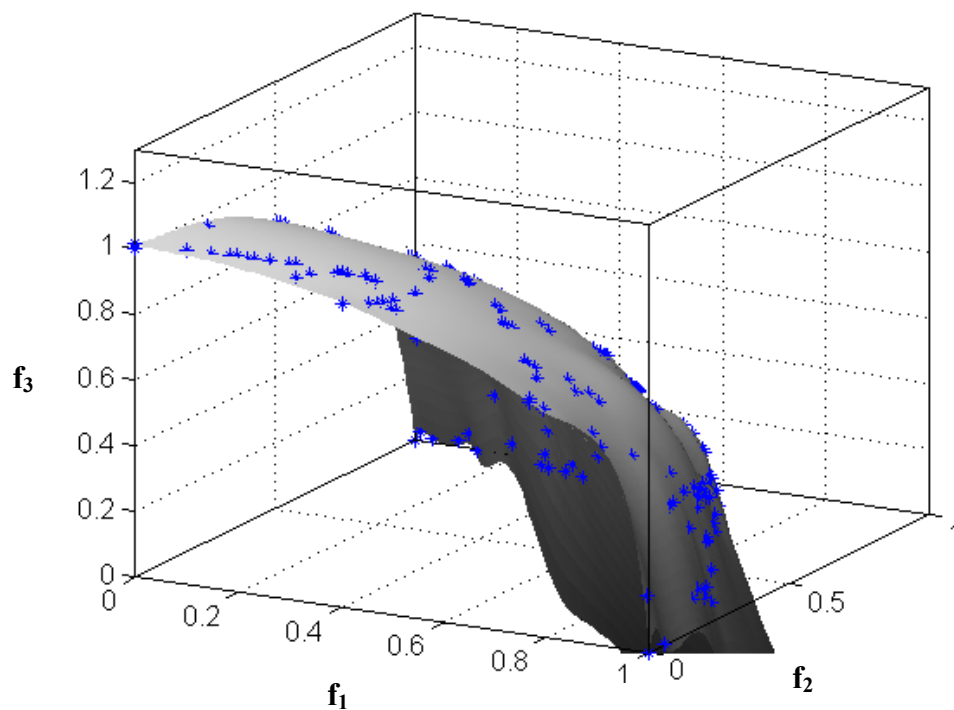
#### IV.2.4.2. Problème tri objectif : fonction test DTLZ2 [153]

On considère maintenant une fonction test tridimensionnelle, relativement simple, introduite par Deb et al. [153]. Cette fonction, dont l'expression est définie par l'équation (IV.7), est appelée DTLZ2. La Figure IV-7 représente la surface de Pareto obtenue dans la littérature [153] pour ce problème. On a tracé les résultats obtenus par notre code de NSGA-II dans la Figure IV-8. Afin de représenter au mieux la surface de Pareto, le nuage de points (\*) a été remplacé par une surface de substitution au sens de moindres carrés.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiser} && (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), f_3(\mathbf{X})), \quad \mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3] \\
 &&& f_1(\mathbf{X}) = (1 + g(x_3)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \\
 &&& f_2(\mathbf{X}) = (1 + g(x_3)) \cos(x_1\pi/2) \sin(x_2\pi/2) \\
 &&& f_3(\mathbf{X}) = (1 + g(x_3)) \sin(x_1\pi/2) \\
 &&& g(x_3) = (x_3 - 0.5)^2 \\
 &&& 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{IV.7}$$



**Figure IV-7 :** Solutions pour le cas test de DTLZ2 [153]



**Figure IV-8 :** Solutions trouvées par le NSGA-II adapté pour le cas test de DTLZ2

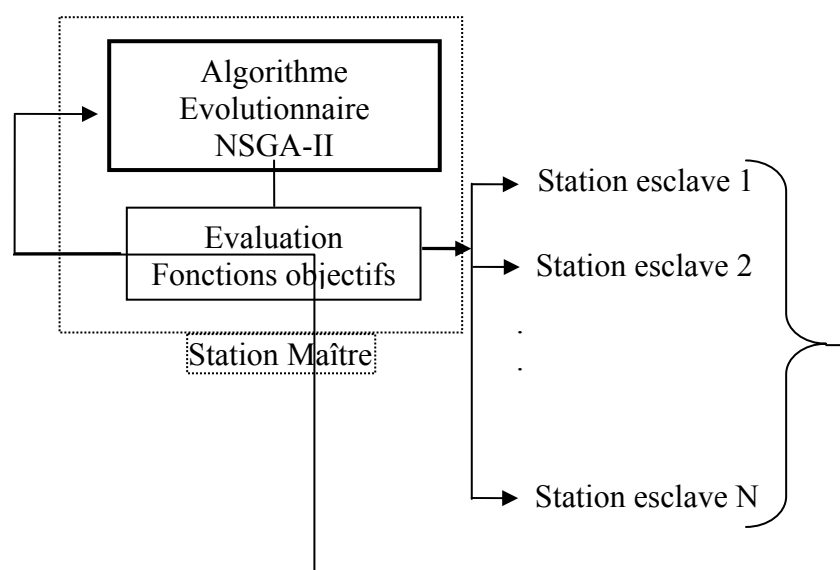
A l'issue de l'étude comparative portant sur deux cas test bi-objectif et tri-objectif, on constate une bonne corrélation entre les résultats obtenus par notre programme et ceux présentés dans la littérature ce qui valide très largement l'algorithme NSGA-II développé et permet d'envisager son utilisation pour l'optimisation de différents critères caractéristiques des engrenages.

### IV.3. Engrenages : Optimisation multicritères

Dans cette section, l'algorithme NSGA-II est combiné avec le modèle numérique d'engrenage afin de conduire une optimisation multicritère. L'objectif principal est de définir les corrections de dentures qui aboutissent au meilleur compromis vis-à-vis d'un certain nombre de critères représentatifs de la performance d'un engrenage. Le cas d'un engrenage hélicoïdal (cas 1-Tableau II-1) est traité. L'étude débute avec des problèmes bi-objectifs et évolue ensuite vers la résolution de problèmes tri-objectifs.

#### IV.3.1. Démarche de résolution : Stratégie de parallélisation

L'algorithme NSGA-II nécessite des populations importantes et l'évaluation des performances d'un individu prend environ 12 secondes, ce qui est nettement plus long que dans le cas des problèmes ZDT4 et DTLZ2. Aussi, pour réduire sensiblement le temps calcul, une parallélisation de l'exécution du code a-t-elle été mise en œuvre. En effet, l'un des avantages de l'algorithme génétique est qu'il se prête aisément à la parallélisation des calculs. Une description complète de la méthode est détaillée dans la littérature [154]. Une station maîtresse commande la boucle principale de l'algorithme NSGA-II comportant les étapes ordinaires de l'algorithme génétiques (sélection, remplacement, mutation et croisement). A chaque génération, les valeurs de performance associées à chaque individu sont évaluées en parallèle dans des stations esclaves. La Figure IV-9 illustre le principe de parallélisation évoquée. Le comportement de l'algorithme parallèle obtenu ressemble alors à celui d'un algorithme séquentiel [154]. L'utilisation de ce procédé accroît la vitesse d'exécution, le temps de calcul est réduit d'un facteur 3 en utilisant le cluster de calcul du laboratoire.



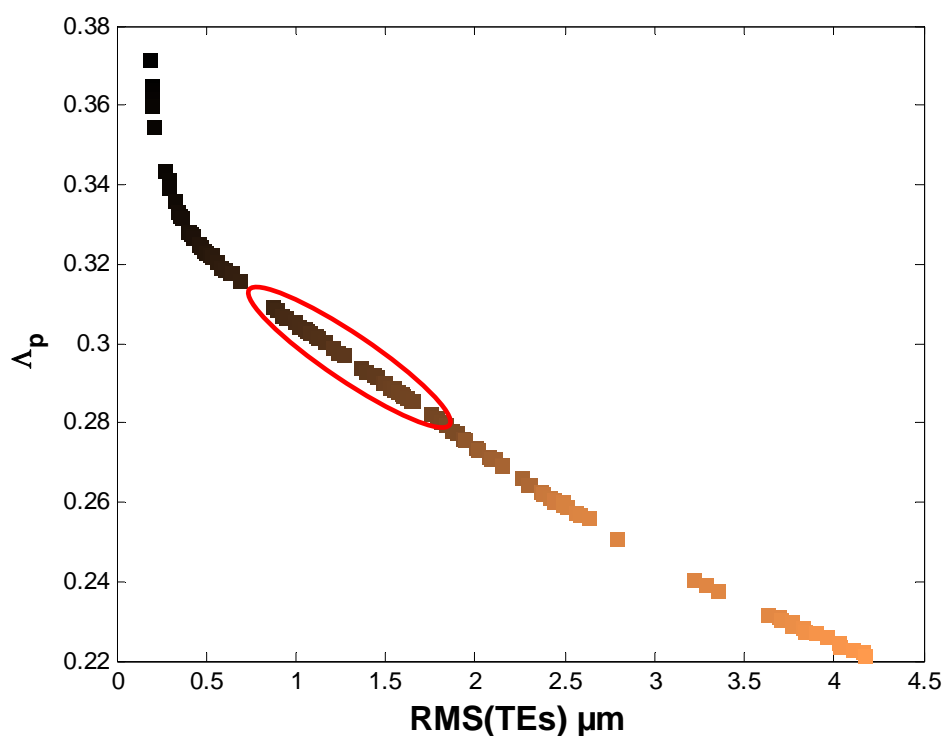
**Figure IV-9 :** Principe du calcul parallèle «parallélisation»

### IV.3.2. Applications

#### IV.3.2.1. Problèmes bi-objectifs

##### ■ Problème 1 :

On considère dans ce paragraphe l'optimisation simultanée de deux fonctions objectifs. La Figure IV-10 présente le front de Pareto obtenu pour la combinaison du facteur de perte ( $\Lambda_p$ ) et du RMS de l'erreur de transmission quasi-statique. Les variables d'optimisation sont les paramètres de correction de profil : profondeur adimensionnée ( $E^*$ ) et longueur ( $\Gamma$ ). Cette correction est linéaire, symétrique et n'est appliquée qu'en tête des dents. On constate l'effet antagoniste des deux critères considérés. Le concepteur possède ainsi une information intéressante supplémentaire : il connaît les niveaux des critères qu'il est possible d'atteindre simultanément. Supposons que la zone d'intérêt soit celle indiquée par le contour rouge dans la Figure IV-10 (elle présente un compromis raisonnable entre les pertes et le niveau du bruit (RMS(TEs)) dans le système).

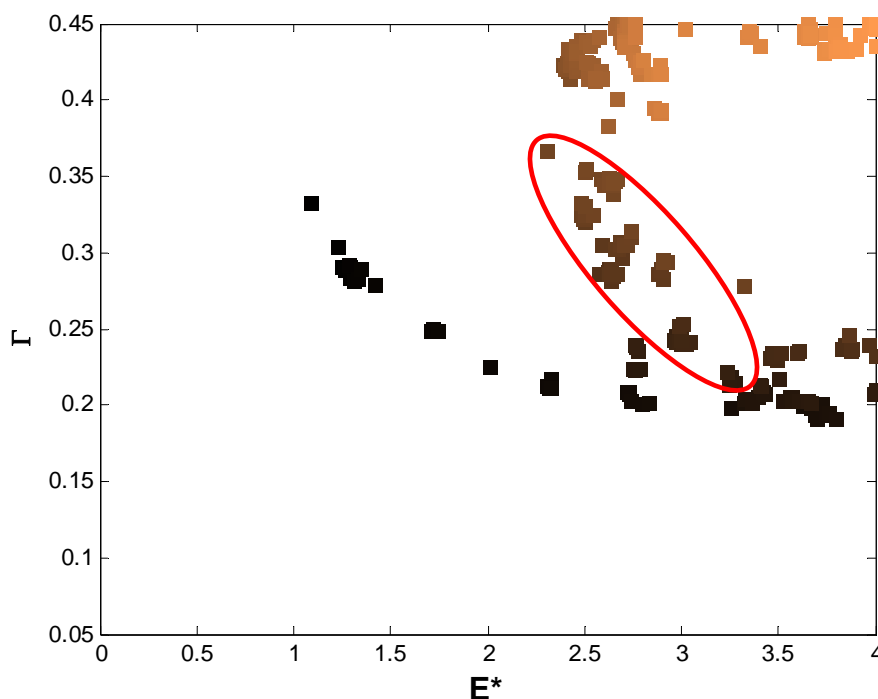


**Figure IV-10 :** *Front de Pareto-RMS (TEs)/ $\Lambda_p$*   
 (Cas 1 \_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850Nm$ )

La Figure IV-11 présente les combinaisons de corrections de forme de dentures qui correspondent au front de Pareto déjà trouvé dans la figure précédente. Afin de mieux localiser ces combinaisons un dégradé de couleur a été employé (avec correspondance des couleurs). Les résultats obtenus sont conformes à ceux trouvés dans les chapitres précédents (chapitre 2 : voir Figure II-6). En effet, des valeurs importantes de corrections de formes ont tendance à faire décroître le facteur des pertes et en conséquence de réduire les pertes par



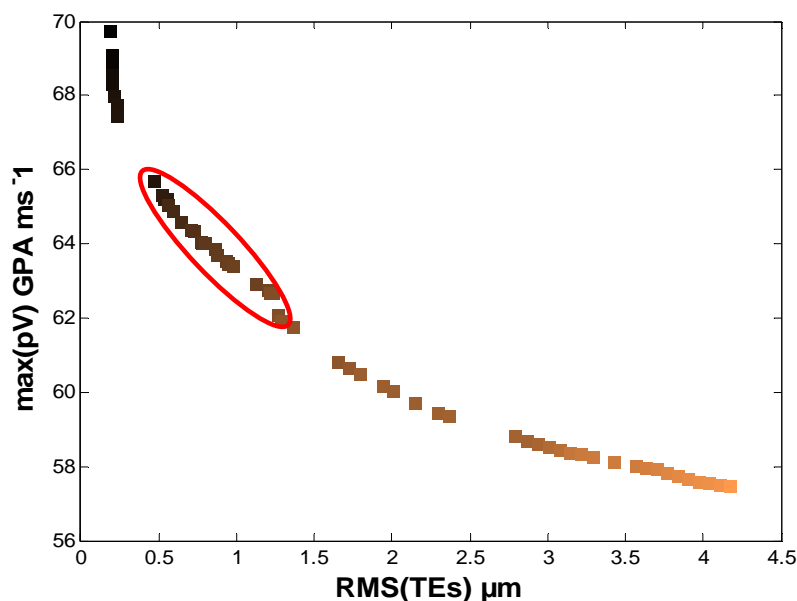
frottement entre dentures. De même, pour réduire les fluctuations de l'erreur de transmission, l'algorithme NSGA-II retrouve la zone déjà obtenue par les différentes méthodes exposées dans les chapitres précédents. Dans cette figure, les combinaisons correspondant à la zone de compromis choisie sont indiquées en rouge. Cette zone est définie par une longueur adimensionnée entre 0.2 et 0.35 et des valeurs importantes de la profondeur adimensionnée ( $2.5 < E^* < 3.5$ ).



**Figure IV-11 :** Solutions associées au front de Pareto  
(Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850Nm$ )

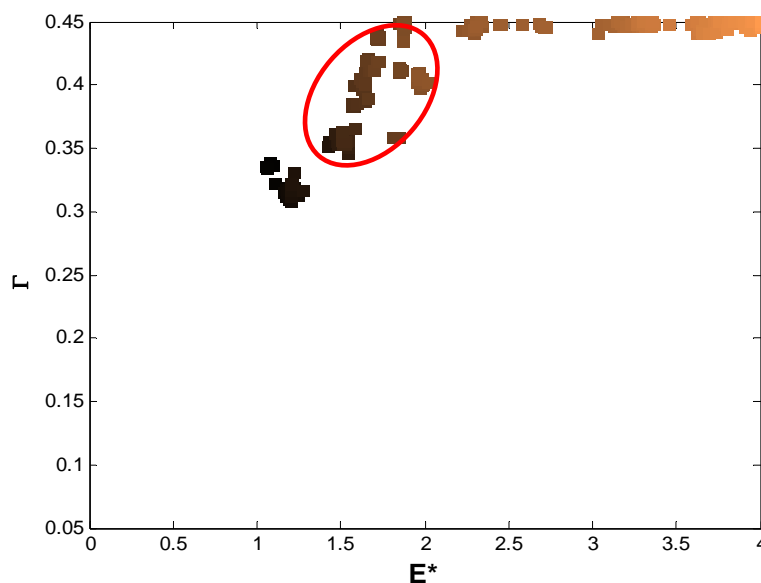
▪ **Problème 2 :**

On s'intéresse ici à l'optimisation simultanée de la valeur maximale du produit  $pV$  ( $\max(pV)$ ) et du  $RMS(TEs)$ . Les résultats obtenus sont tracés dans la Figure IV-12. L'algorithme NSGA-II permet l'obtention d'un front de Pareto dont la forme ressemble à celle trouvée dans l'exemple précédent. A nouveau, nous supposons que la zone intéressante est celle caractérisée par un contour rouge. A cette zone sont associées les combinaisons de corrections de profil désignées également par un contour rouge dans la Figure IV-13. Elles sont caractérisées par une longueur adimensionnée importante  $\Gamma > 0.35$ , et une plage réduite de variation de la profondeur adimensionnée ( $1.5 < E^* < 2$ .)

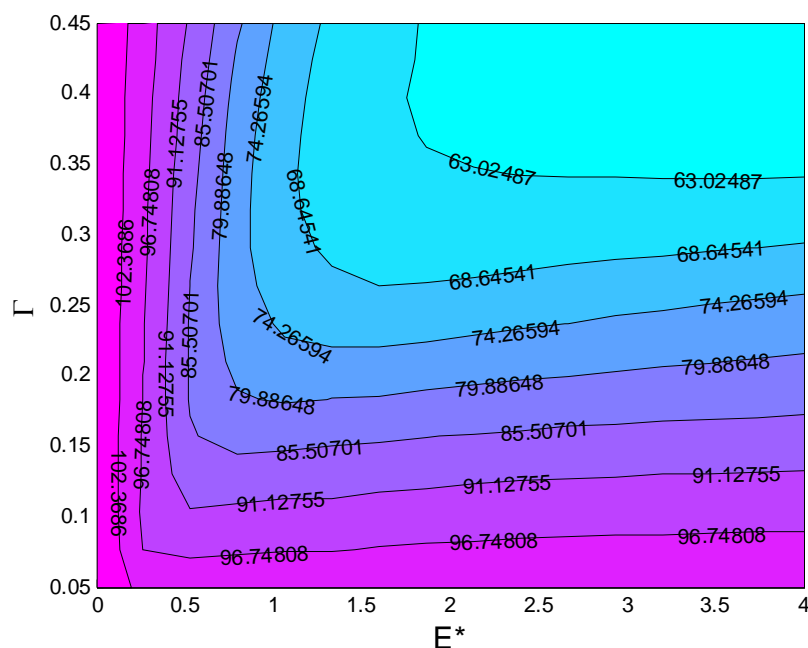


**Figure IV-12 :** *Front de Pareto-RMS (TEs)/max(pV)*  
 (Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850Nm$ )

On constate que des valeurs de profondeur de correction importantes associées à des longueurs elles-mêmes importantes ont tendance à réduire le produit pV. Concernant le RMS(TEs), contrairement au exemple précédent, on ne retrouve qu'une partie de la forme caractéristique qui le minimise (amas de points sombres). Ceci est dû essentiellement à l'évolution de l'autre fonction objectif (max(pV)) avec les paramètres de correction de profil (voir Figure IV-14) : tous les points au voisinage de la courbe maîtresse optimisent le RMS(TEs) et parmi ceux-ci, ceux qui présentent une valeur du critère pV minimale ont une longueur de correction plus importante.



**Figure IV-13 :** *Solutions associées au front de Pareto*  
 (Cas 1\_Tableau II-1:  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850Nm$ )



**Figure IV-14:**  $\max(pV)$  en  $\text{GPa.m.s-1}$   
 (Cas 1\_ Tableau II-1 :  $\varepsilon_\alpha = 1.48$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.34$ ,  $C_m = 850\text{Nm}$ )

▪ **Problème 3 :**

Au chapitre 3, une fonction de robustesse  $F_{rob}$  a été introduite pour caractériser les solutions robustes vis-à-vis du RMS(TEs) sous la forme :

$$F_{rob}(E, \Gamma, \dots) = \mu_{RMS(TEs)} + 2\sigma_{RMS(TEs)} \quad (\text{IV.8})$$

On propose ici l'optimisation simultanée des deux paramètres statistiques intervenant dans l'équation ci-dessus pour le cas d'engrenage hélicoïdal présenté au Tableau II-1 en considérant une classe de qualité 7 (voir le Tableau III-2). La méthode de quadrature de Gauss (QG) est utilisée afin d'estimer leurs valeurs. Les solutions de Pareto obtenues sont tracées dans la Figure IV-15 et les combinaisons  $(E, \Gamma)$  correspondantes sont portées dans la Figure IV-16.

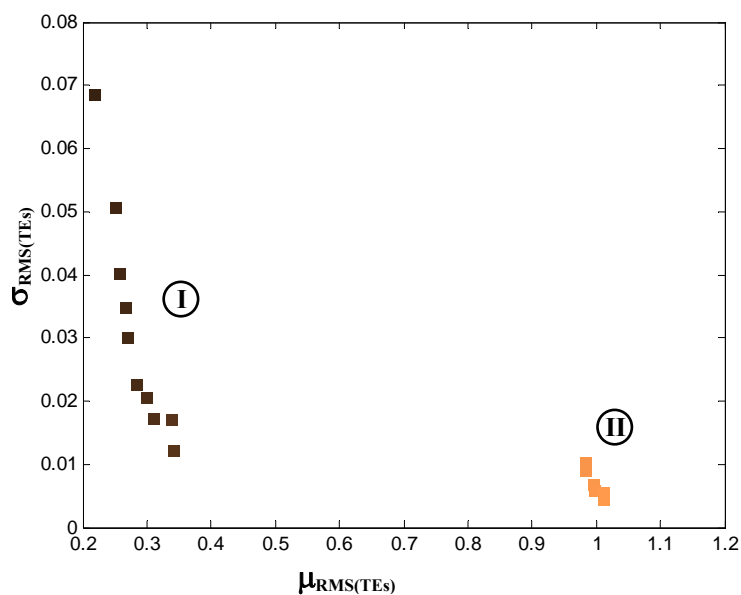


Figure IV-15 : Front de Pareto- $\mu_{\text{RMS}(\text{TE}_s)} / \sigma_{\text{RMS}(\text{TE}_s)}$

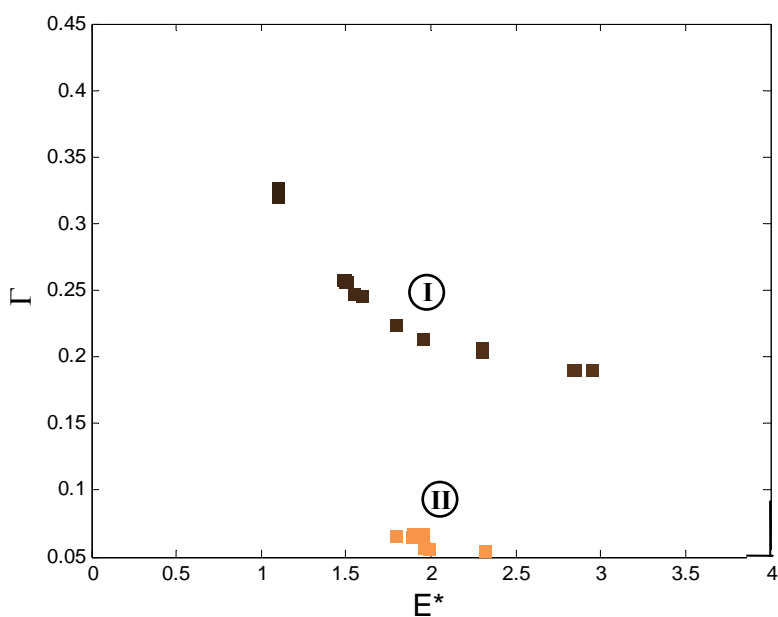


Figure IV-16 : Solutions associées au front de Pareto

L'algorithme NSGA-II a permis l'obtention d'un front de Pareto avec deux parties principales :

- une partie I qui est plus intéressante puisqu'elle diminue notablement le facteur de dispersion  $\sigma_{\text{RMS}(\text{TE}_s)}$  sans pour autant augmenter la valeur moyenne  $\mu_{\text{RMS}(\text{TE}_s)}$ ,
- la partie II permet l'obtention d'une diminution importante de l'écart type mais elle dégrade la performance vis à vis la valeur moyenne.

Ce constat est conforme aux résultats obtenus au chapitre 3 avec la fonction robustesse telle qu'elle est définie (somme pondérée, voir Equation (IV.8)). En effet, pour l'ensemble

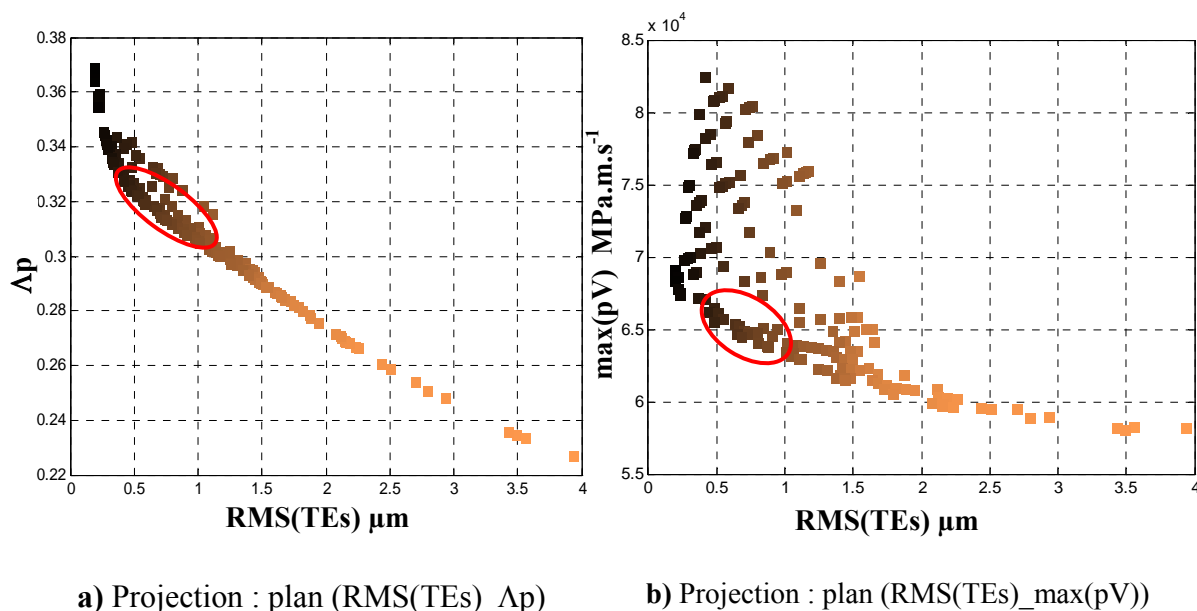
des simulations conduites, les solutions robustes se localisent bien au voisinage de la courbe qui définit les paramètres de correction de profil qui minimisent le RMS(TEs).

### IV.3.2.2. *Problèmes tri objectifs*

#### ▪ **Problème 1 : (2 variables d'optimisation ( $E$ , $\Gamma$ ))**

Dans ce paragraphe, on propose la recherche de la surface de Pareto pour des problèmes d'optimisation comportant 3 fonctions objectifs : RMS(TEs), produit pression x vitesse ( $pV$ ), coefficient de pertes  $\Delta p$ . On considère, comme variables à optimiser, les paramètres ( $E^*$ ,  $\Gamma$ ) pour des corrections du profil linéaires, symétriques et appliquées en tête de dents.

La représentation sur une figure plane des fronts de Pareto tridimensionnels est délicate et nous avons opté, Figure IV-17, pour deux projections du nuage de points issu de l'algorithme NSGA-II. Ces points correspondent aux solutions non dominées pour ce problème. Une zone intéressante d'optimisation correspond aux zones cerclées sur les deux figures ci-dessous.



**Figure IV-17 : Front de Pareto**

La Figure IV-18 représente les combinaisons de corrections de profil associées aux solutions de Pareto tracées dans la figure précédente et, de même, le contour rouge dans cette figure correspond à la zone d'optimisation déjà indiquée. Elle est caractérisée par des profondeurs de corrections de profil  $E^*$  situées entre 1.4 et 2.1 et des longueurs  $\Gamma$  entre 0.29 et 0.37.

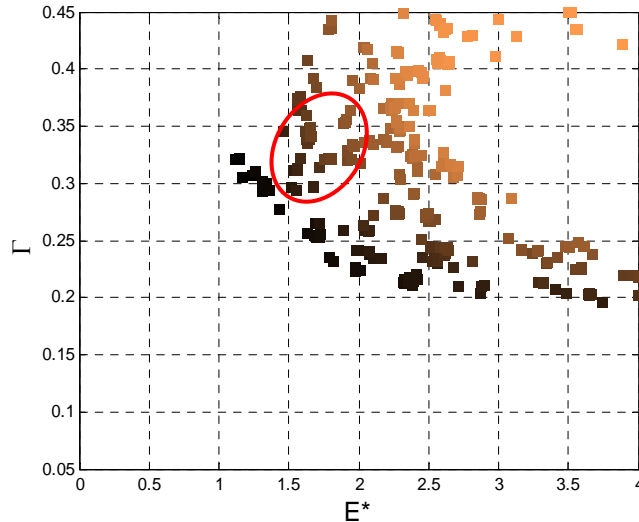


Figure IV-18 : Solutions associées au front de Pareto

▪ **Problème 2 : (3 variables d'optimisation (E,  $\Gamma$ , Ap))**

L'optimisation est maintenant conduite simultanément sur ces 3 fonctions objectif en utilisant l'algorithme NSGA-II en considérant les critères suivants :

- les fluctuations de l'erreur de transmission : RMS(TEs)
- le rendement mécanique via le facteur de perte  $\Lambda_p$
- l'uniformité de la distribution du chargement afin de réduire les risques d'écaillage dans une zone de contact localisée et d'éviter des contacts aux bords de dentures. Cette uniformité est caractérisée dans cette étude par la minimisation d'un facteur de distribution  $K_{dist}$  défini comme le rapport entre la charge locale maximale et une charge statique moyenne, soit :

$$K_{dist} = \max_{i,j} \left( \frac{\Delta_{ij} \cdot K_{ij}}{F_s} \right) \quad (IV.9)$$

$\Delta_{ij}$  : écrasement associé au segment (i,j) (voir chapitre 1)

$K_{ij}$  : raideur du segment (i,j)

$F_s$  est la charge statique :

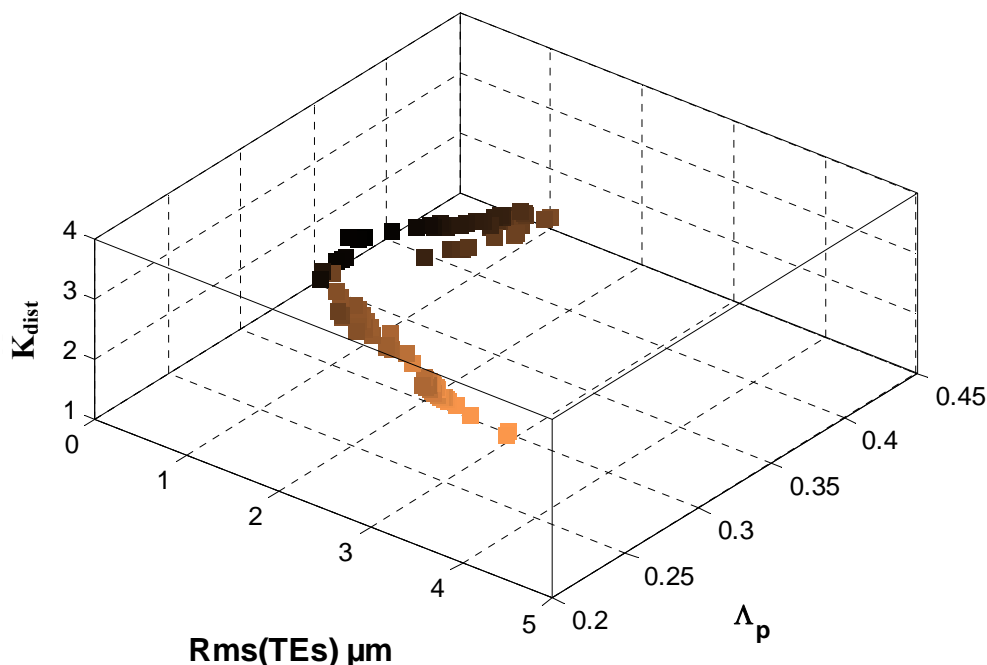
$$F_s = \frac{Cm}{r_{b1} \cos \beta_b \cdot N \cdot E(\varepsilon_\alpha)} \quad (IV.10)$$

$E(\varepsilon_\alpha)$  : partie entière du rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$

N : nombre de segments par ligne de contact

Durant le processus d'optimisation, les contraintes classiques en termes de résistance à la flexion et à la pression superficielle sont assurées.

Les variables d'optimisation sont les paramètres de correction de profil ; profondeur adimensionnée  $E^*$  et longueur adimensionnée  $\Gamma$ , à qui on associe un bombé parabolique caractérisé par  $Ap^*$ .



**Figure IV-19 :** *Front de Pareto :RMS(TEs)-max(pV)-K<sub>dist</sub>*

La Figure IV-19 présente les résultats obtenus par la procédure d'optimisation multicritère. On constate la présence de solutions non-dominées qui forment un front (surface) de Pareto. Néanmoins, il est difficile de visualiser ce front dans un espace 3D. Pour ce faire, on a eu recours à une projection dans l'espace 2D (RMS(TEs),  $\Lambda_p$ ) avec l'emploi des points caractéristiques représentant les coordonnées du front selon la 3<sup>ème</sup> dimension (axe  $K_{dist}$ ). Cette projection est illustrée dans la Figure IV-20. De même, à ces solutions correspondent les combinaisons de corrections de formes présentées dans la Figure IV-21 tout en respectant le dégradé des couleurs. Ainsi, le concepteur peut facilement choisir une de ces solutions obtenues selon les exigences requises. Une zone de bonnes performances est, par exemple, celle encadrée par le contour vert dans les deux figures. Pour cette zone, la minimisation des fluctuations de l'erreur de transmission (RMS(TEs)) est favorisée tout en gardant des niveaux raisonnables pour le rendement (facteur  $\Lambda_p$ ) et pour la distribution de la charge ( $K_{dist}$ ). Elle correspond à des profondeurs de corrections de profil  $E^*$  situées entre 0.7 et 1.7, des longueurs  $\Gamma$  entre 0.23 et 0.33 associées à de faibles amplitudes du bombé ( $Ap^* < 0.2$ ).

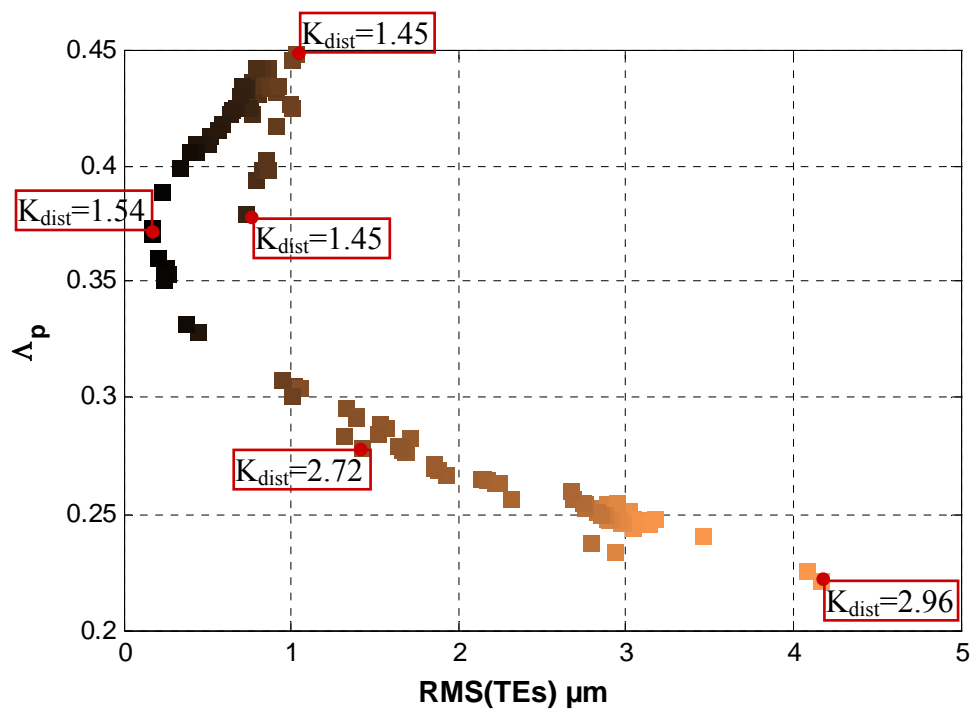


Figure IV-20 : Projection du Front de Pareto :RMS(TEs)-max(pV)- $K_{dist}$

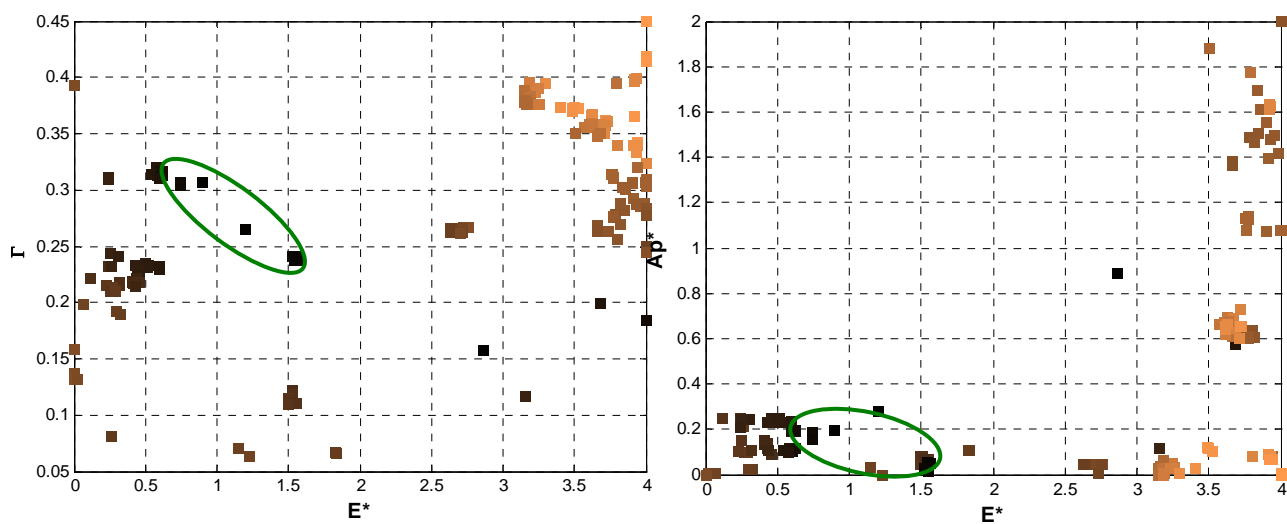


Figure IV-21 : Combinaisons de correction associées au front de Pareto



## IV.4. Conclusion

La conception de corrections de dentures des engrenages est un exemple de problèmes d'optimisation multidisciplinaire intégrant plusieurs critères. Pour résoudre un tel problème nous avons opté pour l'algorithme NSGA-II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II) comme méthode d'optimisation. Il s'agit d'une variante des algorithmes génétiques combinée avec la méthode de Pareto (principe de dominance). En effet, l'algorithme génétique (à travers ses différents opérateurs de croisement, mutation,...) effectue une exploration non systématique de l'espace de recherche et renvoie la ou les meilleures solutions (principe de dominance) rencontrées durant la résolution. A l'issue de la procédure d'optimisation, on obtient un ensemble de solutions constituant ainsi le front de Pareto.

Après avoir explicité la démarche de résolution, la validité de l'algorithme NSGA-II est examinée pour différents cas tests traités dans la littérature. Cette méthode est appliquée ensuite pour conduire des optimisations multicritères des paramètres de corrections de dentures. L'ensemble des résultats obtenus montre l'aptitude de cette méthode à trouver des fronts de Pareto. Ceux-ci présentent, pour le concepteur, un support pertinent d'aide à la sélection des combinaisons de corrections aboutissant au meilleur compromis.

Néanmoins, même avec la procédure proposée de parallélisation du calcul (openMP), la convergence de cet algorithme exige un temps de calcul qui reste toujours conséquent (le cas de deux paramètres avec deux critères nécessite 8h de calcul avec parallélisation). Cependant, l'ajout de la robustesse dans la phase d'optimisation multicritère, qui passe par la détermination des paramètres statistiques associés à chacun des critères considérés, conduit toujours à des temps de calcul de prohibitifs.

# Conclusion générale

Il est généralement admis que les modifications volontaires de forme des dentures d'engrenage servent essentiellement à compenser les écarts de position ainsi que les déformations des dents et de la structure afin d'assurer une mise en charge progressive de chaque couple de dents. Ces modifications ont toutefois un impact sur l'ensemble des paramètres qui reflètent les performances du système. Avant de conduire une procédure d'optimisation, le concepteur doit donc avoir une idée de l'influence des variables de conception sur les performances du système, afin de définir au mieux les critères et le(s) fonction(s) objectif(s). Les résultats présentés dans cette partie d'étude reposent sur des modèles numériques du comportement statique et dynamique d'engrenages développés au LaMCoS [1]-[3] qui intègrent les déformations des corps des mobiles et des structures supports. Une approche analytique originale caractérisant les fluctuations de l'erreur de transmission quasi statique a été présentée. Son intérêt principal est de permettre une évaluation rapide du rôle des paramètres de correction sur l'erreur de transmission et d'autoriser ainsi des études paramétriques conséquentes. Dans un deuxième temps, un problème complexe est abordé dans le but de raffiner la procédure d'optimisation en s'appuyant sur l'utilisation d'un algorithme génétique. Ce problème est caractérisé par la présence de plusieurs variables correspondant à des corrections différentes entre roue et pignon. Les résultats obtenus permettent, entre autres, d'examiner la pertinence de corrections de profil symétriques largement utilisées dans les travaux de recherches.

L'optimisation conventionnelle minimise la valeur nominale de la fonction de performance (objectif) tout en négligeant ses variations dues à des erreurs de fabrication et de fonctionnement. En pratique, les variables et les paramètres de conception sont toutefois caractérisés par des intervalles de tolérance qui ne peuvent pas être ignorés. Par conséquent, une conception robuste se doit d'optimiser à la fois la valeur nominale attendue et les déviations de la fonction objectif. Dans le contexte d'optimisation robuste de corrections de forme de dentures, plusieurs méthodologies ont été proposées :

- a) Une approche analytique basée sur un développement de Taylor valable pour une raideur linéique d'engrènement supposée constante (le cas de la norme ISO-6336 [30] par exemple).
- b) Une approche « hybride » qui combine les résultats analytiques et numériques issus de modèles du LaMCoS [1]-[3]. Partant d'une solution approchée donnée par les développements analytiques, la zone des solutions correspondant à un modèle plus fin d'engrènement est déterminée par une méthode de descente (gradient). Un balayage plus raffiné et ciblé est ensuite introduit afin de minimiser les temps de

calcul. Les paramètres statistiques figurant dans la fonction objectif de robustesse sont évalués par une méthode de quadrature de Gauss.

c) Enfin, une approche purement numérique qui combine le modèle numérique initial [1]-[3] et un algorithme génétique lorsque le nombre de paramètres de correction devient plus important.

Chaque approche apparaît comme adaptée à des cas d'étude donnés puisque son application dépend du nombre de paramètres à optimiser et du modèle d'engrenage choisi. Différentes méthodes d'estimation des paramètres statistiques ont été également présentées : développement de Taylor, simulation de Monte Carlo et méthode de quadrature de Gauss et la robustesse des paramètres des corrections de dentures a été largement étudiée, en présence d'écarts géométrique (classes de qualité, formes, ...), de défauts d'alignement et de variations de paramètres fonctionnels tels que le chargement.

Comme dans tout secteur industriel, le processus de conception des engrenages est en constante évolution afin de répondre aux demandes et attentes des clients sur le produit final. Pour des exigences d'économie d'énergie, qui demeurent fortes, les préoccupations majeures dans la conception des engrenages se focalisent sur l'amélioration du rendement, la réduction de la masse et de l'encombrement tout en gardant la tenue à la pression de contact et à la rupture. Conserver une durée de vie satisfaisante représente également une préoccupation majeure des concepteurs d'engrenages. Cette longévité incite à améliorer les conditions de fonctionnement tout en réduisant les risques d'usures et d'élévation de la température de service. Enfin, la réduction des nuisances vibratoires et acoustiques a été un souci constant au cours des trente dernières années. Le concepteur doit donc prendre en compte ces nombreux critères qui, généralement, ne peuvent pas être satisfaits simultanément et justifient des travaux relatifs à l'optimisation robuste multicritère.

Les objectifs pratiques considérés dans cette étude sont :

- a) l'amélioration du rendement mécanique en minimisant le facteur de perte par frottement,
- b) la réduction des fluctuations d'erreur de transmission ; source de bruit et vibrations,
- c) la réduction du produit pV (pression \* Vitesse) considéré comme un des paramètres reflétant les risques d'apparition de différentes modes de défaillance dans le système (usure, grippage,...),
- d) l'uniformité de la distribution du chargement afin de réduire les risques d'avaries de surface.

Pour tenir compte de cet aspect multicritère, on a eu recours à une approche basée sur la notion de dominance entre les différentes solutions du problème. Elle s'appuie sur les méthodes de Pareto pour lesquelles un ensemble de solutions potentielles, non dominées, est identifié à partir d'un front optimal nommé « front de Pareto » [143]. Afin de trouver ces solutions, un algorithme génétique spécifique appelé NSGA-II a été implémenté et validé. Initialement développé par Deb et al [150], cet algorithme est considéré comme étant une des méthodes les plus efficaces et plus rapides pour résoudre les problèmes multicritères. Cette approche s'avère être un outil pertinent d'aide à la décision car, parmi les résultats de Pareto obtenus, le concepteur peut sélectionner les solutions répondant au mieux aux attentes des clients.

Les perspectives de développement sont nombreuses et les points suivants nécessitent, à l'évidence, des recherches complémentaires :

- a) l'extension des développements analytiques vers des modélisations d'engrènement plus réalistes,
- b) la prise en compte d'un modèle global incluant les influences de désalignements sous charge,
- c) l'introduction de la robustesse dans le processus d'optimisation multicritères qui, pour l'heure, se heurte à des contraintes importantes de temps de calcul,
- d) enfin, l'extension des démarches et modèles à des systèmes d'engrenages plus complexes (trains épicycloïdaux, trains planétaires, différentiels ...).

## Références Bibliographiques

- [1] **Velex, P., Maatar, M.**, “*A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behavior formulae*”. J. Sound Vib. Vol. 191, p. 629–660, 1996.
- [2] **Velex, P.**, “*Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*”. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. N°88 ISAL 0032, 188 p, 1988.
- [3] **Maatar, M.**, “*Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts déforme et des défauts de montage*”. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. N°95 ISAL 0028. 192 p, 1995.
- [4] **Sainsot, P.**, “*Analyse du contact entre dentures d'engrenage cylindriques de réducteur*”. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. N°89 ISAL 0091, 205 p, 1989.
- [5] **Haddad, C. D.**, “*The elastic analysis load distribution in wide-faced helical gears*”. PhD Thesis, University of Newcastle. 470 p, 1991.
- [6] **Haddad, C. D., Pennell, J.A.**, “*A PC-based program for three-dimensional elastic analysis of load distribution in wide-faced spur and helical gears*”. Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris. Vol. 1, p. 201-211, 1992.
- [7] **Kahraman, A., Singh R.**, “*Non linear dynamics of a spur gear*”. Journal of Sound and Vibration, 142(1), 49-75, 1989.
- [8] **Bettaieb, M. N., Velex, P., Ajmi, M.**, “*A static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations - Applications to thin-rimmed gears*”. ASME, Journal of Mechanical Design, vol.119, n°2, p.184-195, ISSN: 1050-0472, 2007.
- [9] **Bettaieb, M. N.**, “*Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles*”. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. N°2006 ISAL 0030, 170 p, 2006
- [10] **Maatar, M., Velex, P.**, “*Quasi-Static and Dynamic Analysis of Narrow-Faced Helical Gears With Profile and Lead Modifications*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 119(4), pp. 474–480, 1997.
- [11] **Tuplin, W. A.**, “*Dynamic Loads on Gear Teeth*”. Machine Design, Vol. 25, p. 203-211, 1953.

- [12] **Remmers, E. P.**, “*Gear Mesh Excitation Spectra for Arbitrary Tooth Spacing Errors, Load and Design Contact Ratio*”. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 100, N° 10, p. 715-722, 1978.
- [13] **Pearce, W. J., Nielsen, M. A. et Rouverol, W. S.**, “*Reducing Gear Noise Excitation*”. Proc. of the 2nd World Congress on Gearing, Paris 1986, Vol.1, p.587- 598.
- [14] **Welbourn, D.B.**, “*Gear errors and their resultant noise spectra*”. Proceedings of Institution of Mechanical Engineers. Vol. 184, Part 30, p. 131-139, 1969.
- [15] **Kohler, H. K., Pratt, A., Thompson, A. M.**, “*Dynamics and Noise of Parallel-Axis Gearing*”. Proc. Inst. Mech. Engrs, London. Vol. 184, Pt30, p.111-121, 1969.
- [16] **Kassaï, A., Mathieu, J.P., Chahmirian, G.**, “*Sirènement de denture : Composantes non harmoniques de l'engrènement liées à la rectification par génération*” Proc. of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, Vol. 2, p. 853-864, 1992.
- [17] **Gregory, R.W., Harris, S.L., Munro, R.G.**, “*Torsional motion of a pair of spur gears*”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Vol. 178, Part 3, p. 166-173, 1963.
- [18] **Gregory, R. W., Harris, S. L., Munro, R. G.**, “*Dynamic Behavior of Spur Gears*”. Proc. IMechE Int. Conf. Gearing, 178, pp. 261–266, 1963.
- [19] **Velex, P., Ajmi, M.**, “*On the modeling of excitations in geared systems by transmission errors*”. J. Sound Vib. vol. 290, no. 3–5, p. 882–909, 2006.
- [20] **Kubo, A.**, “*Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error*”. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 100, p. 77-84, 1978.
- [21] **Ajmi, M.**, “*Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges*”. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. N°2000 ISAL 0013, 151 p, 2000.
- [22] **Ajmi, M., Velex, P.**, “*A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears*”. Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, p. 173-190, 2004.
- [23] **Küçükay, F.**, “*Dynamik der Zahnradgetriebe. Modelle, Verfahren, Verhalten*”. Springer Verlag, ISBN 3-540-17111-8, Berlin, 1987.
- [24] **Baud, S., Velex, P.** “*Static and dynamic tooth loading in spur and helical geared systems—experiments and model validation*”. ASME, Journal of Mechanical Design, vol.124, n° 2, pp. 334–346. ISSN: 1050-0472, 2002.

- [25] **Lundberg, G.** “*Elastische Berührung zweier Halbräume*”. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Vol.10, n° 5, p. 201–211, 1939.
- [26] **Weber, C., Banaschek, K.**, “*Formänderung und Profiltrücknahme bei Gerad-und Schrägverzahnten Antriebstechnik*”. Heft 11, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1953.
- [27] **Cornell, R. W.**, “*Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth*”, ASME, Journal of Mechanical Design, vol. 103, p. 447–459, 1981.
- [28] **Palmgren, A.** “*Ball and roller bearing engineering (3rd edition)*”. S.H. Burbank & Co, Philadelphia, USA, 1959.
- [29] **Sainsot, P., Velex, P. Duverger, O.**, “*Contribution of Gear Body to Tooth Deflections-A New Bidimensional Analytical Formula*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 126(4):748-752, 2004.
- [30] **International Organization for Standardization**, “*ISO 6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears*”. Part 1-5. Genève, Switzerland, 1996.
- [31] **Houser, D. R., Harianto, J. Talbot, D.**, “*Gear Mesh Misalignment: Defined, Corrected and Analyzed for Stresses and Noise*”. Gear Solutions, June, 2006, p. 34–43.
- [32] **Conry, T., Seireg, A.**, “*A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems*”. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol.95, No.4, p. 1115-1123, 1973.
- [33] **Tavakoli M., Houser D. R.**, “*Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears*”. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 108, pp. 86-95, 1986.
- [34] **Houser, D. R., Harianto, J., Iyer, N., Josephson, J., Chandrasekaran, B.**, “*A Multi-Variable Approach to Determining the ‘Best’ Gear Design*”. Proceedings of the Eighth ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Baltimore, Sep. p. 10–13, 2000.
- [35] **Velex, P., Bruyère, J., Houser, D. R.** “*Some Analytical Results on Transmission Errors in Narrow-Faced Spur and Helical Gears: Influence of Profile Modifications*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 133 (3), pp. 031010-1, 031010-11.
- [36] **International Organization for Standardization**, “*ISO/FDIS 21771, Gears -- Cylindrical involute gears and gear pairs -- Concepts and geometry*”, 2007.
- [37] **Lin, H. H., Oswald, F. B., Townsend, D. P.**, “*Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications*”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, no. 8, pp. 1115–1129, 1994.

- [38] **Mohamad, E. N., Komori, M., Murakami, H., Kubo, A., Fang, S.**, “*Analysis of General Characteristics of Transmission Error of Gears With Convex Modification of Tooth Flank Form Considering Elastic Deformation Under Load*”. ASME J. Mech. Des., 131(6), p. 061015, 2009.
- [39] **Harris, S.L.**, “*Dynamic loads on the teeth of spur gears*”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 172, p. 87-112, 1958.
- [40] **Houser, D. R., Bolze, V. M., Graber, J. M.**, “*Static and Dynamic Transmission Error Measurements and Predictions for Spur and Helical Gear Sets*”. Proceedings of the Seventh ASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, p. 365–372, 1996.
- [41] **Vinayak, H., Houser, D. R.**, “*A Comparison of Analytical Prediction With Experimental Measurements of Transmission Error of Misaligned Loaded Gears*”. Proceedings of the Sixth ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, p. 11–19, 1992.
- [42] **Velex, P., Maatar, M., Octrue, M.**, “*Loaded Transmission Error Predictions and Measurements on Spur Gears With Profile Relief*”. Proceedings of IMechE, Gearbox Noise, Vibration and Diagnostics International Conference, Londres, p. 199–208, 1995.
- [43] <http://www.grc.nasa.gov/WWW/RT/RT2001/5000/5950oswald1.html>
- [44] **Munro, R. G.**, “*A Review of the Theory and Measurement of Gear Transmission Error*”. Proceedings of the First International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, p. 3–10, 1990.
- [45] **Yildirim, N., Munro, R. G.**, “*A Systematic Approach to Profile Relief Design of Low and High Contact Ratio Spur Gears*”. Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci., 213(6), p. 551–562, 1999.
- [46] **Yildirim, N., Munro, R. G.**, “*A New Type of Profile Relief for High Contact Ratio Spur Gears*”. Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci., 213(6), p. 563–568, 1999.
- [47] **Sundaresan, S., Ishii, K., Houser, D.R.** “*A Procedure Using Manufacturing Variance to Design Gears With Minimum Transmission Error*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 113 (3), p. 318-325, 1991.
- [48] **Sundaresan, S., Ishii, K., Houser, D.R.**, “*Design Optimization for Robustness Using Performance Simulation Programs*”. J. Des. Automation, 1 (32), p. 249-256, 1991.
- [49] **Sundaresan, S., Ishii, K., Houser, D. R.**, “*A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints*”. Advances in Design Automation (Gilmore, B. J., et al., eds.), ASME, Vol. 65-1, p. 379-386, 1993.



- 
- [50] **Komori, M.; Kubo, A., Suzuki, Y.**, “*Simultaneous optimization of tooth flank form of involute helical gears in terms of both vibration and load carrying capacity*”. JSME International Journal, Series C, vol. 46, n° 4, p. 1572-1581, 2003.
- [51] **Matsumura, S., Umezawa, K., Houjoh, H.**, “*Performance Diagram of a Helical Gear Pair Having Tooth Surface Deviation During Transmission on Light Load*”. Proceedings of the Seventh ASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, Oct. 6–9, p. 161–168, 1996.
- [52] **Höhn, B. R., Michaelis, K., Wimmer, A.**, “*Low Loss Gears*”. AGMA Fall Technical Meeting, Paper No. 05FTM11, 2005.
- [53] **Diab Y.**, “*Analyse des pertes de puissance dans les transmissions par engrenages à grande vitesse. Applications aux réducteurs industriels et aux machines textiles*”. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005.
- [54] **Diab, Y., Ville, F., Vexex, P.**, “*Prediction of Power Losses Due to Tooth Friction in Gears*”. Tribol. Trans., 49(2), p. 260–270, 2006.
- [55] **Xu, H., Kahraman, A., Anderson, N. E., Maddock, D. G.**, “*Prediction of Mechanical Efficiency of Parallel-Axis Gear Pairs*”. ASME J. Mech. Des., 129(1), p. 58–68, 2007.
- [56] **Vexex, P. Ville, F.**, “*An analytical approach to tooth friction losses in spur and helical gears – Influence of profile modifications*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 131 (10), 10 pages, doi: 10.1115/1.3179156, 2009.
- [57] **Ghribi D., Ajmi M., Vexex P., Haddar M.** “*Influence des efforts de frottement sur le comportement dynamique des engrenages droits et hélicoïdaux*”. IMPACT 2010, Djerba-Tunisie, 2010.
- [58] **Archard, J.F.** “*Contact and rubbing of flat surfaces*”. Journal of Applied Physics, Vol. 24, p. 981-988, 1953.
- [59] **Flodin, A., Andersson, S.**, “*A Simplified Model for Wear Prediction in Helical Gears*”. Wear, 249, pp. 285–292, 2001.
- [60] **Bajpai, P., Kahraman, A., Anderson, N. E.**, “*A Surface Wear Prediction Model for Parallel-Axis Gear Pairs*”. ASME J. Tribol., 126, p. 597–604, 2004.
- [61] **Wagaj, P., Kahraman, A.**, “*Effect of Tooth Profile Modifications on Helical Gear Durability*”. ASME J. Mech. Des., 124, p. 501–510, 2002.
- [62] **Kahraman, A., Bajpai, P., Anderson, N.E.**, “*Influence of tooth profile deviations on helical gear wear*”. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 127, p. 656-663, 2005.
-

- 
- [63] **Osman, T.**, “*Simulation de l’usure et d’avaries sur des dentures d’engrenages cylindriques - Influence sur le comportement statique et dynamique de transmissions par engrenages*”, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 225 p, 2012.
- [64] **Osman, T., Velez, Ph.**, “Static and dynamic simulations of mild abrasive wear in wide-faced spur and helical gears”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, p. 911-924, 2010.
- [65] **Block, H.**, “*The Flash Temperature Concept*”. *Wear*, Vol 6, p. 483-493, 1963.
- [66] **Tobe, T., Kato, M.**, “*A Study on Flash Temperature on the Spur gear Teeth*”. *Journal of Engineering for Industry, Trans ASME*, Vol 96, n°1, p. 78-84, 1974.
- [67] **Terauchi, Y.**, “*Scoring of spur gear teeth*”. *Lubr Eng.* 40(1):13–20, 1984.
- [68] **Atan, E.** “*On the prediction of the design criteria for modification of contact stresses due to thermal stresses in the gear mesh*”. *Tribology International*. Vol 38, p. 227–233, 2005.
- [69] **International Organization for Standardization**, “NF ISO 1328-1 or E 23-007-1. Engrenages cylindriques - Système I.S.O. de précision - Partie 1 : Définitions et valeurs admissibles des écarts pour les flancs homologues de la denture”, 1997.
- [70] **Henriot G.** “*Engrenages : conception, fabrication, mise en oeuvre*”. 7ième édition. Paris : Dunod. 875 p, 1999.
- [71] **Pasquier, M.**, “*Contrôle des engrenages parallèles, Techniques de l’ingénieur*”, bm5627.
- [72] **Henriot G.**, “*Traité théorique et pratique des engrenages : étude complète du matériel*”. Tome 2, 5ième édition. Paris : Bordas. 662 p, 1983.
- [73] **Taguchi, G.**, “*System of experimental design*”. Unipub/KrausInternational Publication, New York.
- [74] **Taguchi, G.**, “*Performance Analysis Design*”. *International Journal of Production Research*, Vol. 16, No. 6, p. 521-530, 1978.
- [75] **Taguchi, G.**, “*Taguchi on Robust Technology Development: Bringing Quality Engineering Upstream*”. ASME Press, New York, 1993.
- [76] **D’entremont, K. L., Ragsdell, K. M.**, “*design for Latitude Using TOPT*”, *ASME advances in Design Automation, DE-Vol 14*, p. 265-272.
- [77] **Sandgren, E.**, “*A MultiObjective Design Tree Approach for Optimization Under Uncertainty*”. *Advances in Design Automation* (Ravani, B., ed.), Montreal, Quebec, ASME, Vol. 19-2, p. 249-255, 1989.

- [78] **Yu, J. Ishii, K.**, “*Robust Optimization Method for systems with significant nonlinear effects*”. Advances in Design Automation DE-Vol. 65-1, ASME, p. 371-378, 1993.
- [79] **Yu, J. C. Ishii, K.**, “*Robust Design by Matching the Design with Manufacturing Variation Patterns*”. ASME Design Automation Conference, September 1994, Minneapolis, MN, DE-Vol. 69-2, p. 7-14, 1994.
- [80] **Chen, W., Allen, J.K. Mistree, F.**, “*Robust Concurrent Concept Selection and System Synthesis*”. Advances in Design Automation, ASME DE-Vol. 69-1, p. 141- 149, 1994.
- [81] **Yu, J. C.**, “*Design Optimization for Robustness Using Quadrature Factorial Models*”. Engineering Optimization, Vol 30, p. 203-225, 1998.
- [82] **Box, G., Fung, C.**, “*Studies in quality improvement: minimizing transmitted variation by parameter design*”. In: Report No. 8, Center for Quality Improvement, University of Wisconsin, 1986.
- [83] **Duffy, J., Liu, S., Moskowitz, H., Plante, R., Preckel, P.V.**, “*Assessing multivariate process/product yield via discrete point approximation*”. IIE Transactions 30, p. 535–543, 1998.
- [84] **Mavris, DN., Bandte, O.**, “*A probabilistic approach to multivariate constrained robust design simulation*”. Paper No. AIAA-97-5508, 1997.
- [85] **D'Errico, J.R., Zaino jr N.A.**, “*Statistical Tolerancing using a Modification of Taguchi's Method*”. Technometrics, Vol 30 (4), p. 397-405, 1988.
- [86] **Mineur, H.**, “*Techniques de calcul numérique*”. Dunod, Paris, 605 p, 1966.
- [87] **Ghribi D., Bruyère J., Vex P., Octrue M., Haddar M.**, “*Robust Optimization of Gear Tooth Modifications Using a Genetic Algorithm*”. Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations 2012. Part 5, p. 589-597, Springer, 2012.
- [88] **Ghribi D., Bruyère J., Vex P., Octrue M., Haddar M.**, “*A Contribution to the Design of Robust Profile Modifications in Spur and Helical Gears by Combining Analytical Results and Numerical Simulations*”. ASME, Journal of Mechanical Design. Vol 134, p. 061011-1, 031010-9, 2012.
- [89] **Ghribi D., Bruyère J., Vex P., Octrue M. & Haddar M.**. “*Optimisation des corrections de profil dans les engrenages droits et hélicoïdaux –Approches probabilistes–*”. Journées transmissions mécaniques, INSA Lyon. France, 2011.
- [90] **Shoemaker, A., Tsui, K., Wu, C.** “*Economical experimentation methods for robust parameter design*”. Technometrics 33: p. 415-427, 1991.

- [91] Walker, H., “Gear tooth deflection and profile modification”. The Engineer, 166 (4319), p. 434–436, 1938.
- [92] Arafa, M. H., Megahed, M. M., “Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -C- J. of Mechanical Engin Science, 213 (6), p. 569–580, 1999.
- [93] Deutsches Institut für Normung, “Tragfähigkeits-berechnung von Stirnrädern”, e. V. DIN 3990Teil 1-5. Germany.
- [94] American Gear Manufacturers Association, “Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth”. AGMA USA, 2001.
- [95] Şener, Ö. S., Özgüven, H. N., “Dynamic Analysis of Geared Shaft Systems By Using a Continuous System Model”. J. of Sound and Vib., Vol. 166, no. 3, p. 539–556, 1993.
- [96] Velez, P., Ajmi, M., “Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears – Approximate dynamic factor formulae”. Mechanism and Machine Theory, Vol. 42 p. 1512–1526, 2007.
- [97] Velez, P., Maatar, M., Raclot, J.P., “Some numerical methods for the simulation of geared transmission dynamic behavior formulation and assessment”. ASME, J. Mech. Des., vol. 119, no. 3, p. 292–298, 1997.
- [98] Oehlert, G. W., “A Note on the Delta Method”. The American Statistician, Vol. 46, No. 1, p. 27-29, 1992.
- [99] Padulo, M., Campobasso, M.S., Guenov, M.D., “Comparative analysis of uncertainty propagation methods for robust engineering design”. En: International Conference on Engineering Design, Design for Society, Paris. France, 2007.
- [100] Phadke, M. S., “Quality Engineering using Robust Design”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989
- [101] Parkinson, A., Sorenson, C. Pourhassan, N., “A General Approach for Robust Optimal Design”. Journal of Mechanical Design, Vol. 115 (March), p. 74-80, 1993.
- [102] Driot, N., Perret-Liaudet, J., “Variability of modal behavior in terms of critical speeds of a gear pair due to manufacturing errors and shaft misalignments”. Journal of sound and vibration. Vol 292, p. 824–843, 2006.
- [103] Nonaka, T., Kubo, A., Kato, S., Ohmori, T., “Silent gear design for mass-produced gears with scatters in tooth form accuracy”. ASME Proceedings of the International Power Transmission and Gearing Conference, Scottsdale, USA, Vol. 2, p. 589–595, 1992.

- 
- [104] **Driot, N., Rigaud, E., Sabot, J., Perret-Liaudet, J.**, “*Allocation of Gear Tolerances to Minimize Gearbox Noise Variability*”. Acta Acustica. Vol 87, p. 67-76, 2001.
- [105] **Taguchi, G., Konishi S.**, “*Orthogonal Arrays and Linear Graph*”, American Supplier Institute Press, 1987.
- [106] **Pillet, M.**, “*Les Plans d'Expériences par la Méthode Taguchi*”, Les Editions d'Organisation, 330 p, 1999.
- [107] **Soize, C.**, “*A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics*”. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol 15 (3), p.277-294, 2000.
- [108] **Antonsson, K. E., Otto, K. N.**, “*Imprecision in Engineering Design*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 50th Anniversary special issue, Vol 117 (2), p. 25-32., 1995.
- [109] **Bloch, I.**, “*Information Combination Operators for Data Fusion: A Comparative Review with Classification*”. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 26(1) :52–67, 1996.
- [110] **Ayyub, B. M., Klir, G. J.**, “*Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences*”. CRC Press, 2006.
- [111] **Nigam, S. D., Turner, J. U.**, “*Review of statistical approaches to tolerance analysis*”. Computer-Aided Design, 27(1) : p. 6–15, January, 1995.
- [112] **Morgan, G., Henrion, M.**, “*Uncertainty. A Guide to Dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*”. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [113] **GENTLE, J.**, “*Random number generation and Monte Carlo methods*”. Springer, New York, seconde edition, 2003.
- [114] **Laperriere, L., Kabore. T.**, “*Monte Carlo simulation of tolerance synthesis equations*”. J. Production Research, 39(11): 2395–2406, 2001.
- [115] **Bjorke, O.**, “*Computer-Aided tolerancing*”. ASME Press. 2nd edition, New York, USA, 1989.
- [116] **Skowronski, V.J., Turner J.U.**, “*Using Monte Carlo variance reduction in statistical tolerance synthesis*”. J. Computer-Aided Design, 29 (1): p. 63–69, 1997.
- [117] **Ghanem R. G., Spanos P. D.**, “*Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*”, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [118] **Wiener, N.**, “*The Homogeneous Chaos*”, *American Journal of Mathematics*, 60, p. 897-936, 1938.

- 
- [119] **Dessombz, O.**, “*Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains*”, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°36 2000, 161 p, 2000.
- [120] **Xiu, D., Karniadakis, G. E.**, “*The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*”, SIAM J. Sci. Comput., 24(2), p. 619-644, 2002.
- [121] **Bonnans, J. F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C., Sagastizabal, C.**, “*Optimisation Numérique : aspects théoriques et pratiques*”. Springer, Berlin, 1997.
- [122] **Bellman, R.**, “*Adaptive Control Process: A Guided Tour*”. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1961.
- [123] **Davidon, W.C.**, “*Variable metric method for Minimization*”. AEC Res.Develop. Rep., ANL-599, 1959.
- [124] **Fletcher, R. Powell, M.J.D.**, “*A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*”. Computer J. Vol 6, p. 163-168, 1963.
- [125] **Hestenes, M.R. Stiefel, E.**, “*Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*”. NBS Res. J., Vol 49, p. 409-436, 1952.
- [126] **Abadie, J. Carpentier, J.**, “*Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the case of Nonlinear Constraints*”. In Optimization, Gletcher, R. (Ed.), Academic Press, New York, 1969.
- [127] **Rosenbrock, H. H.**, “*An automatic method for finding the greatest or least value of a function*”. Computer. Journal, (3), p. 175–184, 1960.
- [128] **Powell, M. J. D.**, “*An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives*”. Computer Journal 7: p. 155-162, 1964.
- [129] **Nelder, J. A. Mead, R.**, “*A simplex algorithm for function minimization*”. Computer Journal 7, p. 308–313, 1965.
- [130] **Goldberg, D. E.**, “*Genetic Algorithms in Search, Optimisation, and Machine Learning*”. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. ISBN : 0-201-15767-5, 1989.
- [131] **Fogel, L., Owens, A., Walsh, M.**, “*Artificial intelligence through simulated evolution*”, Wiley, New York, 1966.
- [132] **Holland, J. H.**, “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*”. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [133] **Sarker, R., Mohammadian, M., Yao, X.**, “*Evolutionary Optimization*”. Kluwer Academic Publishers, 2002.

- 
- [134] **Davison, A. C.**, “*Statistical Models*”. Cambridge University Press, ISBN: 0521734495, 0511668872, 738 p., 2008.
- [135] **Lampinen, J.**, “*Camshape optimisation by genetic algorithm*”. Computer-Aided Design. Vol, 35: 727–737, 2003.
- [136] **Renner G. Ekárt A.**, “*Genetic algorithms in computer aided design*”. Computer-Aided Design, 35: p. 709–726, 2003.
- [137] **Davis, L.**, “*Hanbook of Genetic Alogorithms*”. Van Nostrand Reinhold. ISBN: 0-442- 00173-8, 1991.
- [138] **Driot, N.**, “*Etude de la Dispersion Vibroacoustique des Transmissions par Engrenages*”. Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°34 2002, 172 p, 2002.
- [139] **Cornell, R. W., Westervelt, W.W.**, “*Dynamic Tooth Loads and Stressing for High Ratio Spur Gears*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 100(1) p. 69-76, 1978.
- [140] **Ajmi, M., Velez, P.**, “*Multi-Criterion Design of Tooth Modifications in High-Contact-Ratio Spur Gears*”. Proceedings VDI Berichte, No. 1665, Proceedings International Conference on Gears, Munich, Vol. 2, p. 737–749, 2002.
- [141] **Dufailly, J.**, “*Etude Géométrique des engrenages cylindriques de transmission de puissance*”. Volume 1. Ellipses. ISBN : 2-7298-5703-6, 1997.
- [142] **Miettinen, K.**, “*Nonlinear multiobjective optimization*”. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [143] **Pareto, V.**, “*Cours d'économie politique*”. F. Rouge, 1896.
- [144] **Schaffer, J. D.**, “*Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms*”. En Grefenstette, J. editor, Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, p. 93–100, 1985.
- [145] **Artoni, A., Gabiccini, M., Guiggiani, M., Kahraman, A.**, “*Multi-objective ease-off optimization of hypoid gears for their efficiency, noise and durability performances*”. ASME, Journal of Mechanical Design, 133, 121007, 2011.
- [146] **Horn, J., Nafpliotis N., Goldberg D. E.**, “*A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization*”. IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, ICEC '94, 1994.
- [147] **Fonseca, C.M., Fleming, P.J.**, “*Multiobjective genetic algorithms*”. In: IEE colloquium on Genetic Algorithms for Control Systems Engineerin (Digest No. 1993/130). London, UK: IEE, 1993.

- [148] **Zitzler E., Thiele, L.**, “*Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach*”. IEEE Transactions on evolutionary computation, Vol3, Issue4, p. 257-271, 1999.
- [149] **Srinivas, N., Deb, K.**, “*Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms*”. J Evol Comput;2(3): p. 221-48, 1994.
- [150] **Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., Meyarivan, T.**, “*A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-IP*”. IEEE transactions on evolutionary computation, 6(2): p. 182–197, 2002.
- [151] **Coello, CAC.**, “*A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques*”. Knowl Inform Syst; 1(3): p. 269–308, 1999.
- [152] **Zitzler, E., Deb, K., Thiele, L.**, “*Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results*”. Evolutionary Computation, 8(2): p. 173–195, 2000.
- [153] **Deb, K., Thiele, L., Laumanns, M., Zitzler, E.**, “*Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization. Evolutionary Multiobjective Optimization*”. Theoretical Advances and Applications, p. 105–145, 2005.
- [154] **Chergui, J., Lavallée, P. F.**, “*OpenMP: Parallélisation multitâches pour machines à mémoire partagée*”. Institut du Développement et des Ressources en Informatique scientifique (I DRISS), 2006.



# Annexe A : Procédure de résolution

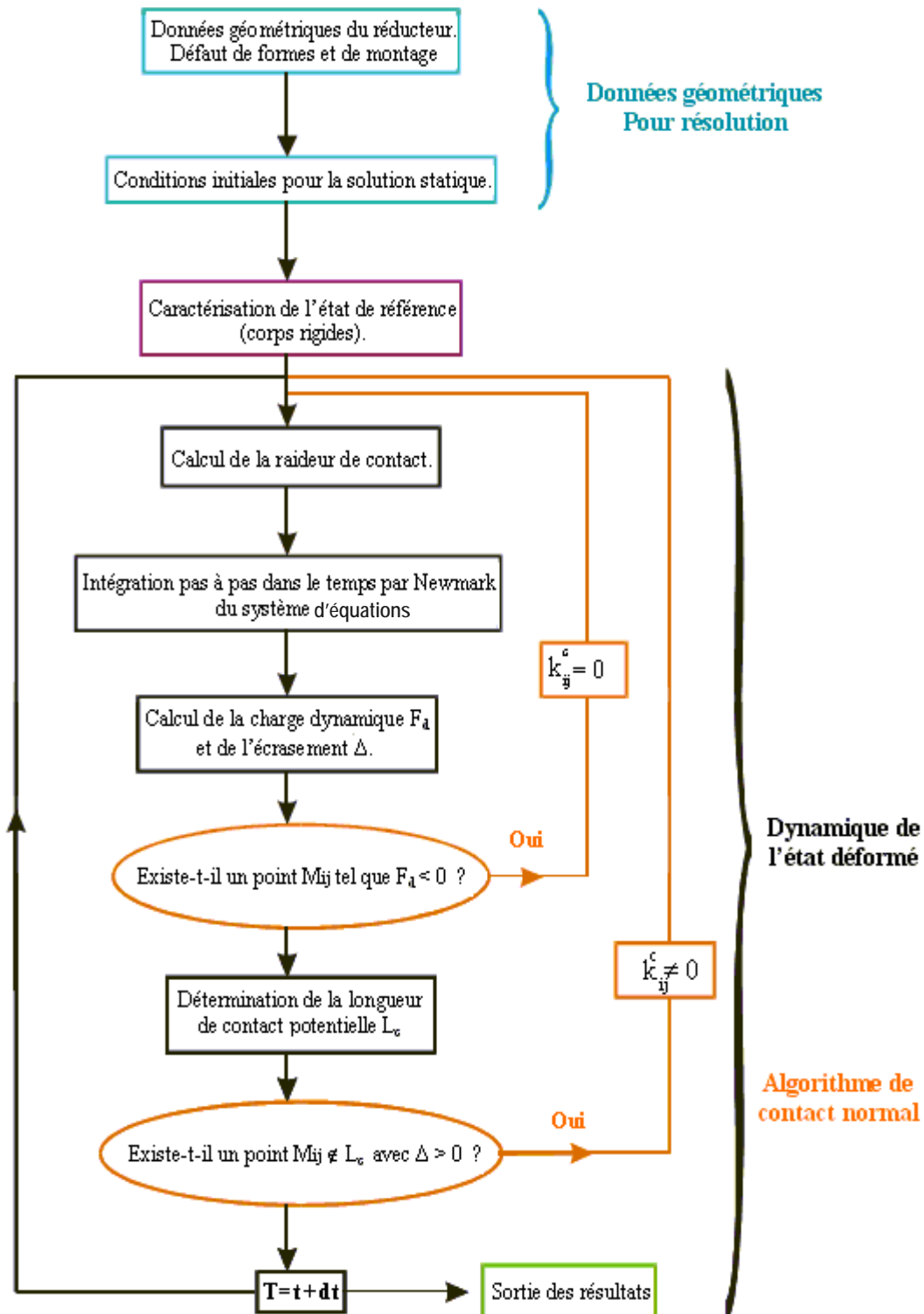


Figure A.1 : Schéma de résolution de Newmark couplé à un algorithme de contact [9]

La méthode de Newmark est une méthode "directe" de résolution des équations de l'équilibre dynamique :

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{F_{\text{ext}}\} \quad (\text{A. 1})$$

L'idée essentielle de cette méthode, et des méthodes directes en générale, est de satisfaire l'équation précédente pour des temps  $t_i$  discrets, c'est-à-dire de considérer à chaque  $t_i$  l'équilibre statique incluant les effets d'inertie et d'amortissement. La méthode de Newmark est implicite et les vitesses et les déplacements au temps  $t+\Delta t$  sont déterminés par :

$$\{\dot{X}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{X}\}_t + \left[ (1-\delta)\{\ddot{X}\}_t + \delta\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (\text{A. 2})$$

$$\{X\}_{t+\Delta t} = \{X\}_t + \{\dot{X}\}_t \Delta t + \left[ \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\{\ddot{X}\}_t + \alpha\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (\text{A. 3})$$

Où les coefficients  $\delta$  et  $\alpha$  sont des paramètres choisis pour rendre la méthode convergente et stable. Dans le cas de la méthode de Newmark originelle (méthode trapézoïdale),  $\delta=0.5$  et  $\alpha=0.25$  ce qui assure une stabilité inconditionnelle.

L'algorithme général de résolution peut se résumer à :

#### A.1. Initialisation des vecteurs déplacements, vitesses, accélération, et pour $\alpha$ , $\delta$ , $\Delta t$ fixés, calcul des coefficients $a_i$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t (1 - \delta) & a_7 &= \delta \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$



#### A.2. Calcul et triangularisation de la matrice $[\hat{K}]$

$$[\hat{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C] \quad (\text{A. 5})$$

$$[\hat{K}] = [L] \cdot [D]^T \cdot [L] \quad (\text{A. 6})$$



### A.3. Pour chaque pas de temps considéré :

- Calcul du vecteur  $\{\hat{R}\}_{t+\Delta t}$

$$\{\hat{R}\}_{t+\Delta t} = \{F_{\text{ext}}\}_{t+\Delta t} + [M] \cdot (a_0 \{X\}_t + a_2 \{\dot{X}\}_t + a_3 \{\ddot{X}\}_t) + [C] \cdot (a_1 \{X\}_t + a_4 \{\dot{X}\}_t + a_5 \{\ddot{X}\}_t) \quad (\text{A. 7})$$

- Résolution du problème linéaire

$$([L] \cdot [D]^T \cdot [L]) \{X\}_{t+\Delta t} = \{\hat{R}\}_{t+\Delta t} \quad (\text{A. 8})$$

- Calcul des vecteurs vitesses et déplacement en  $t+\Delta t$

$$\{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} = a_0 (\{X\}_{t+\Delta t} - \{X\}_t) - a_2 \{\dot{X}\}_t - a_2 \{\ddot{X}\}_t \quad (\text{A. 9})$$

$$\{\dot{X}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{X}\}_t + a_6 \{\ddot{X}\}_t + a_7 \{\ddot{X}\}_{t+\Delta t} \quad (\text{A. 10})$$

*Remarque :* lorsque le système d'équation est à coefficients dépendants du temps, la matrice  $[\hat{K}]$  doit être calculée et inversée à chaque itération.

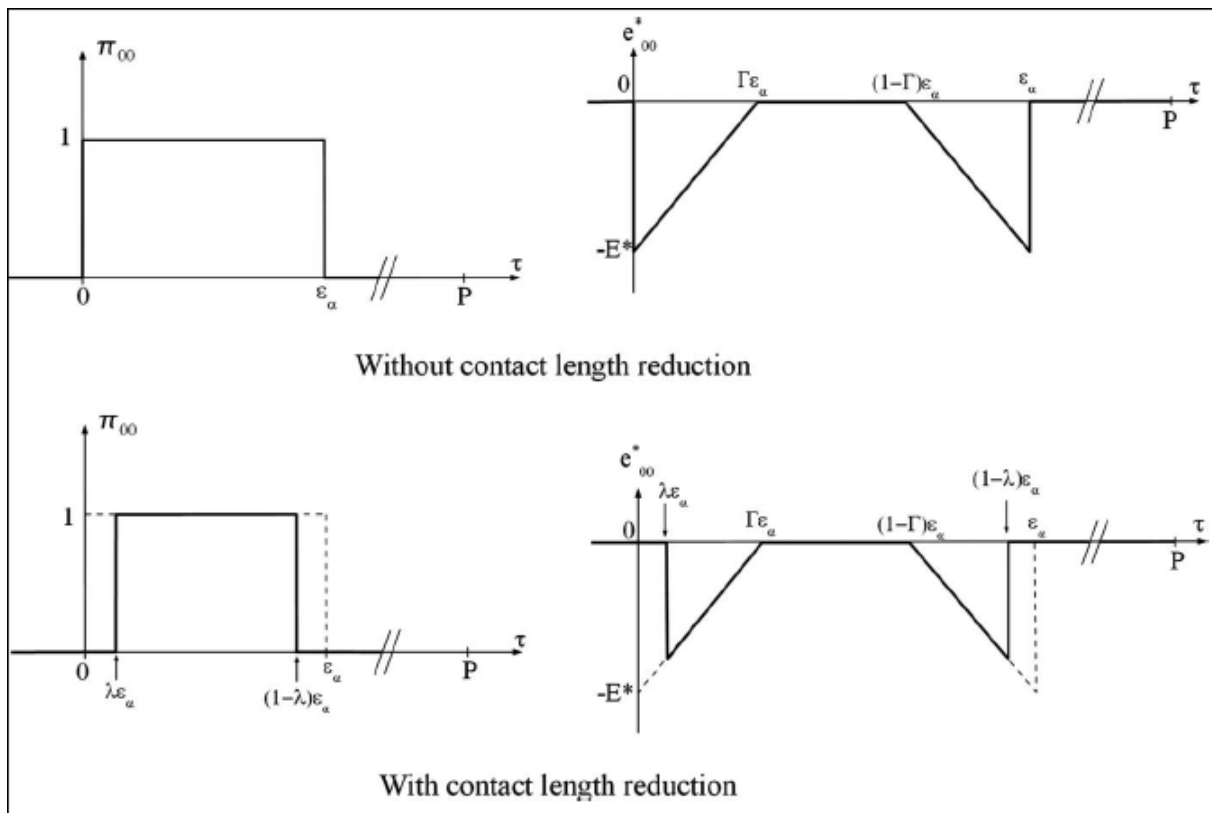
## Annexe B : Développement analytique

### ▪ Expression de TEs

$$\hat{K}(\tau, X_S) = \frac{k_0 \int_{L(\tau, X_S)} dM}{k_m} = \frac{1}{(1-2\lambda)} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N \varepsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} \pi_{ij} \right) ?$$

$$\int_{L(\tau, X_S)} \hat{k}(M) e^*(M) dM = \frac{k_0 \int_{L(\tau, X_S)} e^*(M) dM}{k_m} = \frac{1}{(1-2\lambda)} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N \varepsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} e_{ij}^* \right) ?$$

Avec N est le nombre de segments dans une ligne de contact (même si elle n'est pas entièrement dans la zone de contact).



**Figure B.1 :** Evolution de l'écart  $e_{00}(\tau)$  sans et avec réduction de longueur de contact

Considérons une fonction générique  $g_{00}(\tau)$ , périodique de période P, associé au point particulier M00 de coordonnées (pour le cas de la Figure B. 1- sans réduction) :

$$\begin{cases} x = T_1 T_1' \\ z = -b/2 \end{cases} \text{ pour } \tau = 0 \quad (\text{B. 1})$$

$P$  : la période d'engrènement de base représentant le nombre de périodes d'engrènement exigées pour que les mêmes conditions de contact se reproduisent (c'est-à-dire que le même paire de dents du pignon et de la roue seront en contact). La fonction  $g_{00}(\tau)$  peut être alors décomposée en série de Fourier :

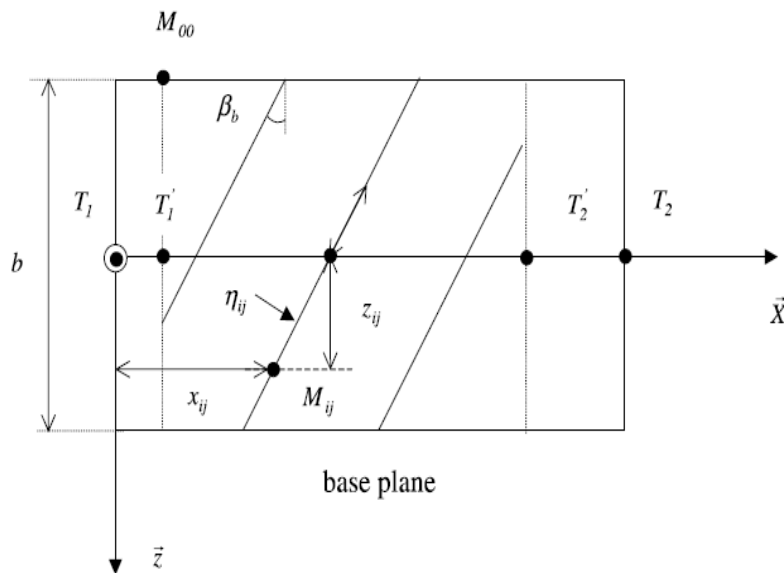
$$g_{00}(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{2\pi n\tau}{P} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n\tau}{P} \quad (\text{B. 2})$$

Avec

$$a_0 = \frac{2}{P} \int_0^P g_{00}(\tau) d\tau$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P g_{00}(\tau) \cos \left( \frac{2\pi n\tau}{P} \right) d\tau$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P g_{00}(\tau) \sin \left( \frac{2\pi n\tau}{P} \right) d\tau$$



**Figure B.2.** Définition des paramètres géométriques

Ainsi, la fonction  $g_{ij}(\tau)$  liée à n'importe quel autre point  $M_{ij}$  dans le plan d'action est déduite par :

$$g_{ij}(\tau) = g_{00} \left( \tau - i - j \cdot \frac{\varepsilon_{\beta}}{N} \right) \quad (\text{B. 3})$$

Cherchons l'expression de :  $\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} g_{00} \left( \tau - i - j \cdot \frac{\varepsilon_{\beta}}{N} \right)$

**1<sup>ère</sup> étape : Somme sur les segments, indice j**

$$\mathbf{A-} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} - \frac{2\pi nj \varepsilon_\beta}{P.N} \right] = C_n \cos \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) + S_n \sin \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) \quad (\text{B. 4})$$

$$\mathbf{B-} \sum_{j=0}^{N-1} \sin \left[ \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} - \frac{2\pi nj \varepsilon_\beta}{P.N} \right] = C_n \sin \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) - S_n \cos \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) \quad (\text{B. 5})$$

$$\text{Avec ;} \quad C_n = \sum_{j=0}^{N-1} \cos \left( \frac{2\pi nj \varepsilon_\beta}{P.N} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left( \frac{2\pi n \varepsilon_\beta}{P} - \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P.N} \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P.N} \right)} \quad (\text{B. 6})$$

$$S_n = \sum_{j=0}^{N-1} \sin \left( \frac{2\pi nj \varepsilon_\beta}{P.N} \right) = \frac{\sin \left( \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P} - \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P.N} \right)}{\sin \left( \frac{\pi n \varepsilon_\beta}{P.N} \right)} \quad (\text{B. 7})$$

Ainsi, on aura :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} g_{ij}(\tau) = \sum_{i=0}^{P-1} \left[ \frac{Na_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n C_n - b_n S_n\} \cos \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) + \{a_n C_n + b_n S_n\} \sin \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) \right] \quad (\text{B. 8})$$

$$= \frac{P.Na_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \{a_n C_n - b_n S_n\} \sum_{i=0}^{P-1} \cos \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) + \{a_n C_n + b_n S_n\} \sum_{i=0}^{P-1} \sin \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) \right] \quad (\text{B. 9})$$

**2<sup>ème</sup> étape : Somme sur les segments, indice i**

En utilisant les deux connues relations :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \cos \left( \frac{2\pi ni}{P} \right) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq k.P \\ P & \text{pour } n = k.P \end{cases} \quad (\text{B. 10})$$

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sin \left( \frac{2\pi ni}{P} \right) = 0 \quad \forall n \quad (\text{B. 11})$$

On aboutit :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \cos \left( \frac{2\pi n(\tau-i)}{P} \right) = P \cos(2\pi k \tau) \quad (\text{B. 12})$$

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sin\left(\frac{2\pi n(\tau - i)}{P}\right) = P \sin(2\pi k \tau) \quad (\text{B. 13})$$

Ce qui donne, tout en factorisant par N et en remplaçant n par k.P :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} g_{ij}(\tau) = N \left[ \frac{P a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (P a_{kP}) \left( \frac{C_{kP}}{N} \right) - (P b_{kP}) \left( \frac{S_{kP}}{N} \right) \right\} \cos(2\pi k \tau) \right. \\ \left. + \left\{ (P a_{kP}) \left( \frac{S_{kP}}{N} \right) + (P b_{kP}) \left( \frac{C_{kP}}{N} \right) \right\} \sin(2\pi k \tau) \right] \quad (\text{B. 14})$$

### 3<sup>ème</sup> étape : Passage à la limite de, pour N tend vers l'infini

Ainsi, pour un nombre important de cellules sur une ligne du contact (N tend vers l'infini), on aboutit les expressions suivantes :

$$\frac{C_{kP}}{N} = \frac{1}{2N} + \frac{\sin\left(2\pi k \varepsilon_{\beta} - \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}\right)} \cdot \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{2\pi k \varepsilon_{\beta} \cdot \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}} \quad (\text{B. 15})$$

$$\frac{S_{kP}}{N} = \frac{\sin(\pi k \varepsilon_{\beta}) \cdot \sin\left(\pi k \varepsilon_{\beta} - \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}\right)} \cdot \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{\pi k \varepsilon_{\beta} \cdot \frac{\pi k \varepsilon_{\beta}}{N}} \quad (\text{B. 16})$$

Alors, 
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{C_{kP}}{N} \right) = \frac{\sin 2\pi k \varepsilon_{\beta}}{2\pi k \varepsilon_{\beta}} \quad (\text{B. 17})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{S_{kP}}{N} \right) = \frac{\sin^2(\pi k \varepsilon_{\beta})}{\pi k \varepsilon_{\beta}} \quad (\text{B. 18})$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} g_{ij}(\tau) = N \left[ \frac{P a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (P a_{kp}) \frac{\sin 2\pi k \varepsilon_\beta}{2\pi k \varepsilon_\beta} - (P b_{kp}) \frac{\sin^2(\pi k \varepsilon_\beta)}{\pi k \varepsilon_\beta} \right\} \cos(2\pi k \tau) \right. \\ \left. + \left\{ (P a_{kp}) \frac{\sin^2(\pi k \varepsilon_\beta)}{\pi k \varepsilon_\beta} + (P b_{kp}) \frac{\sin 2\pi k \varepsilon_\beta}{2\pi k \varepsilon_\beta} \right\} \sin(2\pi k \tau) \right] \quad (\text{B. 19})$$

Finalement, le passage à la limite donne :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N \varepsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} g_{ij} \right) = \frac{P a_0}{2 \varepsilon_\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k \varepsilon_\beta)}{\pi k \varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha} \left[ (P a_{kp}) \cos(\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)) + (P b_{kp}) \sin(\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)) \right] \quad (\text{B. 20})$$

### ▪ Variance temporelle : RMS(TEs)

On cherche à déterminer analytiquement l'expression du RMS de l'erreur de transmission quasi-statique, pour une raideur d'engrènement constante (ISO), en fonction des paramètres de correction de profil ( $E, \Gamma$ ).

D'après Velex et al. [35]

$$TE_s^*(\tau) = \frac{1 - \int_{L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) e^*(M) dM}{\cos \beta_b \hat{k}(\tau, X_s)} \quad (\text{B. 21})$$

Avec

$$\int_{L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) e^*(M) dM = -\frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^* \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos(\pi k (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)) \right]$$

$$\hat{k}(\tau, X_s) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(k \varepsilon'_\alpha) \text{sinc}(k \varepsilon_\beta) \cos(\pi k (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau))$$

$$\Omega(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = \frac{2}{\Gamma - \lambda} \text{sinc}(k \varepsilon_\beta) \left[ (2\lambda - 1) \text{sinc}(k \varepsilon'_\alpha) + (1 - \Gamma - \lambda) \text{sinc}(k(\Gamma - \lambda) \varepsilon_\alpha) \text{sinc}(k(1 - \Gamma - \lambda) \varepsilon_\alpha) \right]$$

$$\varepsilon'_\alpha = (1 - 2\lambda) \varepsilon_\alpha \quad (5)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} \quad (6)$$

On cherche à déterminer  $RMS_\tau(TE_s^*) = \sqrt{Var_\tau(TE_s^*)}$  ?



$$\text{On a } \text{Var}_\tau (TE_s^\bullet) = \frac{1}{\cos^2 \beta_b} \text{Var}_\tau \left( \frac{1-A}{B} \right) \quad (\text{B. 22})$$

Avec

$$A = \int_{L(\tau, X_s)} \hat{k}(M) e^\bullet(M) dM$$

$$B = \hat{k}(\tau, X_s)$$

Rappel 1 :

Développement en série de Taylor (2 variables x et y)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + \dots$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$x_0 = \mu_x$$

$$y_0 = \mu_y$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{y}{x} \approx \frac{\mu_y}{\mu_x} + \frac{-\mu_y}{\mu_x^2} (x - \mu_x) + \frac{1}{\mu_x} (y - \mu_y)$$

$$\text{Var}(f(x, y)) = \text{Var}\left(\frac{y}{x}\right) \approx \frac{\mu_y^2}{\mu_x^4} \text{Var}(x) + \frac{1}{\mu_x^2} \text{Var}(y) - \frac{2\mu_y}{\mu_x^3} \text{Cov}(x, y)$$

Soit

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

et

$x_0 = \mu_x$  : Valeur moyenne de x, (E[x]) : Espérance mathématique de la variable aléatoire x

$y_0 = \mu_y$  : Valeur moyenne de y, (E[y]) : Espérance mathématique de la variable aléatoire y

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{y}{x} \approx \frac{\mu_y}{\mu_x} + \frac{-\mu_y}{\mu_x^2} (x - \mu_x) + \frac{1}{\mu_x} (y - \mu_y)$$

Ainsi

$$\text{Var}(f(x, y)) = \text{Var}\left(\frac{y}{x}\right) \approx \frac{\mu_y^2}{\mu_x^4} \text{Var}(x) + \frac{1}{\mu_x^2} \text{Var}(y) - \frac{2\mu_y}{\mu_x^3} \text{Cov}(x, y)$$

Fin Rappel 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Var}_\tau(TE_s^\bullet) &= \frac{1}{\cos^2 \beta_b} \text{Var}_\tau\left(\frac{1-A}{B}\right) \\ &= \frac{1}{E^2[B]} \text{Var}_\tau(1-A) + \frac{E^2[1-A]}{E^4[B]} \text{Var}_\tau(B) - 2 \frac{E[1-A]}{E^3[B]} \text{Cov}_\tau(1-A, B) \quad (\text{B. 23}) \\ &= \frac{1}{E^2[B]} \text{Var}_\tau(1-A) + \frac{E^2[1-A]}{E^4[B]} \text{Var}_\tau(B) + 2 \frac{E[1-A]}{E^3[B]} \text{Cov}_\tau(A, B) \end{aligned}$$

Rappel 2 :

Soit une fonction  $f(\tau)$ , périodique, de période  $P$  et de la forme :

$$\begin{aligned} f(\tau) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n\tau}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n\tau}{P}\right) \\ \Rightarrow E(f(\tau)) &= \frac{1}{P} \int_0^P f(\tau) d\tau \\ &= a_0 \\ \Rightarrow \text{Var}_\tau(f(\tau)) &= \frac{1}{P} \int_0^P (E(f(\tau)) - f(\tau))^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

Fin Rappel 2

Ainsi

$$\begin{cases} E(A) = -\frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^\bullet \\ E(B) = 1 \end{cases} \quad (\text{B. 24})$$

et

$$\begin{cases} \text{Var}_\tau(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kA}^2 + b_{kA}^2 \\ \text{Var}_\tau(B) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kB}^2 + b_{kB}^2 \end{cases} \quad (\text{B. 25})$$

avec,

$$a_{kA} = \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^* \Omega(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta))$$

$$b_{kA} = \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^* \Omega \sin(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta))$$

$$a_{kB} = 2 \operatorname{sinc}(k\varepsilon'_\alpha) \operatorname{sinc}(k\varepsilon_\beta) \cos(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta))$$

$$b_{kB} = 2 \operatorname{sinc}(k\varepsilon'_\alpha) \operatorname{sinc}(k\varepsilon_\beta) \sin(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Var}_\tau(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_A^2 \\ \operatorname{Var}_\tau(B) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_B^2 \end{cases}$$

(B. 26)

où

$$\Omega_A = a \cdot \Omega(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \quad ; \quad a = \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^*$$

$$\Omega_B = 2 \operatorname{sinc}(k\varepsilon'_\alpha) \operatorname{sinc}(k\varepsilon_\beta)$$

Cherchons maintenant  $\operatorname{Cov}_\tau(A, B)$

Rappel 3 :

$$\operatorname{Var}_\tau(Y + Z) = \operatorname{Var}_\tau(Y) + \operatorname{Var}_\tau(Z) + 2\operatorname{Cov}_\tau(Y, Z)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cov}_\tau(Y, Z) = \frac{1}{2} [\operatorname{Var}_\tau(Y + Z) - \operatorname{Var}_\tau(Y) - \operatorname{Var}_\tau(Z)]$$

Fin Rappel 3

Or,

$$A + B = 1 - \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^* + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_A + \Omega_B) \cos(\pi k(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau))$$

(B. 27)

$$\Rightarrow \begin{cases} E(A + B) = 1 - \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} E^* \\ \operatorname{Var}_\tau(A + B) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kAB}^2 + b_{kAB}^2 \end{cases}$$

(B. 28)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Cov}_\tau(A, B) &= \frac{1}{2} [\text{Var}_\tau(A + B) - \text{Var}_\tau(A) - \text{Var}_\tau(B)] \\ &= \frac{1}{2} [2\Omega_A\Omega_B - \Omega_A^2 - \Omega_B^2]\end{aligned}\quad (\text{B. 29})$$

Alors après quelques simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Var}_\tau(TE_s^*) &= \frac{1}{\cos^2\beta_b} \text{Var}_\tau\left(\frac{1-A}{B}\right) \\ &= \frac{1}{2\cos^2\beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} (a\Omega_A + (1+a)\Omega_B)^2\end{aligned}\quad (\text{B.30})$$

A partir de cette expression, on peut déduire le RMS de l'erreur de transmission quasi-statistique dimensionnelle :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{RMS}_\tau(TE_s) &= \sqrt{\text{Var}_\tau(TE_s^* \cdot \delta_m)} \\ &= \sqrt{\frac{\delta_m^2}{2\cos^2\beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} (a\Omega_A + (1+a)\Omega_B)^2}\end{aligned}\quad (\text{B.31})$$

avec,

$\delta_m$  : déformation normale totale au contact, en moyenne :

$$\delta_m = \frac{\Lambda}{(1-2\lambda)}$$

$\Lambda$  : Déflexion de référence

$$\Lambda = \frac{Cm}{k_0 \cdot b \cdot Rb_1 \cdot \varepsilon_\alpha}$$

### ▪ Variance géométrique : Robustesse

On cherche essentiellement à déterminer analytiquement l'expression de l'écart type géométrique de notre fonction objectif : RMS temporel de l'erreur de transmission quasi-statistique, pour une raideur d'engrènement constante (ISO). Ce paramètre (l'écart type) présente l'influence de variabilité des paramètres géométrique (E,  $\Gamma$ ) sur la fonction objectif. Il reflète la robustesse des combinaisons possibles des corrections de profils.

Rappel :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\bar{x}$  : Valeur moyenne de  $x$

$\bar{y}$  : Valeur moyenne de  $y$ ;  $\bar{y} = f(\bar{x})$

$$y - \bar{y} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{\bar{x}} +$$

$$\frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k) \left[ \frac{\partial^3 y}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right]_{\bar{x}} + \dots$$

$$\Rightarrow E(y - \bar{y}) \approx 0; \quad E(y) \approx \bar{y} = f(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} Var(y) &= E \left[ (y - \bar{y})^2 \right] \\ &\approx E \left[ \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} \right)^2 \right] \\ &\approx E \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} \left[ \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}} \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E \left[ (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right] \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} \left[ \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}} \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[x_i, x_j] \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} \left[ \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}} \end{aligned}$$

Considérons :

$$Cov[x_i, x_i] = Var(x_i) \quad \text{et} \quad Cov[x_i, x_j] = Cov[x_j, x_i]$$

$$\Rightarrow Var(y) \approx \sum_{i=1}^n Var(x_i) \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Cov[x_i, x_j] \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}} \left[ \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\bar{x}}$$

Soient des variables indépendantes:  $Cov[x_i, x_j] = 0$

$$\Rightarrow Var(y) \approx \sum_{i=1}^n Var(x_i) \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\bar{x}}^2$$

Fin Rappel

On a ;

$$RMS_{\tau}(TE_s) = \sqrt{\frac{\delta_m^2}{2\cos^2\beta_b} \sum_{n=1}^{\infty} (a\Omega_A + (1+a)\Omega_B)^2}$$

$$\Rightarrow Var(RMS_{\tau}(TE_s)) \approx Var(E) \left[ \frac{\partial RMS_{\tau}(TE_s)}{\partial E} \right]_{\bar{x}}^2 + Var(\Gamma) \left[ \frac{\partial RMS_{\tau}(TE_s)}{\partial \Gamma} \right]_{\bar{x}}^2 \quad (B.32)$$

## Annexe C : Algorithme génétique – opérateurs et techniques

### ▪ Sélection des individus

La sélection a pour but de favoriser les meilleurs éléments de la population. Elle permet d'identifier les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais. On trouve dans la littérature un nombre important de principes de sélection plus ou moins adaptés aux problèmes qu'ils traitent [131]–[135]. Dans le cadre de notre travail, les deux principes de sélection suivants ont été envisagés :

#### - Sélection par roulette

Elle consiste à associer à chaque individu un segment dont la longueur est proportionnelle à sa fitness. Ces segments sont ensuite concaténés sur un axe que l'on normalise entre 0 et 1. On tire alors un nombre aléatoire de distribution uniforme entre 0 et 1, puis on "regarde" quel est le segment sélectionné. Avec ce principe, les grands segments, c'est-à-dire les bons individus, seront plus souvent adressés que les petits. Ils ont plus de chance d'être croisés et de participer à l'amélioration de notre population.

Lorsque la dimension de la population est réduite, il est difficile d'obtenir en pratique l'espérance mathématique de sélection en raison du peu de tirages effectués.

#### - Sélection par roulette stochastique

Ce type de sélection évite le problème décrit précédemment, lorsque la dimension de la population est réduite.

Décrivons ce principe de sélection :

- Pour chaque élément  $i$ , on calcule le rapport  $r_i$  de sa fitness sur la moyenne des fitness. Soit  $e(r_i)$  la partie entière de  $r_i$ , chaque élément est reproduit exactement  $e(r_i)$  fois.
- Maintenant, la sélection par roulette précédemment décrite est appliquée sur les individus.
- Compte tenu du fait que des faibles populations seront utilisées par la suite, ce principe de sélection s'avèrera le plus efficace dans les applications pratiques et sera donc utilisé par la suite.

Il faut noter une technique qui assure la conservation de la meilleure solution à chaque génération est envisagée. Cette technique est nommée **Elitisme**.

## ▪ Croisement (cross-over)

Le croisement a pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant la structure des chromosomes. Classiquement, les croisements sont envisagés avec deux parents et génèrent deux enfants.

Cet opérateur se produit selon une probabilité **pc** fixée par l'utilisateur selon le problème à optimiser. A travers cette reproduction les chromosomes enfants héritent de parties du patrimoine génétique de leurs parents.

**pc** : Probabilité d'application du croisement à un parent donné.

Dans la littérature, il existe plusieurs opérateurs de croisement qui dépendent essentiellement la nature du problème à traiter. On distingue ainsi le croisement à un point, le croisement multipoints, le croisement uniforme et le croisement SBX qui se présente comme le plus adéquat pour notre problème. Contrairement au croisement par combinaisons linéaires qui crée des individus aléatoirement entre leurs parents, le SBX (simulated binary crossover) crée des individus proches de leurs parents ; A partir de deux parents  $X_1$  et  $X_2$  il crée deux individus  $Y_1$  et  $Y_2$  comme suit :

$$Y_1 = 0.5[(1 + \beta)X_1 + (1 - \beta)X_2]$$

$$Y_2 = 0.5[(1 - \beta)X_1 + (1 + \beta)X_2]$$

Tel que  $\beta$  représente un facteur de diffusion définie par :

$$\beta = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{\eta+1}} & \text{si } u < 0.5 \\ \left[ \frac{1}{2(1-u)} \right]^{\frac{1}{\eta+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $u$  est tiré suivant une loi uniforme dans l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\eta$  est un nombre réel non nul qui caractérise la distribution de  $Y_1$  et  $Y_2$  par rapport aux parents  $X_1$  et  $X_2$ . Ainsi, plus  $\eta$  s'accroît, plus les descendants se rapprochent de leurs parents.

On note, comme ce sera le cas pour les autres opérateurs, qu'il existe très peu de base théorique pour guider le choix de la méthode de sélection. Seuls des tests concernant notre application spécifique nous permettront de déterminer l'approche la plus efficace.

### Remarque :

Un pourcentage trop élevé d'application du cross-over (**pc** trop élevé) ne laisse pas le temps aux bons schémas de proliférer.

Un pourcentage trop bas d'application entraîne une stagnation et une convergence prématurée.

Les valeurs de **pc** souvent conseillées varient entre 50 et 70%.

## ▪ Mutations

Reproduction et croisement sont à la base des algorithmes génétiques. Il existe toutefois un troisième opérateur : la mutation. En effet, au sein d'un pool génétique donné, même important, il est possible que la solution recherchée ne soit pas présente. L'opérateur de mutation est indispensable car il permet l'émergence de nouvelles configurations génétiques, en élargissant le pool, ces mutations améliorent les possibilités de trouver une solution optimale. Deux types de mutations sont possibles. La première est la mutation gaussienne avec une variance constante ou une variance décroissante au cours des itérations. Le principe de base de ce type de mutation est d'ajouter un bruit gaussien centré au gène que l'on désire faire muter. La deuxième est une mutation non-uniforme contrôlée par différents paramètres [13].

Ainsi, il faut noter que lorsque les deux parents sont très proches, la probabilité de mutation est augmentée. Le but est de muter les deux enfants générés qui ressemblent beaucoup à leurs parents. Si aucune amélioration de la meilleure solution n'est réalisée après un certain nombre de générations (fixé par l'utilisateur) on augmente la force de mutation pour favoriser l'exploration de l'espace de recherche et par suite assurer une propriété très importante : l'ergodicité. Cette propriété indique que la méthode sera capable, dans le processus de résolution, d'atteindre les différents points de l'espace de recherche, sans pour autant les parcourir tous.

Il faut signaler que la mutation doit être rare sinon le processus devient du "totally random search" (recherche aléatoire totale). De ce fait il est conseillé de choisir une probabilité de la mutation  $pm$  entre 0,001 et 0,01. Cette procédure est utilisée pour mieux se rapprocher de l'optimum. Cependant, il faut faire attention à la convergence prématurée.

Les processus de sélection présentés sont très sensibles aux écarts de fitness et dans certains cas, un très bon individu risque d'être reproduit trop souvent et peut même provoquer l'élimination complète de ses congénères ; on obtient alors une population homogène contenant un seul type d'individu. Pour éviter ce comportement, il existe des principes (*scaling*, *sharing*) qui empêchent les individus "forts" d'éliminer complètement les plus "faibles".

### ▪ *scaling*

Le *scaling* ou mise à l'échelle, modifie les fitness afin de réduire ou d'amplifier artificiellement les écarts entre les individus. Le processus de sélection n'opère plus sur la fitness réelle mais sur son image après *scaling*. Parmi les fonctions de *scaling*, on peut envisager le *scaling* linéaire, le *scaling* exponentiel et le *sigma scaling* (Proportionnelle à l'écart-type). La mise à l'échelle (*scaling*) de la fitness est un outil souvent mis en place lorsque la valeur de la fitness est utilisée explicitement dans le processus de sélection.



Afin d'éviter que des individus trop forts ne dominent rapidement la population, au risque de prématurément converger vers un optimum local, il est possible de réduire artificiellement l'écart entre les individus en transformant la fitness. À l'opposé, on constate parfois que les bons individus ont du mal à se distinguer et il peut être utile d'augmenter la différence de fitness entre eux. Ces opérations peuvent être aisément réalisées en appliquant des fonctions classiques à la valeur de la fitness. Par exemple, prendre le carré de la fitness augmentera les différences.

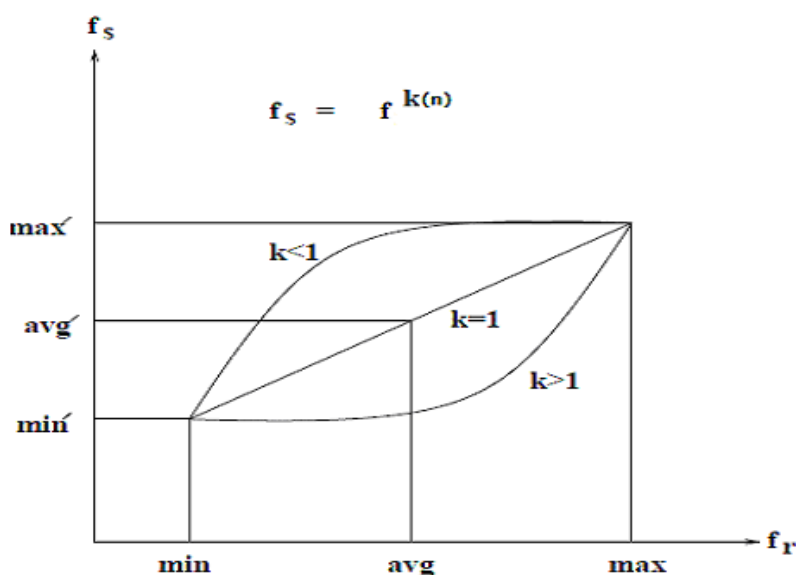
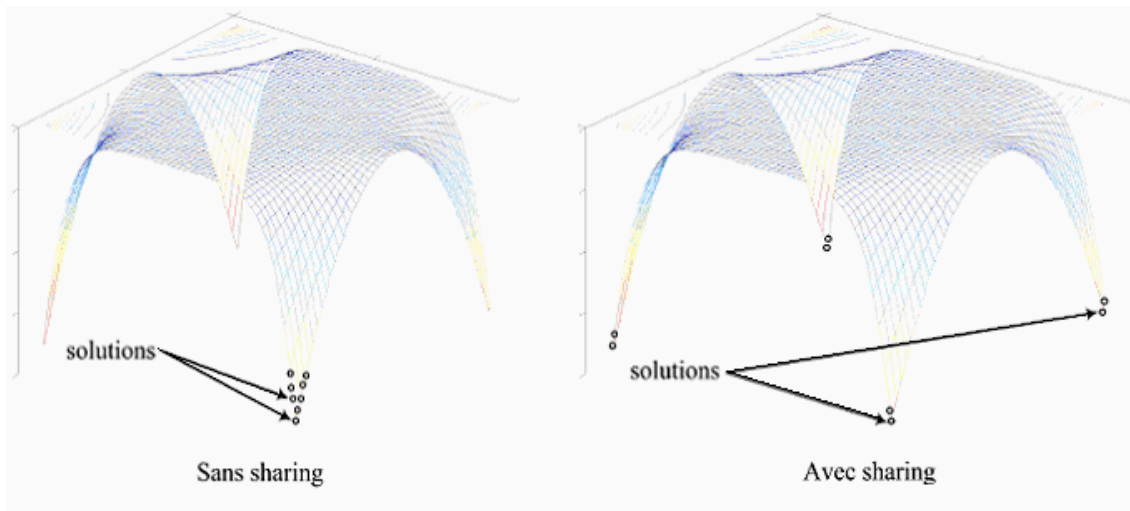


Figure C.1 : Fonction scaling exponentielle

- **partage (sharing)**

L'objectif du sharing est de répartir sur chaque sommet de la fonction à optimiser un nombre d'individus proportionnel à la fitness associée à ce sommet. Cette technique permet de favoriser l'exploration spatiale en pénalisant les individus qui se trouvent dans la même région de l'espace. Le partage (sharing) est une autre amélioration souvent mise en œuvre pour pousser l'algorithme à explorer l'ensemble de l'espace de recherche. Le principe utilisé consiste à diminuer la fitness des solutions similaires. Pour cela, il faut d'abord définir une distance – par exemple la distance euclidienne – entre chaque individu. On choisit ensuite un voisinage, par exemple une sphère de rayon 2 autour de chaque solution. On peut alors compter le nombre d'individus présents dans ce voisinage en pondérant par la distance (plus un individu est éloigné, moins on le prend en compte) ; on obtient une valeur baptisée coefficient de niche. Enfin, la fitness « brute » de chaque individu est divisée par le coefficient de niche. Cette méthode donne de bons résultats. Néanmoins, elle requiert le calcul de la distance de chaque individu à tous les autres. Si la population contient  $N$  individus, cette approche nécessite, par conséquent,  $N^2$  calculs supplémentaires à chaque génération.

Cette complexité peut très souvent être négligée car, dans de nombreuses applications, le calcul de la fitness se révèle être beaucoup plus long que tous les autres calculs.



**Figure C.2 :** Opération de partage « *sharing* »

## Annexe D : Détermination des points et des poids de Gauss [83]

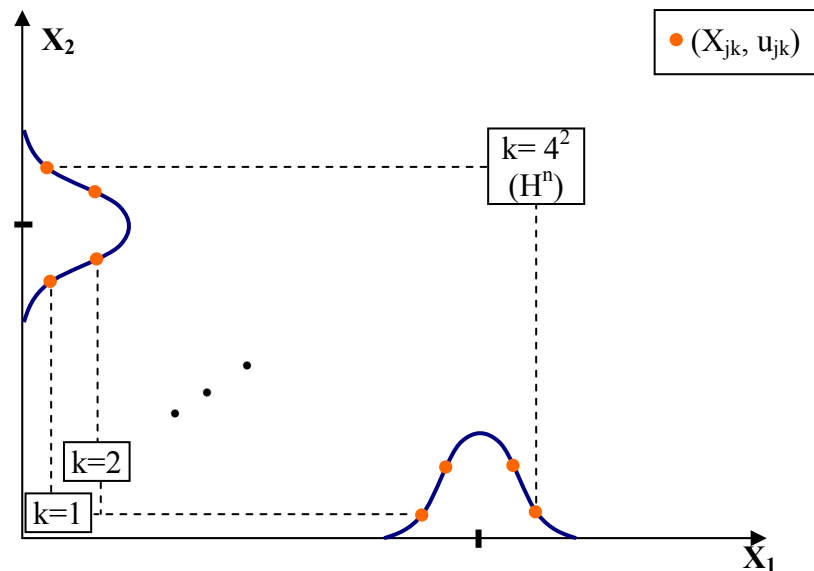


Figure D.1 : Différentes combinaisons possibles

Valeur moyenne :

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N w_k Y(L_k) \quad (D.1)$$

Variance :

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N w_k (Y(L_k) - \mu_y)^2 \quad (D.2)$$

Avec

$$w_k = \prod_{j=1}^n u_{jk}$$

$u_{jk}$  : le poids associé au variable variables  $X_j$  dans la  $k^{\text{ème}}$  combinaison.

$n$  : nombre des variables aléatoire de conception.

$N$  : Nombre total des points,  $N = H^n$

$L = \{L_1, L_2, \dots, L_N\}$  ; Vecteur qui comprend  $N$  traitements (combinaisons des variables de conception).

$L_k = \{L_{1k}, L_{2k}, \dots, L_{nk}\}$  :  $k^{\text{ème}}$  traitement.

Cherchons ainsi les points ( $l_h, h=1, \dots, H$ ) et les poids de gauss ( $u_h, h=1, \dots, H$ ) associés à une variable ( $X$ ) donnée qui est caractérisée par une distribution de probabilité  $g(X)$ . Pour ce faire, on propose la procédure de discrétisation « discrete point approximation » présentée par

Duffy et al. [83]. Cette procédure est applicable pour différentes formes de distributions de probabilité :

$$\sum_{h=1}^H u_h l_h = E[X^m] \quad (\text{D. 3})$$

avec,

$$m = 0, 1, \dots, 2H - 1$$

$$E[X^m] = \int X^m g(X) dX$$

Par exemple, pour une distribution Beta( $\alpha, \beta$ )

$$E[X^m] = E[X^{m-1}] \frac{\alpha + (m-1)}{\alpha + \beta + (m-1)} \quad \text{où } E[X^0] = 1$$

Notons que H représente le nombre choisi de points de discrétisation. Ainsi, la procédure de discrétisation comporte les différentes étapes suivantes :

**Etape1 :** Définir un polynôme  $\pi(X)$  sous une forme factorisée de racines ( $l_h, h=1, \dots, H$ ) :

$$\begin{aligned} \pi(X) &= (X - l_1)(X - l_2) \dots (X - l_H) \\ &= \sum_{h=0}^H c_h X^h \end{aligned} \quad (\text{D. 4})$$

Avec  $c_H = 1$

**Etape2 :** Définir le système de H équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=0}^{H-1} c_h E[X^h] = -E[X^H] \\ \sum_{h=0}^{H-1} c_h E[X^{h+1}] = -E[X^{H+1}] \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{h=0}^{H-1} c_h E[X^{h+H-1}] = -E[X^{2H-1}] \end{array} \right. \quad (\text{D.5})$$

**Etape3 :** Déterminer les coefficients ( $c_h, h=1, \dots, H-1$ ) tout en résolvant le système d'équation précédent (Relations D.5)

**Etape4 :** Déterminer les points de gauss ( $l_h, h=1, \dots, H$ ) par identification, à partir de l'équation D.4.

**Etape5 :** Déterminer les poids ( $u_h, h=1, \dots, H$ ) associés aux points de gauss par résolution de l'équation D. 3.

# Annexe E : Ecart de forme de profil [69]

**Tableau B.1 — Ecart de forme de profil,  $f_{10}$**

Diamètre primitif de référence $d$ mm	Module $m$ mm	Classe de précision												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		$f_{10}$ $\mu\text{m}$												
$5 \leq d \leq 20$	$0,5 \leq m \leq 2$	0,6	0,9	1,3	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	40,0
	$2 < m \leq 3,5$	0,9	1,3	1,8	2,6	3,6	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	41,0	58,0
$20 < d \leq 50$	$0,5 \leq m \leq 2$	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	32,0	45,0
	$2 < m \leq 3,5$	1,0	1,4	2,0	2,8	3,9	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0	44,0	62,0
	$3,5 < m \leq 6$	1,2	1,7	2,4	3,4	4,8	7,0	9,5	14,0	19,0	27,0	39,0	54,0	77,0
	$6 < m \leq 10$	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0	67,0	95,0
$50 < d \leq 125$	$0,5 \leq m \leq 2$	0,8	1,1	1,6	2,3	3,2	4,5	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	36,0	51,0
	$2 < m \leq 3,5$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	49,0	69,0
	<b><math>3,5 &lt; m \leq 6</math></b>	<b>1,3</b>	<b>1,8</b>	<b>2,6</b>	<b>3,7</b>	<b>5,0</b>	<b>7,5</b>	<b>10,0</b>	<b>15,0</b>	<b>21,0</b>	29,0	42,0	59,0	83,0
	$6 < m \leq 10$	1,6	2,2	3,2	4,5	6,5	9,0	13,0	18,0	25,0	36,0	51,0	72,0	101,0
	$10 < m \leq 16$	1,9	2,7	3,9	5,5	7,5	11,0	15,0	22,0	31,0	44,0	62,0	87,0	123,0
	$16 < m \leq 25$	2,3	3,3	4,7	6,5	9,5	13,0	19,0	26,0	37,0	53,0	75,0	106,0	149,0
$125 < d \leq 280$	$0,5 \leq m \leq 2$	0,9	1,3	1,9	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	15,0	21,0	30,0	43,0	60,0
	$2 < m \leq 3,5$	1,2	1,7	2,4	3,4	4,9	7,0	9,5	14,0	19,0	28,0	39,0	55,0	79,0
	$3,5 < m \leq 6$	1,4	2,0	2,9	4,1	6,0	8,0	12,0	16,0	23,0	33,0	46,0	65,0	93,0
	$6 < m \leq 10$	1,7	2,4	3,5	4,9	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	39,0	55,0	78,0	111,0
	$10 < m \leq 16$	2,1	2,9	4,0	6,0	8,5	12,0	17,0	23,0	33,0	47,0	66,0	94,0	133,0
	$16 < m \leq 25$	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	40,0	56,0	79,0	112,0	158,0
	$25 < m \leq 40$	3,0	4,2	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0	68,0	96,0	135,0	191,0
$280 < d \leq 560$	$0,5 \leq m \leq 2$	1,1	1,6	2,3	3,2	4,5	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	36,0	51,0	72,0
	$2 < m \leq 3,5$	1,4	2,0	2,8	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	32,0	45,0	64,0	90,0
	$3,5 < m \leq 6$	1,6	2,3	3,3	4,6	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	37,0	52,0	74,0	104,0
	$6 < m \leq 10$	1,9	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	15,0	22,0	31,0	43,0	61,0	87,0	123,0
	$10 < m \leq 16$	2,3	3,2	4,5	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	36,0	51,0	72,0	102,0	145,0
	$16 < m \leq 25$	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	16,0	21,0	30,0	43,0	60,0	85,0	121,0	170,0
	$25 < m \leq 40$	3,2	4,5	6,5	9,0	13,0	18,0	25,0	36,0	51,0	72,0	101,0	144,0	203,0
	$40 < m \leq 70$	3,9	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0	44,0	62,0	86,0	125,0	177,0	250,0
$560 < d \leq 1\ 000$	$0,5 \leq m \leq 2$	1,4	1,9	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	15,0	22,0	31,0	43,0	61,0	87,0
	$2 < m \leq 3,5$	1,6	2,3	3,3	4,6	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	37,0	52,0	74,0	104,0
	$3,5 < m \leq 6$	1,9	2,6	3,7	5,5	7,5	11,0	15,0	21,0	30,0	42,0	59,0	84,0	119,0
	$6 < m \leq 10$	2,1	3,0	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0	66,0	97,0	137,0
	$10 < m \leq 16$	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	40,0	56,0	79,0	112,0	159,0
	$16 < m \leq 25$	2,9	4,1	6,0	8,0	12,0	16,0	23,0	33,0	46,0	65,0	92,0	131,0	185,0
	$25 < m \leq 40$	3,4	4,8	7,0	9,5	14,0	19,0	27,0	38,0	54,0	77,0	109,0	154,0	217,0
	$40 < m \leq 70$	4,1	6,0	8,5	12,0	17,0	23,0	33,0	47,0	66,0	93,0	132,0	187,0	264,0
$1\ 000 < d \leq 1\ 600$	$2 < m \leq 3,5$	1,9	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	15,5	21,0	30,0	42,0	60,0	85,0	120,0
	$3,5 < m \leq 6$	2,1	3,0	4,2	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0	67,0	95,0	135,0
	$6 < m \leq 10$	2,4	3,4	4,8	7,0	9,5	14,0	19,0	27,0	38,0	54,0	76,0	108,0	153,0
	$10 < m \leq 16$	2,7	3,9	5,5	7,5	11,0	15,0	22,0	31,0	44,0	62,0	87,0	124,0	175,0
	$16 < m \leq 25$	3,1	4,4	6,5	9,0	13,0	18,0	25,0	35,0	50,0	71,0	100,0	142,0	201,0
	$25 < m \leq 40$	3,6	5,0	7,5	10,0	15,0	21,0	29,0	41,0	58,0	82,0	117,0	166,0	233,0
$40 < m \leq 70$	4,4	6,0	8,5	12,0	17,0	25,0	35,0	49,0	70,0	99,0	140,0	198,0	280,0	

# Annexe F : Algorithme NSGA-II – Procédure de résolution

## Etape1 : Initialisation

Initialisation de la population en se basant sur la formulation du problème : Définition des intervalles des variables de conception et des contraintes à respecter

→ Population :  $P\{1, \dots, p, \dots, q, \dots, N\}$

## Etape2 : Tri –Non dominé (Non-dominated sorting)

On classe les individus, selon leurs rangs, dans des fronts. Pour chaque individu  $p$  de  $P$ , on procède :

- Initialisation de  $S_p = \emptyset$  ( $S_p$  : ensemble des individus dominés par  $p$ ).
- Initialisation de  $n_p = 0$  ( $n_p$  : nombre des individus qui dominent  $p$ ).
- Pour tout  $q \in P$  :
  - Si  $p$  domine  $q$  alors :  $S_p = S_p \cup \{q\}$
  - Sinon si  $q$  domine  $p$  :  $n_p = n_p + 1$

→ Si  $n_p = 0$   
(pas d'individu qui domine  $p$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\text{rank}} = 1: \text{ le rang d'individu } p \text{ est égal à } 1 \\ F_1 = F_1 \cup \{p\}: \text{ l'individu } p \text{ figure parmi les solutions du front } 1 \end{array} \right.$$

- $i=1$ , tant que  $F_i \neq \emptyset$  :
  - $F_{i+1} = \emptyset$
  - Pour tout  $p \in F_i$ , pour tout  $q \in S_p$ ?
    - \*  $n_q = n_q - 1$

→ Si  $n_p = 0$   
(pas d'individu dans  $F_i$  qui domine  $p$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{\text{rank}} = i+1 \\ F_{i+1} = F_{i+1} \cup \{Q\} \end{array} \right.$$

## Etape3 : Distance d'étalement (Crowding distance)

- Pour tout  $F_i$  :
  - $n$  : nombre d'individus dans le front  $F_i$

- Pour tout  $j \in F_i : d_j(F_i)=0$  (Initialisation de la distance)
- Pour toute fonction objectif (m) :
  - \* Classification des individus selon m (tri) :  $I = \text{sort}(F_i, m)$
  - \*  $d_l(I) = \infty$  (à qui correspond  $f_m^{\min}$ )
  - \*  $d_n(I) = \infty$  (à qui correspond  $f_m^{\max}$ )
  - \* pour  $k=2 : n-1$

$$d_k(I) = \frac{f_m^{k+1} - f_m^{k-1}}{f_m^{\max} - f_m^{\min}}$$

La distance associée à un individu est la somme de toutes les distances correspondantes aux différentes fonctions objectifs. L'idée est de trouver la distance euclidienne pour chaque individu  $k$  dans un front en fonction des valeurs du critère  $m$  prises par les individus avoisinants. Les individus ayant une distance euclidienne plus importante seront reproduits pour assurer la diversité. Ainsi, les individus de la frontière sont toujours reproduits puisqu'on les a affecté une distance infinie.

#### Etape4 : Sélection

Les individus sont sélectionnés en utilisant une sélection par tournoi. Une comparaison est ensuite menée en se basant sur :

- Dominance :  $p_{\text{rank}} < q_{\text{rank}}$   
→ L'individu  $p$  est placé dans un front d'indice plus petit alors c'est lui qui sera choisi.
- Distance d'étalement (crowding distance) :  $p_{\text{rank}} = q_{\text{rank}}$  et  $d_p(F_i) > d_q(F_i)$   
→ L'individu  $p$ , à qui correspond la distance supérieure, sera choisi.

#### Etape5 : Opérateur génétique (Croisement et mutation)

Voir Annexe C

#### Etape5 : Recombinaison et sélection

La population descendante, i.e. issue de l'étape précédente, est combinée avec la population initiale (P). Une étape de sélection est effectuée pour définir les individus de la génération suivante. L'élitisme est assuré pour tous les individus ; antérieurs et actuels, qui sont ajoutés à la population actuelle (de taille  $2 \cdot N$ ). Ainsi, la population est triée en fonction de la non-dominance. La nouvelle génération est remplie en superposant les individus des  $j$  premiers fronts jusqu'à ce que la taille de la population soit supérieure ou égale à la taille initiale de la population (taille  $N$ ). Dans le cas où le nombre des individus obtenus dépasse  $N$ , on garde les individus du  $j^{\text{ème}}$  front ayant les distances de crowding les plus importantes (jusqu'à obtenir  $N$  individus). Ce processus se répète pour générer les générations suivantes (Voir Figure IV-3).

---

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES  
DE LYON

NOM : **GHRIBI**

DATE de SOUTENANCE :

Prénom : **Dhafer**

TITRE : **OPTIMISATION DES CORRECTIONS DE FORME DANS LES ENGRENAGES DROITS ET  
HELICOIDAUX - APPROCHES DETERMINISTES ET PROBABILISTES-**

NATURE : **Doctorat**

Numéro d'ordre : **AAAAISALXXXX**

Ecole doctorale : **Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)**

Spécialité : **Génie mécanique**

RESUME :

Cette thèse a pour objectif de mener une optimisation des corrections de forme des engrenages cylindriques, droits et hélicoïdaux. Le travail se décompose en quatre parties principales. Dans la première partie, on présente un état de l'art sur les différents types de corrections de forme proposées dans la littérature. Une analyse des travaux d'optimisation, menés jusqu'à présent, est conduite. La deuxième partie est focalisée sur une approche déterministe visant à cerner l'influence des corrections de dentures sur les principaux critères de performance. Dans ce contexte, on propose un développement analytique qui caractérise les fluctuations d'erreur de transmission quasi-statique permettant d'obtenir des relations approchées originales. En présence de plusieurs paramètres de corrections, un algorithme génétique est utilisé afin d'identifier, en un temps réduit, les solutions optimales. Nous proposons, en troisième partie, une étude probabiliste pour caractériser les corrections robustes. Ainsi, on définit une fonction objectif de robustesse faisant intervenir des paramètres statistiques. Après une étape de validation, l'estimation de ces paramètres est effectuée en utilisant les formules de quadrature de Gauss. Plusieurs études paramétriques sont ensuite menées et qui reflètent entre autre l'influence des classes de qualité, la forme de la correction, etc. Enfin, on a conduit une optimisation multicritère en utilisant un algorithme d'optimisation spécifique : « NSGA-II ».

MOTS-CLES :

Engrenages, correction de dentures, écarts de transmission, conception robuste, algorithme génétique, optimisation multicritères.

Laboratoire (s) de recherche : **Laboratoire de mécanique des contacts et des structures (LaMCoS)  
Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP)**

Directeurs de thèse : **Professeur Philippe VELEX (INSA de Lyon)  
Professeur Mohamed HADDAR (ENI Sfax)**

Président de jury : **Professeur David DUREISSEIX (INSA de Lyon)**

Composition du jury : **Professeur Jean-Yves DANTAN (ENSAM - Metz)  
Professeur Mnaouar CHOUCANE (ENI Monastir)  
Professeur Fakher CHAARI (ENI Sfax)  
Mdc Jérôme BRUYERE (INSA de Lyon)  
Docteur Michel OCTRUE (Cetim)**