

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**  
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Dynamique des fluides

---

**Présentée et soutenue par :**

Sébastien Bocquet

**le :** mercredi 2 octobre 2013

**Titre :**

Modélisation de paroi et injection de turbulence pariétale  
pour la Simulation des Grandes Echelles  
des écoulements aérothermiques

---

**Ecole doctorale :**

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

**Unité de recherche :**

CERFACS

**Directeur(s) de Thèse :**

Jean-Christophe Jouhaud

Pierre Sagaut

**Rapporteurs :**

Eric Lamballais

Michel Stanislas

**Membre(s) du jury :**

Jean-Christophe Jouhaud, Chercheur habilité à diriger des recherches, CERFACS

Pierre Sagaut, Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6

Sébastien Deck, Ingénieur de recherche, ONERA Châtillon

Franck Nicoud, Professeur à l'université de Montpellier II

Bertrand Aupoix, Directeur de recherche assimilé Professeur à l'ONERA, Toulouse

Marie-Josèphe Estève, Ingénieur méthodes et outils, Airbus Operations SAS

---

## Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Modélisation des écoulements pariétaux turbulents et compressibles</b>	<b>13</b>
<b>1 Modélisation de la turbulence dans les écoulements compressibles</b>	<b>15</b>
1.1 Coût de la Simulation Directe de la turbulence . . . . .	16
1.2 Classification des écoulements compressibles et conséquences pour la modélisation de la turbulence . . . . .	18
1.3 Modèle mathématique pour le fluide . . . . .	20
1.4 L'approche RANS pour les écoulements turbulents compressibles . . . . .	21
1.5 Simulation des Grandes Echelles des écoulements turbulents compressibles . . . . .	25
<b>2 Introduction à la turbulence pariétale</b>	<b>35</b>

2.1	Cas incompressible . . . . .	36
2.2	Cas compressible . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Méthode numérique de résolution des équations</b>	<b>45</b>
3.1	Présentation du code de calcul . . . . .	46
3.2	Discrétisation spatiale et temporelle . . . . .	48
3.3	Formulation des conditions limites . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Modélisation de paroi pour la Simulation des Grandes Echelles des écoulements compressibles</b>	<b>61</b>
4.1	Coût de calcul de la Simulation des Grandes Echelles des écoulements pariétaux turbulents . . . . .	62
4.2	Les méthodes hybrides RANS-LES . . . . .	65
4.3	La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles . . . . .	69
4.4	Conclusions intermédiaires . . . . .	92
<b>II</b>	<b>Etude des erreurs liées à la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi sur un écoulement périodique</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Etude et correction des erreurs liées à la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi sur un écoulement de canal supersonique</b>	<b>95</b>
5.1	Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .	95
5.2	A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities, Physics of Fluids 24, 065103 (2012) . . . . .	96
5.3	Compléments . . . . .	139
5.4	Conclusions intermédiaires . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Effet de la méthode numérique sur la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi</b>	<b>141</b>
6.1	Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .	141

---

---

6.2	Le bilan de quantité de mouvement comme outil d'étude de la WMLES . . . . .	142
6.3	Effet de la dissipation artificielle sur l'approche WMLES . . . . .	145
6.4	Effet du modèle de sous-maille sur l'approche WMLES . . . . .	152
6.5	Conclusions intermédiaires . . . . .	155
<b>III Une méthode d'injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi</b>		<b>157</b>
<b>7</b>	<b>Revue bibliographique sur l'injection de turbulence pariétale pour la LES et les méthodes hybrides RANS-LES</b>	<b>159</b>
7.1	Propriétés requises et critères d'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale . . . . .	161
7.2	Injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles . . . . .	163
7.3	Injection de turbulence pariétale pour les approches hybrides RANS-LES . . . . .	174
7.4	Conclusions intermédiaires . . . . .	178
<b>8</b>	<b>Développement et étude d'une méthode d'injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi</b>	<b>181</b>
8.1	Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .	182
8.2	Présentation et modélisation du cas de validation . . . . .	183
8.3	Description de la méthode d'injection de turbulence pariétale . . . . .	185
8.4	Résultats . . . . .	191
8.5	Conclusions intermédiaires . . . . .	208
<b>9</b>	<b>Application de la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi et injection de turbulence pariétale à un jet chaud débouchant</b>	<b>209</b>
9.1	Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .	210
9.2	Présentation de l'écoulement de jet débouchant . . . . .	213
9.3	Mise en place d'une stratégie RANS-LES <i>embedded</i> simplifiée . . . . .	215
9.4	Modélisation physique et numérique . . . . .	217

---

*Table des matières*

---

9.5	Construction du maillage WMLES . . . . .	219
9.6	Résultats . . . . .	223
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>247</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>253</b>
	<b>Annexes</b>	<b>266</b>
<b>A</b>	<b>Compléments et synthèse sur la validation hors LES du modèle TBL sur une grande plage de régimes compressibles</b>	<b>267</b>
A.1	Validation hors LES du modèle TBL à faible nombre de Mach et grand écart de température . . . . .	267
A.2	Synthèse des validations hors LES du modèle de paroi TBL . . . . .	269
<b>B</b>	<b>Etude détaillée de la correction de <math>\mu_{sgs1}</math></b>	<b>273</b>

---

## Remerciements

---

Voici la fin d'une longue mais belle aventure, pleine d'enseignements à la fois sur le plan technique mais aussi personnel. Bien qu'elle semble être le fruit d'un unique doctorant, une thèse ne se fait pas seul et je suis donc redevable d'un bon nombre de personnes. Je vais essayer de ne pas en oublier, désolé pour celles et ceux qui le seront.

Je tiens d'abord tout particulièrement à remercier Nadège et Hugues, qui m'ont proposé la relecture complète du manuscrit au fur et à mesure de sa rédaction, ainsi que plusieurs séances de répétitions de la soutenance. Leurs remarques et commentaires furent très précieux et ont largement contribué à améliorer la qualité du travail. Trouver des personnes de leur compétence acceptant bénévolement de s'impliquer autant est très précieux, qu'ils en soient donc remerciés à la hauteur du temps qu'ils m'ont consacré.

Je tiens également à remercier Bertrand Aupoix, qui a gentiment accepté de venir m'apporter son éclairage sur la couche limite thermique. Olivier Cabrit m'a également apporté son aide par de nombreuses discussions sur le point central de la thèse, qu'il connaît bien pour en avoir terminée une sur un sujet similaire.

Durant ces 3 années, la bonne humeur régnant dans l'équipe fût également un ingrédient essentiel, permettant de rendre (presque) indolore le travail à abattre. Je remercie donc tous les thésards, post doc, stagiaires et maintenant docteurs ou ingénieurs : Thomas, JC, François, Flore, Sophie, Yannis, Quentin, Benjamin, Gaëlle, Fabien, Didi...

Une pensée maintenant à l'une des personnes qui a bien cru que ça ne s'arrêterait jamais, Linda, qui m'a supportée durant ces 3 années, et surtout vers la fin lorsque la thèse débordait parfois sur les soirées ou le week end... Merci également à mes ami(e)s Vincent, Elodie, Charbel, Pierre, Isabelle, Erwann, Christelle, François, Xavier et Catherine, qui ont un peu trop focalisé sur le fait que la thèse parlait d'éjection de gaz chaud !

## *Remerciements*

---

Merci également à JF, qui m'a permis de prolonger mon contrat de 3 mois, permettant de finir sereinement (ou presque) la rédaction. J'en profite pour remercier tous les seniors de l'équipe aéro, Guillaume, Nico, Fred et Marc, toujours disponibles et de très bon conseil, ainsi que le service informatique (Gérard et Isabelle entre autres) qui fût d'une grande compétence et réactivité.

Je remercie enfin mon directeur, Jean-Christophe Jouhaud, et co-directeur de thèse, Pierre Saggaut, ce dernier ayant su m'orienter vers les bonnes thématiques lors de ses passages à Toulouse. Plus largement, je remercie également tous les membres du jury de s'être déplacés, parfois de l'autre bout de la France, pour apporter leurs remarques, conseils et questions.

---

## Nomenclature

---

### Acronymes

AUSMP	<i>Advection Upstream Splitting Method Plus</i>
DES	<i>Detached-Eddy Simulation</i>
DNS	Simulation Numérique Directe ( <i>Direct Numerical Simulation</i> )

Erreurs générées par l'approche WMLES :

E_PHYS	Erreur due à un contenu physique inapproprié du modèle de paroi
E_CL	Erreur due à des conditions limites LES imposées au modèle de paroi RANS
E_SGS	Erreur due à une modélisation de sous-maille inappropriée près de la paroi
E_NUM	Erreur due à l'interaction entre l'approche WMLES et la méthode numérique de résolution des équations LES

JICF	Jet débouchant dans un écoulement transverse ( <i>Jet-In-Cross-Flow</i> )
LDA	Anémométrie Doppler Laser ( <i>Laser-Doppler Anemometry</i> )
LES	Simulation des Grandes Echelles ( <i>Large-Eddy Simulation</i> )
LSM	Grandes structures ( <i>Large-Scale Motion</i> )
LU-SSOR	<i>Lower-Upper Symmetric Successive Overrelaxation</i>
POD	Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres ( <i>Proper Orthogonal Decomposition</i> )
PSD	Densité Spectrale de Puissance ( <i>Power Spectral Density</i> )
RANS	Equations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds ( <i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i> )
SAS	<i>Scale-Adaptive Simulation</i>
SEM	<i>Synthetic Eddy Method</i>

## Nomenclature

---

TBL	Equations RANS de couche limite ( <i>Thin Boundary Layer equations</i> )
TBL(conv+dpx)	Equations TBL avec diffusion négligée selon les directions parallèles à la paroi
TBL(dpx)	Equations TBL(conv+dpx) avec convection négligée
TBL()	Equations TBL(dpx) avec gradient de pression longitudinal négligé
URANS	Equations de Navier-Stokes instationnaires moyennées au sens de Reynolds ( <i>Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i> )
VLSM	Très grandes structures ( <i>Very Large-Scale Motion</i> )
WALE	<i>Wall-Adapting Local Eddy-viscosity</i>
WMLES	Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi ( <i>Wall-Modelled Large-Eddy Simulation</i> )
ZDES	<i>Zonal Detached-Eddy Simulation</i>

### Contexte et problématique

A l'heure actuelle, l'impact de la thermique sur le développement d'un nouvel avion est encore mal pris en compte par les simulations numériques. Les approches numériques habituellement utilisées dans l'industrie montrent en effet leurs limites sur certains écoulements aérothermiques, comme ceux montrés sur la figure 1. Des problèmes de conception peuvent ainsi apparaître lors des phases avancées du programme de développement de l'avion, notamment les essais en vol, alourdissant le coût de développement et conduisant à une solution qui n'est pas nécessairement optimale.

Pour améliorer la fidélité des simulations numériques, la tendance va vers une approche numérique multi-physique des aspects thermiques. L'approche multi-physique consiste à coupler la simulation de l'écoulement à l'extérieur de l'avion (aérothermique externe), l'écoulement à l'intérieur de l'avion (aérothermique interne) et la réponse thermique de la structure de l'avion. Nous nous concentrerons dans ce travail sur l'aérothermique externe.

L'un des challenges de l'aérothermique externe est la simulation de l'interaction du fluide avec les parois de l'avion, qui met en jeu des écoulements pariétaux à grand nombre de Reynolds et donc turbulents. Cette problématique suscite l'intérêt des industriels et des organismes de recherche.

Ainsi, l'un des objectifs du projet européen CRESCENDO (<http://www.crescendo-fp7.eu/pages/project-overview/expected-results.php>) consiste à appliquer l'approche multi-physique à l'intégration du groupe auxiliaire de puissance (voir la figure 1 (a)).

De plus, le projet ASTHER ([http://www.fnrae.org/1-39841-Detail-projet.php?id\\_theme=7&id\\_projet=37](http://www.fnrae.org/1-39841-Detail-projet.php?id_theme=7&id_projet=37)) regroupant Airbus Operations SAS, l'ONERA et le

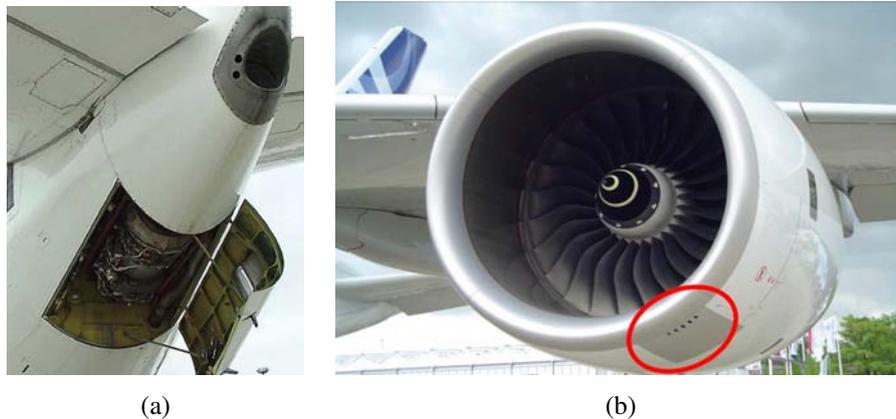


FIGURE 1 : Deux exemples sur lesquels l'impact de la thermique est cruciale. (a) : intégration du groupe auxiliaire de puissance à l'arrière du fuselage (ici sur un B737). (b) : système de dégivrage du bord d'attaque des nacelles moteurs ; un jet chaud sortant des orifices entourés est rabattu sur le matériau composite formant la nacelle (ici sur un A380).

CERFACS porte sur la simulation de l'impact thermique du système de dégivrage des nacelles moteurs (voir la figure 1 (b)).

L'étude de cette interaction du fluide avec les parois et surtout le développement et la mise en oeuvre des ingrédients numériques rendant possible sa simulation constituent l'objectif de cette thèse.

Une première approche est la simulation numérique directe (DNS) (voir la figure 2 (a)), qui propose de résoudre toutes les structures turbulentes et présente l'avantage de ne recourir à aucune modélisation. En considérant que les équations de Navier-Stokes régissent le comportement du fluide, il faut se résoudre à un premier constat : le coût de calcul d'une DNS est aujourd'hui inaccessible pour les écoulements à grand nombre de Reynolds qui nous intéressent.

Ce coût de calcul prohibitif vient des propriétés des écoulements turbulents, qui impliquent un problème multi-échelle dans lequel l'écart entre la plus grande et la plus petite échelle turbulente va grandissant avec le nombre de Reynolds. Aujourd'hui, la DNS d'un écoulement pariétal turbulent, comme le canal de Hoyas and Jiménez [2006], est limitée à un nombre de Reynolds de l'ordre de 40000 sur un domaine de quelques  $cm^3$ , impliquant déjà des maillages dépassant le milliard de points.

Or le nombre de Reynolds typique de l'écoulement externe sur un avion de ligne en croisière est environ  $10^7$ , conduisant à des échelles turbulentes près des parois de l'ordre du micromètre. On imagine alors que la DNS d'un avion va nécessiter un maillage d'une finesse de l'ordre du micromètre sur des distances de plusieurs dizaines de mètres. Cet exemple permet d'apprécier le nombre prohibitif de points du maillage, mettant la simulation directe hors de portée des moyens de calcul actuels.

Pour rendre plus accessible la simulation des écoulements turbulents, une modélisation de tout

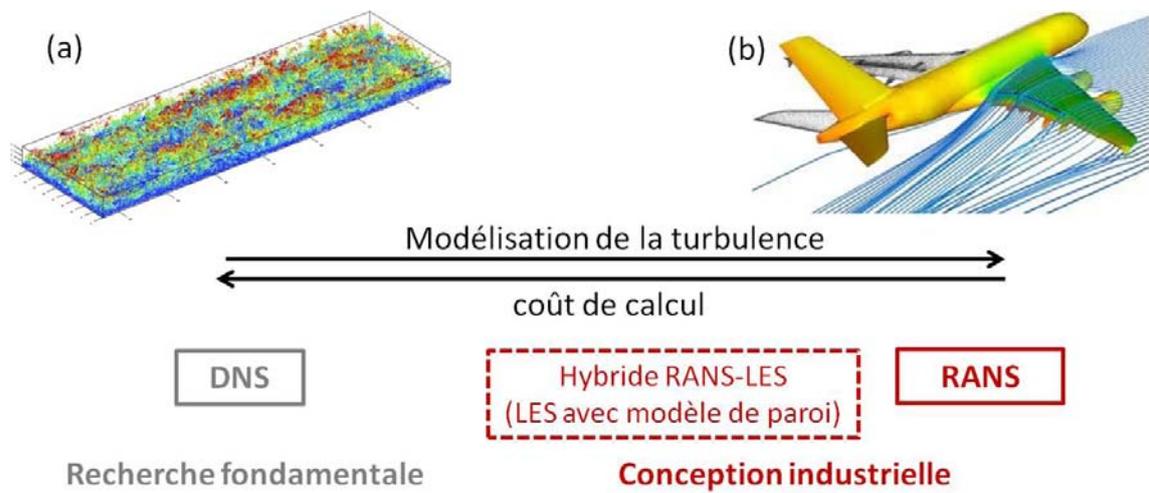


FIGURE 2 : Différences entre l'approche RANS et DNS. L'approche RANS est très majoritairement utilisée en conception industrielle aéronautique. L'approche DNS est réservée à la recherche fondamentale. La tendance va vers l'utilisation des méthode hybrides RANS-LES au sein des processus de conception industrielle. (a) : DNS d'une couche limite sans gradient de pression à  $Re_{\delta_2} = 2100$  (<https://www.alcf.anl.gov/projects/simulation-high-reynolds-number-turbulent-boundary-layers>). (b) : Simulation RANS d'un A380 par le centre de Recherche Aérospatiale Allemand (DLR) [Jameson and Ou, 2011].

ou partie des échelles turbulentes est donc obligatoire. L'approche *Reynolds-Averaged Navier Stokes* (RANS) (voir la figure 2 (b)) propose ainsi de modéliser toutes les échelles turbulentes. Le coût de calcul obtenu est généralement modeste et permet de simuler un avion complet en une demi-journée.

L'approche RANS est cependant sensible à la modélisation choisie, qui devient difficile à définir lorsque la physique de l'écoulement est contrôlée par de grandes structures cohérentes et instationnaires s'étalant sur une large plage de fréquences. C'est typiquement le cas de l'éjection d'air chaud du système de dégivrage montré sur la figure 1 (a), sur lequel les modèles RANS classiques se révèlent inadaptés.

La Simulation des Grandes Echelles, ou *Large-Eddy Simulation* (LES) en anglais, apparaît comme un compromis entre DNS et RANS. Cette approche propose en effet de résoudre uniquement les plus grandes échelles turbulentes et de modéliser celles de taille inférieure.

Malheureusement, les écoulements turbulents pariétaux à grand nombre de Reynolds sont le talon d'Achille de la LES. En effet, la séparation entre les grandes échelles porteuses d'énergie et les plus petites n'est plus possible près de la paroi.

En réponse à ce problème, des approches hybrides RANS-LES ont été développées depuis les années 1970 dans le but de rassembler les points forts des approches RANS et LES. L'approche *Detached-Eddy Simulation* (DES) est certainement l'approche hybride RANS-LES la plus démocratisée. La LES avec modèle de paroi, désignée dans la suite WMLES, est une autre approche hybride RANS-LES qui, bien que moins connue que la DES, a fait l'objet de nombreuses études.

Les études portant sur la WMLES ont principalement concerné des géométries simples, des simulations temporelles<sup>1</sup> et des écoulements incompressibles.

De plus, peu d'études ont évalué la capacité de la WMLES à estimer le flux de chaleur pariétal, qui est pourtant une grandeur critique en aérothermique. Plus généralement, il est possible d'identifier deux freins à l'application de la WMLES pour des simulations spatiales sur des géométries plus complexes :

- la quantification des erreurs liées à la discrétisation numérique est encore mal connue ;
- l'injection de perturbations en entrée du domaine permettant d'assurer le développement d'une couche limite turbulente a été peu étudiée, alors que ce problème est crucial pour le réalisme physique de la simulation. Dans la littérature, l'injection de perturbations pour les méthodes hybrides RANS-LES a principalement été étudiée dans le cadre de la ZDES mode III. A notre connaissance, il n'existe aucune étude spécifique sur l'injection de turbulence pour la WMLES.

Devant ces deux constats, plusieurs questions se posent :  
Quelles sont les sources d'erreur liées à la WMLES, peut-on définir des outils pour analyser ces erreurs et peut-on leur apporter des corrections ?

La WMLES est-elle compatible avec une méthode numérique robuste adaptée à des géométries

---

1. Contrairement aux simulations spatiales, les simulations temporelles sont basées sur un recyclage de l'écoulement, dont la moyenne n'évolue pas spatialement

complexes ?

Est-il possible d'estimer précisément le flux de chaleur avec la WMLES, en prenant en compte les effets du nombre de Mach et/ou d'un grand écart de température ?

Sur une géométrie simple et avec une méthode numérique robuste, est-il possible d'injecter efficacement des perturbations en entrée d'un calcul WMLES pour rapidement générer une couche limite turbulente ?

Est-il possible de mettre en place cette injection de perturbations avec cette méthode numérique robuste sur une géométrie plus complexe, représentative des écoulements aérothermiques externes de l'industrie aéronautique ?

Le travail présenté dans ce manuscrit s'attachera à répondre à ces questions.

## Choix effectués et domaine d'étude

Ce travail se limitera à l'étude de l'approche WMLES sur des applications aérodynamiques et aérothermiques. Seuls des écoulements pariétaux pleinement turbulents et globalement attachés à la paroi seront traités. Nous ferons le choix de laisser de côté l'effet d'un gradient de pression intense sur la WMLES pour se concentrer sur l'effet du nombre de Mach et de l'écart de température entre le fluide et la paroi. Le problème de la transition laminaire-turbulente ne sera pas abordé.

La méthode numérique sera d'ordre deux en espace. Bien qu'a priori non satisfaisant dans le cadre de la LES, nous montrerons que ce choix est justifié par rapport à l'état de l'art des études portant sur les méthodes hybrides RANS-LES. Nous nous forcerons à utiliser une méthode numérique et un post-traitement des résultats identiques sur tous les cas d'étude. Le fluide sera de l'air considéré comme un gaz parfait. La géométrie des cas d'étude ira d'une boîte rectangulaire à la géométrie réelle d'une maquette en soufflerie.

Concernant la forme du document et pour que le lecteur trouve plus facilement ses repères par rapport à la littérature, nous faisons le choix de donner la version anglaise des acronymes utilisés pour désigner les méthodes de calcul, bien que le manuscrit soit rédigé en français.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit s'articule en trois parties et se compose de neuf chapitres, dont l'organisation est montrée sur la figure 3.

Dans la première partie, le chapitre 1 présentera la modélisation de la turbulence par les approches RANS et LES pour les écoulements compressibles.

Le chapitre 2 donnera une introduction à la physique de la turbulence pariétale, ce qui permettra de comprendre les fondements de la modélisation de paroi choisie.

WMLES et méthode numérique étant fortement liées, le chapitre 3 donnera une description de la méthode numérique utilisée.

Enfin, le chapitre 4 fera une synthèse de la littérature sur la WMLES. Cette synthèse nous

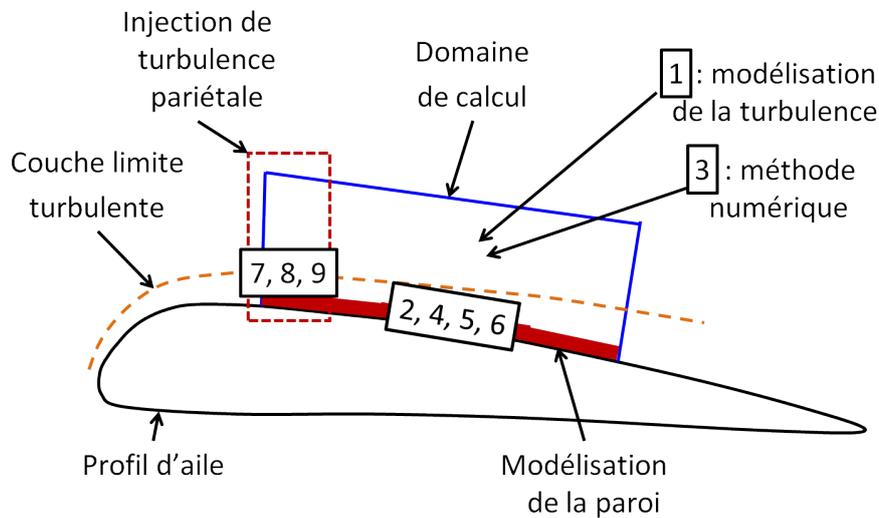


FIGURE 3 : Organisation du manuscrit sur l'exemple de l'écoulement autour d'un profil d'aile. Les chiffres encadrés représentent les chapitres de la thèse.

permettra d'identifier et de classer les différentes sources d'erreur liées à la WMLES, ce qui est crucial pour assurer la fiabilité des simulations WMLES.

La seconde partie sera dédiée à l'étude des erreurs générées par la WMLES.

Sur un écoulement de canal plan périodique, le chapitre 5 mettra en évidence plusieurs sources d'erreur générées par la WMLES et des corrections leur seront apportées. De plus, en passant au régime supersonique, la capacité de la WMLES à estimer le flux de chaleur sera montrée. Ce chapitre sera présenté sous la forme d'un article de journal publié dans *Physics of Fluids* [Bocquet et al., 2012] et a également fait l'objet d'une présentation à la conférence européenne ECCOMAS à Vienne en 2012.

Le chapitre 6 se concentrera quant à lui sur l'erreur due à l'interaction entre la WMLES et la méthode numérique. On montrera qu'il est possible d'analyser cette erreur par un bilan de quantité de mouvement. Cette analyse sera mise en pratique sur ce même écoulement de canal plan périodique.

Enfin, la troisième partie concernera l'injection de turbulence pariétale en entrée d'un calcul WMLES.

Le chapitre 7 proposera une revue de littérature sur l'injection de turbulence pariétale pour la LES et les méthodes hybrides RANS-LES. Cette revue nous permettra de sélectionner une méthode d'injection adaptée à la WMLES.

Puis, cette méthode d'injection sera implémentée et évaluée sur une couche limite turbulente sans gradient de pression dans le chapitre 8. Cette méthode d'injection se révélera capable de générer efficacement une couche limite turbulente réaliste en entrée du domaine.

Enfin, la WMLES avec injection de turbulence pariétale sera mise en oeuvre sur un jet chaud

débouchant dans un écoulement transverse, qui est représentatif du système de dégivrage des nacelles moteurs. Cet écoulement aérothermique présentera une géométrie plus complexe que les écoulements de canal et de couche limite traités précédemment. Malgré ces contraintes, la méthode d'injection se montrera suffisamment robuste pour générer une couche limite turbulente en amont du jet débouchant. Contrairement à un calcul RANS, les résultats WMLES dans le sillage du jet se révéleront proches des résultats expérimentaux. Le travail présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis au journal *Computers and Fluids*.



## **Première partie**

# **Modélisation des écoulements pariétaux turbulents et compressibles**



---

## Modélisation de la turbulence dans les écoulements compressibles

---

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Coût de la Simulation Directe de la turbulence</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Classification des écoulements compressibles et conséquences pour la modélisation de la turbulence</b>	<b>18</b>
1.2.1	Différents régimes parmi les écoulements compressibles	18
1.2.2	Hypothèse d'incompressibilité de la turbulence	20
<b>1.3</b>	<b>Modèle mathématique pour le fluide</b>	<b>20</b>
<b>1.4</b>	<b>L'approche RANS pour les écoulements turbulents compressibles</b>	<b>21</b>
1.4.1	Formulation des équations RANS compressibles	22
1.4.2	Modélisation du tenseur de Reynolds et du flux de chaleur turbulent	22
1.4.3	Formulation simplifiée des équations RANS compressibles	23
1.4.4	L'approche RANS instationnaire	23
1.4.5	Modélisation de la viscosité turbulente	24
1.4.6	Modélisation du nombre de Prandtl turbulent	24
1.4.7	Avantages et limitations de l'approche RANS	24
<b>1.5</b>	<b>Simulation des Grandes Echelles des écoulements turbulents compressibles</b>	<b>25</b>
1.5.1	Formulation des équations LES	25
1.5.2	Modélisation du terme de Reynolds et du flux de chaleur de sous-maille	27
1.5.3	Formulation simplifiée des équations LES compressibles	27
1.5.4	Modélisation de la viscosité de sous-maille	28
1.5.4.1	Présentation des modèles de sous-maille utilisés	28
1.5.4.2	Prise en compte des effets de compressibilité	29

1.5.4.3	Améliorations possibles du modèle de sous-maille et limitations dans le cadre de ce travail . . . . .	29
1.5.5	Modélisation du nombre de Prandtl de sous-maille . . . . .	31
1.5.6	L'inégal comportement de la LES devant la nature de l'écoulement . .	31

---

Une première question, rapidement traitée dans l'introduction, est de se demander pourquoi on choisit de modéliser la turbulence au lieu de la résoudre directement. Après avoir fourni quelques éléments de réponse, on donnera une classification des écoulements compressibles. Puis les deux modélisations de la turbulence utilisées dans la suite de ce travail seront présentées : l'approche Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) et la Simulation des Grandes Echelles (LES).

## 1.1 Coût de la Simulation Directe de la turbulence

Pour comprendre la nécessité de modéliser tout ou partie de la turbulence dans les applications aéronautiques visées dans ce travail, on cherche ici à estimer le coût de calcul d'une simulation résolvant l'ensemble des phénomènes turbulents, c'est-à-dire une Simulation Numérique Directe (DNS). L'estimation de ce coût de calcul nécessite d'introduire quelques propriétés des écoulements turbulents. On ne prétend pas définir ni décrire toutes les propriétés connues de la turbulence, mais on se concentre plutôt sur les quelques éléments permettant d'estimer le coût de calcul d'une DNS. Une description plus détaillée de la turbulence dans le cadre des écoulements pariétaux sera donnée dans le chapitre 2.

La turbulence est caractérisée par un ensemble de structures tourbillonnaires réparties sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Comme illustré en haut de la figure 1.1, la taille de ces structures forme une cascade depuis les plus grandes structures de taille  $L$  jusqu'aux plus petites de taille  $\eta$ , appelée échelle de Kolmogorov. Ces dernières sont finalement dissipées par la viscosité moléculaire du fluide.

Pour compléter cette description de la cascade d'énergie turbulente, le tracé de la répartition de l'énergie des structures turbulentes selon leur taille  $\lambda$  apporte des informations plus quantitatives. Ce tracé est donné en bas de la figure 1.1, où  $E_{uu}$ <sup>1</sup> désigne la densité spectrale de puissance (PSD) de la vitesse longitudinale. Malgré la grande variété des écoulements considérés, on observe une région où tous les spectres adimensionnés suivent une pente de  $-5/3$  lorsqu'ils sont tracés suivant une échelle logarithmique selon les deux axes. Cette région universelle où le comportement de la turbulence est semblable pour une grande variété d'écoulements est appelée la région inertielle.

Il est alors possible d'estimer le rapport entre la plus grande échelle  $L$  et la plus petite échelle  $\eta$  de la turbulence. Pour cela, on suppose qu'au sein de cette cascade d'énergie turbulente, il y a équilibre entre la production  $P$  des plus grandes échelles et la dissipation  $\epsilon$  des plus petites échelles, soit  $P = \epsilon$ . La dissipation peut être estimée par  $\epsilon = O(v^3/\eta)$ , avec  $v$  la vitesse caractéristique des plus petites échelles. La production des grandes structures peut être rapidement

---

1. L'aire sous chaque courbe représente la variance de la vitesse longitudinale, c'est-à-dire que  $\int_0^\infty E_{uu} d(1/\lambda) = \langle u'^2 \rangle$ , où  $\langle u \rangle$  représente la moyenne de la vitesse et  $u'$  est la fluctuation par rapport à la moyenne  $u' = u - \langle u \rangle$ .

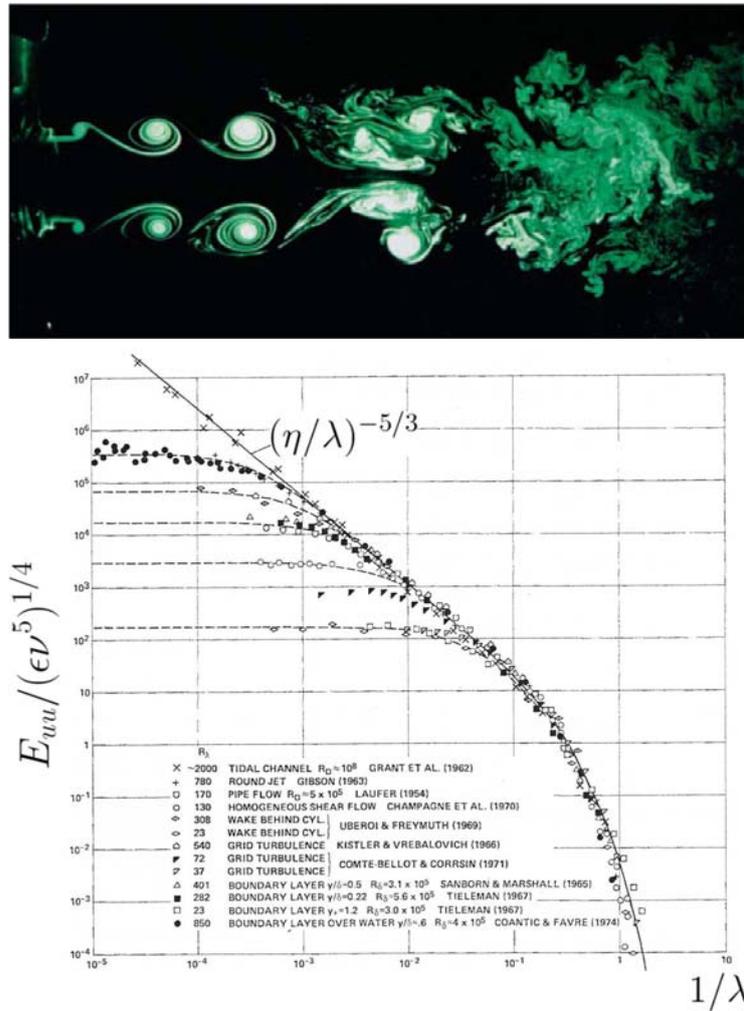


FIGURE 1.1 : En haut : un exemple de la cascade tourbillonnaire de la turbulence. Ecoulement de jet à  $7m.s^{-1}$  ( $Re = 10000$  basé sur le diamètre de la buse).  $L$  indique schématiquement l'échelle des plus grandes structures et  $\eta$  l'échelle des plus petites structures. Image adaptée de Samimy et al. [2004]. En bas : Spectres d'énergie adimensionnés et tracés pour une grande variété d'écoulements. La droite de pente  $-5/3$  caractérise la région inertielle du spectre. Image adaptée de Chapman [1979].

estimée par  $P \approx (0,1U)^2 U/L^2$ , avec  $U$  la vitesse caractéristique des plus grandes échelles. En considérant que la dissipation des plus petites échelles s'opère à un nombre de Reynolds local de l'ordre de l'unité ( $\rho v \eta / \mu = O(1)$ ), on obtient  $L/\eta \propto Re^{3/4}$  où  $Re = \frac{\rho U L}{\mu}$  désigne le nombre de Reynolds basé sur la taille des plus grandes échelles turbulentes. Ce résultat permet d'estimer que la simulation directe de la turbulence en trois dimensions implique un nombre de cellules du maillage, estimé à  $(L/\eta)^3$ , proportionnel à  $Re^{9/4}$ . Le coût de calcul associé nécessite de considérer également l'avancement en temps du calcul, ce qui donne un nombre d'opérations de calcul proportionnel à  $(L/\eta)^4$ , soit  $Re^3$ .

Pour une application aéronautique typique d'aérodynamique externe,  $Re \approx 10^7$ . Le nombre d'opérations nécessaires à la simulation directe d'une telle application est donc hors d'atteinte des moyens de calcul actuels. Une modélisation de la turbulence est donc nécessaire.

## 1.2 Classification des écoulements compressibles et conséquences pour la modélisation de la turbulence

Contrairement aux écoulements incompressibles, les écoulements compressibles autorisent des variations de la masse volumique. Les effets de compressibilité impliquent a priori des phénomènes complexes, comme l'apparition de fluctuations de pression et de masse volumique. Il est donc légitime de se demander s'il existe différents régimes parmi les écoulements compressibles et d'identifier quels régimes font apparaître des effets de compressibilité significatifs. Pour ces régimes fortement compressibles, il est également obligatoire d'étudier les conséquences de la compressibilité sur la modélisation de la turbulence.

### 1.2.1 Différents régimes parmi les écoulements compressibles

Les effets de compressibilité peuvent provenir de différentes causes et impliquer différents couplages entre les équations de quantité de mouvement et d'énergie des équations de Navier-Stokes. Le couplage entre les équations de quantité de mouvement et d'énergie est de première importance pour définir une modélisation adéquate d'un écoulement compressible.

Il est possible de distinguer les différents régimes compressibles en adimensionnant l'équation d'énergie. Sous l'hypothèse que l'écoulement forme une mince couche au dessus d'une paroi le long de l'axe  $x$ , qu'il est invariant en moyenne selon  $x$  et que  $Pr \approx Pr_t^3$ , l'introduction des variables sans dimension :

---

2. Pour un écoulement de couche limite, la production d'énergie cinétique turbulente vaut  $P = -\overline{\rho u'v'} \partial \bar{u} / \partial y$  (voir le paragraphe 1.4 pour la signification des notations).

3. C'est une hypothèse acceptable pour de l'air car  $Pr \approx 0,7$  et  $Pr_t \approx 0,9$ .

---

1.2. Classification des écoulements compressibles et conséquences pour la modélisation de la turbulence

$$\begin{cases} u^* = & u/U_{ref} \\ y^* = & y/\delta \\ \Theta^* = & (T - T_{ref})/|T_{ref} - T_p| \end{cases} \quad (1.1)$$

dans l'équation d'énergie donne :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} [Pr^{-1} \frac{\partial \overline{\Theta^*}}{\partial y^*} + Ec \overline{u^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*}] = 0 \quad (1.2)$$

où  $Ec = U_{ref}^2 / (C_p |T_{ref} - T_p|) = (\gamma - 1) M_{ref}^2 \frac{T_{ref}}{|T_{ref} - T_p|}$  est le nombre d'Eckert, avec  $T_p$  la température à la paroi. Pour fixer les idées, on considère que  $U_{ref}$  désigne soit la vitesse loin en amont  $U_\infty$  pour les écoulements externes, soit la vitesse débitante  $u_b = \int_0^{2\delta} \rho u dy / \int_0^{2\delta} \rho dy$  pour les écoulements internes. De même  $T_{ref}$  est soit la température loin en amont ( $T_\infty$ ), soit la température débitante  $T_b = \int_0^{2\delta} \rho u T dy / \int_0^{2\delta} \rho u dy$ .

Suivant les valeurs du nombre d'Eckert et du rapport de température  $\frac{T_{ref}}{|T_{ref} - T_p|}$ , différents régimes compressibles peuvent être distingués et sont donnés dans le tableau 4.5.

TABLE 1.1 : Les différents régimes compressibles et le type couplage associé entre les équations de quantité de mouvement et d'énergie. QDM signifie quantité de mouvement.

Régime compressible	$Ec$	$\frac{T_{ref}}{ T_{ref} - T_p }$	Couplage des équations
<b>I</b>	$Ec \ll Pr^{-1}, Ec \ll 1$	$\gg 1$	QDM $\rightarrow$ énergie
<b>II</b>	$Ec \approx Pr^{-1}, Ec \approx 1$	$\gg 1$	QDM $\rightarrow$ énergie
<b>III</b>	$Ec > Pr^{-1}, Ec > 1$	$\approx 1$	QDM $\leftrightarrow$ énergie
<b>IV</b>	$Ec \ll Pr^{-1}, Ec \ll 1$	$\approx 1$	QDM $\leftrightarrow$ énergie

Dans le cas du régime I, le travail des forces visqueuses et les variations de masse volumique et de viscosité sont négligeables. L'équation d'énergie est une pure équation de diffusion et le champ de vitesse est similaire à son homologue incompressible. La température est considérée comme un scalaire passif. Cette situation est typique d'un écoulement à faible nombre de Mach sans source de chaleur et correspond à un écoulement quasiment incompressible.

Au régime II, le travail des forces visqueuses est significatif mais les variations de masse volumique et de viscosité restent négligeables. Le champ de vitesse reste similaire à son homologue incompressible. De nouveau, la température est considérée comme un scalaire passif.

Au régime III, ni le travail des forces visqueuses ni les variations de masse volumique et de viscosité sont négligeables. L'écoulement est pleinement compressible et les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont couplées. Le champ de vitesse n'est plus similaire à son homologue incompressible.

Au régime IV, le travail des forces visqueuses est négligeable mais les variations de masse volumique et de viscosité sont significatives. Ce cas correspond à un écoulement à faible nombre de Mach avec une source de chaleur extérieure, comme par exemple une arrivée d'air chaud ou une paroi chauffée ou refroidie.

Dans la suite, nous considérerons que les transferts de chaleur proviennent uniquement de la convection forcée. Les effets de gravité, la convection naturelle et les transferts de chaleur radiatifs seront négligés. On supposera également l'absence d'onde de choc. Cette hypothèse n'est pas anodine car un choc est caractérisé par une quasi-discontinuité du champ de masse volumique, ce qui peut remettre en cause certaines hypothèses effectuées dans la suite concernant la modélisation de la turbulence et poser des problèmes à la méthode numérique de résolution des équations.

### 1.2.2 Hypothèse d'incompressibilité de la turbulence

Pour les régimes compressibles III et IV, il est possible de tenir compte des effets de compressibilité d'une manière assez simple en utilisant l'hypothèse de Morkovin. L'hypothèse de Morkovin indique que la dynamique de la turbulence compressible est très proche de la turbulence incompressible tant que le nombre de Mach turbulent  $M_t \ll 1$ , avec  $M_t = \frac{\sqrt{k}}{c}$ .  $k = 0.5 \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle$  désigne l'énergie cinétique de turbulence et  $c = \sqrt{\gamma RT}$  la vitesse du son, où  $R$  est la constante des gaz parfait,  $T$  la température statique du fluide et  $\gamma = 1,4$ .  $M_t \ll 1$  signifie que les effets de compressibilité dus aux fluctuations de pression et de masse volumique sont négligeables devant les variations de masse volumique et de viscosité moléculaire moyennes.

Selon Huang et al. [1995], la condition  $M_t \ll 1$  est valable pour un nombre de Mach  $M < 5$ . Garnier et al. [2009] (p. 32) indiquent qu'il est possible de négliger les effets de compressibilité sur la turbulence tant que  $M_t < 0,2$ .

## 1.3 Modèle mathématique pour le fluide

L'ensemble de ce travail s'effectue sous le formalisme des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien compressible considéré comme un gaz parfait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_r) &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho E \mathbf{U} + p \mathbf{U} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_r) \mathbf{U} + C_p(\phi + \phi_t)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{U} = (u, v, w)$ ,  $p$  désigne la pression statique du fluide et  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

La première équation traduit la conservation de la masse du fluide, la seconde traduit la conservation de la quantité de mouvement du fluide et la dernière traduit la conservation de l'énergie

totale  $E$  du fluide.

Les relations complémentaires suivantes proviennent des hypothèses faites sur le fluide :

- le fluide est considéré comme un gaz parfait :  $p = \rho RT$  ;
- le fluide est supposé newtonien et respectant l'hypothèse de Stokes, ce qui permet d'écrire le tenseur des contraintes  $\tau$  sous la forme  $\tau = 2\mu\mathbf{S} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{I}$ , où  $\mu$  est la viscosité moléculaire dynamique du fluide et  $\mathbf{S}$  le tenseur des déformations, défini par  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{U}) + \nabla^t(\mathbf{U}))$  ;
- la viscosité moléculaire ne dépend que de la température et suit la loi de Sutherland : 
$$\frac{\mu(T)}{\mu(T_{ref})} = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S}{T + S}$$
 avec  $S = 110,4K$  ;
- le vecteur flux de chaleur est supposé suivre la loi de Fourier, ce qui donne  $\bar{\phi} = -\lambda\nabla(\bar{T})$ , où  $\lambda = -\frac{C_p\mu}{Pr}$  est la conductivité thermique moléculaire.  $C_p$  et  $Pr$  sont des propriétés du fluide et sont respectivement appelées la capacité calorifique à pression constante et le nombre de Prandtl.

## 1.4 L'approche RANS pour les écoulements turbulents compressibles

Partant des équations de Navier-Stokes, l'approche RANS propose de modéliser l'ensemble des échelles turbulentes et de chercher une solution stationnaire correspondant à la moyenne au sens de Reynolds de l'écoulement, comme indiqué sur la figure 1.2. On présentera tout d'abord les équations RANS et les hypothèses associées avant d'aborder la modélisation de la turbulence.

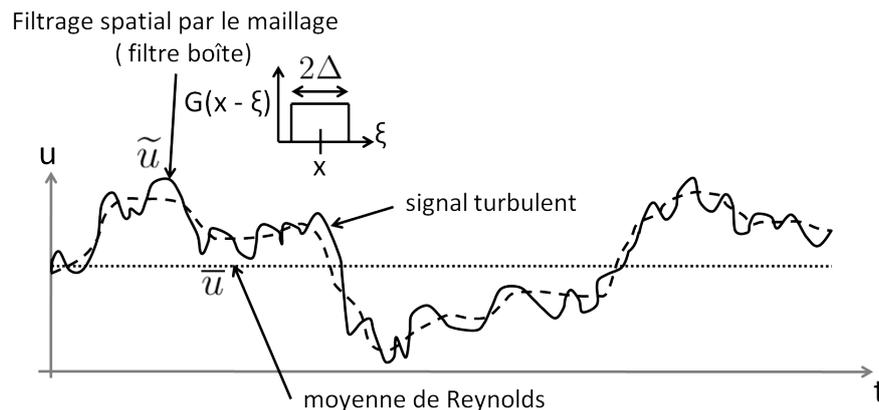


FIGURE 1.2 : Principe des approches RANS et LES. ( $\cdot \cdot \cdot$ ) : solution stationnaire obtenue avec l'approche RANS, (- -) : solution filtrée spatialement obtenue avec l'approche LES.

### 1.4.1 Formulation des équations RANS compressibles

L'écoulement est décomposé en une partie moyenne et une partie fluctuante en utilisant la moyenne au sens de Reynolds  $\overline{f} : f = \overline{f} + f'$ . En plus de commuter avec la somme, la dérivée et l'intégrale, l'opérateur de moyenne de Reynolds vérifie les propriétés suivantes :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \quad ; \quad \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad ; \quad \overline{\overline{f}g} = \overline{f} \overline{g} \quad ; \quad \overline{f'} = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cadre des écoulements compressibles, l'utilisation de la moyenne pondérée par la masse  $\overline{\rho f} / \overline{\rho}$  permet de conserver un formalisme similaire au cas incompressible. En insérant dans les équations de Navier-Stokes la décomposition de  $\mathbf{U}$ ,  $E$  et la température statique  $T$  sous la forme  $f = \overline{\rho f} / \overline{\rho} + f'$  et la décomposition des autres variables sous la forme  $f = \overline{f} + f'$ , on aboutit aux équations RANS compressibles :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{U}}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{U}} + \overline{p} \mathbf{I} - \overline{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{r}}) &= 0 \\ \nabla \cdot [(\overline{\rho E^*} + \overline{p}) \overline{\mathbf{U}} - (\overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{r}}) \overline{\mathbf{U}} + \overline{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{t}}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec  $\overline{E^*} = \overline{E} + k$ .

On remarque la présence de trois termes inconnus :

- le tenseur de Reynolds  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{r}} = -\overline{\rho \mathbf{U}' \otimes \mathbf{U}'}$ , qui apparaît du fait de la non-linéarité des termes convectifs  $\overline{\rho \mathbf{U}} \otimes \overline{\mathbf{U}}$  ;
- le flux de chaleur turbulent  $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{t}}$  ;
- l'énergie cinétique turbulente  $k$ .

Ces termes doivent être modélisés.

### 1.4.2 Modélisation du tenseur de Reynolds et du flux de chaleur turbulent

Dans ce travail, la finalité des simulations RANS est soit de fournir des données de référence sur des cas académiques comme une couche limite sans gradient de pression, soit de fournir un champ initial pour un calcul LES.

Dans ce cadre, pour modéliser le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur turbulent, on considère respectivement que l'hypothèse de Boussinesq et l'utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  sont acceptables. Ces deux hypothèses se traduisent par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{r}} = -\frac{2}{3}(\overline{\rho}k + \mu_t \nabla \cdot \overline{\mathbf{U}}) \mathbf{I} + 2\mu_t \overline{\mathbf{S}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{t}} = -\lambda_t \nabla(\overline{T}), \lambda_t = -\frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \end{cases} \quad (1.6)$$

et permettent de ramener la modélisation de  $\tau_r$  et  $\phi_t$  au choix d'un champ de  $\mu_t$  et d'un champ de  $Pr_t$ .

### 1.4.3 Formulation simplifiée des équations RANS compressibles

Après insertion de l'équation 1.6 dans l'équation 1.5, on s'aperçoit que l'énergie cinétique turbulente  $k$  apparaît dans l'équation de quantité de mouvement et dans l'équation d'énergie. Pour éviter de modéliser  $k$ , on suppose que  $\frac{2}{3}\bar{\rho}k \ll \bar{p}$  et que  $k \ll \bar{E}$ . Ces deux hypothèses sont valides si  $2k/U^2 \ll 1$ , ce qui est vrai pour la plupart des écoulements, mêmes supersoniques ( $M < 5$ ).

On obtient alors les équations RANS compressibles simplifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\underbrace{\bar{\rho}\bar{\mathbf{U}}}_{flux\ convectif\ F_c}) = 0 \\ \nabla \cdot (\underbrace{\bar{\rho}\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}} + \bar{p}\mathbf{I} + \frac{2}{3}\mu_t(\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}})\mathbf{I}}_{flux\ convectif\ F_c} - \underbrace{(\bar{\tau} + 2\mu_t\bar{\mathbf{S}})}_{flux\ diffusif\ F_d}) = 0 \\ \nabla \cdot (\underbrace{[(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p})\bar{\mathbf{U}} + \frac{2}{3}\mu_t(\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}})\mathbf{I}]}_{flux\ convectif\ F_c} - \underbrace{(\bar{\tau} + 2\mu_t\bar{\mathbf{S}})\bar{\mathbf{U}} + \bar{\phi} + \phi_t}_{flux\ diffusif\ F_d}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

### 1.4.4 L'approche RANS instationnaire

L'approche RANS cherche une solution stationnaire en moyenne d'un écoulement. Lorsque cet écoulement contient des fluctuations à des fréquences nettement plus basses que la fréquence des échelles turbulente, il est possible de capturer ces instationnarités basses fréquences en utilisant les équations RANS instationnaires (URANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{U}}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}\bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}} + \bar{p}\mathbf{I} + \frac{2}{3}\mu_t\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\mathbf{I} - \bar{\tau} - 2\mu_t\bar{\mathbf{S}}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}\bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p})\bar{\mathbf{U}} - (\bar{\tau} - \frac{2}{3}\mu_t\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\mathbf{I} + 2\mu_t\bar{\mathbf{S}})\bar{\mathbf{U}} + \bar{\phi} + \phi_t] = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Cette hypothèse de séparation d'échelle entre les échelles résolues par les équations URANS et les échelles turbulentes a par exemple lieu dans les écoulements de turbomachines. L'approche URANS a été utilisée avec succès dans ce domaine pour capturer les instationnarités dont les fréquences sont de l'ordre de la fréquence de rotation de la machine [Gourdain, 2005].

Dans la suite, les équations URANS interviendront uniquement lors de la discussion sur les différentes façons de modéliser la paroi (voir le chapitre 4).

### 1.4.5 Modélisation de la viscosité turbulente

La modélisation de la viscosité turbulente  $\mu_t$  est dédiée au modèle de turbulence. On peut distinguer deux types de modèles de turbulence : les modèles algébriques et les modèles à équations de transport.

Les modèles algébriques donnent explicitement la valeur de  $\mu_t$ . Des exemples de modèles algébriques dédiés aux écoulements pariétaux seront donnés dans le paragraphe 4.3.2.3.

Les modèles de turbulence à équations de transport nécessitent quant à eux la résolution numérique d'un jeu d'équations. On considère que le modèle proposé par Spalart and Allmaras [1992] possède un contenu physique suffisant pour la finalité des simulations RANS menées dans ce travail. Ce modèle de turbulence utilise une équation de transport pour la quantité  $\rho\tilde{\nu}$ . Loin des parois,  $\mu_t \approx \rho\tilde{\nu}$  si bien que  $\tilde{\nu}$  peut être considérée comme une viscosité turbulente. Les modèles transportant les grandeurs ( $k$  et  $\epsilon$ ) ou ( $k$  et  $\omega$ ) sont également très répandus, où  $\omega \propto \epsilon/k$  et représente une dissipation modifiée.

L'extension des modèles de turbulence aux écoulements compressibles reposera dans la suite sur l'hypothèse de Morkovin, valide pour  $M_t < 0,2$ . Les variations de la température moyenne  $\bar{T}$ , masse volumique moyenne  $\bar{\rho}$  et viscosité moléculaire moyenne  $\bar{\mu}$  seront donc prises en compte dans le modèle de turbulence. Vu que les simulations RANS porteront sur deux écoulements à faible nombre de Mach présentant de faibles écarts de température, on considère que l'hypothèse de Morkovin est suffisante pour tenir compte des effets de compressibilité sur la turbulence modélisée.

### 1.4.6 Modélisation du nombre de Prandtl turbulent

Vue la finalité des simulations RANS menées ici, on suppose le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  constant en espace loin des parois. Dans la région de très proche paroi, de nombreux résultats DNS et expérimentaux indiquent néanmoins que  $Pr_t$  varie. Une description plus détaillée de ces variations sera donnée dans le paragraphe 4.3.2.3. Au dessus de cette région, la valeur  $Pr_t \approx 0,85$  peut par exemple être utilisée [Kays, 1994].

### 1.4.7 Avantages et limitations de l'approche RANS

Puisque l'ensemble des échelles turbulentes est modélisé, le raffinement d'un maillage RANS est principalement dicté par les variations du champ moyen. De plus, l'approche RANS est compatible avec l'utilisation de cellules très étirées, ce qui permet d'optimiser le nombre de cellules du maillage.

En outre, la recherche d'une solution stationnaire permet l'utilisation d'une avance en temps implicite à grands pas de temps, combinée à des méthodes d'accélération de convergence comme les méthodes multi-grilles ou l'utilisation d'un pas de temps local.

En conséquence, le coût d'un calcul RANS est généralement modéré, ce qui constitue le prin-

principal avantage de cette approche. Le maillage d'un avion complet avec moteurs et détails géométriques nécessite environ  $100 \times 10^6$  cellules, pour un temps de calcul de l'ordre de 24 heures.

Un autre avantage de l'approche RANS est de permettre l'estimation des erreurs dues à la méthode numérique de résolution des équations en effectuant une convergence en maillage. La convergence en maillage consiste à obtenir une solution sur des maillages successivement raffinés jusqu'à ce que la solution soit indépendante du maillage. L'erreur due à la résolution numérique des équations est alors négligeable et seules les erreurs provenant de la modélisation physique interviennent, c'est-à-dire les hypothèses faites pour obtenir les équations RANS et la modélisation de la turbulence.

Cependant l'approche RANS présente un défaut majeur. Puisque toutes les échelles turbulentes sont modélisées, le résultat d'une simulation RANS peut devenir très dépendant du modèle de turbulence utilisé.

L'exemple du jet chaud débouchant dans un écoulement transverse froid montre que des modèles de turbulence largement utilisés (Spalart-Allmaras,  $k-\epsilon$ ,  $k-\omega$ ) ne parviennent pas à correctement estimer la distribution de température pariétale dans le sillage du jet [Jouhaud et al., 2007; Duda, 2012]. Cette limitation est clairement montrée dans le chapitre 9. Bien que l'on s'écarte du domaine de l'aérodynamique externe, on peut citer le travail de Tucker [2011] qui passe en revue les écoulements problématiques pour l'approche RANS et URANS dans le cadre des turbomachines.

## 1.5 Simulation des Grandes Echelles des écoulements turbulents compressibles

L'observation des spectres de vitesse sur la figure 1.1 montre que les grandes échelles turbulentes dépendent de l'écoulement alors que les échelles situées dans la région inertielle présentent un caractère plus universel. L'approche LES tire parti de ce constat en résolvant les plus grandes échelles turbulentes et en modélisant uniquement l'action des échelles de taille inférieure à une taille donnée, notée  $l$ .

### 1.5.1 Formulation des équations LES

Pour effectuer cette séparation d'échelle, un filtre spatial passe haut de longueur de coupure  $l$  est appliqué sur l'écoulement instantané, ce qui donne la décomposition  $f = \tilde{f} + f'$ . Ce filtre s'écrit :

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1,3} G_i\left(\frac{x_i - \xi_i}{l}\right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (1.9)$$

où  $G$  est la fonction de transfert mono-dimensionnelle du filtre. Dans le cas où le filtrage est

effectué implicitement par le maillage<sup>4</sup>, le filtre implicite obtenu est alors assimilé à un filtre boîte de largeur  $l \approx 2\Delta$ , avec  $\Delta$  la taille caractéristique des cellules du maillage. La fonction de transfert  $G$  du filtre boîte et une représentation schématique d'une solution LES sont données sur la figure 1.2.

Dans le cadre des écoulements compressibles et de manière analogue à l'approche RANS, l'utilisation du filtrage pondéré par la masse  $\widetilde{\rho f}/\widetilde{\rho}$  permet de conserver un formalisme similaire au cas incompressible. En insérant dans les équations de Navier-Stokes la décomposition de  $\mathbf{U}$ ,  $E$  et  $T$  sous la forme  $f = \widetilde{\rho f}/\widetilde{\rho} + f'$  et la décomposition des autres variables sous la forme  $f = \widetilde{f} + f'$ , on aboutit aux équations LES compressibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot [\widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{U}}] = 0 \\ \frac{\partial \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot [\widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{U}} \otimes \widetilde{\mathbf{U}} + \widetilde{p} \mathbf{I} - \widetilde{\boldsymbol{\tau}} - (\mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R})] = 0 \\ \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\widetilde{E} + \widetilde{p}) \widetilde{\mathbf{U}} - (\widetilde{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R}) \widetilde{\mathbf{U}} + \widetilde{\phi} + \phi_{\text{sgs}}] = B_4 + B_5 + B_6 - B_7 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{E} = \frac{\widetilde{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \widetilde{\rho} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i \\ \mathbf{L} = \widetilde{\rho} (\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i) \\ \mathbf{C} = \widetilde{\rho} (\widetilde{u}_i \widetilde{u}'_j - \widetilde{u}'_i \widetilde{u}_j) \\ \mathbf{R} = \widetilde{\rho} \widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_j \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Différentes formulations de l'équation d'énergie dans l'équation 1.10 sont possibles et l'on a choisi ici la formulation de Vreman [Garnier et al., 2009].

Par rapport aux équations RANS, on remarque que plusieurs termes supplémentaires apparaissent. Ces termes sont dus au fait que l'opérateur de filtrage spatial n'est pas un opérateur de Reynolds. En effet :

$$\widetilde{fg} \neq \widetilde{f} \widetilde{g} \quad ; \quad \widetilde{f}' \neq 0 \quad ; \quad \widetilde{\widetilde{f}} \neq \widetilde{f} \quad ; \quad (1.12)$$

Comme dans les équations RANS, on note un terme de Reynolds  $\mathbf{R}$  analogue au tenseur de Reynolds et un terme de flux de chaleur de sous-maille  $\phi_{\text{sgs}}$ .

---

4. Le filtrage implicite est à opposer au filtrage explicite, ce dernier consistant à appliquer sur l'écoulement un filtre spatial bien déterminé dont la longueur de coupure est supérieure à la taille des cellules du maillage.

### 1.5.2 Modélisation du terme de Reynolds et du flux de chaleur de sous-maille

Deux approches existent pour modéliser l'effet des échelles de sous-maille : une approche explicite et une approche implicite. L'approche implicite consiste à intégrer l'effet des échelles de sous-maille au sein de la méthode numérique, sans faire apparaître explicitement le terme de Reynolds et le flux de chaleur de sous-maille. Nous nous plaçons dans la suite dans le cadre de l'approche explicite, qui spécifie un modèle de sous-maille pour le terme de Reynolds et le flux de chaleur de sous-maille.

De plus, on peut distinguer deux groupes parmi les modèles de sous-maille. Le premier groupe rassemble les modèles structurels, dont le but est de reconstruire le champ de sous-maille  $u'_i$ . Cette reconstruction peut par exemple s'effectuer par déconvolution du filtrage spatial ou par une résolution sur plusieurs échelles de maillage. Garnier et al. [2009] (chap. 5) présentent une description détaillée des modèles structurels dans le cadre des écoulements compressibles.

Le second groupe rassemble les modèles fonctionnels, dont le but est d'estimer l'action des échelles de sous-maille, notamment leur dissipation, sans se préoccuper de leur structure spatiale.

C'est dans le cadre des modèles fonctionnels que nous nous plaçons. Comme pour l'approche RANS, on utilise l'hypothèse de Boussinesq et l'introduction d'un nombre de Prandtl de sous-maille pour modéliser le terme de Reynolds et le flux de chaleur de sous-maille :

$$\begin{cases} \mathbf{R} = -\frac{2}{3}(\tilde{\rho}k_{sgs} + \mu_{sgs}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}})\mathbf{I} + 2\mu_{sgs}\tilde{\mathbf{S}} \\ \phi_{sgs} = -\lambda_{sgs}\nabla(\tilde{T}), \lambda_{sgs} = -\frac{C_p\mu_{sgs}}{Pr_{sgs}} \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $k_{sgs} = \widetilde{u'_i u'_i}$  est l'énergie cinétique contenue dans les échelles de sous-maille. Il reste à modéliser  $k_{sgs}$ , la viscosité de sous-maille  $\mu_{sgs}$  et le nombre de Prandtl de sous-maille  $Pr_{sgs}$ .

### 1.5.3 Formulation simplifiée des équations LES compressibles

De nombreuses hypothèses supplémentaires sont généralement effectuées sur l'équation 1.10. Tout d'abord, les termes  $B_4$  à  $B_7$ , dont la formulation peut être trouvée dans Garnier et al. [2009] (p. 29), sont presque systématiquement négligés (voir les justifications de Garnier et al. [2009], p. 30-32 et 84-85). Nous les avons néanmoins fait apparaître pour souligner la complexité des équations LES compressibles.

Ensuite, le terme de Leonard  $\mathbf{L}$  et le terme croisé  $\mathbf{C}$  sont négligés.

Enfin, on suppose que  $k_{sgs} \ll \tilde{u}_i \tilde{u}_i$ ,  $\frac{2}{3}\tilde{\rho}k_{sgs} \ll \tilde{p}$  et  $\tilde{u}_i \tilde{u}_i \approx \tilde{u}_i \tilde{u}_i$ , ce qui permet d'écrire que  $\tilde{E} \approx \tilde{\rho}\tilde{E}$  et de négliger  $k_{sgs}$ . Puisque  $k_{sgs}$  ne représente qu'une fraction de l'énergie cinétique turbulente  $k$ , les hypothèses  $k_{sgs} \ll \tilde{u}_i \tilde{u}_i$  et  $\frac{2}{3}\tilde{\rho}k_{sgs} \ll \tilde{p}$  sont moins restrictives que les hypothèses analogues  $k \ll \bar{E}$  et  $\frac{2}{3}\bar{\rho}k \ll \bar{p}$  faites en RANS. Ainsi, Garnier et al. [2009] (p. 31) indiquent que les hypothèses  $k_{sgs} \ll \tilde{u}_i \tilde{u}_i$  et  $\frac{2}{3}\tilde{\rho}k_{sgs} \ll \tilde{p}$  sont valides jusqu'à  $M_t = 0, 6$ .

On aboutit alors aux équations LES compressibles simplifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot ( \underbrace{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{U}}}_{\text{flux convectif } F_c} ) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot [ \underbrace{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{p} \mathbf{I}}_{\text{flux convectif } F_c} + \frac{2}{3} \mu_{sgs} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}) \mathbf{I} - \underbrace{\tilde{\tau} - 2\mu_{sgs} \tilde{\mathbf{S}}}_{\text{flux diffusif } F_d} ] = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot [ \underbrace{(\tilde{\rho} \tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{U}} + \frac{2}{3} \mu_{sgs} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}) \mathbf{I}}_{\text{flux convectif } F_c} - \underbrace{(\tilde{\tau} + 2\mu_{sgs} \tilde{\mathbf{S}}) \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\phi} + \phi_{sgs}}_{\text{flux diffusif } F_d} ] = 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

### 1.5.4 Modélisation de la viscosité de sous-maille

Comme indiqué ci-dessus, la viscosité de sous-maille  $\mu_{sgs}$  est déterminée ici par un modèle de sous-maille de type fonctionnel dans le cadre de l'approche explicite. Après une présentation des deux modèles de sous-maille retenus, on donnera quelques propriétés devant idéalement être vérifiées par le modèle de sous-maille. Pour terminer, on discutera des améliorations possibles des modèles de sous-maille fonctionnels tout en soulignant les limitations intrinsèques de l'approche explicite et les spécificités des écoulements pariétaux.

#### 1.5.4.1 Présentation des modèles de sous-maille utilisés

On donne une brève description des modèles de sous-maille de Smagorinsky [1963] et WALE [Nicoud and Ducros, 1999] qui seront utilisés par la suite.

**Modèle de Smagorinsky** Dans ce modèle,  $\mu_{sgs}$  est définie comme le produit d'une échelle de longueur par une échelle de vitesse. L'échelle de longueur est basée sur la taille caractéristique des cellules, généralement déterminée par  $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ . L'échelle de vitesse est  $v_\Delta = \Delta \|\tilde{\mathbf{S}}\|$ , où  $\|\tilde{\mathbf{S}}\| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$  est une mesure du gradient de vitesse à l'échelle  $\Delta$ . Le modèle de Smagorinsky s'exprime alors de la manière suivante :

$$\mu_{sgs} = \tilde{\rho} (C_s \Delta)^2 \|\tilde{\mathbf{S}}\| \quad (1.15)$$

La constante  $C_s$  dépend de l'écoulement et en pratique, les valeurs  $0,1 < C_s < 0,2$  sont utilisées. Dans le cas d'un écoulement turbulent pariétal, la valeur  $C_s \approx 0,1$  est appropriée.

**Modèle WALE** Dans ce modèle, la mesure du gradient de vitesse est modifiée par rapport au modèle de Smagorinsky :

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^d &= \frac{1}{2}(\widetilde{g_{ij}}^2 - \widetilde{g_{ji}}^2) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\widetilde{g_{kk}}^2 \\
 \widetilde{g_{ij}}^2 &= \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_j} \\
 \mu_{sgs} &= (C_w \Delta)^2 \frac{S_{ij}^d S_{ij}^d}{(\widetilde{S_{ij}} \widetilde{S_{ij}})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

La constante  $C_w$  est fixée à la valeur recommandé de 0,5. Ce modèle respecte la propriété que la viscosité de sous-maille décroît proportionnellement à la distance à la paroi au cube  $y^3$ .

#### 1.5.4.2 Prise en compte des effets de compressibilité

En utilisant l'hypothèse de Morkovin, les modèles de sous-maille utilisés en incompressible peuvent être directement transposés aux écoulements compressibles, pourvu que les variations de masse volumique et de viscosité moléculaire moyennes soient prises en compte. Dans le cadre de l'approche RANS, on a vu que cette hypothèse est valide pour  $M_t < 0,2$ . Or les échelles de sous-maille ne contiennent qu'une fraction des fluctuations turbulentes, et il faut donc s'attendre à ce que l'hypothèse d'incompressibilité des échelles de sous-maille soit applicable en LES pour des valeurs encore plus grandes de  $M_t$ .

#### 1.5.4.3 Améliorations possibles du modèle de sous-maille et limitations dans le cadre de ce travail

TABLE 1.2 : Exemples de propriétés requises d'un modèle de sous-maille selon Baya Toda et al. [2010].  $y$  désigne la distance à la paroi.

	$\mu_{sgs} = O(y^3)$ près de la paroi	$\mu_{sgs} = 0$ en rotation pure ( $\partial u/\partial y = -1$ $\partial v/\partial x = 1$ )	$\mu_{sgs} = 0$ en cisaillement pur ( $\partial u/\partial y = 1$ )	$\mu_{sgs} = 0$ en expansion/ contraction axisymétrique ( $\partial u/\partial x = \pm 2$ $\partial v/\partial y = \mp 1$ $\partial w/\partial z = \mp 1$ )	$\mu_{sgs} = 0$ en expansion/ contraction isotrope ( $\partial u/\partial x = \pm 1$ $\partial v/\partial y = \pm 1$ $\partial w/\partial z = \pm 1$ )
Smagorinsky	non ( $O(1)$ )	oui	non	non	non
WALE	oui	non	oui	non	oui
Nicoud and Ducros					

Le tableau 1.2 présente quelques propriétés pouvant être exigées d'un modèle de sous-maille.

On s'aperçoit que ni le modèle de Smagorinsky ni le modèle WALE ne remplissent toutes les propriétés requises. Notamment, le modèle de Smagorinsky ne prévoit pas une viscosité de sous-maille qui s'annule à la paroi. Il dissipe de plus d'une manière excessive, ce qui empêche par exemple la transition vers la turbulence d'une couche limite laminaire.

Dans le cadre de la modélisation de paroi que l'on mettra en place dans le chapitre 5, le comportement de  $\mu_{sgs}$  près de la paroi n'aura aucune influence car le premier point de calcul au dessus de la paroi sera idéalement placé à  $y^+ > 100$ . De plus, pour palier à la trop forte dissipation du modèle de Smagorinsky, il est possible d'y adjoindre une fonction, appelée fonction de structure sélective, permettant de le désactiver dans les régions où les échelles turbulentes sont correctement résolues. La fonction de structure sélective intervient comme coefficient multiplicatif devant la viscosité de sous-maille :  $\mu_{sgs,sel} = 1,65 f(\Theta) \mu_{sgs}$ , avec :

$$\begin{cases} f(\Theta) = r^2(\Theta) & \text{si } \Theta < 20^\circ \\ f(\Theta) = 1 & \text{si } \Theta > 20^\circ \\ \Theta = \arcsin \left[ \frac{\|\Omega \times \langle \Omega \rangle\|}{\|\Omega\| \|\langle \Omega \rangle\|} \right] \end{cases} \quad (1.17)$$

où  $\Omega$  désigne la vorticité. La fonction de structure sélective a été utilisée dans de nombreuses études sur des écoulements incompressibles et compressibles [Lenormand et al., 2000; Quéméré et al., 2001; Quéméré and Sagaut, 2002; Sagaut et al., 2002; Labbé et al., 2002; Tromeur et al., 2003; Larchevêque et al., 2003, 2004; Montreuil et al., 2005; Simon et al., 2006; Levasseur et al., 2006; Sagaut, 2006; Dandois et al., 2006, 2007; Larchevêque et al., 2007; Gand et al., 2010].

Des modèles de sous-maille plus évolués existent, comme le modèle Sigma [Baya Toda et al., 2010] qui remplit toutes les propriétés du tableau 1.2, les modèles utilisant une procédure dynamique [Germano et al., 1991; Lilly, 1992] ou les modèles utilisant une équation de transport. La procédure dynamique consiste à déterminer la constante du modèle de sous-maille en supposant que  $\mu_{sgs}$  à l'échelle  $l$  est égal à  $\mu_{sgs}$  à l'échelle  $2l$  (hypothèse de similarité d'échelles).

Il semble a priori intéressant d'utiliser un modèle de sous-maille le plus fidèle possible. Cependant, dans le cadre de ce travail, l'effet du modèle de sous-maille sur la qualité du champ LES peut être apprécié de façon plus précise en considérant les remarques suivantes :

- les écoulements pariétaux posent problème même aux modèles de sous-maille évolués cités ci-dessus. Pour ces écoulements, la structure de la turbulence pariétale n'est en effet pas isotrope et l'hypothèse de similarité d'échelle n'est pas valide [Kleissl et al., 2006] ;
- une modélisation de la paroi sera utilisée en combinaison de l'approche LES. Cette modélisation de paroi impliquera l'utilisation de cellules nettement plus grossières que les cellules habituellement utilisées en LES. La taille du filtre  $l$  sera donc nettement plus grande près de la paroi, ce qui remet en cause les hypothèses justifiant l'utilisation des modèles de sous-maille. A priori, même le modèle de sous-maille le plus évolué nécessitera donc une correction près de la paroi (voir le paragraphe 4.3.3.1) ;
- on utilisera une méthode numérique d'ordre deux en espace. Kravchenko and Moin [1997] ont montré, sur un écoulement de canal, qu'avec une méthode numérique de type différence

finie d'ordre deux en espace, la contribution des erreurs numériques est au moins égale à la contribution des erreurs dues au modèle de sous-maille.

Le modèle de Smagorinsky, éventuellement avec la fonction de structure sélective, et le modèle WALE seront donc suffisants dans le cadre de ce travail.

### 1.5.5 Modélisation du nombre de Prandtl de sous-maille

Garnier et al. [2009] indiquent que le nombre de Prandtl de sous-maille varie dans la plage  $0,3 < Pr_{sgs} < 0,9$  et qu'il est dépendant de la longueur d'onde des structures turbulentes présentes en un point et un instant donné. La théorie EDQNM<sup>5</sup> donne  $Pr_{sgs} = 0,6$  mais d'autres valeurs apparaissent dans la littérature. Ainsi Chatelain [2004] utilise  $Pr_{sgs} = 0,9$  en s'appuyant sur Lyons et al. [1991]; Kim and Moin [1989]; Nicoud [1998]; Kasagi et al. [1992].

Par rapport à l'approche RANS, une erreur sur  $Pr_{sgs}$  a moins d'influence sur le champ LES car une part importante du flux de chaleur turbulent est directement résolue par les équations LES, indépendamment de la valeur de  $Pr_{sgs}$ .

### 1.5.6 L'inégal comportement de la LES devant la nature de l'écoulement

L'approche LES promet des résultats fidèles sur une gamme plus large d'écoulements que l'approche RANS. La LES éprouve cependant des difficultés en termes de précision et coût de calcul sur certains types d'écoulements, notamment les écoulement pariétaux à grand nombre de Reynolds. Pour expliquer ces difficultés, il est instructif d'étudier le comportement de la solution des équations LES en fonction de la taille du filtre spatial  $l$ .

L'analyse ci-dessous reprend le travail de Pope [2004]. On considère le champ de vitesse physique  $\mathbf{U}_{phys}(x, y, z, t)$  d'un écoulement donné et  $\tilde{\mathbf{U}}_{phys}(x, y, z, t)$  ce champ de vitesse après application d'un filtre spatial équivalent à celui utilisé dans les équations LES. On note de plus la moyenne statistique  $\langle \tilde{\mathbf{U}}_{phys} \rangle$  du champ physique filtré. Enfin,  $\tilde{\mathbf{U}}_{LES}(x, y, z, t)$  désigne la solution des équations LES de ce même écoulement.

La LES telle que décrite ci-dessus ne peut promettre plus qu'une estimation de  $\langle \tilde{\mathbf{U}}_{phys} \rangle$ . En effet, il n'est pas correct de comparer  $\tilde{\mathbf{U}}_{phys}(x, y, z, t)$  à  $\tilde{\mathbf{U}}_{LES}(x, y, z, t)$  car la turbulence n'est pas un phénomène reproductible et seules des grandeurs statistiques peuvent être comparées. L'erreur commise par la LES est donc notée  $E = \| \langle \tilde{\mathbf{U}}_{LES} \rangle(x, y, z) - \langle \tilde{\mathbf{U}}_{phys} \rangle(x, y, z) \|$ .

Comme montré sur la figure 1.3, la moyenne statistique  $\langle \tilde{\mathbf{U}}_{LES} \rangle$  du champ LES dépend de la taille du filtre  $l$  par le biais des biais des erreurs numériques et des erreurs dues au modèle de sous-maille.

---

5. Eddy Damped Quasi-Normal Markovian : un modèle de fermeture de sous-maille appliqué dans l'espace fréquentiel plutôt que dans l'espace physique et qui considère les interactions entre échelles résolues et modélisées du point de vue statistique.

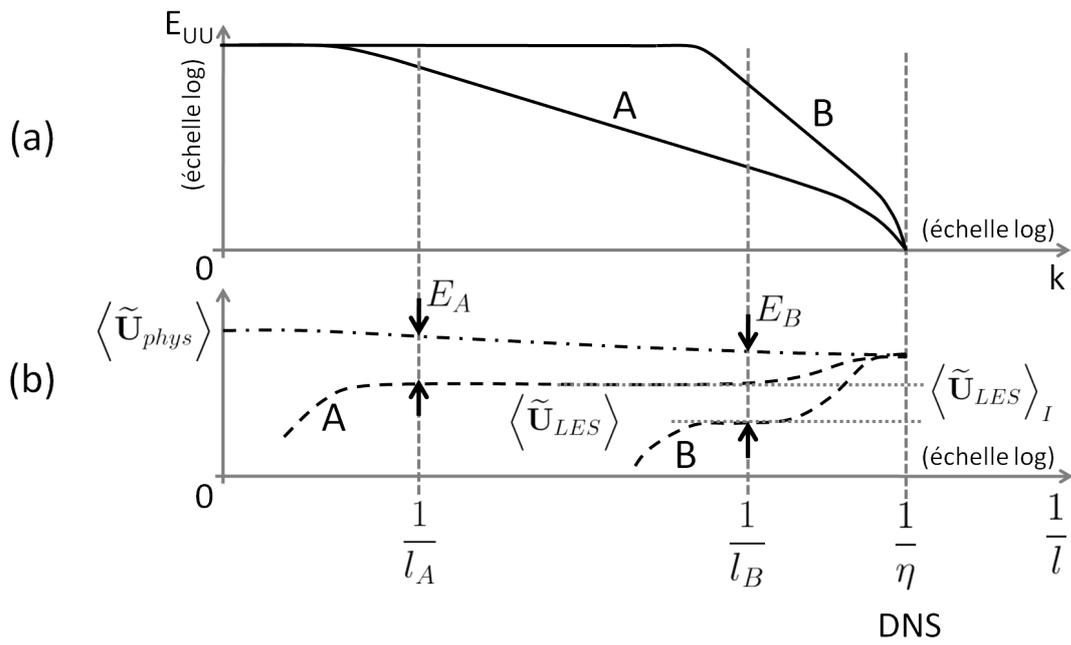


FIGURE 1.3 : (a) : Evolution schématique de la solution LES moyennée  $\langle \tilde{\mathbf{U}}_{LES} \rangle$  en fonction de la taille du filtre  $l$ .  $l_A$  et  $l_B$  correspondent à la taille du filtre respectivement choisie pour la LES des écoulements A et B.  $E_A$  et  $E_B$  sont les erreurs respectivement commises par la LES sur les écoulements A et B. (b) : spectres schématiques de la vitesse sur les écoulements A et B.

Lorsque la taille du filtre est située dans la région inertielle du spectre d'énergie, on peut s'attendre à ce que  $\langle \tilde{U}_{LES} \rangle$  atteigne un plateau  $\langle \tilde{U}_{LES} \rangle_I$ . Si la taille du filtre diminue pour s'approcher de l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ , la contribution des échelles de sous-maille disparaît et l'on effectue une DNS.  $\langle \tilde{U}_{LES} \rangle$  quitte alors le plateau pour rejoindre la valeur physique  $\langle \tilde{U}_{phys} \rangle$ . Pour un coût de calcul optimal, c'est-à-dire un maillage le plus grossier possible tout en restant dans la région inertielle, la taille du filtre doit être positionnée au début de la région inertielle.

Considérons maintenant deux écoulements A et B au même nombre de Reynolds. Comme indiqué sur la figure 1.3, la région inertielle de l'écoulement A est étendue et l'erreur  $E_A$  entre le plateau  $\langle \tilde{U}_{LES} \rangle_I$  et la valeur physique  $\langle \tilde{U}_{phys} \rangle$  est faible. A l'inverse, pour l'écoulement B, la région inertielle est restreinte et l'erreur  $E_B$  entre le plateau  $\langle \tilde{U}_{LES} \rangle_I$  et la valeur physique  $\langle \tilde{U}_{phys} \rangle$  est plus grande.

La taille optimale  $l_A$  du filtre sur l'écoulement A est donc plus grande que celle sur l'écoulement B. On obtient finalement un coût de calcul de la LES sur l'écoulement A plus modéré tout en ayant une erreur  $E_A$  plus faible.

On se rend donc compte que certains écoulements sont plus adaptés à l'approche LES que d'autres. Les écoulements loin des parois présentant un faible cisaillement se rapprochent de l'écoulement A alors que les écoulements pariétaux se rapprochent de l'écoulement B. Dans le prochain chapitre, on verra en effet que les écoulements pariétaux présentent un ensemble de structures turbulentes complexes même aux très petites échelles, ces dernières restant primordiales pour la dynamique de l'écoulement.



---

## Introduction à la turbulence pariétale

---

### Sommaire

---

<b>2.1 Cas incompressible</b>	<b>36</b>
2.1.1 Structure de l'écoulement pariétal moyen	36
2.1.1.1 Région interne	37
2.1.1.2 Région externe	38
2.1.1.3 Région de recouvrement logarithmique	38
2.1.2 Différentes échelles de turbulence	39
2.1.3 Interactions entre les régions interne et externe	41
<b>2.2 Cas compressible</b>	<b>42</b>
2.2.1 Modes de Kovaznay	42
2.2.2 Prise en compte des effets de compressibilité suivant l'hypothèse de Morkovin	43
2.2.3 Conclusion intermédiaire	43

---

Le travail présenté dans ce manuscrit concerne la modélisation d'une partie des phénomènes de la turbulence pariétale. Le but de ce chapitre n'est pas de synthétiser l'ensemble des connaissances sur la turbulence pariétale mais d'introduire les notions utiles pour comprendre les fondements de cette modélisation et la manière dont elle peut être réalisée. On traitera tout d'abord la turbulence pariétale des écoulements incompressibles avant de passer aux écoulements compressibles.

## 2.1 Cas incompressible

La majeure partie des études concernant la turbulence pariétale ont été effectuées en écoulement incompressible et se concentrent sur la description du champ de vitesse. L'étude de la turbulence pariétale incompressible se base sur trois écoulements fondamentaux :

- le canal plan, c'est-à-dire un écoulement entre deux plaques parallèles infiniment grandes ;
- la conduite cylindrique, dont un exemple est la conduite d'eau forcée ou le *pipeline* ;
- la couche limite sur plaque plane, c'est-à-dire un écoulement sur une plaque plane dans un espace libre.

Dans la suite  $\delta$  signifiera l'épaisseur de la couche limite, la demi-hauteur du canal plan ou le rayon de la conduite. Les coordonnées  $(x, y, z)$  et composantes de la vitesse  $(u, v, w)$  sont respectivement associées aux directions longitudinale, normale et transversale à la paroi. On considérera que la paroi se situe à  $y = 0$ .

Dans l'objectif de justifier les fondements d'une modélisation de paroi, on abordera les points suivants : la structure de l'écoulement moyen dans lequel on distinguera plusieurs zones, les caractéristiques des structures turbulentes dans ces différentes zones et les interactions entre ces différentes zones.

### 2.1.1 Structure de l'écoulement pariétal moyen

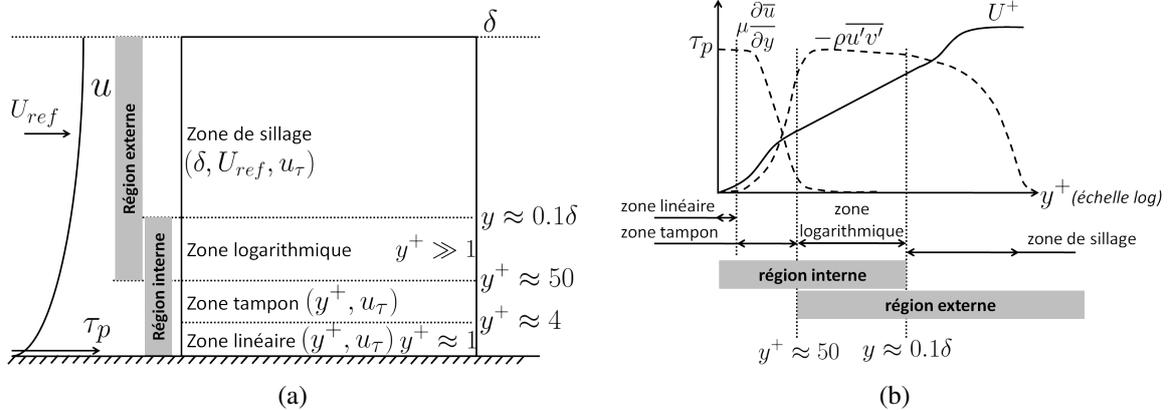


FIGURE 2.1 : (a) : les différentes zones d'un écoulement pariétal. (b) : représentation schématique d'un profil de vitesse moyenne et des contributions visqueuse et turbulente à la force de cisaillement.

Pour distinguer les différentes zones de l'écoulement pariétal moyen, on considère la somme des contraintes visqueuses et turbulentes  $\bar{\tau} + \tau_\tau$ . Pour un écoulement pariétal,  $\bar{\tau} + \tau_\tau$  se résume à une force de cisaillement qui se manifeste pour  $0 < y < \delta$  et dont l'expression se simplifie pour

donner :  $\bar{\tau} + \tau_r = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}$ . A la paroi, ce cisaillement exerce parallèlement à la paroi une force appelée le frottement pariétal  $\tau_p$ . Puisque les structures turbulentes n'existent pas à la paroi,  $\tau_r = 0$  et donc  $\tau_p = \mu_p \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]_p$ .

Les contributions visqueuse  $\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  et turbulente  $-\overline{\rho u'v'}$  sont schématiquement représentées sur la figure 2.1. Suivant l'importance de chaque contribution, l'écoulement pariétal moyen peut être décomposé en une région interne et une région externe.

### 2.1.1.1 Région interne

Dans la région interne,  $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  n'est pas négligeable devant  $-\overline{\rho u'v'}$ . Il est possible de représenter le profil de vitesse de la région interne par une loi dite loi de paroi. Il y a plusieurs façons d'aboutir à cette relation, et on décrit brièvement ici celle basée sur une analyse dimensionnelle.

Il faut tout d'abord faire l'hypothèse que le profil de vitesse moyenne ne dépend que du frottement pariétal moyen  $\bar{\tau}_p$  et des caractéristiques du fluide ( $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mu}$ ), soit  $\bar{u} = f(y, \bar{\tau}_p, \bar{\rho}, \bar{\mu})$ . Puis on utilise le théorème de Buckingham qui indique qu'en présence de cinq variables ( $\bar{u}, y, \bar{\tau}_p, \bar{\rho}, \bar{\mu}$ ) et trois unités ( $kg, m, s$ ), il existe  $5 - 3 = 2$  variables sans dimension à partir desquelles  $f$  peut être exprimée. Ces deux variables sont généralement choisies comme étant  $y^+ = \frac{\rho_p u_\tau y}{\mu_p}$

et  $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ , avec  $u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_p/\rho_p}$ . On obtient ainsi la loi de paroi  $u^+ = f(y^+)$ .

On remarque que  $y^+$  représente un nombre de Reynolds local, qui représente donc le rapport entre la plus grande et la plus petite échelle turbulente présentes en ce point. Dans le cas particulier où  $y = \delta$ , ce nombre de Reynolds local est  $\delta^+ = \frac{\rho_p u_\tau \delta}{\mu_p}$ , également appelé le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$ .

Puisque la loi de paroi suppose que seules les variables ( $\bar{u}, y, \bar{\tau}_p, \bar{\rho}, \bar{\mu}$ ) entrent en jeu, il est implicitement supposé que l'écoulement de la région interne est indépendant des phénomènes physiques ayant lieu loin de la paroi. Notamment, on suppose que :

- la turbulence de paroi est statistiquement bi-dimensionnelle, c'est-à-dire qu'en moyenne les variations de vitesse selon la direction transversale peuvent être négligées devant les variations de vitesse selon la direction normale à la paroi ;
- le gradient de pression longitudinal est négligeable ;
- la turbulence de paroi est à l'équilibre, c'est-à-dire que  $\frac{\bar{u} - U_{ref}}{u_\tau}$  ne dépend que de  $y/\delta$ .

Suivant l'importance des effets visqueux, on peut découper la région interne en :

- une sous-couche dite visqueuse, valable pour  $y^+ < 4$  environ, où  $\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \gg -\overline{\rho u'v'}$ . Contrairement à ce qu'indique son nom, l'écoulement n'y est pas laminaire mais bien traversé par

- des structures tourbillonnaires. Il est possible de montrer que la loi de paroi dans la sous-couche visqueuse est linéaire et s'exprime par  $u^+ = y^+$ ,
- une zone tampon, où  $\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx -\overline{\rho u'v'}$ .

### 2.1.1.2 Région externe

Dans la région externe, les effets visqueux sont négligeables. Les phénomènes y sont décrits par les échelles suivantes :

- la longueur  $\delta$  qui représente l'échelle des plus grandes structures de la turbulence pariétale ;
- la vitesse de frottement  $u_\tau$ , car cette échelle se propage depuis la région interne vers la région externe par le biais du terme  $-\overline{\rho u'v'}$ , qui reste environ égal à  $\bar{\tau}_p / \rho_p$  ;
- la vitesse  $U_{ref}$ .

La région externe se termine par une zone de sillage, dont une description du profil de vitesse est possible par la loi de sillage, qui utilise les échelles  $u_\tau$  et  $U_{ref}$  [Coles, 1956]. On verra dans la partie 4.3.1.1 que la modélisation de paroi utilisée ici opérera nécessairement en dessous de la zone sillage.

### 2.1.1.3 Région de recouvrement logarithmique

Les régions internes et externes se recouvrent en une zone appelée zone logarithmique. Puisqu'elle appartient à la région externe, la zone logarithmique est caractérisée par des effets visqueux négligeables. Cette hypothèse conduit à la suppression de la variable  $\bar{\mu}$  dans la formulation de la loi de paroi. Il est possible de montrer que la suppression de  $\bar{\mu}$  conduit à la loi logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (2.1)$$

où  $\kappa$  est la constante de von Kármán.

En plus des hypothèses nécessaires à la formulation de la loi de paroi, la présence de la zone logarithmique est également dictée par une valeur suffisante de  $Re_\tau$ . En effet, d'après les échelles caractérisant les régions interne et externe, la frontière basse de la zone logarithmique se situe à un  $y^+$  donné et sa frontière haute s'exprime en fonction de  $y/\delta$ . En choisissant une expression en unité de paroi, la zone logarithmique est donc contenue entre  $y_{min}^+ < y^+ < K Re_\tau$ .

Si les estimations expérimentales et numériques de  $K$  convergent vers  $K \approx 0,1$  à  $0,15$  [Smits et al., 2011], les estimations de  $y_{min}^+$  présentent des écarts importants. Ainsi, les valeurs de  $y_{min}^+$  rassemblées par Marusic et al. [2010b] pour des écoulements de canal, couche limite et conduite donnent  $100 < y_{min}^+ < 600$ . Ces valeurs sont assez éloignées des estimations classiques de  $y_{min}^+ \approx 30$  à  $50$ . Il n'y a donc pas consensus sur le nombre de Reynolds minimal pour observer une zone logarithmique s'étendant sur une décade de  $y^+$ . Suivant la valeur de  $y_{min}^+$  et de  $K$ , ce

nombre de Reynolds minimal varie par exemple dans la plage  $2000 < Re_\tau < 20000$  pour une couche limite sans gradient de pression [Smits et al., 2011].

Le problème du  $Re_\tau$  minimal pour observer une zone logarithmique significative amène au problème de la définition d'un écoulement pariétal à grand nombre de Reynolds. Pour définir un écoulement pariétal à grand nombre de Reynolds, Smits et al. [2011] passent en revue plusieurs critères. En plus du critère que l'on vient de donner et portant sur une extension spatiale significative de la zone logarithmique, ils étudient également la répartition de l'énergie cinétique de turbulence selon  $y$  et selon la taille des structures turbulentes. Il est intéressant de constater que suivant ces différents critères, les valeur  $Re_\tau \approx 4000$  à  $5000$  reviennent de façon récurrente.

### 2.1.2 Différentes échelles de turbulence

Bien qu'étudiée scientifiquement depuis 1839, les données accumulées sur la turbulence de paroi incompressible concernent principalement les nombres de Reynolds modérés. Toutefois, certains phénomènes liés aux grands nombre de Reynolds ont pu être quantifiés assez récemment, grâce notamment à la construction d'un certain nombre de moyens expérimentaux [Marusic et al., 2010b]. De plus, l'augmentation des moyens de calcul a récemment permis des simulations numériques directes (DNS) à des nombres de Reynolds jusque  $Re_\tau = 2000$  [Hoyas and Jiménez, 2006]. L'étude des écoulements pariétaux à grand nombre de Reynolds a permis de quantifier des phénomènes difficilement visibles à faible nombre de Reynolds.

La classification des structures cohérentes de la turbulence pariétale choisie dans ce paragraphe se base sur les revues de Jiménez [2011] et Smits et al. [2011]. On peut distinguer quatre types de structures :

- les *streaks*, situés dans la région interne sont espacés d'environ  $\lambda_z^+ = 100$  selon la direction transversale,  $\lambda$  désignant la longueur d'onde (voir la figure 2.2 (a)),
- les *hairpin* ou *horseshoe*, également situés dans la région interne, occupent une large gamme d'échelles à partir d'une hauteur minimale de  $\lambda_y^+ = 100$  (voir la figure 2.2 (b) et (c)).
- les grandes structures (LSM), de taille longitudinale  $\lambda_x \approx 2\delta$  à  $3\delta$ .
- les très grandes structures, appelées VLSM en écoulement interne et *superstructures* dans une couche limite. Des longueurs de  $\lambda_x = 10\delta$  à  $30\delta$  ont été rapportées pour les VLSM alors que des longueurs de  $6\delta$  à  $15\delta$  ont pu être mesurées pour les *superstructures* [Smits et al., 2011] (voir la figure 2.2 (d)).

Les grandes et très grandes structures influencent significativement la dynamique de l'écoulement. En effet, selon Smits et al. [2011], les structures de taille supérieure à  $3\delta$  peuvent contenir 40 à 65% de l'énergie cinétique de turbulence et 30 à 50% de la tension de Reynolds  $-\overline{\rho u'v'}$ .

Les structures de la zone logarithmique sont d'un intérêt particulier pour la mise en place d'une LES avec modélisation de paroi car ce sont les premières structures qui seront résolues par la LES au dessus de la région modélisée. En se basant sur la revue de Jiménez [2011], on peut avancer que les structures de la zone logarithmique possèdent entre autres les trois propriétés suivantes.

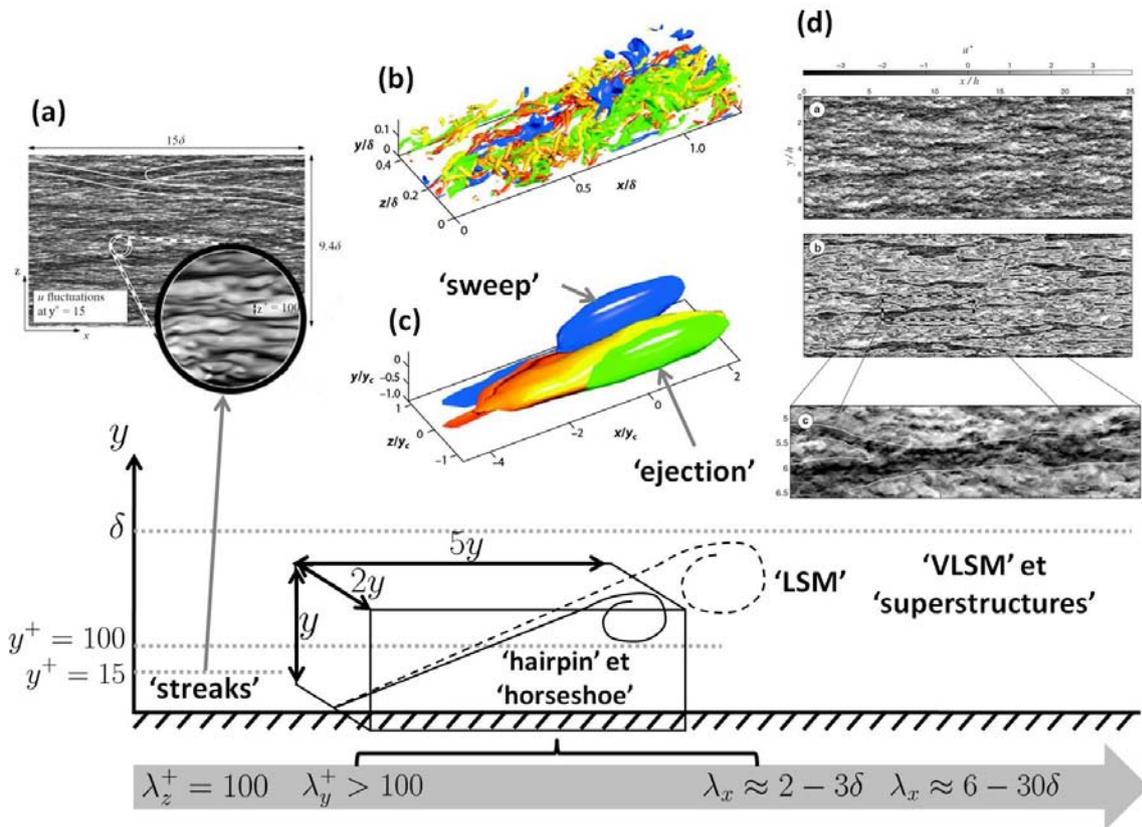


FIGURE 2.2 : Les différentes échelles des structures cohérentes de la turbulence de paroi à grand nombre de Reynolds. (a) : vue des streaks à  $y^+ = 15$  sur un champ DNS instantané. (b) et (c) montrent le caractère pleinement turbulent d'une structure de la zone logarithmique, avec une vue respectivement instantanée et moyennée. (d) : champ DNS instantané à  $z^+ = 100$  correspondant à une fenêtre de  $(25\delta, 10\delta)$  respectivement selon les directions longitudinale et transversale (en haut) et mise en évidence des très grandes structures par un filtre spatial (au milieu et en bas). (a) est tirée de Hutchins and Marusic [2007]. (b) et (c) sont tirées de Jiménez [2011]. (d) est tirée de Marusic and Hutchins [2008].

Tout d'abord, les structures de la zone logarithmique qui contribuent le plus à la tension de Reynolds  $-\overline{\rho u'v'}$  peuvent être vues comme des structures auto-similaires attachées à la paroi [Lozano-Durán et al., 2012] suivant le modèle de Townsend [1961]. Jiménez [2011] indique en effet qu'elles peuvent être simulées dans des boîtes de taille variable dans lesquelles la taille des structures s'adapte à la taille de la boîte tout en conservant des propriétés similaires.

Ensuite, les structures de la zone logarithmique sont pleinement turbulentes car elles sont situées à  $y^+ > 100$  et suivent donc le processus de la cascade d'énergie. Une vue instantanée d'une structures de la zone logarithmique est donnée sur la figure 2.2 (b). Du fait de leur nature turbulente, les propriétés de ces structures, comme par exemple leur forme, sont difficilement visibles sur une vue instantanée. Lozano-Durán et al. [2012] proposent donc de moyenniser les structures de la zone logarithmique dans des calculs DNS de canal à  $Re_\tau = 950$  et  $Re_\tau = 2000$ . Le procédé de moyenne consiste tout d'abord à calculer la moyenne volumique de la vitesse longitudinale  $u_m$  et normale à la paroi  $v_m$  dans des boîtes de différentes dimensions occupant différentes positions. Suivant le signe de  $u_m$  et  $v_m$ , un phénomène d'éjection de fluide ou de *sweep* est associé à chaque boîte. Lorsqu'une éjection est suffisamment proche d'un *sweep*, une paire d'éjection-*sweep* instantanée est détectée. La moyenne sur l'ensemble des boîtes aboutit à une paire d'éjection-*sweep* moyennée, montrée sur la figure 2.2 (c). La forme de ces structures moyennées est d'environ  $(4y; y; 1, 5y)$ . Les phénomènes d'éjection et de *sweep* sont un des principaux contributeurs à la tension de Reynolds  $-\overline{\rho u'v'}$  [Robinson, 1991].

Enfin, les structures de la zone logarithmique peuvent être simulées de manière autonome, même lorsque le mécanisme de la zone tampon est volontairement perturbé [Jiménez, 2011].

### 2.1.3 Interactions entre les régions interne et externe

L'indépendance des structures turbulentes de la zone logarithmique vis à vis des structures de la zone tampon indique que l'interaction de la zone tampon sur la zone logarithmique est faible. Selon Robinson [1991], ce transfert d'informations depuis la région interne vers la région externe diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

L'interaction de la zone logarithmique sur la zone tampon a été mise en évidence par Mathis et al. [2009]. Ils indiquent que les fluctuations de vitesse de la zone logarithmique ont un effet de superposition et de modulation d'amplitude sur les fluctuations de vitesse dans la zone tampon. Partant de ce résultat, Marusic et al. [2010b] ont établi un modèle capable de reconstruire la vitesse instantanée dans la zone tampon à partir d'un signal de vitesse extrait dans la zone logarithmique.

Cette interaction 'haut vers bas' se renforce avec le nombre de Reynolds. En effet, Smits et al. [2011] indiquent qu'une part de plus en plus importante de la production de turbulence et de l'énergie cinétique de turbulence provient de la zone logarithmique à mesure que le nombre de Reynolds augmente. De plus, selon Mathis et al. [2009], l'effet de modulation d'amplitude des grandes structures de la zone logarithmique sur la zone tampon augmente lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Cette interaction 'haut vers bas' prépondérante à grand nombre de Reynolds justifie le développement d'une modélisation de paroi capable de décrire les phénomènes de la zone tampon et

de la sous-couche visqueuse en prenant en entrée des données issues de la région externe.

## 2.2 Cas compressible

On passe maintenant aux écoulements compressibles, dans lesquels le champ de température, de masse volumique et de viscosité moléculaire peuvent présenter des variations significatives, si bien que le champ de vitesse se retrouve éventuellement modifié. Le cas des écoulements compressibles complexifie a priori grandement l'effort de modélisation de la paroi. Le but de cette section est d'étudier les hypothèses simplificatrices qui peuvent être faites pour une modélisation de la paroi dans le cadre des écoulements compressibles.

### 2.2.1 Modes de Kovaznay

Kovaznay [1953] a décomposé les fluctuations turbulentes d'un écoulement compressible en un mode de vorticité, un mode entropique et un mode acoustique, définis autour d'un état moyen à vitesse et propriétés thermodynamiques moyennes uniformes. Lele [1994] indique que les amplitudes des fluctuations de ces trois modes sont découplées au premier ordre.

Selon Garnier et al. [2009], la majeure partie de l'énergie cinétique turbulente est contenue dans le mode de vorticité et l'impact du mode acoustique sur les modes de vorticité et entropique est généralement négligeable. Ainsi il propose les simplifications suivantes pour la modélisation de chacun des trois modes :

- Le mode de vorticité peut être modélisé sans s'intéresser au mode acoustique ni entropique tant que les fluctuations de viscosité  $\mu'$  restent négligeables ;
- le mode entropique doit tenir compte du mode de vorticité mais peut être découplé du mode acoustique ;
- la modélisation du mode acoustique apparaît très délicate. La production acoustique dans la couche limite est dominée par les fluctuations de vorticité et l'atténuation du mode acoustique est dominée par les fluctuations de température. La dérivation d'un modèle pour le mode acoustique tenant compte de différents effets physiques comme la courbure de paroi, le gradient de pression ou la température de paroi apparaît encore plus difficile que pour le mode de vorticité et le mode entropique. Les grandes différences de fréquence et d'amplitude entre le mode acoustique et les deux autres modes ajoutent encore une difficulté supplémentaire.

Pour ces raisons, si seules les quantités aérodynamiques et aérothermiques sont visées, une modélisation de la turbulence de paroi compressible peut être dérivée d'un modèle incompressible dans lequel une équation pour la température est ajoutée.

On verra dans le prochain paragraphe que la prise en compte des variations de masse volumique et de viscosité moléculaire moyennes sont cruciales dans la construction de cette modélisation compressible de la paroi.

### 2.2.2 Prise en compte des effets de compressibilité suivant l'hypothèse de Morkovin

L'hypothèse de Morkovin, abordée dans le paragraphe 1.2.2, indique que les effets de compressibilité dûs aux fluctuations de pression et de masse volumique sont négligeables devant les variations des propriétés moyennes du fluide  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mu}$  tant que le nombre de Mach turbulent  $M_t < 0, 2$ .

La transformée de VanDriest [1951] est un exemple d'application de l'hypothèse de Morkovin :

$$u_{VD}^+ = \int_0^{u^+} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_p}} du^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (2.2)$$

Cette relation permet d'étendre au cas compressible un profil de vitesse moyenne décrit en incompressible. Elle a été utilisée avec succès sur des écoulements supersoniques, comme l'a montré Huang and Coleman [1994] sur les DNS de Coleman et al. . Elle est également valide sur des écoulements à faible nombre de Mach présentant de grandes variations de température [Nicoud, 1998].

La constante  $B$  de la loi logarithmique dans le membre de droite de l'équation 2.2 devient en toute rigueur fonction du nombre de Mach de frottement  $M_\tau = u_\tau/c_p$  et du flux de chaleur adimensionné  $B_q = \frac{\phi_p}{\rho_p C_p u_\tau T_p}$ , avec  $c_p$  la vitesse du son à la paroi [Huang and Coleman, 1994]. Il est à noter que n'importe quelle autre description du profil de vitesse moyenne en incompressible peut être utilisée à la place de la loi logarithmique.

### 2.2.3 Conclusion intermédiaire

On peut tirer un certain nombre d'enseignements de ce chapitre. Ces conclusions n'ont pas pour but de balayer l'ensemble des connaissances sur la turbulence de paroi, mais uniquement ce qui est en rapport avec une modélisation de la paroi pour la LES :

- les structures turbulentes de la zone logarithmique peuvent être simulées indépendamment de la zone tampon ;
- l'interaction de la région externe sur la région interne est prépondérante devant celle de la région interne sur la région externe ;
- les deux points précédents sont de plus en plus vrais à mesure que le nombre de Reynolds augmente ;
- une modélisation de la turbulence de paroi compressible peut être dérivée d'un modèle incompressible en y ajoutant une équation pour la température ;
- les effets de compressibilité sur la turbulence dûs à l'augmentation du nombre de Mach ou de l'écart de température peuvent être pris en compte en considérant uniquement les variations de la masse volumique et de la viscosité moléculaire moyennes du fluide.



---

## Méthode numérique de résolution des équations

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation du code de calcul</b>	<b>46</b>
3.1.1	Principales caractéristiques du code elsA	46
3.1.2	Principe de la méthode des volumes finis	46
<b>3.2</b>	<b>Discrétisation spatiale et temporelle</b>	<b>48</b>
3.2.1	Discrétisation spatiale des flux convectifs	48
3.2.1.1	Erreurs de discrétisation	48
3.2.1.2	Schéma de discrétisation volumes finis	49
3.2.1.3	Stabilisation par dissipation artificielle	51
3.2.2	Discrétisation spatiale volumes finis des flux diffusifs	53
3.2.3	Avance temporelle	53
3.2.3.1	Calculs LES	54
3.2.3.2	Calculs RANS	55
<b>3.3</b>	<b>Formulation des conditions limites</b>	<b>55</b>
3.3.1	Conditions limites d'entrée	56
3.3.1.1	Condition limite <i>injl</i>	56
3.3.1.2	Condition limite <i>injmfrl</i>	57
3.3.1.3	Condition limite <i>NSCBCin</i>	58
3.3.2	Conditions limites de paroi non glissante	59
3.3.2.1	Pour les calculs RANS résolvant la sous-couche visqueuse	59
3.3.2.2	Pour les calculs LES avec modélisation de la paroi	60
3.3.3	Conditions limites tangentielles et de sortie <i>outpres</i>	60

---

La modélisation de paroi pour la LES qui sera choisie et décrite dans le chapitre suivant est intimement liée au type de code de calcul et à la méthode numérique. C'est pour cette raison que nous donnons dans ce chapitre quelques éléments sur le code de calcul et la méthode numérique utilisées dans ce travail. On présentera tout d'abord le code de calcul avant d'aborder la discrétisation numérique des équations RANS et LES. Pour finir, la formulation des conditions limites utilisées sera abordée.

### 3.1 Présentation du code de calcul

Les simulations numériques seront effectuées avec le code elsA de l'ONERA [Cambier and Gazeix, 2002]. Le code elsA a déjà été décrit dans des travaux de thèse précédents (voir par exemple le travail de Colin [2007]) et le but de ce chapitre est donc de se concentrer sur les méthodes numériques spécifiques à la LES et plus particulièrement sur celles qui seront directement liées à la modélisation de paroi mise en place. Après une présentation des principales caractéristiques du code elsA, on décrira plus en détails deux d'entre elles : l'utilisation de maillages structurés et la méthode des volumes finis.

#### 3.1.1 Principales caractéristiques du code elsA

Le code elsA résout les équations RANS et LES compressibles (équations 1.7 et 1.14) sur des maillages structurés par bloc, ce qui signifie que le domaine de calcul est découpé en blocs et que dans chaque bloc le maillage est structuré, c'est-à-dire qu'il est possible de ranger les cellules dans un tableau de dimension  $(i, j, k)$ .

Le code elsA est capable de calculs massivement parallèle en distribuant les blocs sur chaque processeur de la machine de calcul [Gourdain et al., 2009].

#### 3.1.2 Principe de la méthode des volumes finis

Avant de passer à la discrétisation des équations, il est nécessaire d'introduire la méthode des volumes finis utilisée dans le code elsA. La méthode des volumes finis tire partie du fait que les équations RANS et LES s'écrivent sous la forme d'un opérateur de divergence. En intégrant les équations sur un volume de contrôle  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot F dV = 0 \quad (3.1)$$

où  $F = Fc + Fd$  désigne le tenseur formé par la somme des termes convectifs  $Fc$  et diffusifs  $Fd$  donnés dans l'équation 1.7.

Le théorème de la divergence de Gauss permet d'écrire l'intégrale volumique de la divergence comme une somme de flux à travers la frontière du volume  $\Omega$ . En considérant que  $\Omega$  représente une cellule du maillage dont les faces sont planes, on obtient :

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial \mathbf{W}_{i,j,k}}{\partial t} V_{i,j,k} + R(\mathbf{W}_{i,j,k}) = 0$$

$$R(\mathbf{W}_{i,j,k}) = F_{i-1/2,j,k} \cdot \mathbf{n}_{i-1/2,j,k} S_{i-1/2,j,k} + F_{i+1/2,j,k} \cdot \mathbf{n}_{i+1/2,j,k} S_{i+1/2,j,k} + F_{i,j-1/2,k} \cdot \mathbf{n}_{i,j-1/2,k} S_{i,j-1/2,k} + F_{i,j+1/2,k} \cdot \mathbf{n}_{i,j+1/2,k} S_{i,j+1/2,k} + F_{i,j,k-1/2} \cdot \mathbf{n}_{i,j,k-1/2} S_{i,j,k-1/2} + F_{i,j,k+1/2} \cdot \mathbf{n}_{i,j,k+1/2} S_{i,j,k+1/2} \quad (3.2)$$

où  $V_{i,j,k}$  est le volume de la cellule  $i, j, k$ ,  $S_{i-1/2,j,k}$  est la surface de l'interface  $i - 1/2$  et  $\mathbf{n}_{i-1/2,j,k}$  est le vecteur unitaire sortant normal à l'interface.  $\mathbf{W}_{i,j,k}$  représente la moyenne volumique de  $\mathbf{W}$  au sein de la cellule et  $F_{i-1/2,j,k}$  la moyenne surfacique de  $F$  sur l'interface  $i - 1/2$ .  $F_{i-1/2,j,k} \cdot \mathbf{n}_{i-1/2,j,k}$  représente un flux à travers l'interface  $i - 1/2$ , noté plus simplement  $F_{i-1/2,j,k}$ .

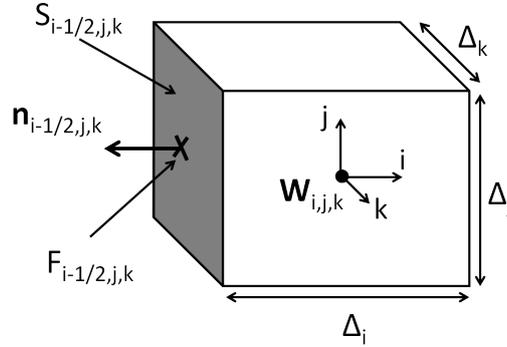


FIGURE 3.1 : Méthode des volumes finis appliquée à la cellule  $i, j, k$ . Les variables conservatives sont stockées au centre de la cellule. L'aire de l'interface  $i - 1/2$  est  $S_{i-1/2,j,k}$  et son vecteur unitaire normal est  $\mathbf{n}_{i-1/2,j,k}$ .

Le problème revient maintenant à estimer pour chaque cellule la dérivée temporelle  $\frac{\partial \mathbf{W}_{i,j,k}}{\partial t}$  ainsi que les flux  $F_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $F_{i,j\pm 1/2,k}$  et  $F_{i,j,k\pm 1/2}$  à partir des variables conservatives  $\mathbf{W}_{i,j,k}$  stockées au centre des cellules. Il est à noter qu'assimiler la moyenne volumique  $\mathbf{W}_{i,j,k}$  à la valeur locale au centre est une approximation du second ordre. C'est l'objet de la discrétisation spatiale et temporelle.

## 3.2 Discrétisation spatiale et temporelle

### 3.2.1 Discrétisation spatiale des flux convectifs

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds dont il est question ici et a fortiori si une modélisation de la paroi est utilisée, c'est principalement la discrétisation des flux convectifs qui influencera la solution  $\mathbf{W}$ . Après une brève introduction aux erreurs induites par la discrétisation des flux convectifs, le schéma de discrétisation choisi sera présenté. Pour terminer, on présentera une modification de ce schéma dans le but d'améliorer la qualité des résultats.

#### 3.2.1.1 Erreurs de discrétisation

Les erreurs de discrétisation peuvent être caractérisées par l'erreur de troncature et les propriétés spectrales du schéma de discrétisation.

L'erreur de troncature apparaît lors de l'approximation discrète d'une dérivée. En notant  $\frac{\delta u}{\delta x}$  l'approximation numérique de la dérivée  $\frac{du}{dx}$ , l'erreur de troncature obtenue par un développement de Taylor est alors  $\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{du}{dx}$ . L'erreur de troncature donne l'ordre du schéma de discrétisation. Pour un schéma d'ordre deux,  $\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{du}{dx} \propto \Delta_x^2$ .

Dans une LES de canal avec un schéma différences finies d'ordre deux, Kravchenko and Moin [1997] ont souligné que l'erreur de troncature est au moins aussi importante que l'erreur dues à la modélisation de sous-maille. En conséquence, puisqu'un schéma à l'ordre deux sera utilisé dans la suite, il sera crucial d'étudier l'influence des erreurs de discrétisation dans le cadre de la LES avec modélisation de la paroi.

Dans le cadre de la LES, il est intéressant d'étudier également les propriétés spectrales du schéma de discrétisation, c'est-à-dire la fidélité avec laquelle le schéma convecte l'amplitude et la vitesse de phase d'une onde sinusoïdale. En appliquant la transformée de Fourier  $\widehat{\cdot}$  à  $\frac{du}{dx}$  et  $\frac{\delta u}{\delta x}$ , on obtient respectivement  $\widehat{\frac{du}{dx}} = ik\widehat{u}$  et  $\widehat{\frac{\delta u}{\delta x}} = ik'(k)\widehat{u}$ , où  $k'(k)$  est appelé le nombre d'onde modifié qui dépend du nombre d'onde  $k$ . Il est courant de tracer l'évolution de  $k'$  en fonction de  $k$ . Tant que  $k'/k \approx 1$ , la convection de l'onde est fidèle.

La partie imaginaire de  $k'/k$  permet d'estimer la dissipation du schéma de discrétisation, c'est-à-dire l'erreur sur l'amplitude de l'onde. La partie réelle permet d'estimer la dispersion, c'est-à-dire l'erreur sur la vitesse de phase de l'onde. Il est à noter que pour un schéma purement centré,  $k'/k$  est réel, c'est-à-dire que le schéma ne dissipe pas.

Les propriétés spectrales de schémas différences finis de différents ordres peuvent par exemple être trouvées dans Fosso Pouange [2011] (p. 34). En se basant sur son travail, le tableau 3.1 donne le nombre de cellules par longueur d'onde nécessaire pour atteindre une erreur de phase de 10%

et de 1% avec un schéma d'ordre deux et d'ordre six.

TABLE 3.1 : Erreur de phase suivant le nombre de cellules par longueur d'onde pour un schéma explicite purement centré d'ordre deux et d'ordre six.

Erreur de phase $1 - \frac{k'}{k}$	nombre de cellules par longueur d'onde	
	ordre deux	ordre six
0,1	8	4
0,01	25	6

### 3.2.1.2 Schéma de discrétisation volumes finis

Dans les calculs LES, les flux convectifs seront estimés par un schéma d'ordre deux centré sous la forme *skew-symmetric*. La formulation de ce schéma est décrite par Colin [2007] (p. 124). Elle consiste à calculer le flux convectif à partir des variables conservatives aux interfaces, ces dernières étant estimées par demi-somme des variables conservatives aux centres des deux cellules adjacentes.

Lors de tests conduits sur un écoulement de canal, nous nous sommes rendus compte que les simulations LES avec modélisation de la paroi présentées au chapitre 5 montraient des oscillations non négligeables d'une amplitude de  $0,025u_b$  sur la vitesse moyenne normale à la paroi  $\langle v \rangle$ . En calculant les flux convectifs à partir des variables primitives  $(\rho, \mathbf{U}, p)$  au lieu des variables conservatives, nous avons pu réduire à  $0,003u_b$  l'amplitude de ces oscillations. Dans la suite, les flux convectifs seront donc estimés à partir des variables primitives.

Le calcul des flux convectifs s'opère de différentes manières selon que l'on se trouve à une interface intérieure, de frontière ou de raccord. La figure 3.2 (a) montre la position de ces différentes interfaces.

Sur une interface intérieure  $i - 1/2$ , la formulation *skew-symmetric* d'ordre deux basée sur les variables primitives donne :

$$F_{ci-1/2} \left\{ \frac{1}{2} [(\rho, \mathbf{U}, p)_{i-1} + (\rho, \mathbf{U}, p)_i] \right\} \quad (3.3)$$

où  $F_c$  est le flux convectif défini dans l'équation 1.14.

Le nombre de cellules impliquées dans l'estimation du flux est appelé le *stencil* du schéma de discrétisation. Le *stencil* du schéma convectif est ici de deux cellules.

Les cellules fictives permettent le calcul des flux près des frontières et aux raccords entre blocs, comme indiqué sur la figure 3.2 (b). Puisque le *stencil* n'implique que deux cellules, les cellules fictives ne sont donc pas utilisées aux interfaces intérieures car  $F_{c3/2}$  n'implique que les centres 1 et 2.

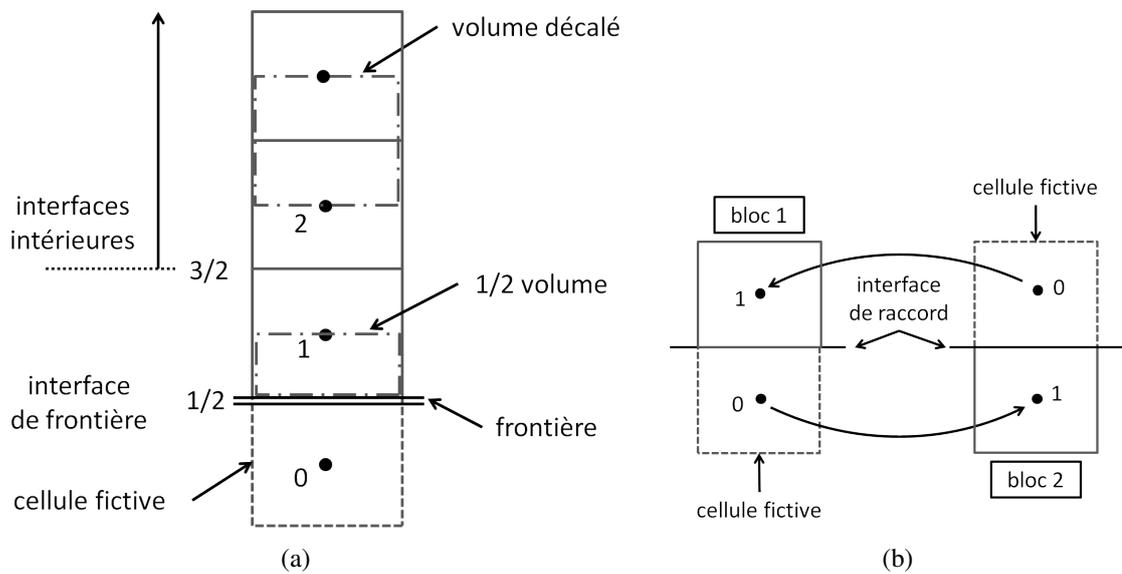


FIGURE 3.2 : (a) : notations utilisées pour repérer les interfaces et les centres des cellules. Les interfaces  $1/2$  correspondent aux frontières du domaine. Les interfaces  $j \geq 3/2$  sont appelées interfaces intérieures. Les flux sont estimés de manière différentes aux interfaces intérieures et aux interfaces de frontière. Pour l'estimation des flux diffusifs, un volume décalé, ici centré sur l'interface  $i = 3/2$  est utilisé (voir le paragraphe 3.2.2). Pour l'estimation des flux aux interfaces de frontière, un demi-volume est utilisé (voir le paragraphe 3.3). (b) : aux raccords entre blocs, les flux sont calculés grâce aux cellules fictives par un échange entre  $\mathbf{W}_{i=0}$  et  $\mathbf{W}_{i=1}$ .

Aux raccords entre blocs, un échange de la solution entre les cellules fictives  $\mathbf{W}_{i=0}$  et la première rangée de cellules  $\mathbf{W}_{i=0}$  permet de calculer le flux à l'interface de raccord 1/2.

Le calcul des flux sur les interfaces de frontière s'obtient grâce aux conditions limites, qui seront abordées dans le paragraphe 3.3.

### 3.2.1.3 Stabilisation par dissipation artificielle

Le schéma purement centré décrit ci-dessus possède un comportement instable lorsque le maillage présente des cellules fortement étirées, des angles aux sommets des cellules non-orthogonaux ou des variations de taille entre deux cellules adjacentes.

La dissipation artificielle de Jameson et al. [1981] permet de stabiliser ce schéma. Cette dissipation artificielle est introduite sous la forme d'un flux  $d_{i-1/2,j,k}$  ajouté à  $F_{i-1/2,j,k}$ . On verra que ce flux de dissipation artificielle peut dégrader les résultats et une dissipation artificielle minimale doit être introduite, notamment dans le cadre de la LES. Après avoir décrit la formulation d'origine de Jameson et al. [1981], une modification visant à réduire le niveau de dissipation artificielle sera présentée.

**Formulation d'origine de la dissipation artificielle de Jameson et al. [1981]** La dissipation artificielle de Jameson et al. [1981] contient la dérivée seconde et la dérivée quatrième du champ des variables conservatives. Le terme en dérivée seconde n'est utilisé qu'en présence d'ondes de choc et n'est donc pas considéré ici. Sous le formalisme des volumes finis, le terme en dérivée quatrième devient un flux en dérivée troisième de  $\mathbf{W}$ . Pour une interface  $i - 1/2$  :

$$d_{i-1/2} = -k_4 r_{i-1/2} (\mathbf{W}_{i+1} - 3\mathbf{W}_i + 3\mathbf{W}_{i-1} - \mathbf{W}_{i-2}) \quad (3.4)$$

où  $k_4$  est un coefficient contrôlant le niveau de dissipation artificielle et  $r_{i-1/2}$  est estimé à partir du rayon spectral de la matrice  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}}$  aux centres des deux cellules adjacentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho_i / \sqrt{\rho_{i-1}}}} \\ u_r = (\rho u)_i \frac{1}{\rho_i} (1 - r) + (\rho u)_{i-1} \frac{1}{\rho_{i-1}} r \\ v_r = (\rho v)_i \frac{1}{\rho_i} (1 - r) + (\rho v)_{i-1} \frac{1}{\rho_{i-1}} r \\ w_r = (\rho w)_i \frac{1}{\rho_i} (1 - r) + (\rho w)_{i-1} \frac{1}{\rho_{i-1}} r \\ h_r = [(\rho E)_i + p_i] \frac{1}{\rho_i} (1 - r) + [(\rho E)_{i-1} + p_{i-1}] \frac{1}{\rho_{i-1}} r \\ c_r = \sqrt{(\gamma - 1) [h_r - \frac{1}{2}(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)]} \\ r_{i-1/2} = (u_r n_{x_{i-1/2}} + v_r n_{y_{i-1/2}} + w_r n_{z_{i-1/2}} + c_r) S_{i-1/2} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

On remarque que le *stencil* du flux de dissipation artificielle implique quatre cellules. Un traitement spécifique est utilisé pour calculer  $d_{3/2}$  :

$$d_{3/2} = -k_4 r_{3/2} (\mathbf{W}_3 - 3\mathbf{W}_2 + 2\mathbf{W}_1) \quad (3.6)$$

ce qui évite l'utilisation des cellules fictives. Le cas des interfaces de frontière sera traité au paragraphe 3.3.

En considérant l'équation de conservation de l'énergie cinétique dans l'espace spectral, Ducros et al. [1999] indiquent que  $d_{i-1/2}$  devient  $k_4 r_{i-1/2} \frac{k^4}{k_c^2} E(k)$ , avec  $k$  le nombre d'onde et  $k_c$  le nombre d'onde correspondant à la fréquence de coupure du filtre de la LES. Ainsi, la dissipation artificielle agit proportionnellement à  $r_{i-1/2} \frac{\Delta^2}{\lambda^4}$  et impacte donc particulièrement les petites structures discrétisées sur un faible nombre de cellules.

**Réduction de la dissipation artificielle** Nous venons de voir que la dissipation artificielle détruit les petites structures et peut dégrader les résultats d'une LES [Ducros et al., 1999]. Pour réduire son effet, la dissipation artificielle décrite ci-dessus est multipliée par un senseur d'oscillations numériques  $S_{wiggle}$  :

$$d_{i-1/2} = -k_4 S_{wiggle_{i-1/2}} r_{i-1/2} (\mathbf{W}_{i+1} - 3\mathbf{W}_i + 3\mathbf{W}_{i-1} - \mathbf{W}_{i-2}) \quad (3.7)$$

avec  $S_{wiggle_{i-1/2}}$  défini sur une interface  $i - 1/2$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{wiggle_{i-1/2}} = 0 \\ (\text{prim}_{1,i}, \text{prim}_{2,i}, \text{prim}_{3,i}, \text{prim}_{4,i}, \text{prim}_{5,i}) = (\rho_i, u_i, v_i, w_i, p_i) \\ \text{Pour } l = 1 \text{ à } 5 : \\ \quad \text{Pour } k = -1 \text{ à } 1 : \\ \quad \quad \Delta_k = -1 \text{ si } (\text{prim}_{1,k+1} - \text{prim}_{1,k})(\text{prim}_{1,k} - \text{prim}_{1,k-1}) < 0 \\ \quad \quad \Delta_k = 1 \text{ sinon} \\ \quad S_l = 1 \text{ si } (\Delta_1 + \Delta_0 < 0 \text{ et } \Delta_0 + \Delta_{-1} < 0) \\ \quad S_l = 0 \text{ sinon} \\ S_{wiggle_{i-1/2}} = \max(S_{wiggle_{i-1/2}}, S_l) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$S_{wiggle_{i-1/2}}$  vaut donc 1 lorsqu'au moins une des variables primitives oscille sur quatre cellules consécutives et vaut zéro sinon. Un senseur similaire est utilisé par Mary and Sagaut [2002] mais combiné à un autre schéma de discrétisation.

Le *stencil* de ce senseur implique quatre cellules. Comme pour la dissipation artificielle, un

traitement spécifique est réalisé sur l'interface 3/2, qui consiste à désactiver le senseur en imposant  $S_{wigggle_{3/2}} = 1$ .

Pour fixer les idées sur les valeurs typiques du coefficient  $k_4$ , en se basant sur les précédents calculs effectués au CERFACS avec une méthode numérique similaire à celle utilisée ici (voir par exemple Gourdain [2012]), les valeurs moyennes de  $k_4$  sont 0,016 en RANS et  $10^{-3} < k_4 < 8 \times 10^{-3}$  en LES avec réduction de la dissipation artificielle par le senseur  $S_{wigggle}$ . Il est à noter que Ducros et al. [1999] a utilisé en LES  $k_4 = 0,02$  sans la réduction de dissipation artificielle sur un cas de turbulence homogène isotrope et une interaction choc-tourbillon. Cette dissipation artificielle s'est révélée trop élevée en dégradant significativement la physique de ces écoulements.

Par le biais du coefficient  $k_4$ , il faudra donc étudier l'influence de la dissipation artificielle sur les résultats LES, en particulier avec la modélisation de paroi que l'on mettra en place. A notre connaissance, aucune étude spécifique concernant l'influence de la dissipation artificielle sur la LES avec modélisation de la paroi existe dans la littérature.

Pour l'étude des autres propriétés de la discrétisation spatiale, comme la dispersion, il faudrait mettre en place une méthode numérique d'ordre plus élevé adaptée à la LES avec modélisation de la paroi. Parmi les rares travaux ayant effectué un tel exercice, on peut citer Kawai and Larsson [2011].

### 3.2.2 Discrétisation spatiale volumes finis des flux diffusifs

Les flux diffusifs nécessitent l'estimation aux interfaces de la viscosité totale  $\mu_{tot_{i-1/2}}$  (où  $\mu_{tot} = \mu + \mu_t$  en RANS et  $\mu_{tot} = \mu + \mu_{sgs}$  en LES) et des neuf composantes du gradient de vitesse  $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)_{i-1/2}$ .

$\mu_{tot_{i-1/2}}$  est calculé par la demi-somme des viscosités totales aux centres des deux cellules adjacentes :  $\mu_{tot_{i-1/2}} = \frac{1}{2}(\mu_{tot_{i-1}} + \mu_{tot_i})$ . Le gradient de vitesse est quant à lui obtenu, selon le théorème de la divergence de Gauss, par la somme des flux de vitesse sur les bords d'un volume décalé centré sur l'interface, comme montré sur la figure 3.2. Ce schéma de discrétisation aboutit à une approximation au second ordre des flux diffusifs.

### 3.2.3 Avance temporelle

Pour itérer dans le temps, il reste à discrétiser  $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$  en faisant intervenir la solution à l'instant suivant  $\mathbf{W}^{n+1}$  et le pas de temps  $\Delta t$ .

### 3.2.3.1 Calculs LES

Les calculs LES utiliseront une avance en temps explicite, c'est-à-dire que la somme des flux dans l'équation 3.2 est considérée à l'instant  $n$ .  $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$  est discrétisée par le schéma de Runge-Kutta à quatre étapes :

$$\begin{cases} \mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^n - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{V} R(\mathbf{W}^n) \\ \mathbf{W}^{(2)} = \mathbf{W}^n - \frac{1}{3} \frac{\Delta t}{V} R(\mathbf{W}^{(1)}) \\ \mathbf{W}^{(3)} = \mathbf{W}^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{V} R(\mathbf{W}^{(2)}) \\ \mathbf{W}^{(4)} = \mathbf{W}^n - \frac{\Delta t}{V} R(\mathbf{W}^{(3)}) \\ \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^{(4)} \end{cases} \quad (3.9)$$

Ce schéma est d'ordre quatre en temps pour l'équation de convection linéaire  $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = 0$  mais chute à l'ordre deux pour les équations de Navier-Stokes, qui sont non linéaires [Colin, 2007; Fosso Pouange, 2011].

On obtient alors explicitement  $\mathbf{W}^{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{W}^n$ , ce qui permet d'itérer dans le temps. Il est à noter que durant les  $(p)$  sous pas du schéma de Runge-Kutta,  $\mu_{sgs}^{(p)}$  reste constant et égal à  $\mu_{sgs}^n$ .

Le pas de temps maximal autorisé dans chaque cellule repose sur la méthode de von Neumann appliquée à l'équation de convection et de diffusion mono-dimensionnelles. Il en résulte un pas de temps maximal convectif  $\Delta t_c$  et un pas de temps maximal diffusif  $\Delta t_d$ , reliés au nombre de Courant-Friedrichs-Lewy acoustique ( $CFL$ ). Le pas de temps maximal utilisable est donc le minimum de  $\Delta t_c$  et  $\Delta t_d$  :

$$\begin{aligned} \Delta t_{i,j,k} &= \min(\Delta t_c, \Delta t_d) \\ \Delta t_c &= CFL \frac{\Delta}{\|\mathbf{U}\|+c} \\ \begin{cases} \Delta t_d = \frac{1}{4} 2CFL \frac{\rho \Delta^2}{\gamma (\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t})} & \text{en RANS} \\ \Delta t_d = \frac{1}{4} 2CFL \frac{\rho \Delta^2}{\gamma (\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_{sgs}}{Pr_{sgs}})} & \text{en LES} \end{cases} & \quad (3.10) \\ \Delta &= \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \end{aligned}$$

Il est à noter que  $\Delta t_d$  vaut ici un quart du pas de temps diffusif retourné par l'analyse de von Neumann.

La théorie de von Neumann impose pour le schéma temporel considéré ici la condition  $CFL < 2\sqrt{2}$ . Puisque l'on cherche une solution instationnaire, le pas de temps est global, c'est-à-dire identique dans tout le domaine et déterminé par  $\Delta t = \min(\Delta t_{i,j,k})$ .

### 3.2.3.2 Calculs RANS

Les calculs RANS utiliseront quant à eux une avance en temps implicite, c'est-à-dire que la somme des flux de l'équation 3.2 est considéré à l'instant  $n + 1$ .  $\frac{\partial \mathbf{W}_{i,j,k}}{\partial t}$  est discrétisée par un schéma d'ordre un. L'équation 3.2 devient alors :

$$\frac{\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n}{\Delta t} + \sum F(\mathbf{W}^{n+1}) = 0 \quad (3.11)$$

qui constitue un système d'équation non linéaire sur  $\mathbf{W}^{n+1}$ . Ce système est linéarisé en faisant intervenir la matrice jacobienne des flux, donnant un système matriciel par bloc. Chaque bloc est ensuite approché par le rayon spectral de la matrice jacobienne. Finalement, ce système linéaire approché est résolu par une méthode LU-SSOR (voir Colin [2007], p. 136-138).

Grâce à l'approche implicite, aucune limitation théorique n'existe sur la *CFL*. De plus, puisque l'on cherche une solution stationnaire, le pas de temps peut être local, c'est-à-dire que chaque cellule utilise son propre pas de temps  $\Delta t_{i,j,k}$  défini par l'équation 3.10. La combinaison d'un pas de temps local et d'une grande *CFL* permet d'accélérer la convergence du calcul vers la solution stationnaire.

## 3.3 Formulation des conditions limites

La définition des conditions limites consiste à spécifier, sur les interfaces de frontière, les flux convectif, diffusif et de dissipation artificielle.

Le flux convectif peut être directement imposé par la condition limite ou obtenu à partir des variables conservatives  $\mathbf{W}_{1/2}$  sur l'interface de frontière.

Les flux diffusifs  $\tau_p$  et  $\phi_p$  nécessitent l'estimation de la viscosité totale  $\mu_{tot1/2}$  et du gradient de vitesse et de température. Le gradient de vitesse est calculé par le théorème de la divergence de Gauss dans le demi-volume montré sur la figure 3.2, puis extrapolé sur la frontière. Cette procédure revient, pour la composante  $\partial u / \partial y$ , à  $\partial u / \partial y = \frac{u_1}{\Delta y_1/2}$ .

Dans le cadre de la LES avec modélisation de la paroi, nous ne pourrions plus utiliser cette approximation et nous modifierons donc l'estimation de  $\tau_p$  et  $\phi_p$ , qui seront directement donnés par un modèle.

Concernant le flux de dissipation artificielle, il est réduit à zéro sur les interfaces de frontière :  $d1/2 = 0$ .

En résumé, la spécification des conditions limites revient à estimer  $\mathbf{W}_{1/2}$  ou directement le flux convectif  $F_{c1/2}$  et, dans le cadre de la LES avec modélisation de la paroi, à modéliser  $\tau_p$  et  $\phi_p$ . On abordera successivement les conditions limites d'entrée, de paroi et de sortie.

### 3.3.1 Conditions limites d'entrée

Dans le cadre de ce travail, on utilisera des conditions limites d'entrée subsoniques. En négligeant la viscosité, il est possible de montrer que pour une telle condition limite, quatre conditions physiques sont à spécifier (voir par exemple Poinsot and Lele [1992]). Pour simplifier la présentation, on suppose une interface de frontière de normale  $\mathbf{x}$ . Trois conditions limites d'entrée seront utilisées.

#### 3.3.1.1 Condition limite inj1

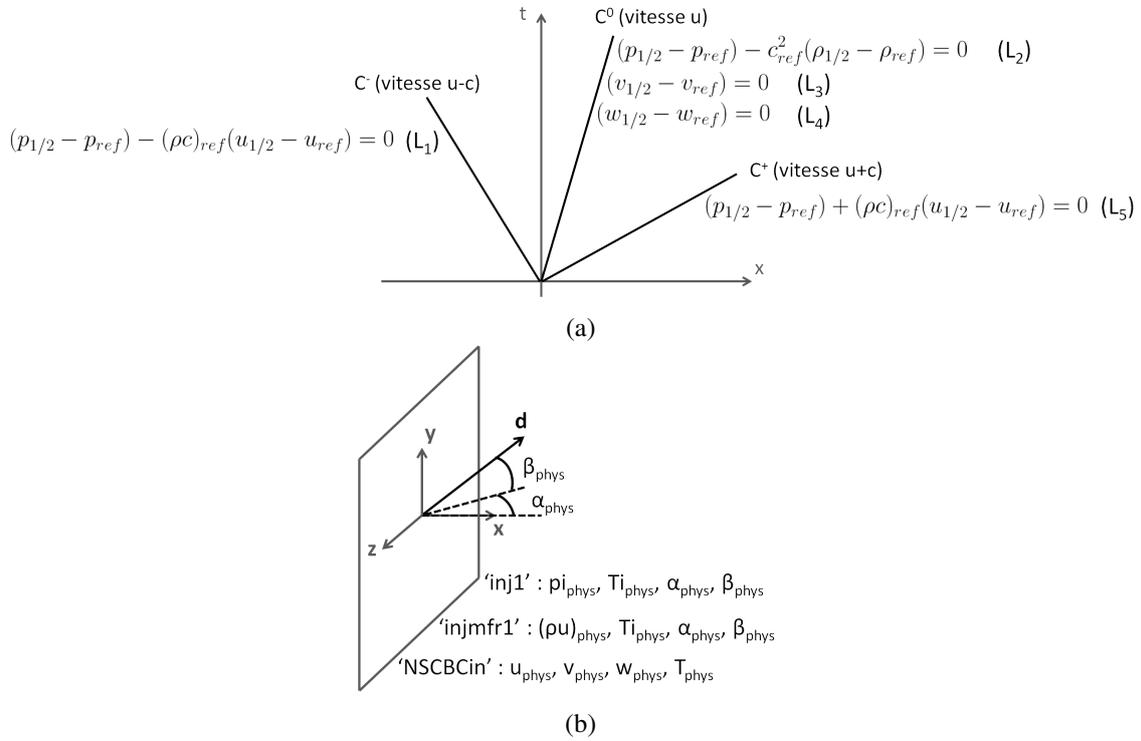


FIGURE 3.3 : Définition de la condition limite d'entrée. (a) : caractéristiques dans le plan  $(x, t)$ . Pour les conditions limites inj1 et injmfr1, les relations permettant de compléter la définition de la condition limite sont données le long de chaque caractéristiques. Pour la condition limite NSCBC, les  $L_i$  correspondant à l'amplitude de chaque caractéristique sont également donnés entre parenthèses (voir le paragraphe 3.3.1.3). (b) : conditions limites physiques imposées sur la frontière d'entrée pour les conditions limites inj1, injmfr1 et NSCBCin.

Comme indiqué sur la figure 3.3 (b), la condition limite inj1 impose les conditions limites physiques de pression totale  $p_{i,phys}$ , de température totale  $T_{i,phys}$  et les deux angles  $\alpha_{phys}$  et  $\beta_{phys}$  qui définissent le vecteur unitaire  $\mathbf{d}$  donnant la direction de la vitesse :  $\mathbf{U}_{1/2} = U_{1/2}\mathbf{d}$ . Le problème

est alors de trouver une relation pour définir les cinq variables conservatives sur le plan d'entrée  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_{1/2}$  à partir de ces quatre conditions physiques.

Pour déterminer cette relation, les équations d'Euler sont tout d'abord écrites sous la forme caractéristique selon la direction  $x$ . On peut alors interpréter les équations obtenues sous la forme de cinq caractéristiques, formées de deux ondes acoustiques de vitesse  $u \pm c$ , une onde d'entropie de vitesse  $u$  et deux ondes advectant les vitesses tangentielles  $v$  et  $w$  également à la vitesse  $u$  (voir la figure 3.3 (b)). Après linéarisation des équations caractéristiques autour d'un état de référence  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_{ref}$ , on obtient le long de chaque caractéristique les relations données sur la figure 3.3 (a). L'état de référence  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_{ref}$  est déterminé par extrapolation depuis le premier centre adjacent à la frontière d'entrée, soit  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_{ref} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_1$ .

Pour compléter la définition de la condition limite d'entrée, la relation valide le long de la caractéristique sortante du domaine  $C^-$  est utilisée. Cette relation combinée à la loi des gaz parfaits permet d'écrire un système de deux équations pour la vitesse  $U_{1/2}$  et la pression  $p_{1/2}$  sur la frontière d'entrée :

$$\begin{cases} p_{1/2} = p_{i_{phys}} \left( 1 - \frac{U_{1/2}^2}{2C_p T_{i_{phys}}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ p_{1/2} - p_{ref} - (\rho c)_{ref}(u_{1/2} - u_{ref}) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Après résolution de ce système par une méthode de Newton, la masse volumique à la frontière d'entrée est finalement obtenue par une hypothèse d'isentropie le long de  $C^-$  :

$$\rho_{1/2} = \frac{p_{i_{phys}}}{RT_{i_{phys}}} \left( \frac{p}{p_{i_{phys}}} \right)^{1/\gamma}, \text{ ce qui complète la définition de } \mathbf{W}_{1/2}.$$

### 3.3.1.2 Condition limite injmfr1

La condition *injmfr1* impose les conditions limites physiques de débit  $(\rho u)_{phys}$  et, comme pour la condition *inj1*,  $T_{i_{phys}}$ ,  $\alpha_{phys}$  et  $\beta_{phys}$ . Il est à noter que le débit  $(\rho u)_{phys}$  n'est pas global mais imposé localement sur chaque interface de la frontière d'entrée. De nouveau, la relation permettant de compléter la définition de la condition limite provient de la caractéristique sortante  $C^-$ . On obtient un jeu de trois équations pour les inconnues  $\rho_{1/2}$ ,  $p_{1/2}$  et  $U_{1/2}$  :

$$\begin{cases} C_p T_{i_{phys}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{1/2}}{\rho_{1/2}} + \frac{1}{2} U_{1/2}^2 \\ \rho_{1/2} = (\rho u)_{phys} / U_{1/2} \\ p_{1/2} - p_{ref} - (\rho c)_{ref}(u_{1/2} - u_{ref}) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Une fois cette équation résolue, il est possible de calculer  $\mathbf{W}_{1/2}$ .

### 3.3.1.3 Condition limite NSCBCin

Les conditions limites NSCBC [Poinsot and Lele, 1992] suivent, comme les deux conditions limites précédentes, l'idée d'une décomposition en ondes caractéristiques mais effectuent moins d'approximations. On choisit une condition NSCBC imposant les conditions limites physiques de vitesse et de température ( $u_{phys}, v_{phys}, w_{phys}, T_{phys}$ ). La condition NSCBC consiste à estimer le flux convectif sur l'interface de frontière selon la procédure suivante :

- écrire les équations d'Euler sous la forme caractéristique [Thompson, 1987] :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + u d_1 + \rho d_3 &= 0 \\
 \frac{\partial \rho v}{\partial t} + v d_1 + \rho d_4 &= 0 \\
 \frac{\partial \rho w}{\partial t} + w d_1 + \rho d_5 &= 0 \\
 \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)d_1 + \frac{1}{\gamma-1}d_2 + \rho u d_3 + \rho v d_4 + \rho w d_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}[\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1)] \\ \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \\ \frac{1}{2\rho c}(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{pmatrix}$$

Il est à noter que les hypothèses, non obligatoires,  $\partial/\partial y \approx 0$  et  $\partial/\partial z \approx 0$  sont utilisées ici pour simplifier l'écriture de l'équation 3.14.

Les termes  $\mathcal{L}_i$  s'interprètent comme l'amplitude des ondes caractéristiques et sont données dans le tableau 3.2 avec leur vitesse de propagation. Le problème revient alors à estimer les  $\mathcal{L}_i$ .

On remarque que certaines ondes entrent dans le domaine de calcul et d'autres en sortent (voir la figure 3.3). Ici, pour une entrée subsonique, seule la caractéristique  $C^-$  est sortante ;

TABLE 3.2 : Amplitude et vitesse de propagation des ondes caractéristiques.

vitesse de propagation	amplitude
$u - c$	$\mathcal{L}_1 = (u - c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right)$
$u$	$\mathcal{L}_2 = u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right)$
$u$	$\mathcal{L}_3 = u \frac{\partial v}{\partial x}$
$u$	$\mathcal{L}_4 = u \frac{\partial w}{\partial x}$
$u + c$	$\mathcal{L}_5 = (u + c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right)$

- estimer les caractéristiques sortantes (ici  $\mathcal{L}_1$ ) à partir du champ  $\mathbf{W}$  adjacent à la frontière en approximant  $\partial/\partial x$  par une différence finie décentrée ;
- estimer les caractéristiques entrantes ( $\mathcal{L}_2$  à  $\mathcal{L}_5$  ici) à partir des conditions limites physiques

$(u_{phys}, v_{phys}, w_{phys}, T_{phys})$ . Avec l'hypothèse LODI (*Locally One-Dimensional Inviscid*), qui néglige les dérivées selon les directions parallèles à la frontière  $\partial/\partial y \approx 0$  et  $\partial/\partial z \approx 0$  et la viscosité, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{\rho c^2} \left[ -\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\mathcal{L}_2 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathcal{L}_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

- remplacer les dérivées temporelles des conditions limites physiques par un terme de rappel vers ces dernières. Par exemple, pour  $u$ , écrire  $\frac{\partial u}{\partial t} = K_u(u - u_{phys})$  et de même pour  $v$ ,  $w$  et  $T$ . L'équation 3.15 permet alors de calculer les  $\mathcal{L}_i$  et donc d'obtenir les termes convectifs de l'équation 3.14.

Une description plus détaillée de l'implémentation de cette condition limite est donnée par Fosso Pouange [2011] (p. 84).

### 3.3.2 Conditions limites de paroi non glissante

Deux conditions limites de paroi seront utilisées. La première sera une condition limite non glissante classique utilisée pour les calculs RANS, dans lesquels le maillage résout la sous-couche visqueuse, c'est-à-dire typiquement  $\Delta_{y_1}^+ \approx 1$ .

La seconde sera utilisée pour les calculs LES avec modélisation de la paroi et implique des modifications par rapport à une condition limite non glissante classique.

#### 3.3.2.1 Pour les calculs RANS résolvant la sous-couche visqueuse

La pression à la paroi est tout d'abord supposée égale à la pression au premier centre adjacent à la paroi, c'est-à-dire  $p_{1/2} = p_1$ .

Pour une condition isotherme à la température  $T_p$ , on a  $T_{1/2} = T_p$  et donc  $\rho_{1/2} = \rho_1 T_1 / T_p$ .

Pour une condition adiabatique, la variation de température entre la paroi et le premier centre adjacent à l'interface de paroi est supposée nulle, soit  $T_{1/2} = T_1$ . L'hypothèse  $p_{1/2} = p_1$  implique donc  $\rho_{1/2} = \rho_1$ .

En conséquence, le flux convectif sur l'interface de paroi est finalement donné par :

$$\begin{aligned} F_{c1/2} \left[ \left( \rho_{1/2} = \frac{\rho_1 T_1}{T_p}, u_{1/2} = 0, v_{1/2} = 0, w_{1/2} = 0, p_{1/2} = p_1 \right) \right] & \text{ en isotherme} \\ F_{c1/2} \left[ \left( \rho_{1/2} = \rho_1, u_{1/2} = 0, v_{1/2} = 0, w_{1/2} = 0, p_{1/2} = p_1 \right) \right] & \text{ en adiabatique} \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3.2.2 Pour les calculs LES avec modélisation de la paroi

La LES avec modélisation de la paroi discutée dans le chapitre suivant ne permettra plus d'estimer  $\tau_p$  et  $\phi_p$  par une différence finie d'ordre un.  $\tau_p$  et  $\phi_p$  devront donc être estimés par un modèle.

De plus, pour une condition adiabatique, l'échauffement dû au travail des forces visqueuses près de la paroi est pris en compte par la modélisation de paroi.  $T_{1/2}$  est donc également estimée par un modèle.

L'hypothèse  $p_{1/2} = p_1$  est maintenue et l'estimation de la masse volumique à la paroi  $\rho_{1/2} = \rho_1 T_1 / T_{1/2}$  est donc conservée. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 (\tau_p, \phi_p) &= (\tau_p, \phi_p)_{\text{modele}} \\
 F_{c1/2} \left[ (\rho_{1/2} = \frac{\rho_1 T_1}{T_p}, u_{1/2} = 0, v_{1/2} = 0, w_{1/2} = 0, p_{1/2} = p_1) \right] & \quad \text{en isotherme} \quad (3.17) \\
 F_{c1/2} \left[ (\rho_{1/2} = \frac{\rho_1 T_1}{T_{p\text{modele}}}, u_{1/2} = 0, v_{1/2} = 0, w_{1/2} = 0, p_{1/2} = p_1) \right] & \quad \text{en adiabatique}
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 Conditions limites tangentielles et de sortie outpres

Sur les frontières parallèles à l'écoulement et à la frontière de sortie, supposée subsonique, la condition limite *outpres* est utilisée. Une telle condition limite nécessite la spécification d'une seule condition limite physique, qui est ici la pression statique  $p_{phys}$ . Seule la caractéristique  $C^-$  est rentrante. Les quatre autres variables primitives  $\rho_{1/2}, u_{1/2}, v_{1/2}, w_{1/2}$  sont obtenues grâce aux quatre caractéristiques sortantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{1/2} = \rho_{ref} + \frac{p_{phys} - p_{ref}}{c_{ref}^2} \\ u_{1/2} = u_{ref} - \frac{p_{phys} - p_{ref}}{(\rho c)_{ref}} \\ v_{1/2} = v_{ref} \\ w_{1/2} = w_{ref} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

ce qui définit entièrement  $\mathbf{W}_{1/2}$  sur la frontière de sortie.

---

## Modélisation de paroi pour la Simulation des Grandes Echelles des écoulements compressibles

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Coût de calcul de la Simulation des Grandes Echelles des écoulements pariétaux turbulents</b>	<b>62</b>
<b>4.2</b>	<b>Les méthodes hybrides RANS-LES</b>	<b>65</b>
4.2.1	Les méthodes hybrides RANS-LES de type <i>segregated</i>	67
4.2.2	Les méthodes hybrides RANS-LES de type <i>unified</i>	67
4.2.3	Comparaison de la WMLES avec deux autres méthodes hybrides RANS-LES	67
4.2.3.1	Nature des équations près de la paroi	68
4.2.3.2	Présence de structures turbulentes près de la paroi	68
4.2.3.3	Type d'échange d'information à l'interface	69
<b>4.3</b>	<b>La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles</b>	<b>69</b>
4.3.1	Présentation de la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi	70
4.3.1.1	Stratégie de maillage	70
4.3.1.2	Nécessité d'un modèle de paroi pour l'estimation des flux pariétaux	71
4.3.1.3	Développement des structures turbulentes près de la paroi	72
4.3.2	Formulation d'un modèle de paroi RANS	73
4.3.2.1	Modèles de paroi analytiques	74
4.3.2.2	Modèles de paroi numériques basés sur les équations de couche limite	76

4.3.2.3	Modélisation RANS de la région interne des écoulements pariétaux turbulents . . . . .	78
4.3.2.4	Hypothèses sur l'orientation du vecteur frottement pariétal . . . . .	81
4.3.2.5	Conséquences de conditions limites LES sur un modèle de paroi RANS . . . . .	84
4.3.2.6	Validation hors LES d'un modèle de paroi . . . . .	86
4.3.3	Développement des structures turbulentes près de la paroi sur un maillage WMLES . . . . .	88
4.3.3.1	Influence du modèle de sous-maille . . . . .	88
4.3.3.2	Influence de la méthode numérique . . . . .	89
4.3.4	Synthèse sur les erreurs liées à l'approche LES avec modèle de paroi . . . . .	90
<b>4.4</b>	<b>Conclusions intermédiaires . . . . .</b>	<b>92</b>

---

Du fait de la physique particulière de la turbulence pariétale, les écoulements turbulents pariétaux sont problématiques pour l'approche LES et nécessitent notamment un coût de calcul prohibitif (voir le paragraphe 1.5.6).

Un grand nombre de méthodes, appelées méthodes hybrides RANS-LES, ont donc été développées dans le but de modéliser une part supplémentaire de la turbulence pariétale et réduire ce coût de calcul.

Dans ce chapitre, on commencera par quantifier le coût de calcul de la LES des écoulements turbulents pariétaux. Après avoir donné un aperçu des méthodes hybrides RANS-LES, on se concentrera sur l'une d'entre elles, la LES avec modèle de paroi (WMLES), qui sera la méthode choisie pour modéliser la paroi.

## 4.1 Coût de calcul de la Simulation des Grandes Echelles des écoulements pariétaux turbulents

Pour les deux raisons suivantes, il nous semble important de rappeler ici comment quantifier le coût de calcul de la LES des écoulements turbulents pariétaux.

Ce coût de calcul est premièrement l'argument principal justifiant le développement des méthodes hybrides RANS-LES, dont l'approche LES avec modèle de paroi fait partie. Deuxièmement, les premières estimations de ce coût de calcul effectuées par Chapman [1979] ont été récemment réévaluées par Choi and Moin [2012].

Suivant les travaux Chapman [1979] et Choi and Moin [2012], on considère un écoulement incompressible de couche limite sans gradient de pression sur une plaque plane de longueur  $L_x$  et de largeur  $L_z$ , comme montré sur la figure 4.1.  $x$ ,  $y$  et  $z$  désignent respectivement les directions longitudinale, normale à la paroi et transversale. La vitesse en amont de la plaque est notée  $U_\infty$  et  $\delta(x)$  désigne l'épaisseur de couche limite. Pour discrétiser ce domaine, on considère ici un maillage structuré coïncident<sup>1</sup>. On suppose de plus que le domaine de calcul correspond uniquement à la région de couche limite et a donc pour dimensions  $(L_x, \delta(x), L_z)$ .

---

1. Il est à noter que Chapman préconise un maillage non-coïncident pour optimiser le nombre de cellules. Cependant

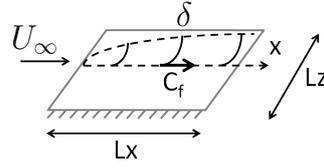


FIGURE 4.1 : L'écoulement de couche limite sur plaque plane choisi pour l'estimation du coût de calcul de la LES. L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  et le coefficient de frottement pariétal  $C_f$  évoluent selon  $x$  et sont à la base de l'estimation du coût de calcul.

Pour poursuivre, il est nécessaire de spécifier la densité de cellules dans le maillage. On suppose qu'un cube de côté  $\delta$  est discrétisé par  $(n_x, n_y, n_z)$  cellules. Il est alors possible d'estimer le nombre de cellules du maillage :

$$N = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \frac{n_x n_y n_z}{\delta(x)^2} dx dz \quad (4.1)$$

On remarque que cette équation nécessite la connaissance de la densité de cellules  $(n_x, n_y, n_z)$  et de l'évolution de l'épaisseur de couche limite.

TABLE 4.1 : Corrélations empiriques utilisées pour déterminer l'épaisseur de couche limite et le frottement pariétal  $C_f(x) = \frac{\tau_p}{0.5\rho U_\infty^2}$  en fonction du nombre de Reynolds local  $Re_x = \rho U_\infty x / \mu$ .

	<b>Epaisseur de couche limite</b>	<b>Coefficient de frottement</b>
Chapman	$\frac{\delta(x)}{x} = 0.37 Re_x^{-1/5}$	$C_f(x) = 0.074 Re_x^{-1/5}$
Choi and Moin	$\frac{\delta(x)}{x} = 0.37 Re_x^{-1/5}$ pour $Re_x < 10^6$	$C_f(x) = 0.0577 Re_x^{-1/5}$ pour $Re_x < 10^6$
	$\frac{\delta(x)}{x} = 0.16 Re_x^{-1/7}$ pour $Re_x > 10^6$	$C_f(x) = 0.027 Re_x^{-1/7}$ pour $Re_x > 10^6$

L'épaisseur de couche limite est estimée à l'aide des corrélations empiriques données dans le tableau 4.1. Pour estimer  $(n_x, n_y, n_z)$ , on distingue maintenant deux calculs LES. Le premier résolvant uniquement la région externe de la couche limite et le second résolvant l'ensemble de la couche limite :

- pour une LES ne résolvant que la région externe de la couche limite, c'est la discrétisation des grandes et très grandes structures de la région logarithmique qui importe, comme expliqué dans le paragraphe 2.1.2. La taille de ces structures s'exprimant suivant l'épaisseur de couche limite, il suffit d'estimer le nombre de cellules  $n_x n_y n_z$  nécessaire pour discrétiser un cube de côté  $\delta$  ;
- pour une LES résolvant l'ensemble de la couche limite, c'est la discrétisation des *streaks* présents dans la zone interne qui va être dimensionnante. Puisque la taille des *streaks* s'exprime

l'utilisation d'un maillage non coincident ne remettrait pas en cause la dépendance du nombre de cellules en fonction du nombre de Reynolds donnée dans le tableau 4.2, seul le facteur devant le nombre de Reynolds diminuerait.

en unité de paroi, les dimensions des cellules  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$  s'expriment également en unité de paroi. On obtient ainsi  $\Delta_x^+ = \Delta_x \frac{\rho u_\tau}{\mu} = \frac{\delta}{n_x} \frac{\rho u_\tau}{\mu}$  et de même suivant  $z$ . Pour déterminer  $n_x$  et  $n_z$ , il reste à fixer  $\Delta_x^+$  et  $\Delta_z^+$  et à estimer le frottement pariétal  $\tau_p$  qui apparaît dans  $u_\tau$  à l'aide des corrélations empiriques données dans le tableau 4.1. Dans la direction  $y$ , on considère que  $n_y$  cellules sont utilisées pour discrétiser l'épaisseur de couche limite.

TABLE 4.2 : Nombre de cellules pour la LES d'une couche limite. L'expression simplifiée de  $N$  pour  $Re_{L_x} \gg 10^6$  est donnée entre parenthèses.

	Région externe	Régions interne et externe
Chapman	$N = 40 \frac{L_z}{L_x} (n_x n_y n_z) Re_{L_x}^{0.4}$ ( $N \propto Re_{L_x}^{0.4}$ )	$N = 0.05 \frac{L_z}{L_x} \frac{n_y}{\Delta_x^+ \Delta_z^+} Re_{L_x}^{1.8}$ ( $N \propto Re_{L_x}^{1.8}$ )
Choi and Moin	$N = 54.7 \frac{L_z}{L_x} (n_x n_y n_z) Re_{L_x}^{2/7} [(\frac{Re_{L_x}}{10^6})^{5/7} - 1]$ ( $N \propto Re_{L_x}$ )	$N = 0.021 \frac{L_z}{L_x} \frac{n_y}{\Delta_x^+ \Delta_z^+} Re_{L_x}^{13/7} [1 - (\frac{10^6}{Re_{L_x}})^{6/7}]$ ( $N \propto Re_{L_x}^{1.9}$ )

Il est maintenant possible d'estimer  $N$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{L_x} = \rho U_\infty L_x / \mu$  basé sur la longueur de la plaque. Le tableau 4.2 donne les différentes expressions de  $N$  en fonction des régions de la couche limite résolues par la LES et du choix de modélisation pour  $\delta(x)$  et  $C_f(x)$ .

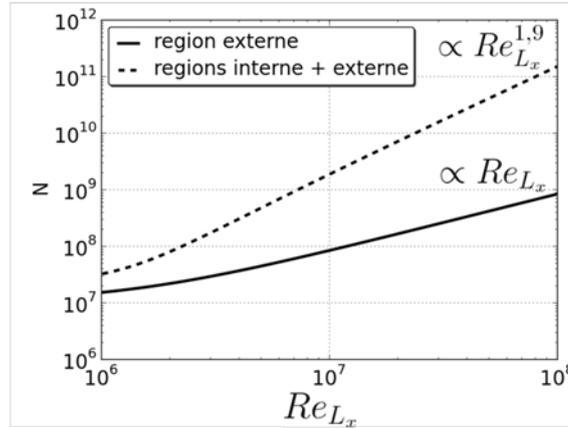


FIGURE 4.2 : Nombre de cellules du maillage en fonction du nombre de Reynolds suivant les zones de la couche limite résolues par la LES pour  $\frac{L_z}{L_x} = 1$ ,  $n_x n_y n_z = 2500$ ,  $\Delta_x^+ = 100$ ,  $\Delta_z^+ = 20$  et  $n_y = 20$ .

D'après les expressions du tableau 4.2, pour déterminer  $N$ , il reste à fixer la forme de la plaque  $\frac{L_z}{L_x}$ , la densité de cellules dans la région externe  $n_x n_y n_z$ , les dimensions des cellules dans la région interne ( $\Delta_x^+$  et  $\Delta_z^+$ ) et le nombre de cellules pour discrétiser l'épaisseur de la couche limite

$n_y$ . Pour les valeurs de ces quatre paramètres qui sont indiquées dans la légende de la figure 4.2<sup>2</sup>, on trace l'évolution de  $N$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{L_x}$  en utilisant les estimations de Choi and Moin [2012].

On observe que  $N \propto Re_{L_x}^{1,9}$  pour la LES des régions interne et externe de la couche limite. Cette estimation est proche de l'estimation du nombre de cellules  $N \propto Re^{2,6}$  [Choi and Moin, 2012] nécessaire pour une DNS à  $Re_{L_x} > 10^6$ .

Par contre, la LES de la région externe uniquement conduit à  $N \propto Re_{L_x}^{0,4}$  selon Chapman et  $N \propto Re_{L_x}$  selon Choi et Moin<sup>3</sup>. Il est intéressant de noter l'écart important induit par le choix de la corrélation empirique décrivant  $\delta(x)$  sur le coût de calcul de la LES de la région externe.

Malgré tout, ces deux estimations montrent une nette réduction du nombre de cellules du maillage si seule la région externe de la couche limite est résolue par la LES. A grand nombre de Reynolds, la majeure partie des cellules du maillage se trouvent donc dans la sous-couche visqueuse et la zone tampon alors que ces deux zones ne représentent qu'une petite fraction de la couche limite.<sup>4</sup>

## 4.2 Les méthodes hybrides RANS-LES

On vient de voir que la LES de la sous couche visqueuse et de la région tampon des écoulements turbulents pariétaux est prohibitif à grand nombre de Reynolds et s'avère être proche du coût de calcul de la DNS. Dans un calcul LES, il semble donc judicieux de traiter au moins la sous couche visqueuse et la région tampon avec l'approche RANS, dont le coût de calcul est nettement plus faible que celui de la LES. C'est l'objectif des méthodes hybrides RANS-LES.

Depuis les premiers travaux de Schumann [1975], un grand nombre de méthodes hybrides RANS-LES sont apparues dans la littérature. La figure 4.3 présente un exemple simplifié de classification des méthodes hybrides RANS-LES en se basant sur la revue de Fröhlich and von Terzi [2008].

2. Il est à noter qu'une grande plage de choix pour  $n_x n_y n_z$  peut être trouvée dans la littérature et Choi and Moin [2012] indiquent que les valeurs  $1200 < n_x n_y n_z < 33000$  apparaissent. Pour le choix de  $n_y$ , Chapman [1979] estime  $16 < n_y < 28$  en intégrant différents spectres d'énergie cinétique de turbulence et en considérant que la méthode numérique nécessite au moins cinq cellules pour correctement discrétiser une longueur d'onde.

3. Une autre corrélation,  $C_f(x) = 0,0368 Re_x^{-1/6}$ , peut être trouvée dans Cousteix [1989] pour  $10^5 < Re_x < 10^8$ . Si, en accord avec cette corrélation, on choisit  $\frac{\delta(x)}{x} \propto Re_x^{-1/6}$  alors l'estimation de  $N$  serait comprise entre celles de Chapman [1979] et celle de Choi and Moin [2012].

4. A un nombre de Reynolds  $Re_{L_x} = 10^7$  représentatif d'un écoulement aéronautique externe, en prenant  $L_x = 1m$  et en considérant que la zone tampon se termine à  $y^+ = 100$ , on obtient à partir des corrélations de Choi et Moin que 96% des cellules sont dans la sous couche visqueuse et la zone tampon, alors que ces deux zones ne représentent que 1/60 de l'épaisseur de couche limite ( $\delta = 16mm$  et la zone tampon se termine à  $y = 0,27mm$ ).

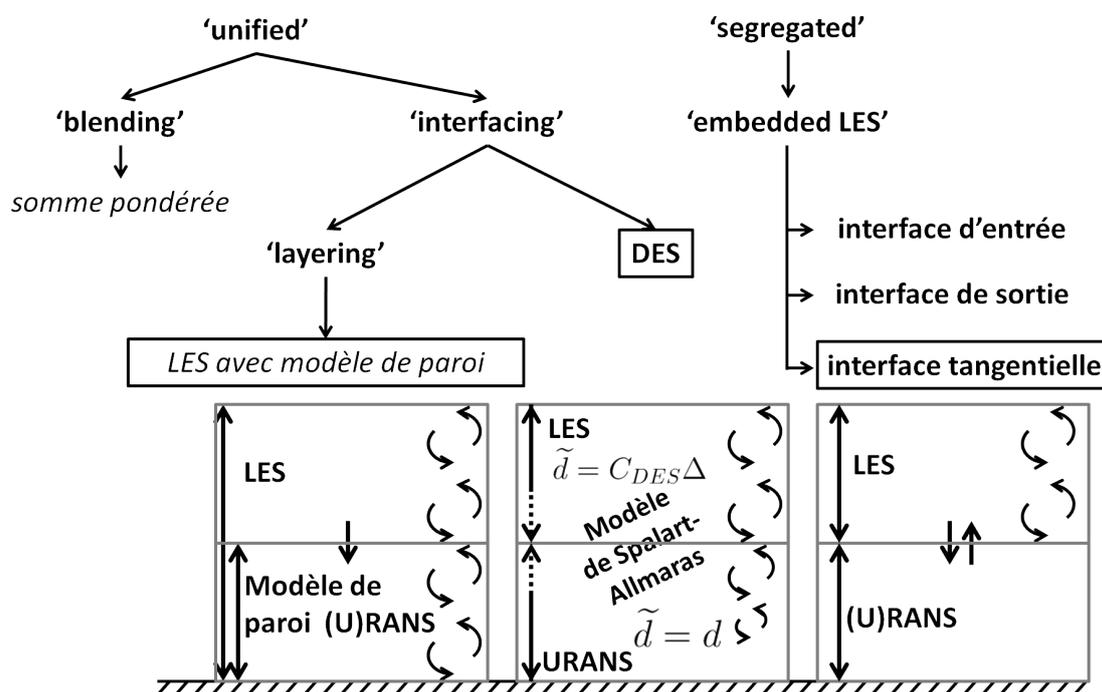


FIGURE 4.3 : Classification simplifiée des méthodes hybrides RANS-LES basée sur Fröhlich and von Terzi [2008]. Les approches encadrées sont schématisées en indiquant les régions RANS et LES (flèches doubles), la présence de structures turbulentes résolues (flèches en arc de cercle) et le type d'échange de conditions limites à l'interface (flèches simples).  $\tilde{d}$  remplace  $d$  dans le modèle de Spalart-Allmaras.

### 4.2.1 Les méthodes hybrides RANS-LES de type *segregated*

Les approches *segregated* sont certainement les approches hybrides RANS-LES dont le principe apparaît le plus naturel. Elle consiste à résoudre les équations RANS et LES dans des domaines distincts. Il existe trois types d'interfaces entre les domaines RANS et LES selon que l'écoulement rentre dans le domaine LES (interface d'entrée), sorte du domaine LES (interface de sortie) ou soit tangent à l'interface (interface tangentielle). Le cas de l'interface d'entrée sera abordé dans la partie III.

Au niveau de ces interfaces, il y a un double échange de conditions limites : le champ LES prescrit les conditions limites du champ RANS et inversement. Devant la nature instationnaire des équations LES, des fluctuations sont généralement ajoutées aux conditions limites construites à partir du champ RANS avant d'être données aux équations LES.

### 4.2.2 Les méthodes hybrides RANS-LES de type *unified*

Contrairement aux méthodes *segregated*, les méthodes *unified* résolvent le même jeu d'équations dans l'ensemble du domaine. Il est possible de construire une méthode *unified* en remarquant que les équations URANS et LES possèdent le même formalisme.

Par exemple, à la place de  $\mu_t$  ou  $\mu_{sgs}$ , il suffit d'utiliser  $\mu_{hyb} = f\mu_t + (1 - f)\mu_{sgs}$  pour obtenir une méthode *unified* de type somme pondérée.

Il est également possible d'utiliser le modèle de Spalart-Allmaras (voir le paragraphe 1.4.5) pour construire l'approche *unified* appelée Detached Eddy Simulation (DES) initiée par Spalart et al. [1997]. En effet, la distance à la paroi  $d$  qui apparaît dans le modèle de Spalart-Allmaras représente une taille caractéristique des structures turbulentes modélisées. En diminuant  $d$  à une valeur proche de la dimension des cellules, le modèle de Spalart-Allmaras retourne alors une viscosité de sous-maille au lieu de retourner une viscosité turbulente. Ainsi  $d$  est remplacée par  $\tilde{d} = \min(d, C_{DES}\Delta)$  avec  $\Delta = \max\{\Delta_x; \Delta_y; \Delta_z\}$ . Autrement dit,  $\tilde{d} = d$  près de la paroi (approche URANS) et  $\tilde{d} = C_{DES}\Delta$  lorsque la distance à la paroi excède la dimension des cellules (approche LES).

L'approche WMLES est une autre approche classée parmi les méthodes *unified*. C'est cette approche qui sera utilisée ici pour modéliser la paroi.

### 4.2.3 Comparaison de la WMLES avec deux autres méthodes hybrides RANS-LES

Devant la variété des approches hybrides RANS-LES et le fait que l'approche WMLES est moins connue que la DES, il est important de positionner l'approche WMLES par rapport aux autres approches hybrides RANS-LES. La WMLES sera donc tout d'abord comparée à la DES puis à une approche *segregated* avec une interface tangentielle. La comparaison portera sur les trois critères suivants :

- la présence de structures turbulentes près de la paroi ;
- la nature des équations près de la paroi ;
- le type d'échange d'information au niveau de l'interface.

#### 4.2.3.1 Nature des équations près de la paroi

Avec l'approche *segregated*, les équations LES sont résolues dans la région LES avec des conditions limites instationnaires à l'interface qui sont représentatives d'un champ LES. De même dans la région RANS, les équations (U)RANS sont résolues avec des conditions limites filtrées à l'interface, ne laissant passer que les plus basses fréquences. On peut donc considérer que dans les domaines RANS et LES, les approches (U)RANS et LES sont pleinement respectées.

Avec la DES, il est possible de considérer que suffisamment loin de l'interface, les équations RANS et LES sont résolues respectivement près et loin de la paroi avec des conditions limites appropriées. Cependant, près de l'interface, Hamba [2011] montre que l'approche DES génère des termes supplémentaires dans l'équation de quantité de mouvement.<sup>5</sup> Les équations résolues ne peuvent alors ni être considérées comme pleinement LES ni pleinement URANS.

L'approche WMLES résout quant à elle les équations LES jusqu'à la paroi. Cependant, on verra que près de la paroi, la dimension des cellules d'un maillage WMLES est très grande comparée à la dimension des cellules d'un maillage LES classique. Ces cellules de grande taille nécessitent l'utilisation d'un modèle de paroi, généralement de type (U)RANS, et d'un certain nombre de corrections spécifiques, portant notamment sur le modèle de sous-maille.

#### 4.2.3.2 Présence de structures turbulentes près de la paroi

Comme montré sur la figure 4.3, avec l'approche *segregated*, les structures turbulentes résolues dans la zone LES disparaissent brutalement au passage de l'interface à cause de la condition limite LES  $\rightarrow$  (U)RANS, qui filtre l'écoulement LES en ne conservant que les phénomènes instationnaires de plus basse fréquence.

Avec la DES, il n'y a pas disparition brutale des structures turbulentes au passage dans la zone RANS. En effet, comme l'a montré Temmerman et al. [2005], les équations URANS peuvent capturer des phénomènes instationnaires et une part des structures turbulentes présentes dans la zone LES traversent l'interface avant d'être amorties par la viscosité turbulente et l'anisotropie du maillage.

L'approche WMLES autorise quant à elle la présence de structures turbulentes jusqu'à la paroi, car elle résout les équations LES jusqu'à la paroi avec des cellules suffisamment isotropes. On verra cependant que près de la paroi, ces structures turbulentes ne sont pas physiquement réalistes.

---

5. La mise en place d'une correction visant à réduire l'impact de ces termes supplémentaires a par exemple été étudiée par Piomelli and Balaras [2003] et Keating and Piomelli [2006], qui utilisent un terme de forçage stochastique introduit dans la région d'interface sous la forme d'un terme source dans l'équation de quantité de mouvement.

#### 4.2.3.3 Type d'échange d'information à l'interface

Comme le montre la double flèche sur la figure 4.3, l'approche *segregated* implique un double échange de conditions limites à l'interface.

A l'inverse, l'approche DES ne nécessite aucune spécification de condition limite à l'interface.

La WMLES implique quant à elle la spécification des conditions limites du modèle de paroi à partir du champ LES. Puisque le modèle de paroi est généralement basé sur une version plus ou moins simplifiée des équations (U)RANS, une attention particulière doit être portée sur les conséquences de conditions limites instationnaires tirées du champ LES sur le fonctionnement du modèle de paroi.

On s'aperçoit donc que chacune de ces trois approches va présenter des avantages et des inconvénients différents.

Concernant l'approche WMLES, on verra que l'interface LES-(U)RANS est placée au début de la zone logarithmique à environ  $y^+ = 100$ , ce qui est très près de la paroi. L'approche WMLES propose donc un traitement très localisé, restreint au sein de chaque cellule adjacente à la paroi. Ce traitement local présente notamment l'avantage de simplifier l'implémentation, d'être efficace dans un code massivement parallèle et de faciliter la mise en place sur une configuration à géométrie complexe.

Partant de ce constat, nous estimons que l'approche WMLES mérite une étude spécifique dans le cadre des écoulements turbulents pariétaux aérothermiques en développement spatial et à géométrie complexe. Cette étude fera donc l'objet de la suite de cette thèse.

En revanche, la simplicité apparente de cette approche pourrait faire croire qu'il suffit de coder une loi logarithmique dans un code de calcul LES pour obtenir une approche WMLES performante. Ce n'est pas le cas et, comme pour les autres approches hybrides RANS-LES, on vient de voir que la WMLES génère des erreurs que l'on peut regrouper sous deux grandes catégories : le choix du modèle de paroi et le développement des structures turbulentes sur un maillage grossier près de la paroi. On verra que l'approche WMLES est particulièrement sensible à la méthode numérique et au maillage près de la paroi et que de nombreuses contraintes reposent sur la manière de construire ce dernier.

Pour garantir une fiabilité suffisante aux résultats d'un calcul WMLES, il est donc primordial d'identifier et de traiter ces erreurs. C'est ce que l'on s'attachera à faire dans la suite de ce chapitre.

### 4.3 La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles

Avant de détailler et proposer des solutions aux deux difficultés décrites ci-dessus, c'est-à-dire le choix du modèle de paroi et le développement des structures turbulentes sur un maillage grossier, on donne tout d'abord une présentation générale de l'approche WMLES.

### 4.3.1 Présentation de la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi

L'approche WMLES consiste à effectuer une simulation LES sur un maillage délibérément grossier près de la paroi, avec des cellules de forme quasiment isotropes. L'utilisation de cellules de grandes dimensions près de la paroi joue un rôle crucial dans le comportement de cette approche.

On commencera par donner les critères sur lesquels un maillage WMLES est construit. Puis on expliquera pourquoi un maillage WMLES nécessite l'utilisation d'un modèle de paroi et comment il influence le développement des structures turbulentes près de la paroi.

#### 4.3.1.1 Stratégie de maillage

Les critères de construction d'un maillage WMLES sont très différents de ceux d'une LES. Dans une LES, c'est la discrétisation du profil de vitesse et la discrétisation des structures turbulentes de la sous-couche visqueuse et de la zone tampon qui importe, conduisant aux dimensions des cellules adjacentes à la paroi  $\Delta_{y_1}^+ \approx 1$ ,  $\Delta_{x_1}^+ \approx 100$  et  $\Delta_{z_1}^+ \approx 15$ .

Dans une WMLES, les critères de construction du maillage sont basés sur la discrétisation des structures turbulentes de la région externe. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.1.2, ces structures sont auto-similaires et se situent au dessus de  $y^+ \approx 100$ .

Le choix de la hauteur  $\Delta_{y_1}$  des cellules adjacentes à la paroi sera tout d'abord discuté. Puis les dimensions  $\Delta_{x_1}$  et  $\Delta_{z_1}$  selon les directions parallèles à la paroi seront déterminées.

En considérant des cellules de dimensions identiques dans l'ensemble de la couche limite, on a  $\Delta_{y_1} = \delta/n_y$ . Les structures de la région externe étant auto-similaires, il suffit a priori de discrétiser les plus grandes d'entre elles, de hauteur  $\delta$ .  $n_y$  doit donc être suffisamment grand pour discrétiser au moins une longueur d'onde dans l'épaisseur de la couche limite. Le choix de  $n_y$  va dépendre de l'ordre et des propriétés du schéma de discrétisation spatial. Pour fixer les idées et en accord avec le paragraphe 4.1, on considère ici  $n_y = 20$ . On souhaite donc idéalement que  $100 \frac{\delta}{Re_\tau} < \Delta_{y_1}^+ < \frac{\delta}{20}$ .

On observe que cette condition implique  $Re_\tau > 2000$ . Si  $Re_\tau < 2000$ , des compromis seront nécessaires lors de la construction du maillage WMLES.

Ensuite, pour déterminer  $\Delta_{x_1}$  et  $\Delta_{z_1}$ , nous pouvons utiliser la forme des structures turbulentes de la zone logarithmique qui est d'environ  $(5y, y, 2y)$  (voir le paragraphe 2.1.2). En donnant une forme identique aux cellules, on obtient finalement :

$$\begin{cases} 100 \frac{\delta}{Re_\tau} < \Delta_{y_1} < \frac{\delta}{20} \\ \Delta_{x_1} \approx 5\Delta_{y_1} \\ \Delta_{z_1} \approx 2\Delta_{y_1} \end{cases} \quad (4.2)$$

### 4.3. La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles

La dimension des autres cellules  $(\Delta_{xj}, \Delta_{yj}, \Delta_{zj}), j > 1$  au sein de la couche limite doit rester similaire aux cellules adjacentes à la paroi. Pour réduire le nombre de cellules du maillage, une faible expansion de la hauteur des cellules suivant  $y$  peut être imposée, par exemple  $1 < \frac{\Delta_{y_{j+1}}}{\Delta_{y_j}} < 1,05$ .

#### 4.3.1.2 Nécessité d'un modèle de paroi pour l'estimation des flux pariétaux

Dans l'équation 3.17, nous avons décrit la condition limite de paroi non glissante<sup>6</sup> pour la WMLES. Cette condition limite fait apparaître un frottement pariétal et un flux de chaleur pariétal modélisés, ainsi qu'une température pariétale modélisée dans le cas d'une paroi adiabatique. Nous précisons ici pourquoi cette modélisation est nécessaire et sous quelle forme elle est introduite.

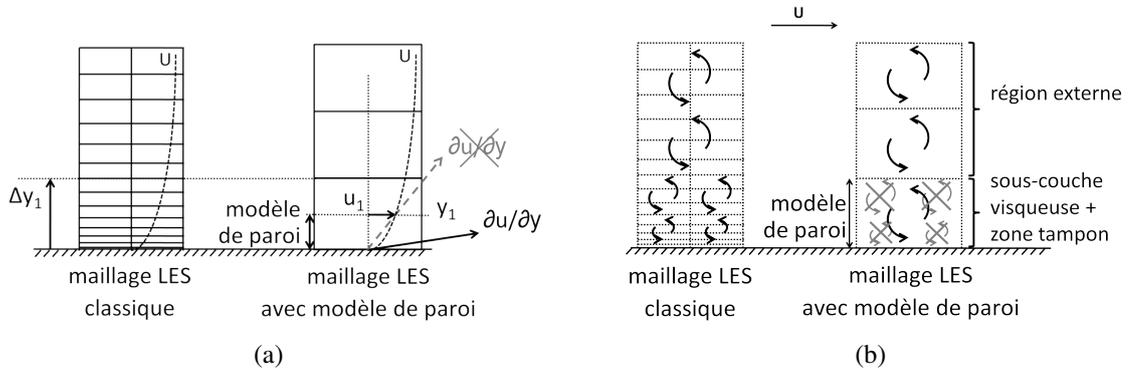


FIGURE 4.4 : (a) : discrétisation d'un profil de vitesse par un maillage LES et par un maillage WMLES. La flèche en trait pointillé représente la pente du profil de vitesse à la paroi obtenue sans utiliser de modèle de paroi. La flèche en trait plein représente la pente donnée par le modèle de paroi. (b) : représentation schématique des structures turbulentes sur les deux maillages. L'approche WMLES ne capture pas les structures de la sous-couche visqueuse et de la zone tampon.

On rappelle que le frottement pariétal  $\tilde{\tau}_p = \mu_p \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_p$  contient la pente du profil de vitesse à la paroi. Comme montré par la flèche en pointillée sur la figure 4.4, cette pente est généralement estimée par une différence finie du premier ordre du type  $\left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_p = \tilde{u}_1 / y_1$ , avec  $y_1$  la hauteur du centre des cellules adjacentes à la paroi. Pour être correcte, cette approximation suppose que le profil de vitesse est linéaire au sein des cellules adjacentes à la paroi, comme c'est le cas sur un maillage LES.

6. Il existe des approches WMLES à paroi dite décalée, c'est-à-dire que le domaine de calcul s'arrête à une petite distance au dessus de la paroi réelle. Sur cette paroi décalée, la vitesse n'est pas nulle et une vitesse fluctuante doit être spécifiée comme condition limite. La spécification de la vitesse normale à la paroi apparaît particulièrement délicate [Pantano et al., 2008]. Sur un canal plan, Chung and Pullin [2009] proposent une méthode pour la spécifier.

Or, du fait de la grande dimension des cellules utilisées en WMLES, le profil de vitesse ne peut plus être considéré linéaire à l'intérieur des cellules adjacentes à la paroi, comme l'atteste le profil de vitesse superposé sur le maillage WMLES de la figure 4.4. Une modélisation des flux pariétaux est donc nécessaire et est dédiée au modèle de paroi.

En supposant que le modèle de paroi est composé d'équations (U)RANS<sup>7</sup>, le modèle de paroi et ses conditions limites associées peuvent se mettre sous la forme générale suivante pour une condition de paroi isotherme :

$$\begin{array}{l}
 \text{Modèle de paroi} \\
 \text{Conditions limites}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\overline{\tau_{px}}, \overline{\tau_{pz}}, \overline{\phi_p}) = f(\overline{u}, \overline{w}, \overline{T}) \\
 \widetilde{\tau_{px}} = \overline{\tau_{px}}, \widetilde{\tau_{pz}} = \overline{\tau_{pz}}, \widetilde{\phi_p} = \overline{\phi_p} \\
 \overline{u}(0) = 0, \overline{w}(0) = 0, \overline{T}(0) = T_p \\
 \overline{u}(y_1) = \widetilde{u}_1^8, \overline{w}(y_1) = \widetilde{w}_1, \overline{T}(y_1) = \widetilde{T}_1
 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Pour une condition adiabatique,  $\phi_p$  est remplacé par  $T_p$  et la condition limite  $\overline{T}(0) = T_p$  est remplacée par  $\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}(y = 0) = 0$ .

On remarque dans l'équation 4.3 que des grandeurs LES sont directement égales à des grandeurs RANS. Les conséquences de ces égalités seront discutées dans le paragraphe 4.3.2.5.

L'équation 4.3 représente donc un type particulier de modèle de paroi qui utilise les grandeurs LES instantanées pour spécifier les conditions limites du modèle. Bien que ce type de modèle de paroi soit le plus courant dans la littérature, au moins deux autres types de modèles existent : les modèles utilisant des quantités LES filtrées comme le modèle de paroi de Schumann [1975] et les modèles basés sur une procédure d'optimisation, étudiés notamment par Nicoud et al. [2001]; Templeton et al. [2006, 2008]. On justifiera dans le paragraphe 4.3.2.5 pourquoi ces deux types de modèles n'ont pas été retenus.

Dans le cadre des écoulements compressibles, on remarque que l'équation 4.3 respecte la conclusion tirée au chapitre 2, qui indique qu'un modèle de paroi compressible peut être dérivé d'un modèle de paroi incompressible en ajoutant une équation pour la température.

#### 4.3.1.3 Développement des structures turbulentes près de la paroi

Le modèle de paroi décrit par l'équation 4.3 ne conditionne pas entièrement le comportement de l'approche WMLES. Une part au moins aussi importante de son comportement dépend du dé-

---

7. C'est le cas de la très grande majorité des modèles de paroi dans la littérature. Pour un exemple de modèle de paroi non (U)RANS, on peut se référer à Marusic et al. [2010a].

8. Au lieu de considérer la valeur locale  $\widetilde{u}_1$  de la vitesse, certains auteurs utilisent la valeur moyenne dans la cellule  $\frac{1}{\Delta y_1} \int_0^{\Delta y_1} u(y) dy$ . L'utilisation de la valeur moyenne dans la cellule est cohérente avec l'approche volumes finis. Cependant, avec une méthode numérique d'ordre deux en espace, l'utilisation des valeurs locales reste correcte [Temmerman and Leschziner, 2003].

veloppement des structures turbulentes près de la paroi.

Alors qu'un maillage LES est construit pour capturer les structures de la couche limite jusqu'à la paroi, un maillage WMLES ne discrétise pas les structures de la zone tampon et de la sous-couche visqueuse. Le fait de ne pas résoudre ces structures turbulentes est justifié par les conclusions du chapitre 2, qui indiquent que les structures de la région externe peuvent être simulées indépendamment de la zone tampon.

Dans un calcul WMLES, à la place des structures de la zone tampon et de la sous-couche visqueuse vont se développer des structures turbulentes dont les caractéristiques vont dépendre :

1. des structures turbulentes présentes au dessus de la rangée de cellules adjacentes à la paroi ;
2. de la présence de la paroi qui tend à donner à ces structures la forme des *streaks* ;
3. de la taille des cellules adjacentes à la paroi ;
4. de la méthode numérique de résolution des équations LES ;
5. de la viscosité de sous-maille dans les cellules adjacentes à la paroi.

Les quatre derniers points conduisent au développement près de la paroi de structures turbulentes non-physiques en forme de *streaks* de grande taille appelés *superstreaks*. On s'intéressera en particulier à l'influence du modèle de sous-maille et de la méthode numérique sur le développement de ces structures.

Ces deux axes que constituent le modèle de paroi et le développement des structures turbulentes près de la paroi conditionnent avec une importance égale la capacité de l'approche WMLES à estimer correctement les caractéristiques de la turbulence pariétale. Dans la suite de ce chapitre, on discutera successivement de chacun de ces deux axes, en insistant sur les différentes sources d'erreur qui leur sont associées.

### 4.3.2 Formulation d'un modèle de paroi RANS

Comme indiqué ci-dessus, on suppose désormais que la fonction  $f$  dans l'équation 4.3 est de nature RANS.

On distinguera tout d'abord deux types de modèles de paroi, les modèles analytiques et les modèles numériques. Pour les modèles numériques, une modélisation de la turbulence est nécessaire et cette dernière sera discutée dans le cadre des écoulements pariétaux.

Puis, suivant la complexité de  $f$ , on se demandera quelles sont les manières les plus pertinentes de 'brancher' le modèle de paroi au champ LES. On verra que les hypothèses faites sur la direction du vecteur frottement pariétal de la LES  $\tilde{\tau}_p$  sont au coeur de cette question.

En se basant sur l'équation 4.3, on discutera ensuite des conséquences du fait que les conditions limites  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{T}_1$  de  $f$  soient de nature LES, donc instationnaires et turbulentes, alors que  $f$  est de nature RANS.

Pour terminer, une procédure pour valider un modèle de paroi vis à vis d'un écoulement donné sera présentée.

### 4.3.2.1 Modèles de paroi analytiques

Les modèles de paroi que l'on qualifie ici d'analytique sont constitués d'équations donnant explicitement  $\overline{\tau}_p$  et  $\overline{\phi}_p$ , ou pouvant être facilement résolues par une méthode de point fixe ou de Newton. En conséquence, le coût de calcul pour résoudre un modèle de paroi analytique est négligeable comparé au coût de calcul d'une itération d'un code LES.

On découpe maintenant la description des modèles de paroi analytiques en deux parties : tout d'abord la partie vitesse portant sur  $\overline{\tau}_p$  et  $\overline{u}_1^9$ , puis la partie température portant sur  $\overline{\phi}_p$  et  $\overline{T}_1$ .

TABLE 4.3 : Exemples de modèles de paroi analytiques avec leur validité en fonction du régime compressible et du gradient de pression longitudinal.

	Loi analytique	Validité
Reichardt	$u_1^+ = R_1 + R_2 \left[ 1 - \exp(-y_1^+/11) - \frac{y_1^+}{11} \exp(-0.33y_1^+) \right]$ $R_1 = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y_1^+); R_2 = \left[ B - \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa) \right]$	I, II, $ p_x^+  < 0,005$
Spalding	$y_1^+ = u_1^+ + E \left[ 1 + (\kappa u_1^+) + \frac{(\kappa u_1^+)^2}{2} + \frac{(\kappa u_1^+)^3}{6} \right]$	I, II, $ p_x^+  < 0,005$
loi 'Van-Driest I'	$\frac{1}{R} \left\{ \arcsin \left[ \frac{R(u_1^+ + H)}{D} \right] - \arcsin \left( \frac{RH}{D} \right) \right\} = \frac{1}{\kappa} \ln(y_1^+) + B$ $T_1^+ = C_w - Pr_t B_q u_1^+ - Pr_t M_\tau^2 u_1^{+2} (\gamma - 1)/2$ $C_w = 1, R = M_\tau \sqrt{(\gamma - 1) Pr_t / 2}$ $H = B_q / [(\gamma - 1) M_\tau^2]$ $D = \sqrt{1 + R^2 H^2}$	I, II, III, IV, $ p_x^+  < 0,005$ I, II, III, IV, $ p_x^+  \ll 1$
Kader	$T_1^+ = Pr y_1^+ \exp(-\Gamma) + [2, 12 \ln(1 + y_1^+) + \beta(Pr)] \exp(-1/\Gamma)$ $\Gamma = \frac{10^{-2} (Pr y_1^+)^4}{1 + 5 Pr^3 y_1^+}; \beta(Pr) = [(3, 85 Pr^{1/3} - 1, 3)]^2 + 2, 13 \ln(Pr)$	I, IV, $ p_x^+  \ll 1$

**Relation entre vitesse et frottement pariétal** La loi logarithmique reste l'outil privilégié pour la description du profil de vitesse moyenne des écoulements pariétaux turbulents. Cette loi est cependant limitée à la zone logarithmique et aux écoulements incompressibles (régimes compressibles I et II du tableau 1.1).

Pour étendre la validité de la loi logarithmique à l'ensemble de la région interne, c'est-à-dire en incluant la sous-couche visqueuse et la zone tampon, les lois de [Reichardt, 1951] et de Spalding [1961] données dans le tableau 4.3 peuvent être utilisées.

Pour étendre la description du profil de vitesse aux écoulements compressibles, la transformée de VanDriest [1951] (voir paragraphe 2.2.2) est utilisée pour construire la loi 'Van-Driest I'. La loi 'Van-Driest I' pour la vitesse a été validée par Huang and Coleman [1994] sur les deux DNS de Coleman et al. [1995] à  $M = 1,5$  et  $M = 3$ . Il est à noter que dans le paragraphe 5.2 V.B.,

9. On suppose pour l'instant que  $\overline{u}_1 \gg \overline{w}_1$ . Les manières de brancher un modèle de paroi au champ LES seront décrites dans le paragraphe 4.3.2.4.

on présentera une relation analytique basée sur la loi de Crocco et la transformée de Van-Driest et que l'on validera également sur les deux DNS de Coleman et al. .

Si les effets de compressibilité sont correctement représentés par la transformée de Van-Driest, la prise en compte d'un gradient de pression longitudinal est plus problématique. Deux cas de figures peuvent se présenter.

Le premier cas correspond à  $\partial\bar{p}/\partial x > 0$  : le gradient de pression est dit adverse car il s'oppose à l'écoulement. Lorsque  $\partial\bar{p}/\partial x$  est suffisamment grand, le gradient de pression adverse provoque le décollement de la couche limite.

Le second cas correspond à  $\partial\bar{p}/\partial x < 0$  : le gradient de pression est dit favorable et si  $|\partial\bar{p}/\partial x|$  est suffisamment grand, la couche limite turbulente peut revenir vers un état laminaire, on parle alors de relaminarisation.

Deux quantités sans dimension permettent de quantifier l'influence d'un gradient de pression longitudinal [Cabrit, 2009] :

- le gradient de pression adimensionné :  $p_x^+ = \frac{\mu_p}{\rho_p^2 u_\tau^3} \frac{\partial\bar{p}}{\partial x}$ . Nickels [2004] indique que l'influence du gradient de pression est négligeable si  $|p_x^+| < 0,005$ . Dans ce cas, la loi logarithmique reste valable pour décrire le profil de vitesse incompressible ;
- le paramètre d'accélération :  $K = \frac{\mu_e}{\rho_e \bar{u}_e^2} \frac{\partial\bar{u}_e}{\partial x}$  où l'indice  $e$  désigne les valeurs à l'extérieur de la couche limite. Selon Back et al. [1969] et Jones and Launder [1972], la couche limite relaminarise lorsque  $K > 2,5 \times 10^6$ .

Si  $|p_x^+| > 0,005$ , il faut alors développer un modèle de paroi spécifique qui ne repose plus sur la loi logarithmique.

Pour utiliser les lois analytiques décrites ci-dessus, il reste à spécifier les valeurs des constantes  $\kappa$  et  $B$ . Du point de vue de l'ingénieur, le choix de ces constantes n'est pas sans conséquence. En effet, Spalart [2006] indique qu'une sous-estimation de 2% sur  $\kappa$  induit une sous-estimation de 1% sur la traînée d'un avion de ligne moderne. Smits et al. [2011] indiquent de plus que 6% d'erreur sur  $\kappa$  induit 2% d'erreur sur le coefficient de frottement  $C_f = \frac{\bar{\tau}_p}{0,5\rho_p U_\infty^2}$  à  $Re_x = 100 \times 10^6$ , ce qui correspond au nombre de Reynolds d'un fuselage d'avion de ligne en croisière.

Les constantes  $\kappa$  et  $B$  sont très délicates à mesurer expérimentalement et selon George [2007], des valeurs aussi disparates de  $0,38 < \kappa < 0,45$  et  $4 < B < 10$  ont été relevées. Ces difficultés à mesurer ces deux constantes proviennent du fait que la zone logarithmique doit être suffisamment étendue pour une mesure précise.

Pour que la zone logarithmique s'étende sur une décade de  $y^+$ , on a vu dans le paragraphe 2.1.1.3 que des valeurs de  $Re_\tau$  jusqu'à 20000 peuvent se révéler nécessaires pour une couche limite sans gradient de pression. Cependant les moyens de mesure expérimentaux limitent la vitesse de l'écoulement à environ  $10m.s^{-1}$  et pour obtenir  $Re_\tau = 20000$ , la taille de l'installation expérimentale serait trop grande. George [2007] estime que les meilleures installations expérimentales permettent d'observer à peine une demi décade de zone logarithmique.

Malgré ces difficultés à estimer les constantes  $\kappa$  et  $B$ , Marusic et al. [2010b]; George [2007]

indiquent que plusieurs études ont obtenu des résultats convergents :

- sur une couche limite sans gradient de pression :  $\kappa \approx 0,38$  et  $4,16 < B < 4,86$  ;
- dans une conduite :  $0,41 < \kappa < 0,43$  et  $5,5 < B < 5,87$ .

**Relation entre température et flux de chaleur pariétal** Une fois  $\overline{\tau_p}$  déterminé grâce aux lois analytiques présentées ci-dessus, il reste à estimer  $\overline{\phi_p}$ . La loi de Kader [1981] donnée dans le tableau 4.3 convient pour la description du profil de température dans toute la région interne des écoulements compressibles à faible nombre de Mach. Elle permet de prendre en compte des variations importantes de température sur une grande plage de nombre de Prandtl.

Pour les écoulements compressibles à grand nombre de Mach, la loi de 'Van-Driest I' pour la température a été validée par Dabireau [2002] sur les deux DNS de Coleman et al. [1995].

On peut faire deux remarques sur l'utilisation de ces lois analytiques pour la description du profil de température.

Premièrement, il apparaît que de manière générale le domaine de validité des lois analytiques pour la description du profil de température est limité à la zone logarithmique. Ce n'est pas problématique tant que la hauteur  $y_1$  du centre des cellules adjacentes la paroi est situé dans cette zone. Mais en pratique et notamment si la géométrie de la configuration étudiée est complexe, il est difficile de s'assurer que  $y_1$  reste dans la zone logarithmique et il est préférable que le modèle de paroi soit valable dans l'ensemble de la région interne.

Deuxièmement, par rapport au profil de vitesse, il est encore plus difficile de prendre en compte les effets du gradient de pression sur le profil de température. La loi logarithmique décrivant le profil de vitesse reste en effet valable tant que  $|p_x^+| < 0,005$  alors que le profil de température s'écarte nettement de la loi de Kader pour de plus faibles valeurs de  $p_x^+$ , comme indiqué par Kays et al. [2004].

#### 4.3.2.2 Modèles de paroi numériques basés sur les équations de couche limite

Pour enrichir le contenu physique des modèles de paroi analytiques, Balaras et al. [1996] ont été les premiers à résoudre les équations URANS de couche limite (équations TBL), qui sont une version simplifiée des équations URANS pour les écoulements en couche mince, comme c'est le cas dans les écoulements pariétaux.

Contrairement aux modèles analytiques dont la résolution est quasiment immédiate, les équations TBL nécessitent la mise en oeuvre d'une méthode numérique de résolution plus lourde<sup>10</sup>, d'où le nom de modèle de paroi numérique.

Différentes formulations des équations TBL<sup>11</sup> peuvent être obtenues suivant les termes négligés. Le tableau 4.4 récapitule les formulations qui nous intéresseront dans la suite, en donnant

---

10. Par exemple : discrétisation des équations TBL par différence finie et méthode de tir. Certains auteurs comme Monfort et al. [2010] préfèrent directement intégrer les équations TBL par un calcul d'intégrale numérique en utilisant les points de Gauss.

11. Il est possible d'inclure le terme de dérivée temporelle dans les équations TBL. Les équations obtenues sont alors

### 4.3. La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles

TABLE 4.4 : Les différentes formulations des équations TBL et la notation associée.

Notation	équations	phénomènes négligés
TBL(dpdx+conv)	$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}]$ $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} C_p \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} C_p \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} C_p \bar{T}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} [-(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$ $\bar{v}(y) = -\int_0^{y_1} \left( \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial z} \right) dy$	diffusion selon $x$ et $z$
TBL(dpdx)	$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}]$ $0 = \frac{\partial}{\partial y} [-(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$	diffusion selon $x$ et $z$ , convection
TBL()	$0 = \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $0 = \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}]$ $0 = \frac{\partial}{\partial y} [-(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$ $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$	diffusion selon $x$ et $z$ , convection, gradient de pression longitudinal

également la notation associée et les termes négligés.

On remarque dans tous les cas que la pression est constante selon la normale à la paroi  $y$ . La pression et les gradients de pression  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$  ne sont donc pas résolus dans les équations TBL mais donnés par le calcul LES. En termes de coût de calcul, le fait de ne pas résoudre le champ de pression des équations TBL constitue le principal argument justifiant l'intérêt d'une telle modélisation de la paroi par rapport à un calcul LES résolu jusqu'à la paroi.

De plus, dans la littérature, le surcoût de calcul engendré par la résolution des équations TBL est généralement considéré comme petit par rapport à une itération du code LES. Il convient cependant de préciser que ce surcoût de calcul dépend :

- du rapport entre le nombre de cellules adjacentes à la paroi et le nombre de cellules totales du maillage ;
- de l'efficacité de la méthode de résolution des équations TBL ;
- du régime compressible de l'écoulement : les régimes III et IV (voir le tableau 1.1) nécessitent de coupler les équations TBL de quantité de mouvement avec l'équation d'énergie, ce qui alourdit la résolution numérique ;
- du nombre de Reynolds : le nombre de points nécessaires pour discrétiser les équations TBL augmente en effet avec  $Re_\tau$ .

de nature URANS et permettent de prendre en compte des phénomènes basses fréquences au sein du modèle de paroi. La prise en compte de ces phénomènes sur le comportement instationnaire des flux pariétaux est notamment crucial dans l'industrie nucléaire, pour la prévision de la fatigue des tuyauteries Chatelain [2004]; Devesa and Nicoud [2006].

Devant le nombre de paramètres déterminant le surcoût de calcul d'un modèle de paroi numérique, il ne faut donc pas croire que ce surcoût est toujours négligeable et son estimation au cas par cas est recommandée.

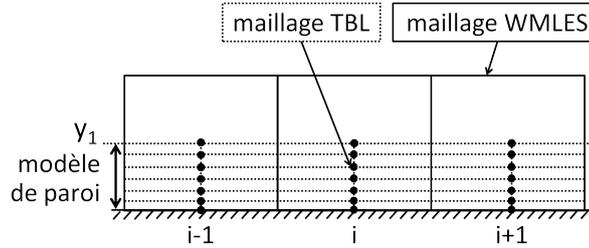


FIGURE 4.5 : Le maillage permettant de discrétiser les équations TBL est inséré au sein des cellules adjacentes à la paroi. Dans le cas des équations TBL() et TBL(dpdx), la résolution numérique s'effectue en considérant uniquement les points TBL de la rangée  $i$ . Dans le cas des équations TBL(conv+dpdx), les rangées  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$  interviennent. Les cellules du maillage TBL sont beaucoup plus anisotropes que celles du maillage LES.

Les équations TBL sont résolues sur le maillage montré par la figure 4.5. La prise en compte des termes convectifs dans les équations TBL(conv+dpdx) a des conséquences majeures.

On verra dans le paragraphe 4.3.4 que les termes convectifs permettent d'enrichir le contenu physique du modèle de paroi, rendant ce dernier valide sur une plus large gamme d'écoulements.

Cependant, les termes convectifs complexifient la résolution numérique car ils nécessitent de reconstruire le profil de vitesse normale à la paroi  $\bar{v}(y)$ . Comme indiqué dans le tableau 4.4,  $\bar{v}(y)$  est estimée en utilisant l'équation de conservation de la masse. Outre le calcul de l'intégrale selon  $y$ , la difficulté réside dans l'estimation des termes  $\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial z}$ .

En effet, lorsque les termes convectifs ne sont pas pris en compte, la résolution des équations TBL s'effectue de façon locale au sein de chaque cellule adjacente à la paroi. Mais lorsque les termes convectifs sont pris en compte, l'estimation des termes  $\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial z}$  fait intervenir dans le maillage TBL les points voisins selon les directions parallèles à la paroi. Le fait de considérer les points voisins rend la résolution numérique plus délicate car son *stencil* est plus étendu, rendant le calcul parallèle sur plusieurs processeurs moins efficace.

#### 4.3.2.3 Modélisation RANS de la région interne des écoulements pariétaux turbulents

Comme les équations RANS, les équations TBL font intervenir la viscosité turbulente  $\mu_t$  et le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$ , ce qui nécessite l'utilisation d'un modèle de turbulence. Quelques modèles de turbulence spécifiques aux écoulements pariétaux sont donc décrits dans ce paragraphe.

Par ordre de complexité, on commencera tout d'abord par les modèles de turbulence algébriques avant de s'intéresser aux modèles de turbulence à équations de transport. La validité des modèles algébriques sous un gradient de pression longitudinal  $\partial \bar{p} / \partial x$  sera ensuite abordée. On

terminera par la modélisation du nombre de Prandtl turbulent.

**Modèles de turbulence algébriques** Les modèles de turbulence algébriques donnent explicitement une expression pour  $\mu_t$ . Le modèle à longueur de mélange de Prandtl est un modèle algébrique qui permet une modélisation de  $\mu_t$  pour les écoulements en couche mince (écoulements pariétaux, jets) :

$$\mu_t = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4.4)$$

où  $l$  est appelée la longueur de mélange. Pour un écoulement pariétal, la loi logarithmique suggère d'utiliser  $l = \kappa y$ . Le modèle à longueur de mélange obtenu est alors valide dans la zone logarithmique. Pour faire le lien avec les modèles de paroi analytiques, il est intéressant de constater que l'équation TBL() pour  $\bar{u}$  avec le modèle à longueur de mélange défini par l'équation 4.4 est équivalent à la loi logarithmique.

Pour étendre la validité du modèle à longueur de mélange à l'ensemble de la région interne, la fonction de Van-Driest  $f_{VD}$  est souvent utilisée. On obtient alors le modèle suivant :

$$\begin{cases} \mu_t = \bar{\rho} (\kappa y f_{VD})^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \\ f_{VD} = 1 - \exp(y^+ / A^+) \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $A^+ \approx 26$ .

L'extension aux écoulements compressibles de l'équation 4.5 peut s'effectuer en remplaçant dans la fonction de Van-Driest  $y^+ = \frac{\rho_p u_\tau y}{\mu_p}$  par  $y_3^+ = \frac{\rho \sqrt{\tau_p} / \rho y}{\mu}$  [Cebeci and Smith, 1974; Aupoix and Viala, 1995]. Comme le suggère l'hypothèse de Morkovin, on constate que l'adimensionnement  $y_3^+$  utilise les valeurs locales (c'est-à-dire à la hauteur  $y$ ) de la masse volumique et de la viscosité au lieu d'utiliser les valeurs à la paroi.

Pour les écoulements pariétaux, mêmes fortement compressibles, le modèle à longueur de mélange avec l'adimensionnement  $y_3^+$  peut se révéler aussi performant que des modèles à équations de transport<sup>12</sup>. Ainsi, Viala [1995] obtient une estimation satisfaisante des flux pariétaux pour un écoulement de couche limite supersonique à  $M = 7,2$  sur une paroi froide.

Le modèle à longueur de mélange a été étendu avec succès à d'autres effets physiques tel que la courbure de la paroi [Cousteix and Houdeville, 1977] et la présence d'une aspiration ou d'un soufflage à la paroi [Cebeci and Smith, 1974; Kays et al., 2004]. Dans le paragraphe suivant, on verra que la prise en compte d'un gradient de pression longitudinal pose néanmoins des problèmes au modèle à longueur de mélange.

---

12. Certains modèles de turbulence à équations de transport utilisent l'hypothèse de longueur de mélange près de la paroi. La constante  $\kappa$  apparaît par exemple dans le modèle de Spalart-Allmaras.

**Validité d'un modèle à longueur de mélange sous un gradient de pression longitudinal** Pour prendre en compte l'effet d'un gradient de pression significatif, Cebeci and Smith [1974] et Kays et al. [2004] rendent le coefficient  $A^+$  dépendant de  $p_x^+$  dans la fonction de Van-Driest. Si Kays et al. [2004] indiquent qu'un modèle à longueur de mélange modifié de la sorte peut correctement prendre en compte un gradient de pression favorable, la prise en compte d'un gradient de pression adverse reste problématique.

Pour le comprendre, on considère comme le propose Kays et al. [2004] une couche limite sur plaque plane soumise à un intense gradient de pression adverse pour  $x \leq x_0$  et à un gradient de pression nul pour  $x > x_0$ .

Dans la région  $x \leq x_0$ , à cause du gradient de pression adverse, le frottement pariétal est faible et le niveau de turbulence dans la région externe de la couche limite est élevé. Dans la région  $x > x_0$ , le haut niveau de turbulence de la région externe va lentement décroître vers la valeur typique d'une couche limite sans gradient de pression. Juste en aval de  $x_0$ ,  $\bar{\tau}_p$  devrait donc brutalement augmenter du fait de ce haut niveau de turbulence. A cet endroit cependant, le modèle à longueur de mélange n'a aucune connaissance de ce niveau élevé de turbulence dans la région externe et retourne un frottement pariétal typique d'une couche limite sans gradient de pression. En conséquence, le modèle à longueur de mélange va prévoir une sévère sous-estimation du frottement pariétal juste en aval de  $x_0$ .

Les limitations du modèle à longueur de mélange sont donc :

- de ne pas offrir de moyen simple de tenir compte du niveau de turbulence dans la région externe ;
- de se baser uniquement sur des grandeurs locales à une position en  $x$  donnée.

De manière générale, un tel modèle à longueur de mélange est mis en défaut lorsque la turbulence pariétale n'est pas à l'équilibre.

Il est à noter que des modèles de turbulence algébriques ont été spécifiquement créés pour fonctionner lorsque l'écoulement décolle et recircule sous l'effet d'un intense gradient de pression adverse (voir le modèle de Duprat et al. [2011] dans le tableau 4.6 ou le modèle de Breuer et al. [2007]).

**Modèles de turbulence à équations de transport** Les modèles de turbulence à équations de transport semblent a priori constituer une solution aux limitations des modèles algébriques à longueur de mélange. Il apparaît cependant que peu de travaux ont exploré cette voie dans le cadre de l'approche WMLES.

Diurno et al. [2001] ont par exemple utilisé le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras. Contrairement à un modèle de paroi algébrique, une condition limite sur la variable turbulente transportée doit être imposée en  $y_1$ . Diurno et al. ont choisit  $\nu_t(y_1) = \nu_{sgs}(y_1)$  et ont évalué cette modélisation sur un cas de marche descendante.

Au delà du problème de la spécification des conditions limites pour les variables turbulentes, on verra dans le paragraphe 4.3.2.5 qu'une autre difficulté réside dans le fait que les équations TBL

résolues avec des conditions limites de type LES ( $\widetilde{u}_1$ ,  $\widetilde{w}_1$  et  $\widetilde{T}_1$ ) nécessitent une correction sur  $\mu_t$ . On peut donc se demander pourquoi utiliser un modèle de turbulence très performant, comme un modèle à équations de transport, si une correction sur  $\mu_t$  vient ensuite s'appliquer. On nuancera cette dernière remarque en montrant que l'amplitude de cette correction dépend des termes pris en compte dans les équations TBL.

**Nombre de Prandtl turbulent** Après avoir choisi un modèle pour  $\mu_t$ , il reste à spécifier le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$ . Bien qu'un nombre de Prandtl constant pourrait être imposé, de nombreuses études estiment que  $Pr_t$  varie dans la région interne des écoulements pariétaux. Kays [1994] a proposé une revue des connaissances sur le nombre de Prandtl turbulent et la suite du paragraphe se base sur cette étude. On concentrera sur les gaz ayant un nombre de Prandtl autour de l'unité, tel que l'air.

Dans la région logarithmique de la couche limite, la valeur  $Pr_t \approx 0.85$  peut être adoptée. Dans la sous-couche visqueuse et la région tampon, toutes les données expérimentales disponibles s'accordent sur une augmentation de  $Pr_t$  pour  $y^+ < 30$ . Kays indique que les équations TBL() avec un modèle de turbulence à longueur de mélange retournent un profil de température plus proche du profil de référence  $T^+ = 2.075 \ln(y^+) + 3.9$  (qui correspond à la loi de Kader dans la zone logarithmique) si l'augmentation de  $Pr_t$  à l'approche de la paroi est prise en compte. Il propose la relation suivante :

$$Pr_t = \frac{1}{0.5882 + 0.228\mu_t/\mu - 0.0441(\mu_t/\mu)^2[1 - \exp(\frac{-5.165}{\mu_t/\mu})]} \quad (4.6)$$

Il est à noter que les calculs DNS ont tendance à montrer un comportement de  $Pr_t$  près de la paroi différent par rapport aux données expérimentales. Ces calculs DNS étant réalisés à des nombres de Reynolds plus faibles que les expériences, un effet du nombre de Reynolds sur le comportement de  $Pr_t$  est donc possible près de la paroi.

Cebeci and Smith [1974] ont proposé une modélisation alternative à l'équation 4.6 pour tenir des variations de  $Pr_t$  à l'approche de la paroi. Cette modélisation sera présentée et utilisée dans le paragraphe 5.2 II.B.

#### 4.3.2.4 Hypothèses sur l'orientation du vecteur frottement pariétal

On a vu dans l'équation 4.3 que le modèle de paroi retourne les deux composantes parallèles à la paroi  $\overline{\tau_{p_x}}$  et  $\overline{\tau_{p_z}}$  du vecteur de frottement pariétal. Si sa norme  $\overline{\tau_p}$  peut être donnée par une des modélisations RANS présentées ci-dessus, sa direction semble moins évidente à estimer.

On va voir que certains modèles de paroi supposent l'alignement entre la vitesse  $\overline{U}_1$  au centre des cellules adjacentes à la paroi et  $\overline{\tau_p}$ , alors que d'autres résolvent séparément pour chaque composante  $\overline{\tau_{p_x}}$  et  $\overline{\tau_{p_z}}$ .

**Modèles de paroi supposant l'alignement entre  $\overline{\mathbf{U}}_1$  et  $\overline{\tau}_p$**  Lorsque l'alignement entre les vecteurs  $\overline{\mathbf{U}}_1$  et  $\overline{\tau}_p$  est supposé, comme par exemple dans le modèle de Monfort et al. [2010], les équations du modèle de paroi peuvent être résolues dans le plan défini par  $\overline{\mathbf{U}}_1$  et la normale à la paroi. L'équation 4.3 devient alors :

$$(\overline{\tau}_p, \overline{\phi}_p) = f(\overline{u}_{t1}, \overline{T}_1) \quad (4.7)$$

où  $\overline{u}_{t1} = \sqrt{\overline{u}_1^2 + \overline{w}_1^2}$  est la norme de  $\overline{\mathbf{U}}_1$  une fois sa composante normale à la paroi retranchée. La résolution du modèle de paroi donne la norme  $\overline{\tau}_p$  du frottement pariétal et, puisque le vecteur  $\overline{\tau}_p$  est supposé aligné avec  $\overline{\mathbf{U}}_1$ , sa direction est connue et ses composantes  $\overline{\tau}_{px}$  et  $\overline{\tau}_{pz}$  peuvent être reconstruites.

En supposant que  $f$  est une relation linéaire<sup>13</sup> entre  $\overline{u}_{t1}$  et  $\overline{\tau}_p$ , l'équation 4.7 implique que  $\overline{\mathbf{u}}_{t1}$  et  $\overline{\tau}_p$  sont parfaitement corrélés à la fois en direction et en norme. On a donc  $\frac{\langle \overline{u}_{t1}' \overline{\tau}_p' \rangle}{\sqrt{\langle \overline{u}_{t1}'^2 \rangle} \sqrt{\langle \overline{\tau}_p'^2 \rangle}} = 1$  et  $\frac{\langle \alpha' \beta' \rangle}{\sqrt{\langle \alpha'^2 \rangle} \sqrt{\langle \beta'^2 \rangle}} = 1$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les angles entre la direction longitudinale et, respectivement,  $\overline{\mathbf{u}}_{t1}$  et  $\tau_p$ , tandis que  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne temporelle permettant de filtrer les fluctuations turbulentes. Cette hypothèse d'une parfaite corrélation en norme et en direction entre  $\overline{\mathbf{u}}_{t1}$  et  $\overline{\tau}_p$  est très forte et plusieurs travaux ont investigué sa pertinence.

Concernant la corrélation sur la norme, Rajagopalan and Antonia [1979] ont mesuré expérimentalement dans un canal les signaux  $\tau_p$  et  $u_{t1}$  à différentes hauteurs  $y_1$ . Leurs résultats indiquent qu'à  $y_1/\delta = 0,025$ , ce qui correspondrait à un maillage WMLES avec 20 cellules dans la couche limite,  $\frac{\langle u_{t1}' \tau_p' \rangle}{\sqrt{\langle u_{t1}'^2 \rangle} \sqrt{\langle \tau_p'^2 \rangle}} \approx 0,5$ <sup>14</sup>. Cette corrélation significative va dans le sens de l'hypothèse d'une forte corrélation entre la norme de  $\overline{\mathbf{u}}_{t1}$  et  $\tau_p$ .

Concernant la corrélation entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut citer l'étude de Temmerman et al. [2005], qui utilisent un calcul LES<sup>15</sup> dans un canal pour calculer  $\frac{\langle u_{t1}' \tau_p' \rangle}{\sqrt{\langle u_{t1}'^2 \rangle} \sqrt{\langle \tau_p'^2 \rangle}}$  et  $\frac{\langle \alpha' \beta' \rangle}{\sqrt{\langle \alpha'^2 \rangle} \sqrt{\langle \beta'^2 \rangle}}$ . Il apparaît qu'à  $y_1^+ = 60$ , ces deux corrélations prennent respectivement les valeurs 0,4 et 0,2. Le niveau plus faible de la corrélation entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$  montre que l'hypothèse de corrélation sur la direction semble moins justifiée que celle sur la norme.

Il faut cependant prendre avec précaution les conclusions tirées de ces corrélations. Ces dernières sont en effet issues de valeurs locales de  $\tau_p$  et  $u_{t1}$ , mesurées expérimentalement ou tirées

---

13. Les modèles de paroi analytiques et les équations TBL ne sont pas linéaires en général. Cependant, si  $f$  correspond à la loi logarithmique ou aux équations TBL() ou TBL(dpdx),  $f$  peut être considérée comme quasiment linéaire (voir le paragraphe 4.3.2.5 pour une discussion plus détaillée).

14. Le maximum de la corrélation est en réalité obtenu lorsque les points d'extraction de  $u_1$  et  $\tau_p$  sont décalés selon la direction de l'écoulement, ce qui suggère l'existence de structures turbulentes inclinées par rapport à la normale à la paroi. Certains modèles de paroi tiennent compte de ce décalage et apparaissent sous le nom de *shifted model* [Piomelli et al., 1989; Balaras et al., 1996].

15. Temmerman et al. utilisent des cellules à la paroi de dimension ( $\Delta_x^+ = 38$ ;  $\Delta_y^+ = 2$ ;  $\Delta_z^+ = 29$ )

d'un calcul LES finement résolu.

Or l'approche WMLES utilise des cellules beaucoup plus grossières qu'une LES. Pour une interprétation plus juste de ces corrélations, il faudrait donc moyennner spatialement les mesures expérimentales et les résultats LES sur des boîtes dont les dimensions correspondraient aux cellules d'un maillage WMLES.

L'étude expérimentale de Marusic et al. [2001] se rapproche de ce constat. Ils utilisent en effet un peigne de fils chauds pour la mesure de  $u_{t1}$  et une matrice de capteurs pour la mesure de  $\tau_p$ . Leurs mesures filtrent donc spatialement l'écoulement ce qui correspond mieux à l'approche WMLES.

Au lieu de s'intéresser à  $\frac{\langle u_{t1}' \tau_p' \rangle}{\sqrt{\langle u_{t1}'^2 \rangle} \sqrt{\langle \tau_p'^2 \rangle}}$ , Marusic et al. mesurent la corrélation entre le frottement expérimental et le frottement modélisé par le modèle de paroi de Schumann [1975] et Grotzbach [1987], qui suppose une relation de proportionnalité entre  $\tau_p$  et  $u_{t1}$ . Ce modèle de paroi peut donc être considéré comme représentatif des modèles de paroi répondant à l'équation 4.7.

Le modèle de Schumann-Grötzbach est alimenté par le signal expérimental  $u_{t1}$  mesuré à différentes hauteurs  $y_1$ . De nouveau, une corrélation d'environ 0,5 entre le frottement mesuré et le frottement modélisé est mesurée à  $y_1^+ = 98$ .

L'hypothèse d'alignement entre  $\overline{U_1}$  et  $\overline{\tau_p}$  est donc assez bien justifiée en considérant la corrélation entre leur norme, et moins bien justifiée en considérant la corrélation entre leur direction.

**Modèles de paroi résolvant indépendamment  $\overline{\tau_{px}}$  et  $\overline{\tau_{pz}}$**  Pour éviter de supposer l'alignement entre  $\overline{U_1}$  et  $\overline{\tau_p}$ , il est possible de modéliser indépendamment  $\overline{\tau_{px}}$  et  $\overline{\tau_{pz}}$ , comme par exemple dans le modèle de paroi de Wang and Moin [2002]. Ces modèles de paroi sont plus coûteux à résoudre que ceux utilisant l'hypothèse d'alignement car ils contiennent une équation supplémentaire de quantité de mouvement.

On peut donc se demander dans quelle situation il est préférable de supposer l'alignement de  $\overline{U_1}$  et  $\overline{\tau_p}$  ou résoudre indépendamment  $\overline{\tau_{px}}$  et  $\overline{\tau_{pz}}$ .

On constate dans la littérature que les modèles de paroi utilisant les termes convectifs dans les équations TBL (équations TBL(conv+dpdx) du tableau 4.4) résolvent indépendamment  $\overline{\tau_{px}}$  et  $\overline{\tau_{pz}}$  par le biais d'une équation pour  $\overline{u}$  et d'une équation pour  $\overline{w}$  [Balaras et al., 1996; Cabot and Moin, 2000; Wang and Moin, 2002]. Ce choix est justifié par le fait qu'un modèle de paroi basé sur les équations TBL(conv+dpdx) se comporte comme des équations LES simplifiées. On se retrouve alors avec une LES simplifiée finement résolue au sein des cellules adjacentes à la paroi. La direction de  $\overline{\tau_p}$  estimée par un tel modèle de paroi a donc une signification physique.

Par contre, les modèles de paroi utilisant des équations RANS très simplifiées (par exemple la loi logarithmique ou les équations TBL() ou TBL(dpdx)) privilégient l'hypothèse d'alignement entre  $\overline{U_1}$  et  $\overline{\tau_p}$  [Monfort et al., 2010]. Ces modèles de paroi négligent en effet la convection dans les équations TBL, ce qui supprime tout fondement physique à la direction de  $\overline{\tau_p}$ . L'hypothèse d'alignement entre  $\overline{U_1}$  et  $\overline{\tau_p}$  devient alors obligatoire pour reconstruire le vecteur de frottement pariétal.

#### 4.3.2.5 Conséquences de conditions limites LES sur un modèle de paroi RANS

On a vu que dans les modèles de paroi répondant à l'équation 4.3, les conditions limites en  $y_1$  proviennent du champ LES :  $\bar{u}(y_1) = \widetilde{u}_1$ ,  $\bar{w}(y_1) = \widetilde{w}_1$ ,  $\bar{T}(y_1) = \widetilde{T}_1$ . Pour déterminer les conséquences de ces conditions limites, on va tout d'abord considérer un modèle de paroi basé sur les équations TBL avec termes convectifs avant de considérer les équations TBL sans termes convectifs.

**Modèle de paroi basé sur les équations TBL avec termes convectifs** Sous l'effet des conditions limites fluctuantes  $\widetilde{u}_1$ ,  $\widetilde{w}_1$  et  $\widetilde{T}_1$ , les composantes de la vitesse  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  ainsi que la température  $\bar{T}$  résolues par les équations TBL(conv+dpx) fluctuent dans le temps. On peut donc décomposer  $\bar{u}$  en une partie stationnaire et une partie moyenne :  $\bar{u} = \langle \bar{u} \rangle + \bar{u}'$  où  $\langle . \rangle$  représente une moyenne temporelle. En introduisant cette décomposition dans l'équation TBL(conv+dpx) pour  $\bar{u}$  puis en appliquant l'opérateur  $\langle . \rangle$ , on obtient :

$$\frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{w} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial z} = -\frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left\langle (\bar{\mu} + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\rangle - \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}' \bar{v}' \rangle \right] \quad (4.8)$$

En comparant l'équation TBL(conv+dpx) à l'équation 4.8, on s'aperçoit que le cisaillement  $\bar{\tau} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  devient ici  $\bar{\tau} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \langle \bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' \rangle$ . Le terme supplémentaire  $-\langle \bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' \rangle$  représente le cisaillement turbulent résolu par les équations TBL(conv+dpx) et apparaît à cause de la non-linéarité des termes convectifs, tout comme le tenseur de Reynolds apparaît en établissant les équations RANS.

Par définition de l'approche RANS,  $-\langle \bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' \rangle = 0$ . La particularité ici vient du fait que  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{T}$  fluctuent dans le temps, rendant ce terme supplémentaire non nul. Si la valeur de ce terme est significative devant  $(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ , sa présence conduit alors à une surestimation du cisaillement  $\bar{\tau}$  et donc à une surestimation du frottement pariétal.

La question est donc de savoir si le terme  $-\langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}' \bar{v}' \rangle$  est négligeable. Pour y répondre, on peut par exemple s'intéresser aux simulations WMLES de Wang and Moin [2002] et Kawai and Larsson [2011].

Sur un écoulement de bord de fuite de profil à  $Re_{\delta_2} = 3380$ , Wang et Moin supposent que le cisaillement résolu par les équations TBL(conv+dpx) est égal au cisaillement résolu par la LES en  $y_1$ . Ils appliquent donc sur  $\mu_t$  un facteur correctif  $c$  dont la valeur est déterminée en imposant  $\langle c\mu_t \rangle = \langle \mu_{sgs} \rangle$  en  $y_1$ . Cette correction est appelée correction dynamique. Ils trouvent  $c \approx 1/5$ , ce qui représente une sévère correction sur le modèle de turbulence. L'estimation du frottement pariétal se retrouve diminuée de 20% avec cette correction et se rapproche des données expérimentales de référence.

En plus du raisonnement de Wang et Moin, Kawai et Larsson notent que le terme  $-\langle \bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' \rangle$

est amorti à l'approche de la paroi à cause de la forme de plus en plus anisotrope des cellules du maillage TBL. En conséquence, la correction sur  $\mu_t$  n'est plus souhaitable très près de la paroi.

Kawai et Larsson proposent donc d'utiliser un facteur correctif  $c(y)$  dépendant de la distance à la paroi, dont la valeur en  $y_1$  est estimée suivant la correction dynamique de Wang et Moin et dont la valeur à la paroi est ramenée vers l'unité par une fonction empirique. Sur un cas de couche limite à  $M = 1.69$  et  $Re_{\delta_2} = 50000$ , soit un nombre de Reynolds nettement supérieur au cas de Wang and Moin [2002], Kawai et Larsson trouvent que  $c(y_1) \approx 1/50$ . La correction sur  $\mu_t$  devient donc plus importante avec le nombre de Reynolds.

On s'aperçoit donc que la valeur du terme supplémentaire  $-\langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  est de première importance pour une estimation correcte du frottement pariétal. Cette remarque peut être transposée à l'équation d'énergie du modèle TBL(conv+dpx) en considérant le terme  $-\langle \bar{\rho} C_p \bar{T}' \bar{v}' \rangle$  et le flux de chaleur pariétal.

Il est intéressant de constater que le coefficient  $c(y)$  peut être directement estimé en utilisant les équations TBL(conv+dpx). En effet, l'équation que l'on souhaite réellement appliquer sur le champ  $\langle u \rangle$  est :

$$\frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{w} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial z} = -\frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\langle \bar{\mu} \rangle + \langle \mu_t \rangle) \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \quad (4.9)$$

Comme la correction dynamique le suggère, en appliquant devant  $\mu_t$  un coefficient correctif  $c(y)$  dans l'équation 4.8 et en identifiant les équations 4.8 et 4.9, on obtient :

$$c(y) = \frac{\langle \mu_t \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y}}{\langle \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rangle - \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle} \quad (4.10)$$

Il est donc possible de calculer  $c(y)$  durant un calcul WMLES sans recourir à une fonction empirique.

**Modèle de paroi basé sur les équations TBL sans termes convectifs** Si l'on décide d'utiliser un modèle de paroi basé sur les équations TBL() ou TBL(dpx), le terme de cisaillement résolu  $-\langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  n'apparaît plus car il provient de la non-linéarité des termes convectifs. On pourrait donc penser qu'aucune correction n'est nécessaire sur le modèle de turbulence. En réalité il subsiste une erreur.

Pour le montrer, on considère un modèle de paroi basé sur l'équation TBL() avec le modèle de turbulence défini par l'équation 4.4, qui est équivalent à la loi logarithmique. On introduit ensuite comme précédemment la décomposition  $\bar{u} = \langle \bar{u} \rangle + \bar{u}'$ . Le point clé est de noter que le frottement pariétal fluctue également dans le temps et on peut donc décomposer la vitesse de frottement

$u_\tau = \langle u_\tau \rangle + u'_\tau$ . Après introduction de ces deux décompositions dans la loi logarithmique et application de l'opérateur  $\langle \cdot \rangle$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\langle u_1 \rangle}{\langle u_\tau \rangle} &= \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{\rho_p y \langle u_\tau \rangle}{\mu_p}\right) + B + R \\ R &= \langle u_\tau \rangle \frac{1}{\kappa} \left\langle \ln\left(1 - \frac{u'_\tau}{\langle u_\tau \rangle}\right) \right\rangle + \frac{1}{\langle u_\tau \rangle} \left\langle u'_\tau \frac{1}{\kappa} \ln\left(1 - \frac{u'_\tau}{\langle u_\tau \rangle}\right) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si le terme  $R$  est nul, on obtient ce qui est recherché, c'est-à-dire que la loi logarithmique s'applique bien sur l'écoulement moyen. Cependant  $R$  n'est pas nul et en toute rigueur une correction doit être effectuée. Puisque la loi logarithmique est équivalente à l'équation TBL(), la correction dynamique décrite précédemment peut être utilisée avec le coefficient  $c(y)$  déterminé par l'équation 4.10, dans laquelle le terme  $-\langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  est annulé. La mise en place de cette correction dynamique dans les équations TBL() sera étudiée dans le paragraphe 5.2 IV.C.

On peut noter que Mason and Thomson [1992] ont déjà souligné la nécessité de corriger la loi logarithmique pour tenir compte du champ fluctuant LES. On remarque cependant que le terme  $R$  est petit. En effet, on s'attend à ce que  $1 - \frac{u'_\tau}{\langle u_\tau \rangle} \approx 1$  et donc que  $\ln\left(1 - \frac{u'_\tau}{\langle u_\tau \rangle}\right) \approx 0$ .

On peut donc estimer que l'erreur due aux conditions limites fluctuantes soit plus faible pour les équations TBL() ou TBL(dpdx) que pour les équations TBL(conv+dpdx). Nous confirmerons cette dernière remarque dans le paragraphe 5.2 IV.C.

**Possibilité d'un modèle de paroi RANS bien posé** La nécessité de mettre en place une correction sur le modèle de turbulence des équations TBL avec termes convectifs provient du fait que les conditions limites  $\widetilde{u}_1$ ,  $\widetilde{w}_1$  et  $\widetilde{T}_1$  sont directement issues du champ LES. Une solution serait alors de moyenner  $\widetilde{u}_1$ ,  $\widetilde{w}_1$  et  $\widetilde{T}_1$ , supprimant ainsi la fluctuation de  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{T}$  et annulant donc le terme supplémentaire  $-\langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ .

Les modèles de paroi basés sur des grandeurs LES filtrées [Schumann, 1975] sont construits de cette manière et s'écrivent sous la forme :  $\widetilde{\tau}_p = \widetilde{u}_1 \frac{f(\langle \widetilde{u}_1 \rangle)}{\langle \widetilde{u}_1 \rangle}$ , où  $\langle \cdot \rangle$  désigne un filtre spatial et/ou temporel passe bas. La précision d'un tel modèle de paroi repose alors entièrement sur la qualité du filtre  $\langle \cdot \rangle$ . Sur un écoulement ne possédant pas de direction d'homogénéité statistique, il est cependant difficile d'obtenir des grandeurs filtrées précises. C'est pourquoi ce type de modèle de paroi ne sera pas sélectionné par la suite.

#### 4.3.2.6 Validation hors LES d'un modèle de paroi

Nous venons de voir qu'il existe de nombreuses manières de construire un modèle de paroi. Une validation du modèle de paroi semble donc nécessaire sur l'écoulement visé, notamment si des effets physiques complexes sont présents, comme des effets de compressibilité ou de gradient de pression longitudinal.

La validation du modèle de paroi peut s'effectuer grâce à une validation hors LES <sup>16</sup>.

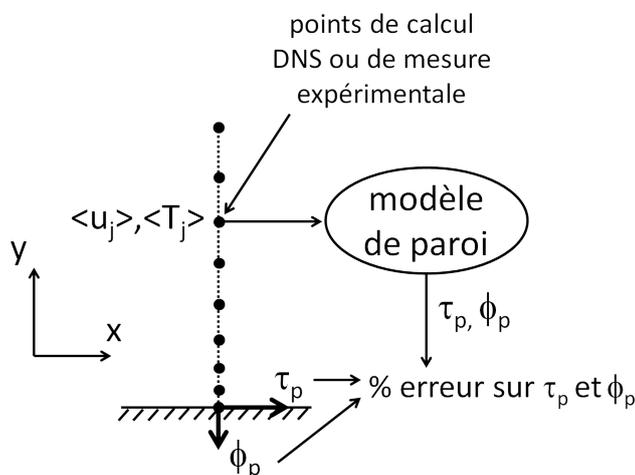


FIGURE 4.6 : Principe d'une validation hors LES : la vitesse et la température moyennes  $\langle u_j \rangle$  et  $\langle T_j \rangle$  d'un calcul DNS ou d'une expérience sont imposées comme condition limite au modèle de paroi. Les flux pariétaux DNS ou expérimentaux sont ensuite comparés aux flux pariétaux retournés par le modèle de paroi.

Le principe d'une validation hors LES à partir d'un calcul DNS ou d'une expérience est donné sur la figure 4.6. Les données DNS ou expérimentales doivent être moyennées dans le temps et éventuellement moyennées spatialement selon les directions statistiquement homogènes.

On clôt ici la partie concernant la formulation d'un modèle de paroi de type RANS pour les écoulements compressibles, pour passer au développement des structures turbulentes près de la paroi sur un maillage WMLES.

16. Le terme test a priori apparaît également dans la littérature. Cependant, test a priori est généralement associé à l'évaluation d'une modélisation de sous-maille pour la LES à partir de résultats DNS. Pour éviter toute confusion, nous préférons le terme de validation hors LES.

### 4.3.3 Développement des structures turbulentes près de la paroi sur un maillage WMLES

Pour améliorer la qualité des résultats d'une WMLES, il semble a priori naturel d'améliorer avant tout le modèle de paroi et l'on vient de donner quelques pistes pour y parvenir. Il est cependant crucial de noter que l'interaction, près de la paroi, entre les structures turbulentes et les cellules de grande dimension d'un maillage WMLES constitue une source d'erreur au moins aussi importante que celle engendrée par le modèle de paroi.

Tout comme il n'est pas suffisant de coder  $\bar{d} = \min(d, C_{DES}\Delta)$  pour implémenter une approche DES performante dans un code de calcul RANS [Georgiadis et al., 2009], il n'est pas non plus suffisant de coder l'équation 4.3 pour implémenter une approche WMLES performante. En effet, l'influence de la méthode numérique sur les structures turbulentes proches de la paroi va jouer un rôle important.

Le développement des structures turbulentes près de la paroi<sup>17</sup> est principalement contrôlé par le modèle de sous-maille et la méthode numérique de résolution des équations LES.

#### 4.3.3.1 Influence du modèle de sous-maille

Les modèles de sous-maille sont généralement valides lorsque la taille du filtre utilisée dans la LES se situe dans la zone inertielle du spectre de turbulence. C'est à cause de cette restriction que le maillage d'une LES doit être très raffiné près de la paroi.

Dans l'approche WMLES, la dimension des cellules adjacentes à la paroi est au moins un ordre de grandeur supérieure à la dimension des cellules utilisées dans une LES classique. La taille du filtre dans un calcul WMLES correspond donc à des échelles turbulentes beaucoup plus grandes que celles de la zone inertielle. En conséquence, dans l'approche WMLES, il n'y a aucune raison de supposer que  $\mu_{sgs}$  est correcte près de la paroi et une correction du modèle de sous-maille s'avère nécessaire. Les travaux de Cabot and Moin [2000] et Kalitzin and Medic [2005] ont étudié une telle correction.

Tout d'abord, sur un canal plan, Cabot and Moin [2000] corrigent la viscosité de sous maille retournée par le modèle de Smagorinsky dynamique dans les trois premières rangées de cellules au dessus de la paroi. Cette correction consiste à extrapoler linéairement dans ces trois premières rangées la constante  $C_s$  du modèle de Smagorinsky depuis les cellules situées au dessus. Cabot et Moin notent une amélioration significative du profil de vitesse et donc du frottement pariétal en utilisant cette correction.

Kalitzin and Medic [2005] proposent une autre correction en remarquant qu'en LES, le cisaillement  $\bar{\tau} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  est la somme d'un cisaillement résolu  $-\tilde{\rho} \langle \tilde{u}'\tilde{v}' \rangle$  et d'un cisaillement

---

17. Nous nous limitons à l'estimation du champ moyen et des fluctuations de vitesse et de température au dessus de la première rangée de cellules adjacentes à la paroi. Si, comme dans l'industrie nucléaire, on s'intéresse à l'estimation des fluctuations de vitesse et de température au sein des cellules adjacentes à la paroi, on pourra se référer aux travaux de Chatelain [2004] et Benarafa and Cioni [2007].

modélisé  $\mu_{sgs} \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}$  (voir l'équation 6.1). Près de la paroi, ils spécifient donc la viscosité de sous-maille en utilisant l'égalité :  $\mu_{sgs} = \mu_t + \tilde{\rho} \langle \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle / \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}$ , où  $\mu_t$  est calculée avec un modèle de turbulence à longueur de mélange. Sur des écoulements de canal plan à très grand nombre de Reynolds (jusque  $Re_\tau = 10^6$ ), ils montrent une influence majeure de cette correction sur le profil de vitesse et donc également sur le frottement pariétal.

En se basant sur le bilan de quantité de mouvement appliqué au champ LES moyen, nous proposerons et validerons une nouvelle correction applicable à n'importe quel modèle de sous-maille dans le paragraphe 5.2 IV.C.

#### 4.3.3.2 Influence de la méthode numérique

En plus du modèle de sous-maille, la méthode numérique influence le développement des structures turbulentes près de la paroi. Devant la grande taille des cellules utilisées près de la paroi dans un maillage WMLES, on peut en effet se demander comment les structures turbulentes à cet endroit sont discrétisées par la méthode numérique.

L'étude de Kawai and Larsson [2011] apporte des éléments de réponse. Ils indiquent en effet que selon la direction normale à la paroi, la taille  $l$  des structures turbulentes peut être raisonnablement supposée proportionnelle à la distance à la paroi, soit  $l = Cy$  avec  $C < 2$ . De plus, un schéma numérique de discrétisation spatial nécessite théoriquement au moins deux cellules, en pratique nettement plus, pour correctement discrétiser une structure turbulente, ce qui donne  $l_{resolu} \geq 2\Delta_y$ . Pour correctement capturer les structures turbulentes, on impose  $l > l_{resolu}$  ce qui aboutit à  $y > \Delta_y$ .

Les structures turbulentes ont donc une chance d'être correctement discrétisées à partir de la seconde rangée de cellules au dessus de la paroi. Si les conditions limites  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{T}_1$  du modèle de paroi sont extraites au premier point de calcul au dessus de la paroi, comme c'est presque systématiquement le cas dans la littérature, les structures turbulentes sont donc sous-résolues. Dans ce cas, on s'attend à ce que les conditions limites fournies au modèle de paroi soient biaisées.

Kawai et Larsson considèrent donc un point d'entrée des informations fournies au modèle de paroi situé plus loin de la paroi. Ainsi, sur un écoulement de couche limite supersonique, ils utilisent les points d'entrée  $y_j$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , où  $j$  désigne la  $j^e$  cellule au dessus de la paroi. Ils obtiennent une convergence du profil de vitesse pour  $j$  croissant, avec une tendance vers un meilleur accord par rapport aux données de référence.

Il est à noter que l'extraction des conditions limites du modèle de paroi à d'autres points que le premier au dessus de la paroi n'est pas sans conséquence. En effet, les points situés entre la paroi et  $y_j$  ne ressentent plus l'influence des flux pariétaux et rien n'empêche a priori le champ LES de diverger en ces points. Ainsi Kawai et Larsson utilisent un schéma numérique spatial décentré dans les cellules adjacentes à la paroi. Bien que l'idée de Kawai et Larsson soit intéressante, nous n'avons donc pas poursuivi dans cette voie.

Puisque les structures turbulentes près de la paroi ont tendance à être sous-résolues par la méthode numérique, il faut s'attendre à une forte dépendance des structures turbulentes vis à vis de

la méthode numérique.

L'effet de la dispersion du schéma numérique spatial ne sera pas étudié dans ce travail. Par contre, nous étudierons dans le chapitre 6 l'effet de la dissipation du schéma numérique spatial. On verra qu'avec un schéma numérique non dissipatif, on ne constatera pas d'amortissement des structures turbulentes même dans les cellules adjacentes à la paroi. Par contre, avec un schéma numérique dissipatif, on constatera un net amortissement des structures turbulentes, mis en évidence par une réduction significative du cisaillement résolu  $-\tilde{\rho} \langle \tilde{u}'\tilde{v}' \rangle$  près de la paroi.

#### 4.3.4 Synthèse sur les erreurs liées à l'approche LES avec modèle de paroi

Nous venons de décrire les principales sources d'erreur liées à l'approche WMLES. Le tableau 4.5 regroupe ces erreurs sous la forme de quatre sources principales, chacune d'entre elle pouvant induire un écart d'au moins 10% sur les flux pariétaux.

TABLE 4.5 : Principales sources d'erreur de l'approche WMLES et les corrections possibles identifiées par cette étude bibliographique.

Erreur	Causes	Corrections possibles
E_PHYS	contenu physique insuffisant du modèle de paroi	validation hors LES
E_CL	conditions limites de type LES appliquée aux équations RANS du modèle de paroi	correction dynamique, équation 4.10
E_SGS	modélisation de sous-maille dans les cellules grossières près de la paroi	correction de Kalitzin and Medic [2005]
E_NUM	méthode numérique dans les cellules grossières près de la paroi	conditions limites du modèle de paroi extraites en $y_j, j > 1$ [Kawai and Larsson, 2011],

Pour un écoulement donné, présentant des effets de compressibilité ou de gradient de pression longitudinal, on peut se demander quel modèle de paroi choisir, c'est-à-dire comment minimiser les erreurs E\_PHYS et E\_CL. De plus, il faut dans tous les cas s'intéresser aux erreurs E\_SGS et E\_NUM, qui influencent de façon aussi importante les résultats que le choix du modèle de paroi.

Le tableau 4.6 donne quelques exemples de travaux sur la WMLES qui se sont intéressés soit à l'erreur E\_PHYS avec une validation hors LES du modèle de paroi, soit à au moins une des erreurs E\_CL, E\_SGS et E\_NUM.

4.3. La Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi pour les écoulements compressibles

TABLE 4.6 : Exemples de WMLES s'intéressant à au moins une des quatre erreurs du tableau 4.5. Dans le cas de l'erreur  $E\_PHYS$ , les données de référence ayant servi à la validation hors LES sont données entre crochets.

	Modèle de paroi	Régime compressible	Validité et cas de calcul	Erreur étudiée [validation hors LES]
Cabot and Moin	TBL (conv+dpdx) TBL (conv+dpdx) dyn $\nu_t = \kappa y u_\tau [1 - \exp(-y^+/17)]^2$	I	$ p_x^+  > 0, 005$ canal $Re_\tau = 4000$ et $20000$ marche descendante	E_SGS
Wang and Moin	TBL (0), TBL (dpdx), TBL (conv+dpdx) dyn $\nu_t = \nu \kappa y^+ [1 - \exp(-y^+/19)]^2$	I	$ p_x^+  > 0, 005$ bord de fuite de profil $Re_{\delta_2} = 3380$	E_CL
Duprat et al.	$\frac{\partial U^*}{\partial y^*} = \frac{sign(\frac{\partial p}{\partial x})(1-\alpha)^{3/2} y^* + sign(\tau_p)\alpha}{1+\nu_t/\nu}$ $\frac{\mu_t}{\nu} = \kappa y^* [\alpha + y^*(1-\alpha)^{3/2}]^\beta (1 - \exp(-\frac{y^*}{1+A\alpha^3}))^2$ $U^* = \frac{U}{u_{\tau p}}, y^* = \frac{y u_{\tau p}}{\nu}$ $u_{\tau p} = \sqrt{u_\tau^2 + u_p^2}$ avec $u_p =  \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x} ^{1/3}$	I	$ p_x^+  > 0, 005$ canal à constrictions périodiques	E_PHYS [Manhart et al.]
Cabrit and Nicoud	$\frac{2}{\alpha}(\sqrt{D} - \sqrt{D - \alpha u_1^+}) = \frac{1}{\kappa} \ln(y_1^+) + B$ $T^+ = -\frac{\alpha}{B_q} u^+ + \frac{1-D}{B_q}$ $\alpha = Pr_t B_q, D = cste$	I, IV	$ p_x^+  < 0, 005$ canal $320 < Re_\tau < 21000$	E_PHYS [Cabrit and Nicoud]
Devesa and Nicoud	TBL(dpdx) avec le terme $\partial \bar{\pi} / \partial t$	I, IV	$ p_x^+  < 0, 005$ canal $Re_\tau = 200$	E_PHYS [Nicoud and Poinso]
Kawai and Larsson	TBL0 TBL(conv+dpdx) dyn $\mu_t = \kappa \rho y \sqrt{\tau_p / \rho} [1 - \exp(-y^+/17)]^2, Pr_t = 0.9$	III	$ p_x^+  < 0, 005$ couche limite sur paroi adiabatique $M = 1.69, Re_{\delta_2} = 50000$ $M = 2.28, Re_{\delta_2} = 5000$	E_PHYS, E_CL, E_NUM

## 4.4 Conclusions intermédiaires

Le tableau 4.5 conduit aux conclusions suivantes :

1. on constate tout d'abord que la majorité des études sur la WMLES concerne des simulations périodiques<sup>18</sup> avec une méthode numérique d'ordre deux faiblement dissipative, sur une géométrie simple et un maillage de qualité idéale (cellules aux angles orthogonaux, faiblement anisotropes et rapport d'expansion égal à un) ;
2. par nature, l'approche WMLES requiert des écoulements à grand nombre de Reynolds ( $Re_\tau > 2000$ ). Plus le nombre de Reynolds est grand, plus on a de latitude dans la construction du maillage et plus l'étude de la WMLES est aisée ;
3. les études portant sur d'autres erreurs que l'erreur E\_PHYS sont rares. Par ailleurs, l'étude des erreurs E\_CL, E\_SGS et E\_NUM concerne presque exclusivement les écoulements quasi-incompressibles (régimes I et II). Les corrections proposées à ces erreurs font généralement l'hypothèse d'une direction statistiquement homogène dans l'écoulement, ce qui convient à un écoulement de canal bi-périodique mais ne prouve pas leur applicabilité sur un écoulement complexe. De manière générale, peu d'études s'intéressent aux écoulements supersoniques et le travail de Kawai and Larsson [2011] peut être soulignée car c'est une étude assez complète des sources d'erreur dans une simulation spatiale d'un écoulement supersonique avec une méthode numérique d'ordre élevée. L'estimation du flux de chaleur pariétal n'est cependant pas traité puisque la paroi est considérée adiabatique ;
4. la prise en compte d'effets physiques complexes suit les axes suivant :
  - concernant la prise en compte des effets de compressibilité, les équations TBL() avec un modèle à longueur de mélange utilisant l'adimensionnement  $y_3^+$  sont appropriées. Nous étudierons ce type de modèle de paroi dans le chapitre suivant ;
  - concernant la prise en compte du gradient de pression longitudinal, deux voies sont possibles :

La première voie consiste à utiliser les équations TBL(dpx) avec un modèle de turbulence algébrique spécifique [Breuer et al., 2007; Duprat et al., 2011] ou avec un modèle de turbulence à équations de transport. Si un modèle de turbulence à équations de transport est utilisé, la spécification des conditions limites pour les variables turbulentes reste un problème ouvert.

La seconde voie consiste à utiliser les équations TBL(conv+dpx) avec un modèle de turbulence à longueur de mélange. Dans ce cas, il est obligatoire de corriger l'erreur E\_CL [Wang and Moin, 2002; Kawai and Larsson, 2011] ;
5. dans tous les cas, il est nécessaire de corriger ou d'estimer les erreurs E\_SGS et E\_NUM.

---

18. Contrairement aux simulations spatiales, les simulations périodiques recyclent l'écoulement et ne possèdent pas de condition limite d'entrée ni de sortie.

## **Deuxième partie**

### **Etude des erreurs liées à la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi sur un écoulement périodique**



---

## Etude et correction des erreurs liées à la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi sur un écoulement de canal supersonique

---

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>5.2</b>	<b>A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities, Physics of Fluids 24, 065103 (2012) . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>5.3</b>	<b>Compléments . . . . .</b>	<b>139</b>
<b>5.4</b>	<b>Conclusions intermédiaires . . . . .</b>	<b>139</b>

---

### 5.1 Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre

Nous venons de voir que peu d'études sur la WMLES ont été menées sur des écoulements compressibles à grand nombre de Mach (régime compressible III du tableau 1.1). A fortiori, à ce régime compressible, les études portant sur l'estimation du flux de chaleur pariétal et sur les sources d'erreur liées à l'approche WMLES sont encore plus rares.

Devant ce constat, nous choisissons de négliger le gradient de pression pour se concentrer tout d'abord sur le traitement des erreurs liées à la WMLES sur un écoulement de canal quasi-incompressible puis supersonique en présence d'un flux de chaleur pariétal.

En accord avec la quasi-totalité des études sur la WMLES, la discrétisation spatiale utilisée est

pour l'instant non-dissipative et correspond à la description du paragraphe 3.2.1.2 sans ajout de dissipation artificielle.

## 5.2 A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities, *Physics of Fluids* 24, 065103 (2012)

Le comportement de la WMLES est ici étudié aux régimes compressibles I à III du tableau 1.1, en utilisant comme données de référence les DNS de canal incompressible de Hoyas and Jiménez [2006] et de canal supersonique de Coleman et al. [1995]. Les DNS de Coleman et al. [1995] ont l'avantage de considérer les parois du canal comme isothermes et froides, faisant apparaître un flux de chaleur pariétal. Il sera donc possible de comparer le flux de chaleur pariétal des calculs WMLES à celui de la DNS.

Nous venons de voir dans le chapitre précédent que le traitement des sources d'erreur liées à l'approche WMLES est primordial. Selon les notations du tableau 4.5, nous traiterons les erreurs  $E_{\text{PHYS}}$ ,  $E_{\text{SGS}}$  et  $E_{\text{CL}}$ . L'erreur  $E_{\text{NUM}}$  fera l'objet du chapitre suivant.

L'erreur  $E_{\text{PHYS}}$  sera évaluée en menant une validation hors LES des modèles de paroi utilisés.

Le tracé du bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen nous sera utile pour étudier l'erreur  $E_{\text{SGS}}$ . De plus, l'origine de l'erreur  $E_{\text{CL}}$  sera expliquée. Des corrections à ces deux sources d'erreur seront ensuite proposées.

Nous nous attacherons à ce que les corrections proposées s'appuient sur un nombre limité de paramètres empiriques, puissent s'appliquer à n'importe quel modèle de sous-maille et n'utilisent pas l'hypothèse d'une direction statistiquement homogène dans l'écoulement. Ces corrections peuvent donc a priori s'appliquer sur une configuration à géométrie complexe où l'écoulement ne possède pas de direction statistiquement homogène.

Enfin nous donnerons systématiquement les erreurs sur l'estimation du frottement pariétal et du flux de chaleur pariétal par rapport à la DNS.

Ces points sont présentés sous la forme d'un article de journal, publié dans *Physics of Fluids* 24, 065103 (2012).

## A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities

S. Bocquet,<sup>1,a)</sup> P. Sagaut,<sup>2</sup> and J. Jouhaud<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*CERFACS, 42 Avenue Gaspard Coriolis 31100 Toulouse, France*

<sup>2</sup>*Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 4 place Jussieu - case 162, 75252 Paris cedex 5, France*

(Received 28 November 2011; accepted 1 May 2012; published online 26 June 2012)

Large-eddy simulation (LES) of compressible flow with wall modelling is assessed on a quasi-isothermal and supersonic plane channel. The derivation of a quasi-analytical wall model based on empirical laws appears very difficult for combined physical effects like compressibility with pressure gradient. A wall model based on the compressible thin boundary layer equations constitutes a more general approach toward the simulation of multiphysical wall bounded flows with LES. In this work, such a wall model is derived and solved thanks to a new meshless method. An adequate scaling of the wall distance is introduced in the Van-Driest damping function of the wall model to handle compressibility effects. The choice of the proper wall distance scaling is shown to be crucial as soon as compressibility effects become significant. Additionally, some sources of error inherent to this wall-modelling approach are treated by appropriate corrections, and show non-negligible impact on the results. On a quasi-isothermal plane channel flow, the mean wall fluxes, primitive variable profiles and velocity fluctuations compare well to Direct Numerical Simulation (DNS) and empirical correlations for a wide range of Reynolds number. Then the DNS of supersonic isothermal-wall plane channel of Coleman at Mach = 1.5 and Mach = 3 are used as a more discriminant test case. The results agree well with the DNS data in terms of mean wall friction and wall heat flux. Finally, a specific analysis of the wall model accuracy is performed outside of the LES solver. This analysis allows to discriminate the error due to the wall model itself from the error due to the interaction between the wall model and the LES solver. © 2012 American Institute of Physics. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4729614>]

### I. INTRODUCTION

Due to its computational cost, the industrial use of large-eddy simulation (LES) for high Reynolds number wall-bounded flows is still far from being practical on a daily basis. The total cost to solve a boundary layer flow, including the integration in time during one integral timescale, scales like  $Re_x^{1.8}$  for the inner layer, and like  $Re_x^{0.4}$  for the outer layer.<sup>1</sup> Consequently, for  $Re_x$  of the order of  $10^6$ , 99% of the grid points are localized into the inner layer of the boundary layer.<sup>1</sup>

The LES with wall model (WMLES) approach is part of the hybrid Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)-LES methods, which include detached-eddy simulation (DES).<sup>2,3</sup> In the following we collect on Fig. 1 the friction coefficient obtained by various authors and various hybrid RANS-LES methods as a function of  $Re_\tau$  for the incompressible channel flow test case.  $Re_\tau = \rho_w u_\tau \delta / \mu_w$  is the friction Reynolds number based on the friction velocity  $u_\tau$ , the wall density  $\rho_w$ , the wall viscosity  $\mu_w$  computed from the wall temperature and the channel half height  $\delta$ . The friction coefficient  $Cf_{CL} = 2/u_{CL}^+$  is considered here, since it is defined from the non-dimensional centerline velocity  $u_{CL}^+$ , which can be easily obtained from a  $u^+ = f(y^+)$  plot. The DNS of Hoyas<sup>4</sup> as well as the empirical

<sup>a)</sup>Electronic mail: [bocquet@cerfacs.fr](mailto:bocquet@cerfacs.fr).

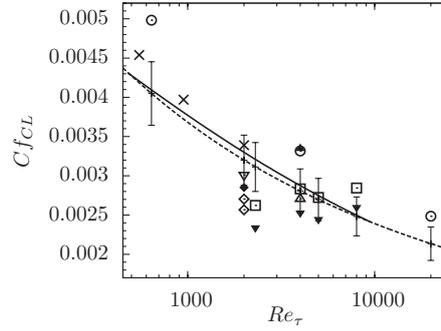


FIG. 1. Friction coefficient based on centerline velocity for various hybrid RANS-LES approaches: (—) Karman-Nikuradse correlation, (- -) Pethukov correlation, error bars represent  $\pm 10\%$  error from Pethukov correlation, (x) Hoyas DNS at  $Re_\tau = 550$ ,  $Re_\tau = 950$ , and  $Re_\tau = 2000$ , ( $\blacktriangledown$ ) Keating standard DES, ( $\square$ ) Keating DES with stochastic forcing, ( $\triangle$ ) Keating reference LES, ( $\nabla$ ) Tessicini logarithmic law, ( $\diamond$ ) Tessicini segregated models (from top to bottom: 2-equation model, 1-equation model), ( $\blacklozenge$ ) Tessicini reference LES, ( $\blacktriangle$ ) Nicoud suboptimal procedure, ( $\circ$ ) Nicoud linear stochastic estimation.

correlations of Karman-Nikuradse:  $Cf_b = 0.046Re_{b,Dh}^{-0.2}$  and Pethukov:<sup>5</sup>  $Cf_b = 2(2.236 \ln(Re_{b,Dh}) - 4.639)^{-2}$  are used as reference data.  $Re_{b,Dh} = \rho_b u_b Dh / \mu_b$  is the Reynolds number based on the bulk velocity  $u_b = (1/y) \int_0^y u(\xi) d\xi$ , the bulk density, the bulk viscosity  $\mu_b$  computed from the bulk temperature and the hydraulic diameter  $Dh = 4(\text{cross section area})/(\text{wetted perimeter})$ . If  $l$  denotes the channel width, then the cross section area is  $2\delta l$  and the wetted perimeter is  $2l$ , which gives  $Dh = 4\delta$ . Note that the empirical correlations do not give  $Cf_{CL}$  but the friction coefficient based on the bulk velocity  $Cf_b = 2/u_b^{+2}$ , with  $u_b^+ = u_b/u_\tau$ . The corresponding  $Cf_{CL}$  is computed from  $Cf_{CL} = Cf_b u_{b,Reichard}^+ / u_{CL,Reichard}^+$ , where  $u_{Reichard}^+$  denotes the Reichard empirical profile (Eq. (19)). Table I summarizes the various hybrid RANS-LES approaches considered, as well as the corresponding friction Reynolds numbers  $Re_\tau$ . Keating<sup>6</sup> uses two variants of the DES approach with the Spalart-Allmaras turbulence model. First, the standard DES approach and second, the standard DES with the introduction of a stochastic forcing term in the right hand side of the momentum equation. The forcing term is computed dynamically and linearly depends on the difference between the modelled stress  $\langle v_i \rangle \partial U / \partial y$  and the resolved stress  $-\langle u'v' \rangle$ . Nicoud<sup>7</sup> evaluates the WMLES approach from an original point of view. His idea is that due to the coarse wall-adjacent cells used in the WMLES approach, large errors are expected from the subgrid model and the resolved stress  $-\langle u'v' \rangle$ . Thus, the wall shear stress  $\tau_w$  prescribed by the wall model should take into account these errors. Nicoud proposes to evaluate the best  $\tau_{w,opt}$  which minimizes the difference between the mean LES velocity profile and the logarithmic law, considered as the target profile. In the suboptimal procedure,  $\tau_{w,opt}$  is computed by minimizing this difference thanks to the computation of an adjoint gradient. In order to reduce the computational cost of the suboptimal method, a second

TABLE I. Description of the hybrid RANS-LES methods applied to incompressible plane channel flow.

	Keating	Nicoud	Tessicini
$Re_\tau$	2300 5000 8000	640 4000 20 000	2000
WMLES		Suboptimal procedure, Linear stochastic estimation	Log law
DES	Standard with stochastic forcing	...	...
Zonal method	...	...	1-equation model 2-equation model

method referred to as linear stochastic estimation computes  $\tau_{wLinSE} = \mathbf{L}_{ij}\mathbf{E}_j$ , where  $\mathbf{L}_{ij}$  is a matrix of correlation coefficients and  $\mathbf{E}_j$  a vector of events, which is a set of velocities at the first off-wall point here. From this set of events, the best  $\mathbf{L}_{ij}$  can be found which minimizes the error between  $\tau_{wLinSE}$  and  $\tau_{wopt}$ . Thus, the linear stochastic estimation is expected to be a good approximation of the suboptimal procedure for a moderate computational cost. It can be noted that, based on the work of Nicoud, Templeton<sup>8</sup> derived a predictive and less computationally expensive control technique using a RANS model to prescribe the target velocity profile. Tessicini<sup>9</sup> uses two different hybrid RANS-LES strategies. First, the WMLES approach, solving both the logarithmic law and the incompressible thin boundary layer (TBL) equations as a wall model. Second, a different strategy that we call zonal models is evaluated, which consists in splitting the computational domain in two distinct zones and using different modelisations in each zone.<sup>10,11</sup> Here, the first zone is a layer close to the wall where RANS equations are solved and the second is the rest of the domain, where the LES equations apply. In the RANS zone, a 1-equation ( $k-l$ ) and a 2-equation ( $k-\epsilon$ ) turbulence model are tested. The zonal approach is in essence different from the WMLES approach. Indeed, the zonal strategy involves a two-way (LES  $\leftrightarrow$  RANS) exchange of data at a single location in space, which is the RANS-LES interface. This has to be opposed to the WMLES strategy, which also implies a two-way exchange of data but in separate space locations: a one-way (LES  $\rightarrow$  wall model) exchange at the interface and a one-way (wall model  $\rightarrow$  LES) exchange at the wall.

The WMLES approach, also called wall-stress boundary condition or approximate boundary condition is one technique that attempts to drastically reduce the computational cost of high Reynolds number wall-bounded flows. A coarse mesh is used close to the wall so that the inner layer of the boundary layer is deliberately not captured. In the coarse cells adjacent to the wall, the wall fluxes need to be approximated by an additional wall model. At each time step, the wall model computes the wall fluxes from LES variables extracted at a computational point close to the wall, generally the first off-wall point. The wall model should contain the flow physics present in the inner layer and can be either a quasi-analytical (QA) model composed of wall laws or a numerical model like the TBL model described in Balaras.<sup>12</sup> At each time step and wall-adjacent cell, numerical models involve the integration of a set of equations whereas quasi-analytical models only require the inversion of a set of analytical laws by means of Newton method, for example. Despite the higher computational cost of the TBL model, it has the advantage of solving the thin boundary layer equations without approximation, so that different turbulence models for the turbulent viscosity  $\mu_t$  can be prescribed in the TBL equations. As a result, all the work done on near-wall RANS turbulence models can be used to find a proper model for  $\mu_t$ . In most of the TBL models for LES wall modelling, an algebraic turbulence model is chosen.<sup>12-14</sup> Kays<sup>15</sup> proposes various algebraic mixing-length based turbulence models for complex physical effects, like the effect of pressure gradient on wall heat transfer. Attempts to introduce a transport equation turbulence model like the one-equation Spalart-Allmaras model can be found in Ref. 16. Thus, the TBL model intrinsically has the potential of handling multiphysical effects near the wall. Contrary to quasi-analytical models which directly relate wall to logarithmic layer values, the TBL model integrates equations from the wall to the logarithmic layer, thus taking into account the intermediate buffer layer. As a result, accurate modelling of the whole inner layer of the boundary layer, including the buffer layer, is required.

Even if the relation applied to compute the wall fluxes from LES variables taken above the wall, e.g., a TBL model, was perfect, other sources of error inherent to the WMLES approach exist. The subgrid-scale model, numerical error, and resolved Reynolds stresses in the coarse wall-adjacent cells also constitute non-negligible sources of error.<sup>17-19</sup> Connecting a RANS wall model to fluctuating LES quantities also constitutes an additional discrepancy discussed in Refs. 13 and 19.

All the hybrid RANS-LES methods appearing in Table I have been tested for the incompressible flow regime. Some authors applied these hybrid RANS-LES methods to compressible flows. The DES has been applied to compressible flows on various complex three-dimensional industrial applications.<sup>20-25</sup> In Garnier<sup>26</sup> and Sagaut,<sup>27</sup> theoretical basis for LES wall modelling of compressible flows are presented and the assessment of a compressible TBL wall model in terms of wall fluxes is recommended. In the context of compressible flows, the WMLES approach has been applied to wall fluxes prediction on plane channel flow<sup>14,28</sup> and internal combustion engines.<sup>29</sup> Kawai and Larsson<sup>19,30</sup> also use the WMLES approach on a supersonic flat plate boundary layer with a

wall model based on the compressible TBL equations without pressure gradient. If compressible wall modelling has shown some success on complex industrial applications, specific studies on the assessment of such methods in terms of mean wall fluxes  $C_f$  and  $Nu$  are scarce, even on academic cases like the plane channel flow. A wide range of Reynolds number, Mach number, and temperature ratio between the hot and cold temperature should be explored for a solid validation database. Despite the existence of empirical correlations for  $C_f$  and  $Nu$ , the lack of complete reference data in terms of mean profiles and mean wall fluxes, even for academic configurations, is one reason that may explain the difficulty to validate compressible wall modelling approaches. To our knowledge, no DNS data of compressible plane channel flow with isothermal walls at Reynolds number higher than  $Re_\tau = 1020$  exist.

The objectives of this work are:

- to select a proper algebraic turbulence model for a TBL model suited for compressible flows;
- to identify the sources of error inherent to the WMLES approach and propose and evaluate corrections for three of them;
- to use a specific wall model analysis in order to isolate some of these errors and gain insight in the WMLES behaviour;
- to assess the capability of the WMLES approach to predict accurate mean wall fluxes for different Reynolds and Mach numbers.

In Sec. II, the interaction of the WMLES approach with the flow solver is described. Then the two wall models tested are presented. In Sec. III, the various sources of error specific to the WMLES approach are discussed. In Sec. IV, WMLES results on a slightly anisothermal bi-periodic plane channel flow are compared to DNS and empirical correlations in terms of mean velocity, temperature, wall fluxes, and one-point velocity correlations. Corrections to some of the identified sources of error are presented and evaluated. Finally, Sec. V presents WMLES results on a supersonic channel flow for which DNS data are available. A specific wall model analysis is used to evaluate the physical content of the TBL model. The physical error is then separated from the other sources of error and their respective contribution are discussed.

## II. DESCRIPTION OF THE WMLES APPROACH

In the WMLES approach, one can distinguish between the wall model itself and the wall model interaction with the flow solver. On the one hand, the wall model itself can be seen as a relationship between pressure, velocity, and temperature at a computational point above the wall and the wall fluxes, namely, the wall friction  $\tau_w$  and the wall heat flux  $\phi_w$ . On the other hand, the wall model interaction with the flow solver involves the way data are exchanged between the wall model and the LES flow solver as well as specific problems due to the very coarse cells used above the wall.

### A. Interaction of the WMLES approach with the flow solver

The WMLES approach is presently implemented in the elsA software,<sup>31</sup> which is a compressible cell-centered code based on the finite-volume method. The compressible LES equations based on Favre averaging and implicit mesh filtering are solved and the fluid is considered as a perfect gas. The Sutherland law is used to model the variation of viscosity with respect to temperature,

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{1.5} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \text{ with } S = 110.4 \text{ K.} \quad (1)$$

In the following, the tilde symbol  $\tilde{x}$  denotes LES variables and the overline symbol  $\bar{x}$  is used for RANS variables.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  and  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , respectively, refer to streamwise, wall-normal, and spanwise directions. At this point the type of input variable given to the wall model has to be chosen. Rajagopalan<sup>32</sup> and Marusic<sup>33</sup> measured significant correlation between the instantaneous streamwise wall friction and the instantaneous streamwise velocity taken at some distance above. These authors suggest the existence of large scale inclined structures so that the correlation is larger if the point

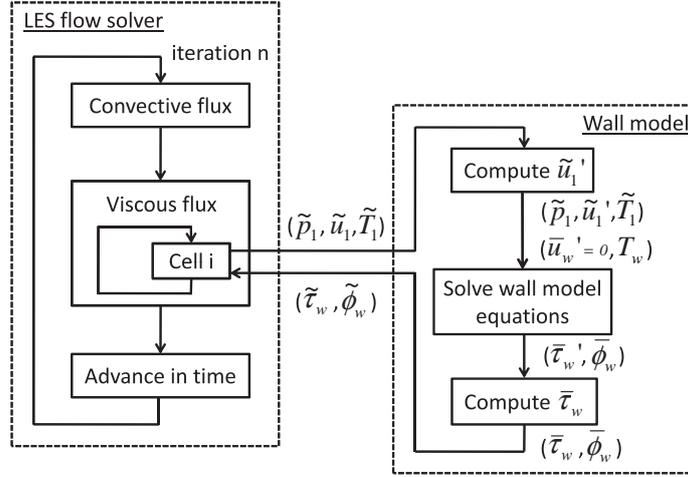


FIG. 2. Wall model input-output and its interaction with the flow solver for an isothermal wall.

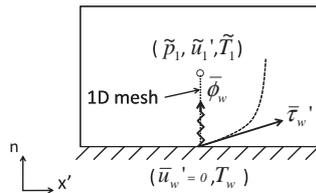
where the streamwise velocity is taken slightly displaced in the streamwise direction. Based on these results, the instantaneous wall-parallel velocity in the wall friction local frame is chosen as input to the wall model. The way data are exchanged between the flow solver and the wall model is now described in details. At each time step of the simulation, the wall model is solved for each wall-adjacent cell during the viscous flux computation as shown in Fig. 2. The flow solver prescribes the LES variables  $(\tilde{p}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{T}_1)$  to the wall model, where the subscript  $_1$  stands for the first off-wall cell center. The distance between the wall and the first off-wall cell center is noted  $\delta_1$ . Before solving the wall model equations, an intermediate operation is necessary. Indeed, the wall models used here are partly based on a one-dimensional momentum balance along the flow direction. Thus, a change of frame of reference is necessary to switch from the flow solver frame  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  to a local frame in which the wall model is solved. This frame is chosen aligned with the flow direction  $(\mathbf{x}', \mathbf{n})$ .  $\mathbf{n}$  is the wall-normal vector and  $\mathbf{x}'$  is constructed as orthogonal to  $\mathbf{n}$  and aligned with the flow direction. As the LES velocity vector  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  at the first cell center represents the flow direction,  $\mathbf{x}'$  can be defined from  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  as follows:

$$\mathbf{x}' = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_1 - (\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{\|\tilde{\mathbf{u}}_1 - (\tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|}. \quad (2)$$

The wall-normal velocity component is subtracted to enforce the orthogonality of  $\mathbf{x}'$  with the wall-normal direction. Then the wall model input velocity  $\tilde{u}'_1$  is the LES velocity  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  projected on  $\mathbf{x}'$ , which gives

$$\tilde{u}'_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{x}'. \quad (3)$$

Once the wall model input velocity  $\tilde{u}'_1$  is computed, the wall model equations can be solved. The location of the wall model input and output is given in Fig. 3. The set of boundary conditions

FIG. 3. Wall-adjacent cell in the wall model frame  $(\mathbf{x}', \mathbf{n})$ : wall model input and output data are, respectively, located at the first off-wall cell center and at the center of the corresponding wall interface.

$(\bar{p}_1 = \tilde{p}_1, \bar{u}_1 = \tilde{u}_1, \bar{T}_1 = \tilde{T}_1)$  is prescribed at the first off-wall cell center. For an isothermal wall, the wall temperature  $T_w$  is given and the boundary conditions ( $\overline{u'_w} = 0, \overline{T_w} = T_w$ ) are imposed at the wall.

Once the wall model equations are solved, the wall model output  $(\overline{\tau'_w}, \overline{\phi_w})$  is available. A second change of frame of reference is needed to switch from the wall model friction  $\overline{\tau'_w}$  to the wall friction vector  $\overline{\tau_w}$ . A hypothesis on the wall friction vector direction must be done at this point, and we suppose that the friction vector is aligned with the velocity at the first off-wall point  $\tilde{\mathbf{u}}_1$ , as supported by the results of Rajagopalan<sup>32</sup> and Marusic.<sup>33</sup> Consequently, the friction vector is expressed as

$$\overline{\tau_w} = \overline{\tau'_w} \mathbf{x}'. \quad (4)$$

Finally, the wall model friction vector and heat flux are prescribed as boundary conditions to the flow solver during the viscous flux computation:  $(\overline{\tau_w} = \overline{\tau_w}, \overline{\phi_w} = \overline{\phi_w})$ .

## B. Compressible wall model based on TBL equations

The TBL wall model is now described. It is based on the RANS compressible TBL equations

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (7)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial C_p \bar{T}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial C_p \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial C_p \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + (\bar{\mu} + \mu_t) \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]^2. \quad (8)$$

For the channel flow case, the derivative of mean quantities with respect to the streamwise direction  $\mathbf{x}$ , the mean wall-normal velocity  $\bar{v}$  and the convective term cancel out. Considering that the channel flow statistics are steady, we also cancel out the mean temporal derivative and we obtain the set of simplified TBL equations

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ -(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u} (\bar{\mu} + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = 0. \quad (11)$$

These equations are associated with the boundary conditions given in Sec. II A. The molecular thermal conductivity is  $\bar{\lambda} = -\frac{C_p \bar{\mu}}{Pr}$ . The turbulent viscosity  $\mu_t$  is based on the Prandtl mixing length model given by

$$\mu_t(y) = \bar{\rho} (\kappa y (VD)_{26})^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y). \quad (12)$$

The constant  $\kappa$  is set to  $\kappa = 0.41$ , even if the value of  $\kappa$  is shown to be case and Reynolds dependent with values ranging from 0.37 to 0.41 for plane channel, pipe and flat plate boundary layer.<sup>34</sup> The turbulent thermal conductivity is modelled by<sup>35</sup>

$$\lambda_t(y) = -\bar{\rho} C_p (\kappa y)^2 (VD)_{26} (VD)_{35} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y), \quad (13)$$

which takes into account the variation of the turbulent Prandtl number with wall distance. In Eq. (12),  $(VD)_{A^+}$  refers to the Van Driest damping function.<sup>36</sup> For an incompressible flow, we could choose  $(VD)_{A^+} = 1 - \exp(-\frac{y^+}{A^+})$ , with  $y^+ = \bar{\rho}_w y u_\tau / \bar{\mu}_w$ . However, for a compressible flow with non-negligible variations of mean quantities, the choice of  $\bar{\rho}_w$ ,  $\bar{\mu}_w$ , and  $u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w / \bar{\rho}_w}$  as the proper scaling can be discussed. The  $y_3^+$  scaling<sup>37</sup>

$$y_3^+ = \frac{\bar{\rho} \sqrt{\bar{\tau}_w / \bar{\rho}}}{\bar{\mu}} = \frac{y u_\tau \sqrt{\bar{\rho}_w \bar{\rho}}}{\bar{\mu}} \quad (14)$$

gives a prediction quality of the wall fluxes independent of the type of wall boundary condition on supersonic boundary layers over adiabatic and isothermal cold walls. In this case, the variables used to scale the wall distance are the local density  $\bar{\rho}$ , local viscosity  $\bar{\mu}$ , and the friction velocity  $\sqrt{\bar{\tau}_w / \bar{\rho}}$ . As a result, we choose here the following Van-Driest damping:

$$VD(y^+) = 1 - \exp\left(-\frac{y_3^+}{26}\right). \quad (15)$$

Note that this formulation does not take into account the wake region. Thus, this model is only valid up to the end of the logarithmic layer and the wall distance of the RANS-LES interface is constrained to  $\delta_1 < \delta/10$ .<sup>38</sup> This in turn imposes the constraint  $N_y > 5$  on the minimum number of cells in the wall-normal direction. Five cells is a rather small number of cells to properly discretize the boundary layer and a larger number of cells is chosen in practice. Thus, the extension of the TBL model validity up to the end of the wake region is not crucial but could be feasible by the introduction of a wake function.<sup>39</sup> A brief description of the method used to solve the TBL model is given in the following. A more complete explanation is given in Sec. A 3 of the Appendix.

The constant pressure along the wall-normal direction (Eq. (9)) and Sutherland law, respectively, give the density  $\bar{\rho}_w$  and the viscosity  $\bar{\mu}_w$  for an isothermal wall. The density and viscosity profiles  $\bar{\rho}(y)$  and  $\bar{\mu}(y)$  between the wall and the cell center are also needed to solve the TBL model. The density profile is computed from the TBL model temperature profile  $\bar{T}(y)$  using the perfect gas equation and Eq. (9):  $\bar{\rho}(y) = \frac{\bar{p}_1}{r \bar{T}(y)}$ . The viscosity profile is given by Sutherland law. At this point Eqs. (10) and (11) can be solved using the method described in Sec. A 3 of the Appendix. Here, a meshless numerical method based on the extension of the work of Monfort<sup>40</sup> to the compressible case is introduced. The equations are numerically integrated by Gauss quadrature along the one-dimensional mesh shown in Fig. 3. The main advantage is that the location of the discretization points does not have to be chosen since it is given by the Gauss quadrature method. As a result, the number of discretization points is the sole numerical parameter to be adjusted. It should be noted that we restrict our analysis to one-dimensional wall models, only considering local LES quantities as input. In this framework, additional physical effects such as convective terms or time derivative terms could be taken into account as source terms to the right hand side of the TBL equations. However, for these statically steady channel flow simulations, the average value of these terms cancel out.

In the TBL model, compressibility effects are naturally taken into account by coupling the momentum and energy equations during the solving procedure. The coupling of these two-equation system arises from the viscosity profile  $\bar{\mu}(y)$ , the density profile  $\bar{\rho}(y)$ , and the viscous heating term  $\bar{u}(y)(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y + \bar{\tau}_w)$ . Since compressible flows are aimed, the magnitude of compressibility effects and of the viscous heating term need to be assessed in order to evaluate the thermal regime at which a computation is performed. This is done by introducing the following non-dimensional variables in Eq. (11):

$$\begin{cases} u^* = & u/u_{bref}, \\ y^* = & y/\delta, \\ \Theta^* = & (T - T_{bref})/|T_{bref} - T_w|. \end{cases} \quad (16)$$

This leads to the following non-dimensional energy equation (written for the steady laminar case, for the sake of simplicity):

$$\frac{\partial}{\partial y^*} [Pr^{-1} \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} + Ec u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}] = 0. \quad (17)$$

TABLE II. Flow regime for the quasi-incompressible channel flows:  $M_{ref} = 0.2$ ,  $T_{bref} = 293$  K,  $T_{bref}/|T_{bref} - T_w| = 11$ , the thermal regime is regime I.

$Re_\tau$	1020	2000	20 000
$Re_b = \frac{\rho_{bref} u_{bref} h}{\mu_{bref}}$	20 720	43 530	$4.9020 \times 10^5$
$\Delta_p$	$-1.028 \times 10^{-3}$	$-5.24 \times 10^{-4}$	$-5.91 \times 10^{-5}$

Three thermal regimes can be distinguished depending on the Eckert number  $Ec = u_{bref}^2 / (C_p |T_{bref} - T_w|)$ , which can also be expressed in terms of a reference Mach number  $M_{ref}$ :  $Ec = (\gamma - 1) M_{ref}^2 \frac{T_{bref}}{|T_{bref} - T_w|}$

- Regime I :  $Ec \ll Pr^{-1}$ ,  $Ec \ll 1$ , and  $\frac{T_{bref}}{|T_{bref} - T_w|} \gg 1$ . In this case, the viscous heating and the variation of density and viscosity are negligible and Eq. (11) is a pure diffusion equation. This situation may occur at very low Mach number;
- Regime II :  $Ec \approx Pr^{-1}$ ,  $Ec \approx 1$ , and  $\frac{T_{bref}}{|T_{bref} - T_w|} \gg 1$ . The viscous heating takes significant values but the variation of density and viscosity are still negligible. Thus, the coupling is a one way dynamical  $\rightarrow$  thermal coupling through the viscous heating term;
- Regime III :  $Ec > Pr^{-1}$ ,  $Ec > 1$ , and  $\frac{T_{bref}}{|T_{bref} - T_w|} \approx 1$ . Here, neither the viscous heating nor the variation of density and viscosity are negligible. The coupling is a two way dynamical  $\leftrightarrow$  thermal coupling.

The channel flow computations described in Sec. IV and Sec. V are performed at these three thermal regimes, as indicated in Tables II and VI.

In the following, for all the channel flow computations, we set the streamwise pressure gradient term  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$  to zero in the TBL model. Indeed, the pressure gradient is introduced via a source term in the momentum equation (see Sec. IV B) to compensate the wall friction. As a result, it is this mean pressure gradient which should be prescribed to the TBL equations. The value of this pressure gradient is not expected to affect the momentum balance. Indeed, according to Ref. 41 the logarithmic law is not affected by negative pressure gradients if the accelerating parameter  $\Delta_p$  remains below 0.005 in absolute value. The accelerating parameter based on wall values, that is,  $\Delta_p = \bar{\mu}_w \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} / (\bar{\rho}_w u_\tau^3)$ , is given in Tables II and VI.  $\Delta_p$  remains below 0.005 in absolute value for all the flow regimes studied, except for the Mach = 1.5 DNS of Coleman,<sup>42</sup> for which  $\Delta_p = -5.244 \times 10^{-3}$ . Even if the pressure gradient term is not expected to affect the momentum balance, its effect on the energy balance would need to be investigated. Nonetheless, the hypothesis of a zero streamwise pressure gradient in the TBL model is confirmed by the very acceptable errors obtained on the wall fluxes (Figs. 16–19), which are the most critical cases in terms of  $\Delta_p$ . It can be noted that the LES equations do take the streamwise pressure gradient term into account. Thus, the effect of pressure gradient in the wall model is expected to be less and less significant as the RANS-LES interface located at  $\delta_1$  gets closer to the wall.

### C. The quasi-analytical wall model

In order to better assess the TBL model predictivity on compressible flows, a simple QA wall model is built for comparison. This model is based on the assumption of negligible variation of mean fluid properties and is valid up to the end of the logarithmic layer. Thus, the location of the RANS-LES interface is constrained to  $\delta_1 < \delta/10$ . It is based on the hypothesis of a constant pressure along the wall-normal direction (Eq. (18)), the Reichard law (Eq. (19)), and the Kader law (Eq. (20)),<sup>43</sup>

$$\frac{\partial \bar{p}(y)}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\tilde{u}'_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa \delta_1^+) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa))(1 - \exp(-\delta_1^+/11)) - \frac{\delta_1^+}{11} \exp(-0.33 \delta_1^+), \quad (19)$$

$$\begin{cases} T_1^+ = Pr y_1^+ \exp(-\Gamma) + [2.12 \ln(1 + y_1^+) + \beta(Pr)] \exp(-1/\Gamma), \\ \Gamma = \frac{10^{-2}(Pr y_1^+)^4}{1 + 5Pr^3 y_1^+} \text{ and } \beta(Pr) = [(3.85 Pr^{(1/3)} - 1.3)^2 + 2.12 \ln(Pr)], \end{cases} \quad (20)$$

$$T_1^+ = \frac{-(\tilde{T}_1 - \overline{T}_w) \overline{\rho}_w C_p \sqrt{\overline{\tau}_w / \overline{\rho}_w}}{\overline{\phi}_w}. \quad (21)$$

$u_\tau = \sqrt{\overline{\tau}_w / \overline{\rho}_w}$  is the friction velocity and  $\delta_1^+ = \delta_1 \overline{\rho}_w u_\tau / \overline{\mu}_w$ . Equation (19) is based on Reichard's law, and consists in blending the linear law  $u^+ = y^+$  with the logarithmic law  $u^+ = (1/\kappa) \ln(y^+) + B$ . Consistently with the TBL model, we choose  $\kappa = 0.41$ . The logarithmic law constant is set to  $B = 5.25$ . The method used to solve the QA model equations is now given for an isothermal wall at temperature  $T_w$ . First, Eq. (18) is integrated along the wall-normal direction, which leads to  $\overline{p}(y) = \tilde{p}_1$ . This relationship on the pressure is then combined with the perfect gas equation  $\overline{p}(y) = \overline{\rho}(y) r \overline{T}(y)$ , which yields the density at the wall:  $\overline{\rho}_w = \frac{\tilde{p}_1}{r T_w}$ . The molecular viscosity at the wall  $\overline{\mu}_w$  is then computed from Sutherland law and  $T_w$ . Once the wall density is obtained, the wall friction  $\overline{\tau}_w$  is computed by inverting Eq. (19) using Newton algorithm. Finally, the wall heat flux  $\overline{\phi}_w$  is explicitly available and computed from the definition of the non-dimensional temperature in wall unit  $T_1^+$  (Eq. (21)) and Eq. (20).

### III. ERRORS INTRODUCED BY THE WMLES APPROACH

When dealing with WMLES, several sources of error are likely to appear in the first coarse cell layer adjacent to the wall, in which the wall model is typically applied:

- Errors due to the physical content of the wall model. The physical content of the wall model may not be adapted to the physical phenomena that take place in the inner layer of the boundary layer. This error will be illustrated in Sec. V B by conducting specific assessment of the TBL and QA models compared to DNS data;
- Numerical error. The velocity and temperature profiles that are physically present in the wall-adjacent coarse cells contain the viscously affected sublayer, the buffer layer, and part of the logarithmic layer. As a result, with the WMLES approach, complex variable profiles are discretized by a single cell adjacent to the wall. When using a finite-volume solver, this situation can exhibit incoherencies in some terms that are reconstructed by the numerical method. For example, the Wall-Adapting Local Eddy-viscosity (WALE) (Ref. 44) or the Smagorinsky subgrid models involve the reconstruction of velocity gradient at cell centers. Considering a logarithmic velocity profile and a cell center located inside the logarithmic layer ( $y^+ > 50$ ), the finite-volume method computes the gradient at cell center as the cell-averaged gradient

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y_1^+)_{FV} = \frac{u_{int}^+}{y_{int}^+} = \frac{\frac{1}{0.41} \ln(y_{int}^+) + 5.25}{y_{int}^+}. \quad (22)$$

In Eq. (22), the subscript  $_{int}$  stands for the top interface of the wall-adjacent cell. Now we compare this value to the actual slope of the velocity profile at the first off-wall cell center,

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y_1^+)_{loc} = \frac{1}{0.41 y_1^+}. \quad (23)$$

For  $y_1^+ = 50$  and  $y_{int}^+ = 100$ , then  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y_1^+)_{FV} = 0.165$  and  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y_1^+)_{loc} = 0.0488$ . In other words, the cell averaged gradient is more than three times larger than the pointwise slope of the velocity profile.<sup>45</sup> These two definitions usually coincide because the mesh is sufficiently refined so that variable profiles can be approximated as linear profiles in each cell. In the case of WMLES, this approximation does not hold in the wall-adjacent cells. If no modification is added to the flow solver, the cell-averaged gradient is used to compute the subgrid-scale viscosity. As a result, the question of which gradient definition, the cell-averaged one or the

pointwise one, is the physically meaningful information that should enter the subgrid-scale model is of concern;

- Subgrid-scale modelling error. Using the dynamic Smagorinsky model, Cabot<sup>18</sup> pointed out that the subgrid-scale model may return inaccurate subgrid-scale viscosity near the wall. He showed that correcting the subgrid-scale model near the wall could significantly alter the velocity profile. Subgrid-scale models are generally derived under the assumption that the cell size corresponds to a frequency cutoff located well within the Kolmogorov inertial range. In this case, the eddies that are not captured by the mesh can be considered as isotropic and a general model can be built to take their effect into account. In the inner layer of the boundary layer, three types of energy-carrying structures are present. The streaks, of length  $O(10^3) < l_x^+ < O(10^4)$  and width  $l_z^+ = O(10^2)$  and the large and very large structures,<sup>46,47</sup> whose size scales with the boundary layer thickness ( $\delta$ ). In the WMLES approach, the size of the wall-adjacent cells is typically larger than  $\Delta_x^+ = \Delta_y^+ = \Delta_z^+ = O(10^2)$ . Thus, the wall-adjacent cell size is similar to the size of the smallest energy-carrying structures, so that these structures are not properly resolved by the LES. As a result, it is the subgrid-scale model which should model their behaviour in terms of production, transport, and dissipation of energy. Consequently, there is *a priori* no reason why common subgrid-scale models, which only handle the energy cascade and dissipation assuming isotropic turbulence, should predict correct values of subgrid-scale viscosity in the coarse wall-adjacent cell layer;
- Error on the resolved turbulence term. Starting from the streamwise LES momentum equation, one can derive the mean momentum balance for channel flow as described in Sec. 4 of the Appendix

$$(\langle \tilde{\mu} \rangle + \langle \mu_{sgs} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle = \langle \tilde{\tau}_w \rangle - \langle S_x \rangle y, \quad (24)$$

where  $\langle \cdot \rangle$  refers to a statistical averaging operator and  $\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$  is the resolved turbulence term, which represents the amount of shear due to the interaction between the eddies captured by the grid. In a conventional LES boundary layer mesh, the largest eddies are captured down to the viscously affected sublayer where the eddies are dissipated by the effect of molecular viscosity. In a WMLES mesh, the wall-adjacent cells deliberately extend up to the logarithmic layer. As a result, the eddies of size smaller than  $l^+ = O(10^2)$  are not captured.<sup>19</sup> Consequently, the value of the resolved turbulence term in the wall-adjacent cells is *a priori* not accurate and can corrupt the momentum balance at the first off-wall point, leading to erroneous wall friction and wall heat flux;

- RANS-LES matching error. Most of the wall models for LES simulations involve RANS equations that link LES variables at the first off-wall point to the wall fluxes. For example, the TBL wall model solves a set of simplified RANS equations together with a mixing-length algebraic turbulence model, and the boundary conditions are directly prescribed by the LES at the first off-wall computational point. At this matching point, the LES and TBL variables are equal, which leads to an unusual situation for the RANS TBL equations, on which unsteady boundary conditions of turbulent nature are imposed. One consequence is the appearance of a bias in the wall model RANS equations due to this RANS-LES matching. Indeed, if the RANS equations linking the LES input variables and the wall fluxes are not linear in time, then the RANS equations do not apply to the statistically averaged WMLES field but only to the instantaneous WMLES field. The fact that the RANS equations of the wall model do not apply to the mean WMLES field raises several problems. First, one does not know which relationship the wall model effectively imposes on the mean WMLES field. The bias between the wall model equations and the relationship which effectively applies to the mean WMLES field depends on the LES unsteady boundary conditions  $\tilde{u}'_1(t)$  and  $\tilde{T}'_1(t)$ . Thus, it is mesh dependent, numerical method dependent, and flow regime dependent, rendering it very difficult to predict. Qualitatively, the smaller the wall-adjacent cell is, the larger this RANS-LES bias is.<sup>1</sup> Second, one cannot use RANS fields, mean wall-resolved LES fields or mean DNS fields to derive new wall models,<sup>7,17,18</sup> since the wall model does not apply to the mean WMLES field but only to the instantaneous one.

Corrections to the numerical, subgrid modelling, and RANS-LES matching errors will be proposed in Sec. IV C.

## IV. RESULTS ON A QUASI-INCOMPRESSIBLE BI-PERIODIC CHANNEL FLOW

### A. Reference data

The choice of reference data for the assessment of wall fluxes prediction is discussed. We perform WMLES computations at  $Re_\tau = 1020$ ,  $Re_\tau = 2000$ , and  $Re_\tau = 20000$  of a bi-periodic plane channel flow with a wall temperature imposed at  $T_w$ . A small temperature gradient is introduced by forcing the bulk temperature  $T_b = (1/y) \int_0^y T(\xi) d\xi$  to  $T_b/T_w = 1.1$ . The fluid is modelled by a Prandtl number  $Pr$  equal to 0.72 and  $\gamma = 1.4$ . The friction Reynolds number  $Re_\tau$  of a given computation is only a target since it depends on the wall friction  $\overline{\tau_w}$ , which is an output of the computation. The parameter which effectively characterizes the channel flow regime is the bulk Reynolds number  $Re_b = \rho_b u_b \delta / \mu_b$ . For the computations at  $Re_\tau = 1020$  and  $Re_\tau = 2000$ ,  $Re_b$  is respectively taken from the DNS computations of Kawamura<sup>48</sup> and Hoyas.<sup>4</sup> The corresponding databases can, respectively, be found at <http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence/> and <http://torroja.dmt.upm.es/ftp/channels/>. The small temperature gradient is not supposed to alter the friction coefficient, since it corresponds to regime I (see Sec. II B), with  $Ec \ll Pr^{-1}$ ,  $Ec \ll 1$ , and  $\frac{T_{bref}}{|T_{bref} - T_w|} \gg 1$ . Thus, these two DNS data provide a reliable reference for the friction coefficient. For the case at  $Re_\tau = 20000$ , no DNS data are available and the empirical correlation of Pethukov<sup>5</sup>

$$C_{fb} = 2(2.236 \ln(Re_{b,Dh}) - 4.639)^{-2} \text{ valid for } 10^4 < Re_{b,Dh} < 5 \times 10^6 \quad (25)$$

is used to prescribe  $Re_b$  and the reference friction coefficient. The Karman-Nikuradse correlation

$$C_{fb} = 0.046 Re_{b,Dh}^{-0.2} \text{ valid for } 3 \times 10^4 < Re_{b,Dh} < 10^6 \quad (26)$$

is used as an additional reference data. The Pethukov and Karman correlations take as input a Reynolds number  $Re_{b,Dh} = \rho_b u_b Dh / \mu_b$  based on bulk quantities and the hydraulic channel diameter  $Dh = 4\delta$ . These correlations return a friction coefficient based on the bulk density and bulk velocity  $C_{fb} = \overline{\tau_w} / (0.5 \rho_b u_b^2)$ . Thus,  $C_{fb}$  will be the parameter used to compare the WMLES results to the DNS data and the correlations. For the assessment of wall heat flux prediction, only the DNS of Kawamura can provide a reference value. However, in this DNS, the density is constant, the temperature considered as a passive scalar and most importantly the wall boundary condition imposes a constant heat flux and not a constant temperature. As a result, the empirical correlations of Sleicher and Rouse,<sup>49</sup>

$$Nu_b = 5 + 0.015 Re_{f,Dh}^a Pr^b, \quad \begin{cases} a=0.88 - \frac{0.24}{4+Pr} \\ b=\frac{1}{3} + 0.5 \exp -0.6Pr \end{cases} \text{ valid for } 10^4 < Re_{f,Dh} < 10^6, 0.1 < Pr < 10^5 \text{ and } T_b/T_w > 0.5, \quad (27)$$

as well as the correlation of Kays<sup>15</sup>

$$Nu_b = \frac{0.023 Re_{f,Dh}^{0.8} Pr}{0.88 + 2.03(Pr^{2/3} - 0.78) Re_{f,Dh}^{-0.1}} \text{ valid for } 3 \times 10^4 < Re_{f,Dh} < 10^6 \text{ and } 0.6 < Pr < 6 \quad (28)$$

and the correlation of Colburn

$$Nu_b = \frac{\overline{\phi_w}}{\lambda_b \frac{T_w - T_b}{Dh}} = \frac{\lambda_f}{\lambda_b} \frac{\overline{\phi_w}}{\lambda_f \frac{T_w - T_b}{Dh}} = \frac{\lambda_f}{\lambda_b} 0.023 Re_{f,Dh}^{0.8} Pr^{1/3} \text{ valid for } Re_{f,Dh} > 10^4 \text{ and } 0.7 < Pr < 160 \quad (29)$$

are used as reference data. These correlations take as input a Reynolds number  $Re_{f,Dh} = \rho_f u_b Dh / \mu_f$  based on the film density  $\rho_f = 2/(1/\rho_b + 1/\rho_w)$  and the film viscosity  $\mu_f$ , itself computed from

TABLE III. Characteristics of the different cases and the number of cells ( $N_x, N_y, N_z$ ).

Case	$Re_\tau$	Wall model	$\delta_1^+$	$(N_x, N_y, N_z)$	$nb_{Gauss}$
1020_QA_50	1020	QA	50	(25, 21, 21)	...
1020_QA_25	1020	QA	25	(49, 41, 41)	...
1020_TBL_50	1020	TBL	50	(25, 21, 21)	10
1020_TBL_25	1020	TBL	25	(49, 41, 41)	10
2000_QA_100	2000	QA	100	(25, 21, 21)	...
2000_QA_50	2000	QA	50	(49, 41, 41)	...
2000_TBL_100	2000	TBL	100	(25, 21, 21)	10
2000_TBL_50	2000	TBL	50	(49, 41, 41)	10
20000_QA_1000	20 000	QA	1000	(25, 21, 21)	...
20000_QA_500	20 000	QA	500	(49, 41, 41)	...
20000_TBL_1000	20 000	TBL	1000	(25, 21, 21)	64
20000_TBL_500	20 000	TBL	500	(49, 41, 41)	32

the film temperature  $T_f = (T_b + T_w)/2$  and Sutherland law. These correlations return a Nusselt number  $Nu_b = \overline{\phi_w}/(\lambda_b(T_w - T_b)/Dh)$  based on the bulk thermal conductivity  $\lambda_b = -C_p\mu_b/Pr$  and the hydraulic diameter  $Dh$ . Note that Colburn correlation is based on the film thermal conductivity  $\lambda_f = -C_p\mu_f/Pr$  so that the ratio  $\lambda_f/\lambda_b$  appears in Eq. (29).

## B. Flow regime and numerical modelling

The flow solver elsA (Ref. 31) described in Sec. II A is used to compute these channel flows. This solver uses a turbulent Prandtl number  $Pr_{sgs}$  to model the turbulent thermal conductivity  $\lambda_{sgs}$  and we set  $Pr_{sgs}$ . Simulations are performed for the three flow regimes given in Table II using the QA model and the TBL model. Two meshes are used. Table III gives the number of grid points and summarizes the parameters corresponding to each simulation. The domain size is  $(L_x/\delta, L_y/\delta, L_z/\delta) = (2\pi, 2, \pi)$  and the cell aspect ratio is kept constant with a cell size  $(dx^+, dy^+, dz^+)$  equal to  $(5.2\delta_1^+, 2\delta_1^+, 3.2\delta_1^+)$ .

In order to control the bulk Reynolds number and the bulk temperature in the channel, two source terms are introduced, respectively,  $S_x$  in the streamwise momentum equation and  $Q_x$  in the energy equation

$$S_x = \frac{\tau_{wcorrel}}{h} + (\rho_{bref}u_{bref} - \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \widetilde{\rho} \widetilde{u} dV), \quad (30)$$

$$Q_x = \frac{-\phi_{wcorrel}}{h} + (T_{bref} - \frac{\frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \widetilde{\rho} \widetilde{u} \widetilde{T} dV}{\frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \widetilde{\rho} \widetilde{u} dV}) + S_x \widetilde{u}. \quad (31)$$

These source terms are constant in space and vary in time to impose the target bulk Reynolds number and temperature. As proposed by Cabrit<sup>28</sup> and to accelerate flow establishment, the source terms contain a steady part corresponding to an estimation of the final source term value from the empirical correlations. It is to be noted that the established flow field is independent of this steady term and its inclusion only facilitates flow establishment. To start the computation, an initial velocity profile based on a power law for turbulent flow is prescribed

$$u(y) = u_{bref} \frac{8}{7} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{1/7}. \quad (32)$$

This velocity field is then randomly perturbed with a white noise maximum level equal to 0.1  $u_b$  in the streamwise direction and 5% in the wall-normal and spanwise directions. The initial temperature is set to the wall temperature to avoid entropy waves.

The subgrid-scale model is the Smagorinsky model without wall damping with a constant  $C_{Smago} = 0.12$ . The subgrid-scale thermal diffusivity is modelled using a subgrid-scale Prandtl number  $Pr_{sgs}$

= 0.9. The diffusive scheme is second order accurate with a 3-point stencil. The convective scheme is fully centered, second order accurate and the state on the cell interfaces is reconstructed from the primitive variables. A 4th order Runge-Kutta scheme with 4 substeps is used to advance explicitly in time with a fixed acoustic Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) number set to 0.7. According to Sec. 1 of the Appendix, the required number of Gauss points  $nb_{Gauss}$  for the TBL model is given in Table III.

### C. Proposed corrections

In the following, we first propose corrections to the numerical and subgrid-scale modelling errors. Then the RANS-LES matching error is treated.

- Correction to the numerical and subgrid-scale modelling errors.  
In order to illustrate this error, already discussed by Cabot and Moin<sup>18</sup> and Cabot,<sup>17</sup> we compare three simulations at  $Re_\tau = 2000$  with the QA model on the (25, 21, 21) mesh:

1. The first one is performed without any correction, which means that we use the cell-averaged velocity gradient to compute the subgrid viscosity at the first off-wall point;
2. The second computation is performed using a self-adaptive Smagorinsky model, namely, selective Smagorinsky model. The selective function has been widely used by various authors on incompressible and compressible flows<sup>10,45,50-63</sup> and originates from the fact that the subgrid model activates too often, even in regions where the flow is well resolved. In practice, the selective function acts as a correction multiplicative factor to the subgrid viscosity  $\mu_{sgs,sel} = 1.65f(\Theta)\mu_{sgs}$ . The angle  $\Theta$

$$\Theta = \arcsin \left[ \frac{\|\omega \times \langle \omega \rangle\|}{\|\omega\| \cdot \|\langle \omega \rangle\|} \right] \quad (33)$$

is based on the instantaneous flow vorticity  $\omega$  and a spatially filtered vorticity  $\langle \omega \rangle$  computed from the neighbouring cells. If  $\Theta < 20^\circ$ , the eddies are supposed to have characteristics of DNS homogeneous isotropic turbulence. Since these flow structures are well resolved, the subgrid viscosity should be reduced according to Eq. (34). On the contrary, if  $\Theta > 20^\circ$ , the subgrid model should be fully activated

$$\begin{cases} f(\Theta)r^2(\Theta) & \text{if } \Theta < 20^\circ, \\ f(\Theta) & \text{if } \Theta > 20^\circ. \end{cases} \quad (34)$$

In Eq. (34),  $r(\Theta) = \tan^2(\Theta/2)/\tan^2(20^\circ/2)$  ensures a smooth decrease of the subgrid viscosity to zero. The 1.65 factor allows to maintain the same averaged subgrid viscosity over the entire domain and is evaluated from homogeneous isotropic turbulence simulations;

3. In the third computation, we introduce a correction directly based on the mean streamwise momentum balance (Eq. (24)). The subgrid viscosity is modified at the first off-wall cell center by

$$\mu_{sgs1,corr} = \frac{\langle \mu_{sgs1,target} \rangle}{\langle \mu_{sgs1} \rangle} \mu_{sgs1} \quad (35)$$

in which  $\langle \cdot \rangle$  denotes time filtering performed on the fly during the computation, starting from the time at which the flow is considered established until the end of the simulation. Equation (35) allows both to keep the same phase between  $\mu_{sgs1}$  and  $\mu_{sgs1,corr}$  and impose  $\langle \mu_{sgs1,corr} \rangle = \langle \mu_{sgs1,target} \rangle$ . This targeted subgrid viscosity is constructed so that the mean momentum balance between the first and second off-wall points is respected

$$\begin{aligned} (\langle \tilde{\mu}_1 \rangle + \langle \mu_{sgs1,target} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u}_1 \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1' \tilde{v}_1' \rangle = \\ (\langle \tilde{\mu}_2 \rangle + \langle \mu_{sgs2} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u}_2 \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2' \tilde{v}_2' \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

We neglected the  $\langle S_x \rangle y$  term considering that  $y$  remains small compared to the channel half height, since only the first and second off-wall cells are concerned. We further assume that the resolved turbulent terms will take values close to each other in the first and second off-wall points:  $\langle \widetilde{\rho}_1 \widetilde{u}_1' \widetilde{v}_1' \rangle \approx \langle \widetilde{\rho}_2 \widetilde{u}_2' \widetilde{v}_2' \rangle$ , and we end up with the following expression for  $\langle \mu_{sgs1, target} \rangle$ :

$$\langle \mu_{sgs1, target} \rangle = \frac{\langle \widetilde{\mu}_2 \rangle + \langle \mu_{sgs2} \rangle \frac{\partial \langle \widetilde{u}_2 \rangle}{\partial y}}{\frac{\partial \langle \widetilde{u}_1 \rangle}{\partial y}} - \langle \widetilde{\mu}_1 \rangle. \quad (37)$$

Figure 4 shows the mean momentum balance computed at cell centers for the three simulations. It can be noted that the finite-volume flow solver used here computes numerical fluxes at cell interface, so that the equality of the total shear and right-hand side terms is enforced at cell interfaces but not at cell centers. However, some terms contributing to the momentum balance, such as subgrid-scale viscosity, are computed from cell centered values. Thus, incorrect momentum balance closure at cell centers can change the magnitude of the various terms entering the effective momentum balance seen by the flow solver.

Comparing momentum balances given in Fig. 4, it clearly appears that the subgrid-scale viscosity returned by the Smagorinsky model without correction is at least one order of magnitude larger than the one corrected by the selective function or the momentum balance based treatment. This confirms the idea discussed in Sec. III that there is *a priori* no reason why a subgrid-scale model should return a proper subgrid viscosity in the first wall-adjacent cells. Comparing both the velocity profiles given in Fig. 5 and momentum balances, it is clear that the velocity profile quality is strongly correlated to the momentum balance closure at cell centers. Indeed, both selective function and momentum balance based corrections allow to close the

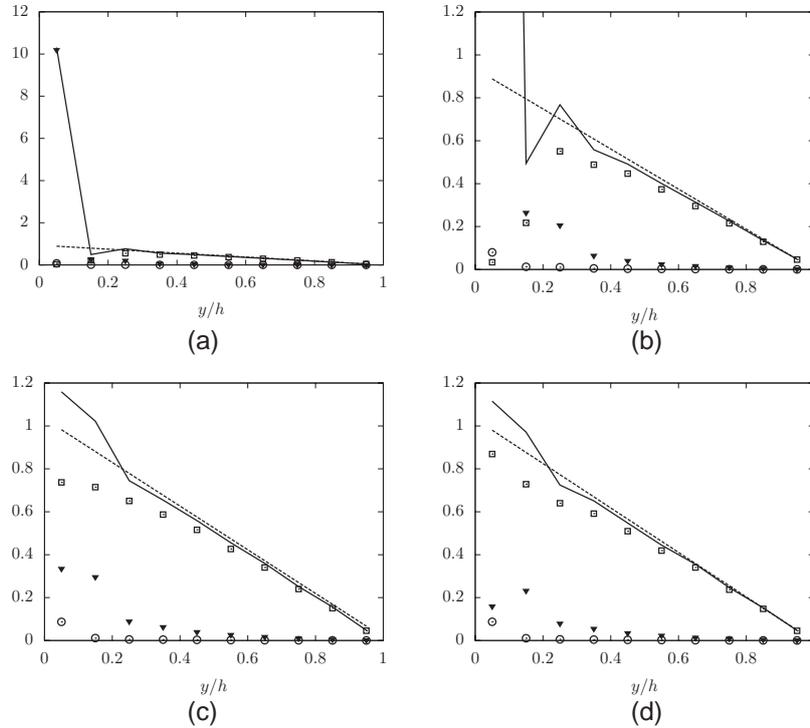


FIG. 4. Momentum balance corresponding to Eq. (A33): (○) laminar term  $\langle \widetilde{\mu} \rangle \frac{\partial \langle \widetilde{u} \rangle}{\partial y}$ , (▼) subgrid-scale term  $\langle \mu_{sgs} \rangle \frac{\partial \langle \widetilde{u} \rangle}{\partial y}$ , (□) resolved turbulent term  $-\langle \widetilde{\rho} \widetilde{u}' \widetilde{v}' \rangle$ , (—) total shear  $(\langle \widetilde{\mu} \rangle + \langle \mu_{sgs} \rangle) \frac{\partial \langle \widetilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \widetilde{\rho} \widetilde{u}' \widetilde{v}' \rangle$ , (- -) right-hand side  $\langle \tau_w \rangle - \langle S_x \rangle y$ . (a) and (b) Without correction. (c) With selective function. (d) With momentum balance based correction. All terms are non-dimensionalized by the DNS wall friction.

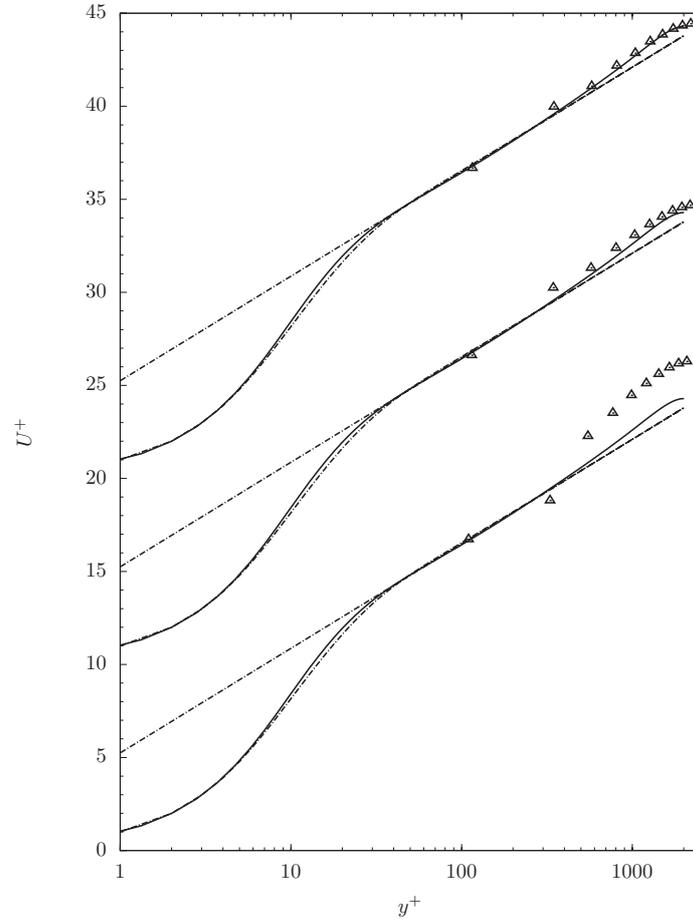


FIG. 5. Non-dimensional mean velocity profile for the quasi-incompressible regime: (- · -) logarithmic law  $U^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$ , (—) Hoyas DNS, ( $\Delta$ ) WMLES (from bottom to top: no correction, correction with the selective function, correction based on momentum balance). Profiles are shifted by 10 wall units for the sake of clarity.

momentum balance, even in the near wall cells, in a very satisfactory manner. The velocity profiles for these two corrected simulations show very good agreement to DNS data, whereas the uncorrected simulation exhibit significant discrepancies. The momentum balance of the uncorrected simulation gives insight into this behaviour. Indeed, it appears that the near wall resolved turbulent term is significantly lower compared to the corrected simulations. Thus, the resolved turbulent term compensates the incorrect modelling of subgrid-scale shear, eventually leading to a significant underestimation of the wall friction. Consequently, the wall friction and velocity profile quality are strongly dependent on the numerical and subgrid-scale errors discussed in Sec. III. However, ensuring the momentum balance closure at cell centers by an appropriate treatment, with a special care to the near wall cells, allows to cure these two sources of error. In the following, the selective function is used for all channel flow computations, since it performs as well as the momentum balance based correction and does not require any on the fly time filtering.

- Correction to the RANS-LES matching error.

First, we consider the TBL momentum equation (10). As discussed in Sec. III, this RANS equation should apply to the mean (or time-averaged by  $\langle \cdot \rangle$ ) LES field. Thus, we apply the averaging operator  $\langle \cdot \rangle$ , which gives

$$\langle \langle \bar{\mu}(y) \rangle \rangle + \langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y} = \langle \bar{\tau}_w \rangle. \quad (38)$$

Equation (38) is now compared to the usual approach which consists in applying the TBL equations on the instantaneous LES field

$$(\bar{\mu}(y) + \mu_t(y)) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} = \bar{\tau}_w \quad (39)$$

in which the boundary condition at the matching point  $y = \delta_1$  is  $\bar{u}(\delta_1) = \tilde{u}'_1$ . Applying the averaging operator to Eq. (39) gives

$$\langle \bar{\mu}(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y} + \langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} = \langle \bar{\tau}_w \rangle. \quad (40)$$

Since in general  $\bar{\mu}_t(y) = f(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y})$ , there exists a non-linearity due to the fluctuation in time of  $\bar{u}$ , leading to  $\langle \mu_t(y) \rangle \langle \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \rangle \neq \langle \mu_t(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \rangle$ . Thus, Eq. (40) is not strictly equivalent to Eq. (38). In order to enforce Eq. (38) and similar to the method used by Wang,<sup>13</sup> one can choose to add a correction to the turbulent viscosity. We now consider the following expression instead of Eq. (39):

$$(\bar{\mu}(y) + c(y)\mu_t(y)) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} = \bar{\tau}_w. \quad (41)$$

Applying the averaging operator, we get

$$\bar{\mu}(y) \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y} + c(y) \langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} = \langle \bar{\tau}_w \rangle. \quad (42)$$

In order to impose Eq. (38), the expression for the  $c$  coefficient must be

$$c(y) = \frac{\langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y}}{\langle \mu_t(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \rangle}. \quad (43)$$

In other words, as proposed by Kawai,<sup>19</sup> a  $y$ -dependent coefficient based on averaged TBL quantities is used to alter the turbulent viscosity. However, no empirical function is required here to modify  $c(y)$  as the wall is approached, and the  $y$ -dependency of  $c$  is naturally taken into account in Eq. (43). This procedure enforces the RANS TBL momentum equation to apply to the mean LES field instead of the instantaneous LES field, thus correcting the RANS-LES matching error described in Sec. III.

To this point, we only considered the TBL momentum equation. We now extend the RANS-LES correction to the entire TBL model, applying the above treatment to the energy equation also (Eq. (11)). We end up with three corrective coefficients  $c_1$ ,  $c_2$ , and  $c_3$ , respectively, applying to the three non-linear terms  $\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ ,  $\lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ , and  $\bar{u} \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ . As a result, the corrected TBL model applies the following relations on the instantaneous LES field:

$$(\bar{\mu} + c_1 \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{\tau}_w, \quad (44)$$

$$(\bar{\lambda} + c_2 \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{u} (\bar{\mu} + c_3 \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{\phi}_w, \quad (45)$$

using the following three corrective coefficients:

$$\begin{cases} c_1(y) = \langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y} / \langle \mu_t(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \rangle \\ c_2(y) = \langle \lambda_t(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{T}(y) \rangle}{\partial y} / \langle \lambda_t(y) \frac{\partial \bar{T}(y)}{\partial y} \rangle \\ c_3(y) = \langle \bar{u}(y) \rangle \langle \mu_t(y) \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}(y) \rangle}{\partial y} / \langle \bar{u}(y) \mu_t(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \rangle \end{cases}. \quad (46)$$

TABLE IV. RANS-LES matching error  $\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\tau_w)$  and  $\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\phi_w)$  with the TBL wall model.

Correction	$\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\tau_w)$		$\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\phi_w)$	
	no	yes	no	yes
1020.TBL_50	2.1	0.97	1.8	0.041
1020.TBL_25	2.6	1.3	2.1	0.16
2000.TBL_100	2.1	0.91	1.8	$9 \times 10^{-5}$
2000.TBL_50	2.3	1.1	2.0	0.06
20000.TBL_1000	1.3	0.51	1.2	-0.01
20000.TBL_500	1.6	0.61	1.4	-0.12

In order to quantitatively assess the RANS-LES correction efficiency, the RANS-LES error on the wall fluxes is evaluated as follows:

$$\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\tau_w) = \frac{\langle \widetilde{\tau}_w \rangle - \tau_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{u}_1 \rangle)}{\tau_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{u}_1 \rangle)}, \quad (47)$$

$$\text{Error}_{\text{RANS-LES}}(\phi_w) = \frac{\langle \widetilde{\phi}_w \rangle - \phi_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{T}_1 \rangle)}{\phi_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{T}_1 \rangle)}, \quad (48)$$

in which  $\langle \widetilde{\tau}_w \rangle$  and  $\langle \widetilde{\phi}_w \rangle$  are the mean wall fluxes from the channel flow simulations, and  $\tau_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{u}_1 \rangle)$  and  $\phi_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{T}_1 \rangle)$  are wall fluxes reconstructed from the mean LES field using the uncorrected TBL model. It is to be noted that the evaluation of  $\tau_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{u}_1 \rangle)$  and  $\phi_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{T}_1 \rangle)$  does not necessitate an additional channel flow simulation but simply running the uncorrected TBL model once taking the mean LES field as input. If  $\tau_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{u}_1 \rangle) = 0$  and  $\phi_{w\text{TBL}}(\langle \widetilde{T}_1 \rangle) = 0$ , then the TBL model strictly applies to the mean LES field, which means that the RANS-LES error is completely eliminated. The RANS-LES errors are given in Table IV. We also provide the errors with the uncorrected TBL model, that is,  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ . From these uncorrected simulations, it can be seen that for similar Reynolds number, larger cell size leads to smaller RANS-LES error. For similar cell size in wall units, larger Reynolds number leads to larger RANS-LES error. These trends are also visible on the corrective coefficients shown in Fig. 6. For similar Reynolds number, larger cell size leads to larger coefficient values, and thus weaker correction. For similar cell size in wall units, larger Reynolds number leads to lower coefficient values, and thus stronger correction. The RANS-LES correction is very

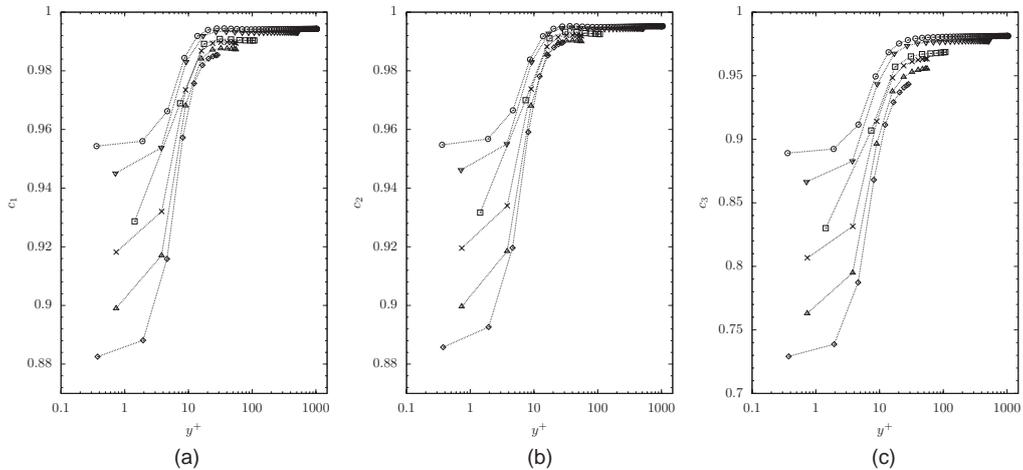


FIG. 6. Corrective coefficients for the quasi-incompressible TBL simulations. ( $\times$ ): Case 1020.TBL\_50, ( $\diamond$ ): case 1020.TBL\_25, ( $\square$ ): case 2000.TBL\_100, ( $\triangle$ ): case 2000.TBL\_50, ( $\odot$ ): case 20000.TBL\_1000, ( $\nabla$ ): case 20000.TBL\_500.

efficient on  $\phi_w$ , almost cancelling the RANS-LES error with values less than 0.2%. It also significantly reduces the RANS-LES error on  $\tau_w$ , but larger errors are obtained with values up to 1.3%. This can be attributed to the change of frame of reference (see Eq. (3)), which contains the velocity squared and thus induces an additional source of non-linearity, which is not taken into account by the present correction. Nonetheless, this RANS-LES correction allows to significantly reduce the level of RANS-LES error for a large range of Reynolds number, without introducing any empirical parameter. In addition, it does not require any spatial averaging and is thus applicable to complex flows, even if the time filtering procedure may raise problems for statistically unsteady flows.

#### D. WMLES results

The mean WMLES field is obtained by averaging in time during  $\Delta T_{\text{average}} \approx 9\delta/u_\tau$ . The time integration is started after  $\Delta T_{\text{transient}} \approx 8\delta/u_\tau$  in order to evacuate the initial flow. Letting the transient flow evacuate or time-averaging over a longer period does not change the mean wall fluxes within a 1% tolerance and the root-mean-square (rms) velocities within a 1.8% tolerance. Mean velocity and temperature profiles expressed in non-dimensional wall units are shown in Figs. 7–10. The first observation is that both wall models lead to very satisfactory prediction of the mean velocity profile

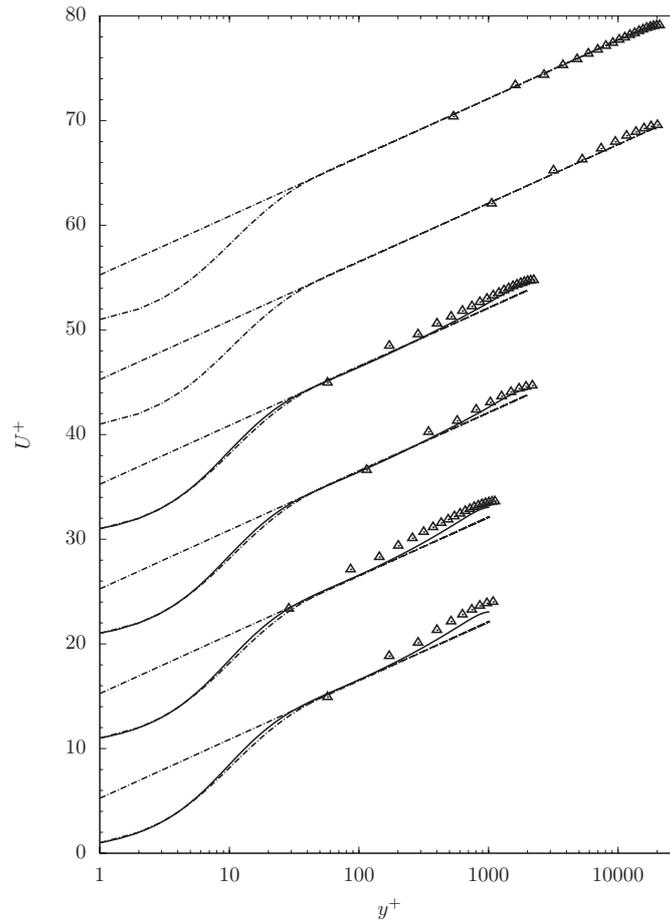


FIG. 7. Non-dimensional mean velocity profile for the quasi-incompressible regime: (· · ·) logarithmic law  $U^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  and Reichard law given by Eq. (19), (—) Hoyas DNS and Kawamura DNS, ( $\Delta$ ) WMLES with the QA model (from bottom to top: cases 1020\_QA.50, 1020\_QA.25, 2000\_QA.100, 2000\_QA.50, 20000\_QA.1000, 20000\_QA.500). Profiles are shifted by 10 wall units for the sake of clarity.

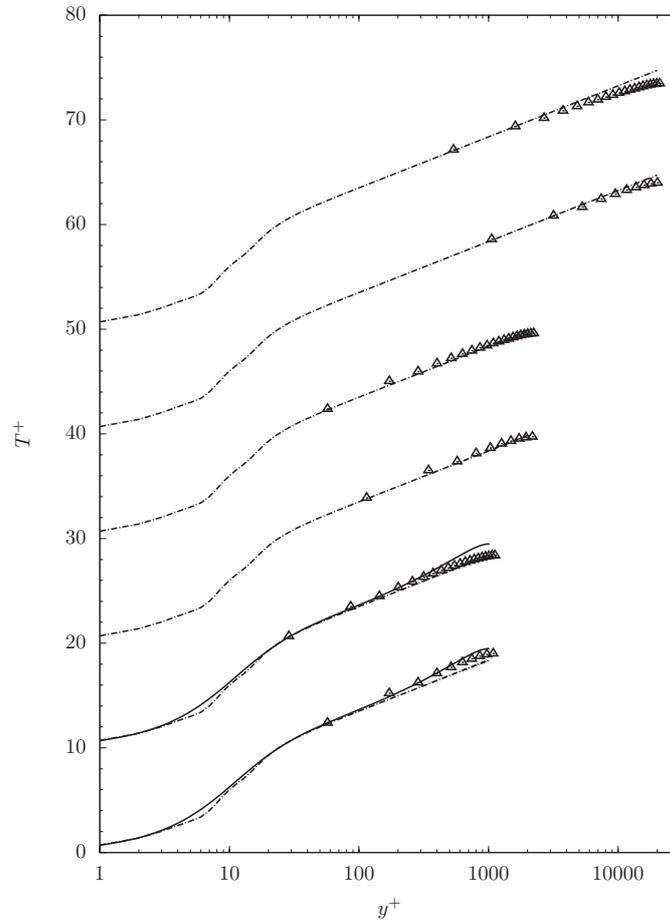


FIG. 8. Non-dimensional mean temperature profile for the quasi-incompressible regime: (- · -) Kader law, (—) Kawamura DNS, ( $\Delta$ ) WMLES with the QA model (from bottom to top: cases 1020\_QA\_50, 1020\_QA\_25, 2000\_QA\_100, 2000\_QA\_50, 20000\_QA\_1000, 20000\_QA\_500). Profiles are shifted by 10 wall units for the sake of clarity.

in all cases. The prediction of the mean temperature profile is a little bit less satisfactory, especially in the logarithmic layer whose coefficients are systematically underpredicted, but reliable results are nevertheless recovered. It is interesting to note that, in all cases, no kink is observed in the mean velocity and temperature profiles, while some kinks or derivative discontinuity at the RANS/LES interface have been reported by some authors on the plane channel configuration, like an unphysical DES buffer layer.<sup>1</sup> Another point is that the mean profiles computed by the TBL model within the first LES cell are in good agreement with DNS data, Reichard law, and Kader law. This validates the derivation of the TBL model for the quasi-incompressible regime. The agreement of the TBL temperature profile with Kader law strongly confirms the foundation of the thermal modelling in the TBL model, since Kader law does not appear explicitly in this model.

Relative errors committed on the predicted bulk friction coefficient and Nusselt number with respect to DNS data and empirical correlations are displayed in Table V. This comparison is further illustrated in Figs. 11 and 12. The error committed on  $C_{fb}$  at  $Re_\tau = 1020$  and  $Re_\tau = 2000$  with respect to DNS data is less than 7%, and reaches 14% at the higher Reynolds number  $Re_\tau = 20000$ . It is interesting to note that smaller errors on  $C_{fb}$  are systematically obtained on the finer mesh when compared to DNS data. It is also to be noticed that empirical correlations are not in complete agreement with DNS results. The accuracy on the predicted Nusselt number is less satisfactory at smaller Reynolds number than those reported for the skin friction and reaches 14% when compared to Sleicher correlation. Note that a comparison to Colburn correlation for  $Re_\tau = 1020$  and

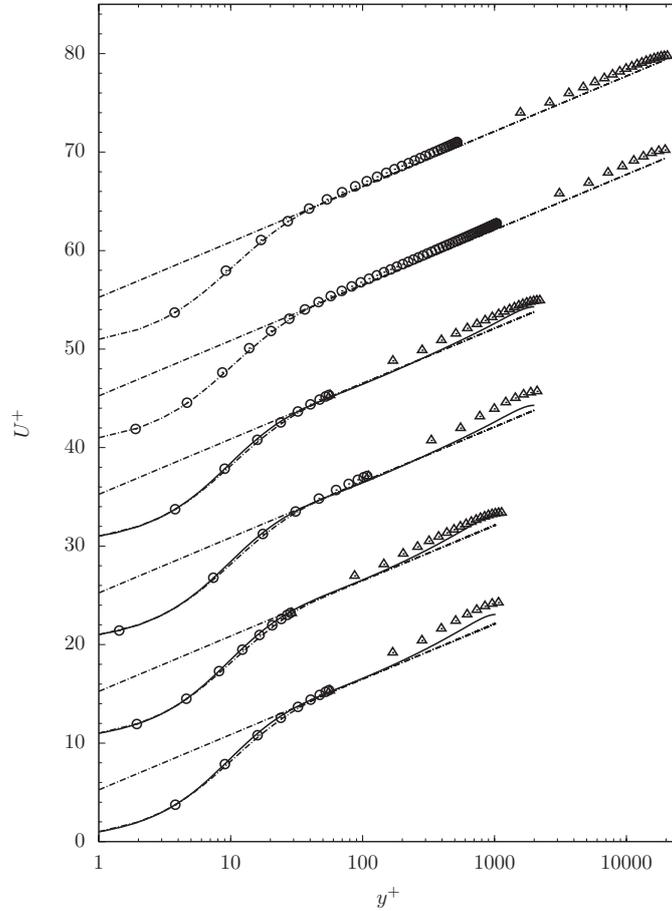


FIG. 9. Non-dimensional mean velocity profile for the quasi-incompressible regime: (- - -) logarithmic law  $U^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  and Reichard law given by Eq. (19), (—) Hoyas DNS and Kawamura DNS, ( $\odot$ ) TBL model, ( $\Delta$ ) WMLES with the TBL model (from bottom to top: cases 1020.TBL\_50, 1020.TBL\_25, 2000.TBL\_100, 2000.TBL\_50, 20000.TBL\_1000, 20000.TBL\_500). Profiles are shifted by 10 wall units for the sake of clarity.

$Re_\tau = 2000$  would lead to smaller errors. The lack of DNS data on the temperature field at Reynolds number higher than  $Re_\tau = 1020$  prevents drawing final conclusions on the accuracy of the wall heat flux prediction, but some trends could be identified considering empirical correlations. This comparison of the WMLES results to DNS and empirical correlations gives very acceptable errors on the wall friction and wall heat flux for the range of bulk Reynolds number  $[20\,700, 4.9 \times 10^5]$ . Concerning the effect of the RANS-LES correction, it appears that comparing corrected TBL simulations with the uncorrected TBL or QA models, smaller errors on Nusselt number are obtained for all cases as well as smaller errors on  $C_{fb}$  for the higher Reynolds number. Overall, the difference between corrected and uncorrected TBL simulations is relatively small but not negligible, with values up to 2.8%. However, from the dependency of the RANS-LES error on Reynolds number and cell size given in Sec. IV C, it is expected to reach larger values for higher Reynolds number or smaller cell size, e.g.,  $Re_\tau \geq 20\,000$  and  $\delta_1^+ \leq 500$ , values which can easily be obtained for industrial applications.

The rms velocities are shown in Figs. 13–15. For  $Re_\tau = 1020$  and  $Re_\tau = 2000$ , similar results are obtained and comparison to DNS data is provided. Correct agreement is observed except for the first and second wall-adjacent cells, in which the streamwise fluctuation is damped, which is typical of the WMLES approach. The wall-normal component is significantly smaller than the DNS data, but better agreement is obtained as the mesh is refined.

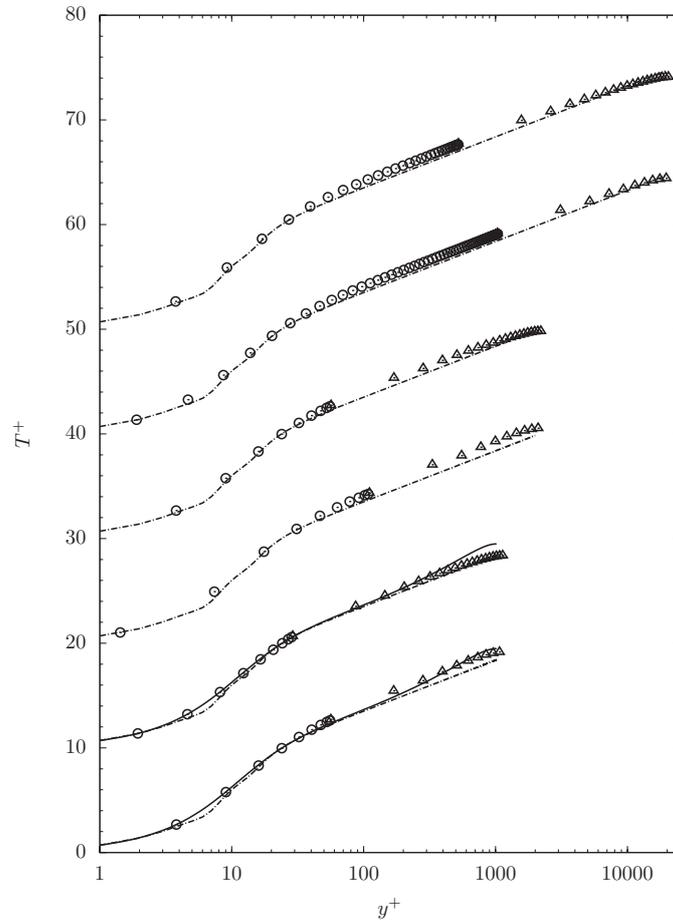


FIG. 10. Non-dimensional mean temperature profile for the quasi-incompressible regime : (- · -) Kader law, (—) Kawamura DNS, (⊙) TBL model, (Δ) WMLES with the TBL model (from bottom to top: 1020.*TBL*\_50, 1020.*TBL*\_25, 2000.*TBL*\_100, 2000.*TBL*\_50, 20 000.*TBL*\_1000, 20 000.*TBL*\_500). Profiles are shifted by 10 wall units for the sake of clarity.

TABLE V. Relative error on the bulk friction coefficient  $C_{fb}$  and the Nusselt number  $Nu$  in % with the RANS-LES corrected TBL model. Values obtained with the uncorrected TBL model are given in brackets. The reference data used to compute the error are given in square brackets.

Case	$\Delta(C_{fb})$ (%)	$\Delta(Nu)$ (%)
1020_ <i>QA</i> _50	-4.7 [DNS]	7.0 [Sleicher]
1020_ <i>QA</i> _25	1.2 [DNS]	13.2 [Sleicher]
1020_ <i>TBL</i> _50	-7.1 (-6.7) [DNS]	4.7 (5.0) [Sleicher]
1020_ <i>TBL</i> _25	-0.53 (-0.011) [DNS]	12.6 (14.0) [Sleicher]
2000_ <i>QA</i> _100	0.15 [DNS]	12.1 [Sleicher]
2000_ <i>QA</i> _50	0.75 [DNS]	13.5 [Sleicher]
2000_ <i>TBL</i> _100	-6.3 (-4.9) [DNS]	4.8 (6.8) [Sleicher]
2000_ <i>TBL</i> _50	-1.5 (-0.43) [DNS]	10.7 (12.3) [Sleicher]
20 000_ <i>QA</i> _1000	9.3 [Pethukov]	7.2 [Colburn]
20 000_ <i>QA</i> _500	13.3 [Pethukov]	11.5 [Colburn]
20 000_ <i>TBL</i> _1000	4.7 (4.3) [Pethukov]	2.8 (2.8) [Colburn]
20 000_ <i>TBL</i> _500	7.9 (10.3) [Pethukov]	5.7 (8.5) [Colburn]

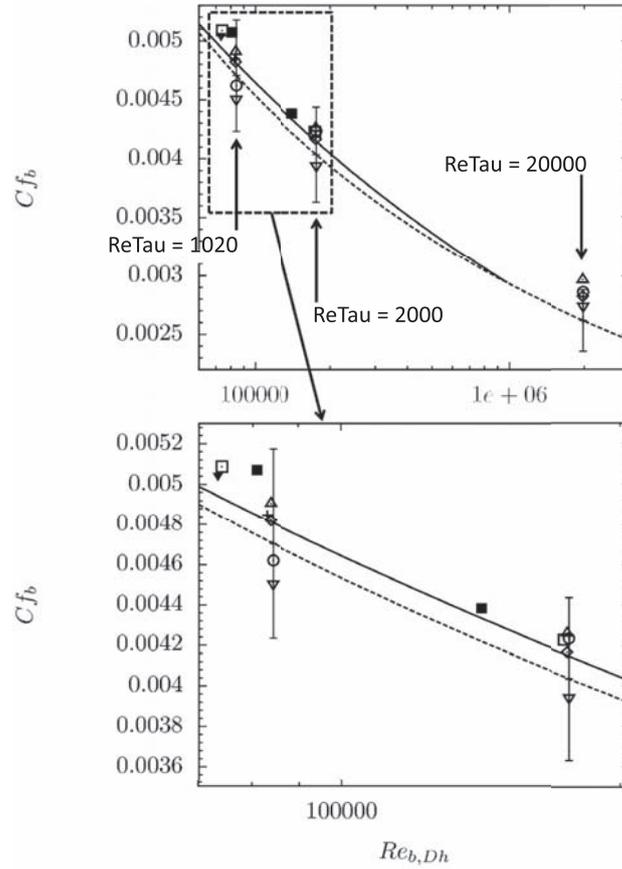


FIG. 11. Friction coefficient for the quasi-incompressible flow regime: (—) Karman-Nikuradse correlation, (- -) Pethukov correlation, error bars represent  $\pm 10\%$  error from Pethukov correlation, (+) Kawamura DNS, ( $\square$ ) Hoyas DNS, ( $\blacksquare$ ) Wei and Willmarth experiments, ( $\blacktriangledown$ ) Niederschulte experiments, ( $\odot$ ) WMLLES on 20 point mesh with QA model (from left to right: cases 1020\_QA\_50, 2000\_QA\_100, 20000\_QA\_1000), ( $\triangle$ ) WMLLES on 40 point mesh with QA model (from left to right: cases 1020\_QA\_25, 2000\_QA\_50, 20000\_QA\_500), ( $\nabla$ ) WMLLES on 20 point mesh with TBL model (from left to right: cases 1020\_TBL\_50, 2000\_TBL\_100, 20000\_TBL\_1000), ( $\diamond$ ) WMLLES on 40 point mesh with TBL model (from left to right: cases 1020\_TBL\_25, 2000\_TBL\_50, 20000\_TBL\_500).

## V. RESULTS ON A COMPRESSIBLE BI-PERIODIC CHANNEL FLOW

### A. Reference data and flow regime

The two DNS of Coleman<sup>42</sup> of a supersonic plane channel with isothermal walls at Mach = 1.5 and Mach = 3 are used as reference data. The flow regime corresponding to these DNS are listed in Table VI. The bulk temperature  $T_b$  is computed by integration of the DNS temperature profiles. The same domain dimensions and cell aspect ratio as previously given in Sec. IV are used. Contrary to the quasi-isothermal cases, only one mesh is used here. Indeed, the DNS are performed at small Reynolds number and the resulting friction Reynolds numbers are  $Re_\tau = 222$  and  $Re_\tau = 451$ , respectively, for Mach = 1.5 and Mach = 3. As a result, the number of points which can be placed in the wall-normal direction is very limited. With the mesh chosen, that is,  $N_y = 20$  points along the channel height, the expected  $\delta_1^+$  are 11.1 and 22.6, respectively, for Mach = 1.5 and Mach = 3. These values are rather small compared to the classical values of  $\delta_1^+ = O(100)$  for higher Reynolds number flows. Most importantly, a larger  $N_y$  leading to smaller values of  $\delta_1^+$  would not allow to discriminate between the QA and TBL models, since both models return similar wall fluxes for  $\delta_1^+ < 6$  as shown on Figs. 16–19 (see Sec. V B). The simulations performed are listed in Table VII. As in the quasi-incompressible computations, the bulk Reynolds number is controlled by a source

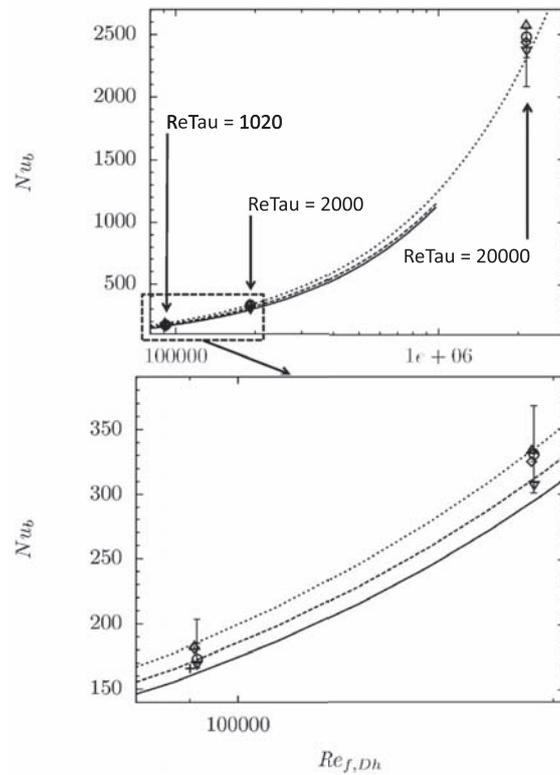


FIG. 12. Nusselt number for the quasi-incompressible flow regime: (—) Sleicher and Rouse correlation, (---) Kays correlation, ( $\cdot \cdot \cdot$ ) Colburn correlation (error bars represent  $\pm 10\%$  error from Colburn correlation), (+) Kawamura DNS, ( $\odot$ ) WMLES on 20 point mesh with QA model (from left to right: cases 1020\_QA\_50, 2000\_QA\_100, 20000\_QA\_1000), ( $\triangle$ ) WMLES on 40 point mesh with QA model (from left to right: cases 1020\_QA\_25, 2000\_QA\_50, 20000\_QA\_500), ( $\nabla$ ) WMLES on 20 point mesh with TBL model (from left to right: 1020\_TBL\_50, 2000\_TBL\_100, 20000\_TBL\_1000), ( $\diamond$ ) WMLES on 40 point mesh with TBL model (from left to right: cases 1020\_TBL\_25, 2000\_TBL\_50, 20000\_TBL\_500).

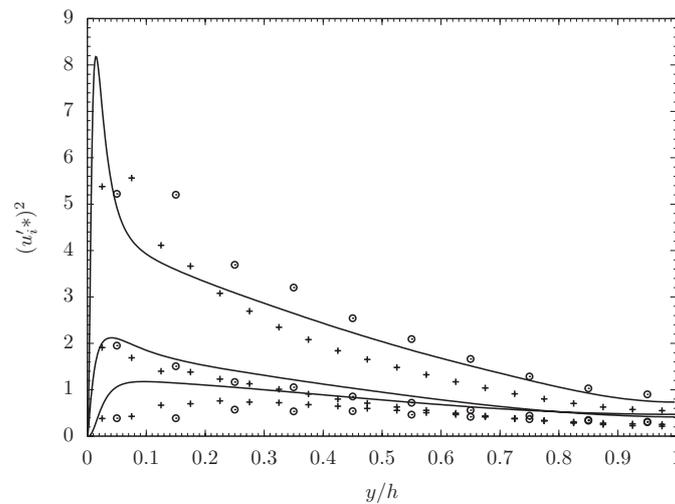


FIG. 13. Velocity fluctuations for the quasi-incompressible regime at  $Re_\tau = 1020$ : (—) Kawamura DNS, ( $\odot$ ) WMLES case 1020\_TBL\_50, (+) WMLES case 1020\_TBL\_25. From bottom to top:  $v'$ ,  $w'$ ,  $u'$ .

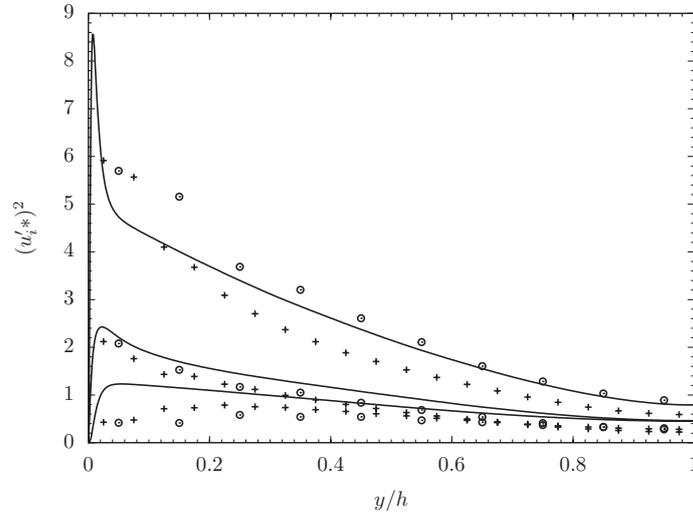


FIG. 14. Velocity fluctuations for the quasi-incompressible regime at  $Re_\tau = 2000$ : (—) Hoyas DNS, (○) WMLES case 2000.*TBL*\_100, (+) WMLES case 2000.*TBL*\_50. From bottom to top:  $v'$ ,  $w'$ ,  $u'$ .

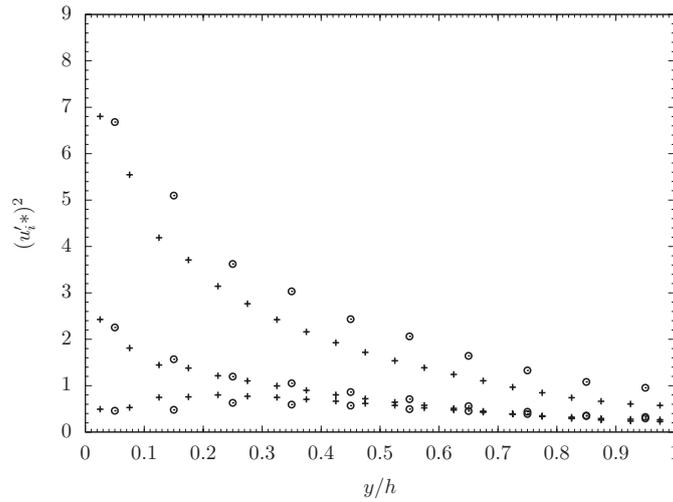


FIG. 15. Velocity fluctuations for the quasi-incompressible regime at  $Re_\tau = 20000$ : (○) WMLES case 20000.*TBL*\_1000, (+) WMLES case 20000.*TBL*\_500. From bottom to top:  $v'$ ,  $w'$ ,  $u'$ .

TABLE VI. Flow regime for the Mach = 1.5 and Mach = 3 regime.

$Re_\tau$	222	451
$M_\tau$	0.082	0.116
$Bq$	-0.049	-0.137
$Re_b = \frac{\rho_{bref} u_{bref} h}{\mu_{bref}}$	2421	2650
$M_{ref}$	1.5	3
$T_{bref} [K]$	390	700
$T_{bref} /  T_{bref} - T_w $	4.01	1.72
$Ec$	3.6	6.2
<i>Thermal regime</i>	Regime II	Regime III
$\Delta p$	$-5.24 \times 10^{-3}$	$-3.43 \times 10^{-3}$

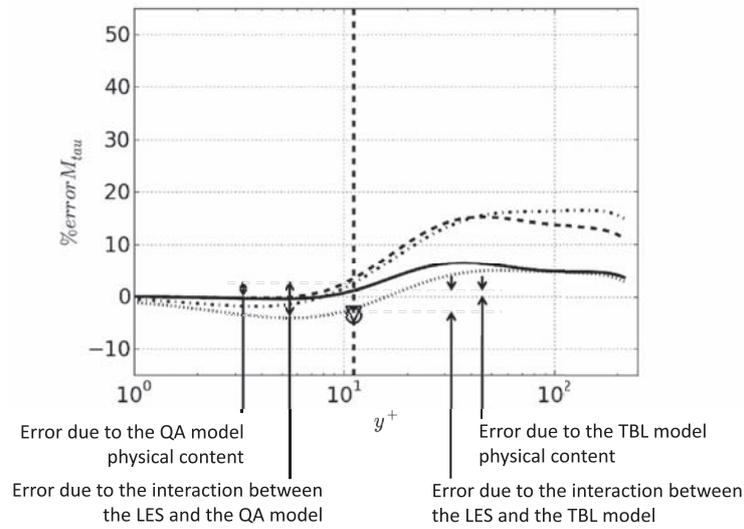


FIG. 16. Relative error on  $M_\tau$  for Mach = 1.5: (—) TBL model with  $y_3^+$  scaling, (- -) TBL model with  $y^+$  scaling, (- · -) QA model, (· · ·) Van-Driest (1951) law, (⊙) WMLES case 1.5-*QA*, (▽) WMLES case 1.5-*TBL*.

term (Eq. (30)) in the momentum equation. Concerning the energy source term, in the DNS, no forcing is introduced and the temperature profile establishes naturally due to the balance between the production of heat from the viscous heating term and the loss of heat due to the wall heat flux. If we adopted the same method here, we would obtain significantly different temperature profiles, because the wall heat flux predicted by the QA and TBL models are different. Thus, the bulk temperature and bulk viscosity would not be the same, making the flow regimes not comparable, since the Eckert number and bulk Reynolds number would be different. As a result, we choose to impose the DNS bulk temperature in all the WMLES simulations. This is done through the energy source term given by Eq. (31) as previously done for the quasi-isothermal simulations.

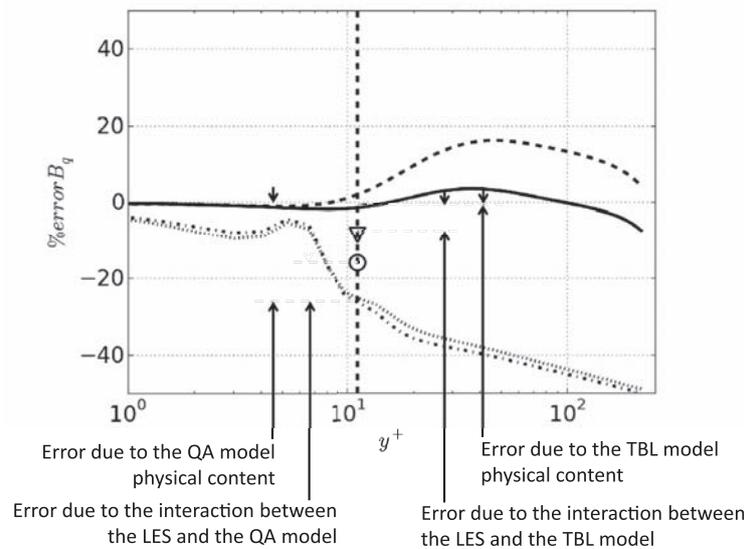


FIG. 17. Relative error on  $B_q$  for Mach = 1.5: (—) TBL model with  $y_3^+$  scaling, (- -) TBL model with  $y^+$  scaling, (- · -) QA model, (· · ·) Kader law with  $u_\tau$  from Coleman DNS, (⊙) WMLES case 1.5-*QA*, (▽) WMLES case 1.5-*TBL*.

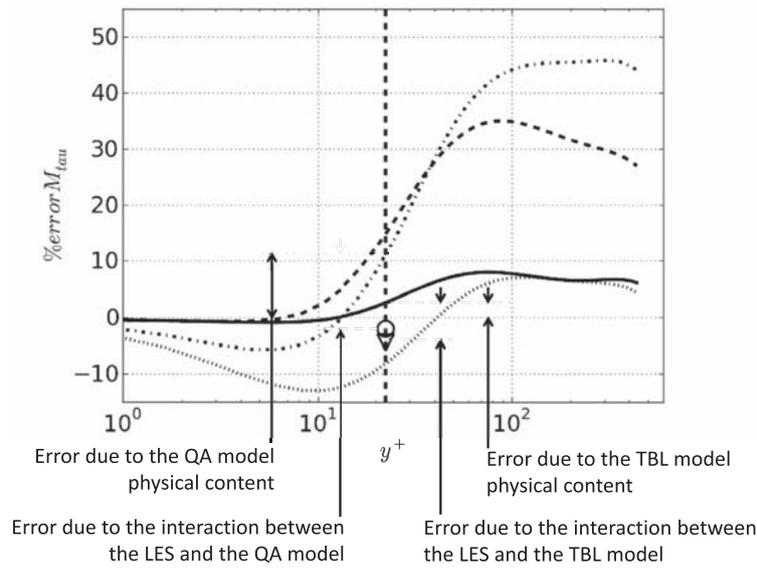


FIG. 18. Relative error on  $M_\tau$  for Mach = 3: (—) TBL model with  $y_3^+$  scaling, (- -) TBL model with  $y^+$  scaling, (- · -) QA model, (· · ·) Van-Driest (1951) law, (⊙) WMLES case 3\_QA, (▽) WMLES case 3\_TBL.

## B. Specific wall model analysis

The TBL model is expected to better perform than the QA model as compressibility effects increase. Since we both have DNS data and a discriminant supersonic flow regime, we have the opportunity to separate the physical error described in Sec. III from the other sources of error. To estimate the physical error, the QA and TBL models are solved independently of the flow solver. Each wall model is evaluated using the DNS mean state variables extracted at a given  $y$  and the

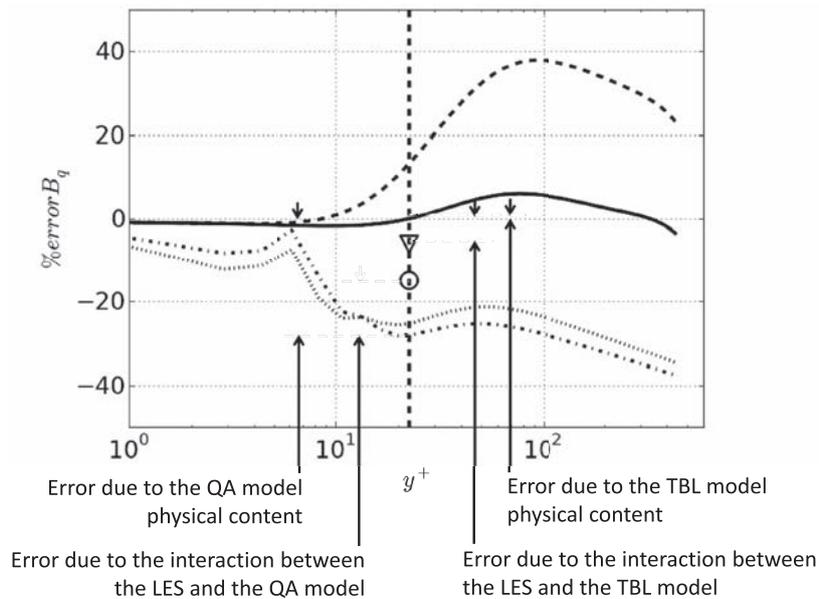


FIG. 19. Relative error on  $B_q$  for Mach = 3: (—) TBL model with  $y_3^+$  scaling, (- -) TBL model with  $y^+$  scaling, (- · -) QA model, (· · ·) Kader law with  $u_\tau$  from Coleman DNS, (⊙) WMLES case 3\_QA, (▽) WMLES case 3\_TBL.

TABLE VII. Characteristics of the different cases and number of cells  $(N_x, N_y, N_z)$  for the Mach = 1.5 and Mach = 3 regime.

Case	Mach	Wall model	$\delta_1^+$	$(N_x, N_y, N_z)$	$nb_{Gauss}$
1.5- <i>QA</i>	1.5	QA	11	(25, 21, 21)	...
1.5- <i>TBL</i>	1.5	TBL	11	(25, 21, 21)	10
3- <i>QA</i>	3	QA	21	(25, 21, 21)	...
3- <i>TBL</i>	3	TBL	21	(25, 21, 21)	10

resulting wall fluxes compared to the mean DNS wall fluxes. Consistently with the DNS data, the Prandtl number is set to  $Pr = 0.7$  and  $\gamma = 1.4$ . For a given wall distance  $0 < y < \delta$ , the mean DNS density, velocity, and temperature are used to specify the wall model top boundary conditions  $(\bar{p}_1, \bar{u}_1, \bar{T}_1)$  or equivalently  $(\bar{\rho}_1, \bar{u}_1, \bar{T}_1)$  given in Fig. 3. The bottom boundary conditions for velocity and temperature are directly available since we consider a no-slip isothermal wall, and the wall density is given by the DNS data. According to Sec. 1 of the Appendix,  $nb_{Gauss} = 20$  is appropriate to accurately compute the TBL wall fluxes until the channel half height, where  $Re_\tau$  reaches 451 for the Mach = 3 case. The two wall models can now be solved for every wall distance  $y$  available in the DNS, and the error between the model wall fluxes and the DNS wall fluxes are computed. For these supersonic cases, we compute these errors  $\Delta(M_\tau) = (M_\tau(\text{model}) - M_\tau(\text{DNS}))/M_\tau(\text{DNS})$  and  $\Delta(Bq) = (Bq(\text{model}) - Bq(\text{DNS}))/Bq(\text{DNS})$  where  $M_\tau$  is the friction Mach number defined as  $M_\tau = u_\tau/a_w$  with  $a_w = \sqrt{\gamma r T_w}$  is the sound velocity at the wall.  $Bq$  is the wall heat flux parameter given by Coleman as  $Bq = \bar{\phi}_w / (Re Pr \lambda_w \bar{\rho}_w u_\tau)$ , in which  $Re = \rho_b u_b \delta / \mu_w$  and  $\lambda_w = -C_p \mu_w / Pr$ . Using the notations above, the wall heat flux parameter can also be written as  $Bq = \bar{\phi}_w / (Re_b \mu_b C_p \rho_w u_\tau)$ .

Figures 16 and 18 show the error  $\Delta(M_\tau)$  in % as a function of the non-dimensional wall distance  $y^+$  for the regimes Mach = 1.5 and Mach = 3. The TBL model with the  $y_3^+$  scaling described in Sec. II B is compared to the TBL model with the classical  $y^+ = \bar{\rho}_w u_\tau y / \bar{\mu}_w$  scaling in the Van-Driest damping. The ‘‘Van-Driest (1951)’’ law refers to a quasi-analytical law derived from the combination of Crocco law and the Van-Driest velocity transform, and its derivation is briefly described in the following. Crocco law comes from the RANS compressible boundary layer equations, for which a simple solution involving the total enthalpy  $\bar{h}_i$  exists and reads

$$\bar{h}_i(y) = \bar{h}_w + \frac{\bar{h}_{ie} - \bar{h}_w}{\bar{u}_e} \bar{u}(y). \quad (49)$$

In Eq. (49), the subscript  $e$  denotes values taken at the outer edge of the boundary layer. This relation is strictly correct only if the wall is isothermal, that is,  $\bar{h}_w = \text{cst}$ , and if  $\bar{h}_{ie} = \text{cst}$ . From Eq. (49), a relation for the static enthalpy, and thus the static temperature, can be derived

$$\bar{h}(y) = \bar{h}_w + \frac{\bar{h}_{ie} - \bar{h}_w}{\bar{u}_e} \frac{\bar{u}(y)}{\bar{u}_e} + \frac{\bar{h}_{ie} - \bar{h}_e}{\bar{u}_e} \left( \frac{\bar{u}(y)}{\bar{u}_e} \right)^2. \quad (50)$$

Then using the Prandtl mixing length model  $\mu_t = (\kappa y)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$  in the logarithmic layer, we obtain a simplified momentum equation

$$\bar{\rho}(\kappa y)^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \bar{\tau}_w. \quad (51)$$

Combining Eqs. (50) and (51), we obtain the Van-Driest (1951) law describing the velocity profile in the logarithmic layer

$$\frac{1}{A} \arcsin \frac{2A^2(\bar{u}/\bar{u}_e) - B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} + \frac{1}{A} \arcsin \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4A^2}} = \frac{u_\tau}{\bar{u}_e} \left( \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \right)$$

$$\begin{cases} A^2 = \frac{\nu-1}{2} M_e^2 \frac{\bar{T}_e}{\bar{T}_w} \\ B = (1 + \frac{\nu-1}{2} M_e^2) \frac{\bar{T}_e}{\bar{T}_w} - 1. \end{cases} \quad (52)$$

In order to extend the validity of Eq. (52) down to the wall, we use Reichard law (Eq. (19)) instead of the logarithmic law in the right-hand side. Since we are treating a plane channel flow instead of a boundary layer flow, we replace the outer edge values by the center line channel values and consistently with the TBL and QA model, we set  $\kappa = 0.41$  and  $B = 5.25$ .

It appears that the TBL model with  $y_3^+$  (Eq. (14)) and the Van-Driest (1951) law behave in a very close manner and both return an error on the friction Mach number below 7% at both regimes. This result is a strong validation of the TBL with  $y_3^+$  approach since the Van-Driest (1951) law is based on very few and acceptable hypothesis for the cases considered. The TBL model with  $y^+$  and the QA model show a much less satisfying behaviour with errors reaching 15% and 45%, respectively, for Mach = 1.5 and Mach = 3. The very different behaviour between the TBL  $y_3^+$  and the TBL  $y^+$  models is striking and shows that the buffer layer modelling is crucial for the accurate prediction of the wall friction.

Figures 17 and 19 show the error  $\Delta(Bq)$  in % as a function of the non-dimensional wall distance  $y^+$  for the regimes Mach = 1.5 and Mach = 3. The TBL with  $y_3^+$  model behaves very well with an error below 10% for both regimes. The TBL with  $y^+$  model shows error which, respectively, reach 20% and 40% for Mach = 1.5 and Mach = 3. The QA model produces errors exceeding 35%. We recall that the wall heat flux estimation in the QA model is based on Kader law. The Kader law takes as input the non-dimensional temperature  $T^+$  based on the wall friction, which is prescribed by the QA model itself. Thus, the wall heat flux prediction of the QA model can be biased by a non-physical wall friction. As a result, we also show the wall heat flux computed from Kader law with the DNS wall friction as input. The behaviour is very similar to the QA model and stresses that the Kader law cannot be used for boundary layer flows on isothermal cold walls at Mach numbers exceeding 1.5.

### C. WMLES results

The same numerical modelling as the one used for the quasi-analytical cases is used. In order to obtain the same accuracy on the mean wall fluxes, that is an error less than 1% if we increase  $\Delta T_{\text{average}}$  or  $\Delta T_{\text{transient}}$ , the WMLES computations require  $\Delta T_{\text{average}} \approx 50\delta/u_\tau$  and  $\Delta T_{\text{transient}} \approx 50\delta/u_\tau$ . Mean velocity and temperature profiles are shown in Figs. 20 and 21 and the errors  $\Delta(M_\tau)$  and  $\Delta(Bq)$  are summarized in Table VIII. The velocity profiles obtained with the QA and TBL models exhibit very similar behaviour. This was not expected for the Mach = 3 case, since the specific wall model analysis shows the superiority of the TBL model in the wall friction prediction. Indeed as shown in Fig. 18 along the vertical dashed line, the QA model exhibits a physical error of about 13% on  $M_\tau$ , whereas the TBL model commits a very acceptable error of about 3%. This difference between the expected behaviour given by the specific wall model analysis and the *a posteriori* WMLES results can only be explained by the interaction between the flow solver and the wall model. This interaction error is the sum of all the errors given in Sec. III except the physical error, since we managed to separate the physical error from the remaining errors. For the TBL computation, this interaction error reaches 4% on  $M_\tau$  at Mach = 1.5, and 6.4% at Mach = 3. These values remain reasonable but are not negligible compared to the physical error. The behaviour of the selective function for this very particular case at Mach = 3 and very low Reynolds number might explain this interaction error level. Contrary to the velocity profiles, the temperature profiles show the expected behaviour, that is, the TBL model returns better results than the QA model. Again the specific wall

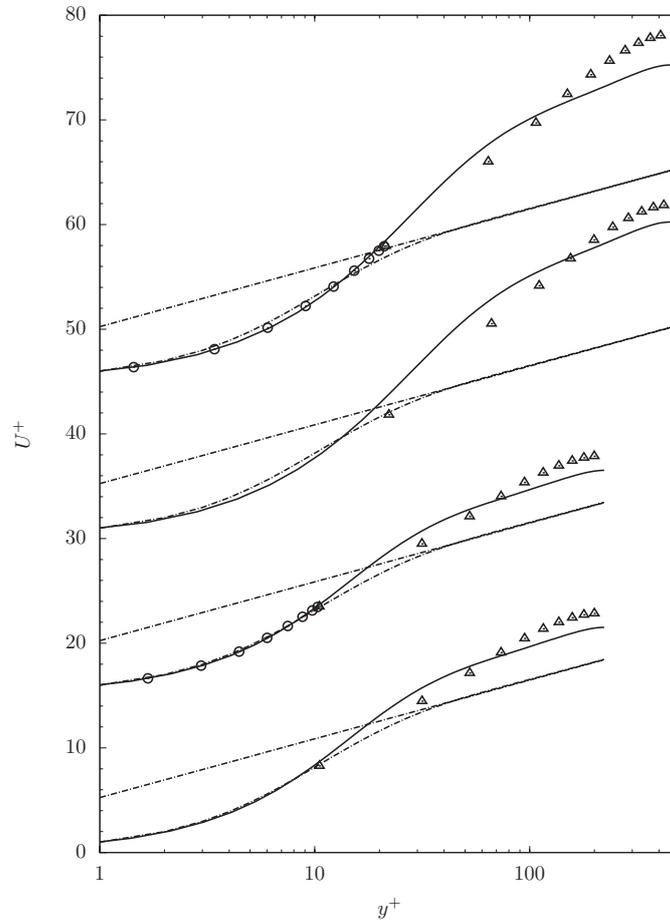


FIG. 20. Non-dimensional mean velocity profile for the Mach = 1.5 and Mach = 3 cases: (- · -) logarithmic law  $U^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  and Reichard law given by Eq. (19), (—) Coleman DNS, (○) TBL model, (△) WMLES (from bottom to top: cases 1.5-*QA*, 1.5-*TBL*, 3-*QA*, 3-*TBL*). Profiles are shifted by 15 wall units for the sake of clarity.

model analysis shown on Figs. 17 and 19 gives some insight into the source of these errors. It can be seen that even at the small  $\delta_1^+$  used here, the physical error committed by the QA model on  $Bq$  is much larger than the one committed on  $M_\tau$ , since  $\Delta(Bq)$  reaches about 25% in absolute value for both Mach numbers. The TBL model, however, returns an error close to zero. It also appears that the interaction error on  $Bq$  is of the same magnitude than the interaction error on  $M_\tau$ . Thus, the good behaviour of the TBL model compared to the QA model cannot be explained by a decrease in the interaction error but only by the increase of the QA model physical error on  $Bq$ . Only a specific wall model analysis could explain the unexpected behaviour of the velocity profiles and the expected behaviour of the temperature profiles. This shows the importance of performing a specific wall model analysis on reliable reference data, if possible from various sources and different flow regimes.

It can be observed in Table VIII that largest errors are obtained with the RANS-LES correction. This means that some of the sources of error participating to the interaction error partially cancel each other, so that eliminating one source of error, namely, the RANS-LES error, can increase the total interaction error. The RANS-LES error on these compressible cases shows significant effect on the wall flux error compared to the quasi-incompressible cases, which can be attributed to the very small cell size in  $y^+$  variable, despite the small Reynolds number. This further illustrates that correcting this error is necessary since its dependency on simulation parameters is multiple, and its magnitude remains difficult to assess *a priori*, even if some trends could be identified in Sec. IV C.

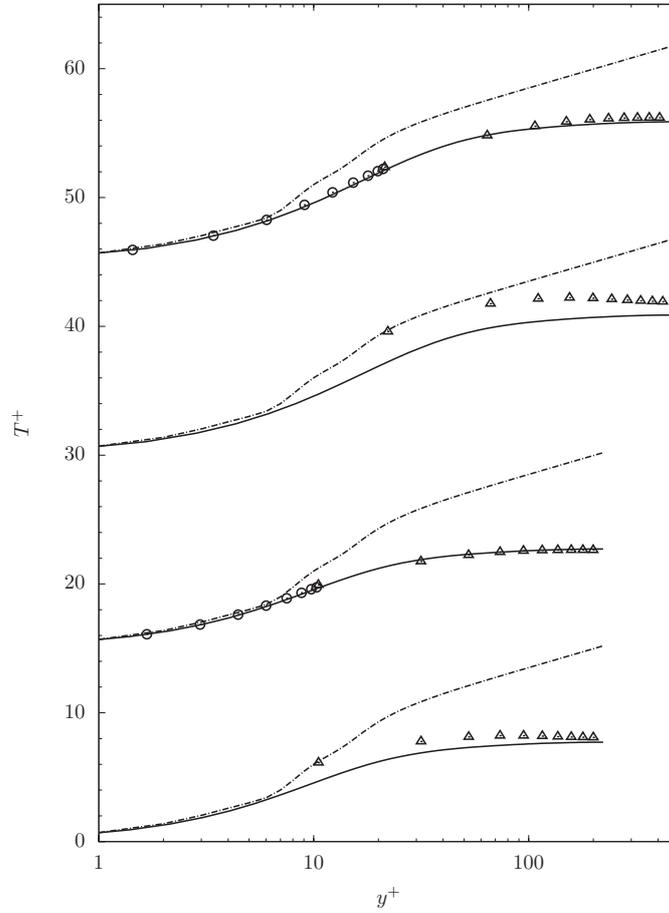


FIG. 21. Non-dimensional mean temperature profile for the Mach = 1.5 and Mach = 3 cases: (- · -) Kader law, (—) Coleman DNS, (○) TBL model, (△) WMLES (from bottom to top: cases 1.5-*QA*, 1.5-*TBL*, 3-*QA*, 3-*TBL*). Profiles are shifted by 15 wall units for the sake of clarity.

The rms velocity fluctuations are shown in Fig. 22. As proposed in Coleman,<sup>42</sup> they are expressed using the local scaling  $y^* = y(\tilde{\rho}) \sqrt{\langle \tilde{\tau}_w \rangle / \langle \tilde{\rho} \rangle / \langle \tilde{\mu} \rangle}$  and  $(u_i^*)^2 = \langle \tilde{\rho} \rangle \langle (\tilde{u}^i)^2 \rangle / \langle \tilde{\tau}_w \rangle$ , which allows the velocity fluctuations to scale for the two Mach numbers. The obtained rms velocities also show this scaling with Mach number, and a slightly higher streamwise fluctuation is obtained for the Mach = 3, as it is the case for the DNS data. Similar behaviour as obtained for the slightly anisothermal cases can be observed, with a damping of the streamwise component as the wall is approached and a smaller wall-normal fluctuation compared to DNS data.

TABLE VIII. Mach = 1.5 and Mach = 3 cases: relative error on the friction Mach number  $M_\tau$  and the wall heat flux parameter  $Bq$  in %. Values obtained with the uncorrected TBL model are given in brackets. The reference data used to compute the error are DNS data.

Case	$\Delta(M_\tau)$ (%)	$\Delta(Bq)$ (%)
1.5- <i>QA</i>	-3.6	-15.8
1.5- <i>TBL</i>	-3.3 (-2.7)	-8.5 (-6.2)
3- <i>QA</i>	-2.1	-14.9
3- <i>TBL</i>	-4.4 (-3.5)	-6.0 (-3.9)

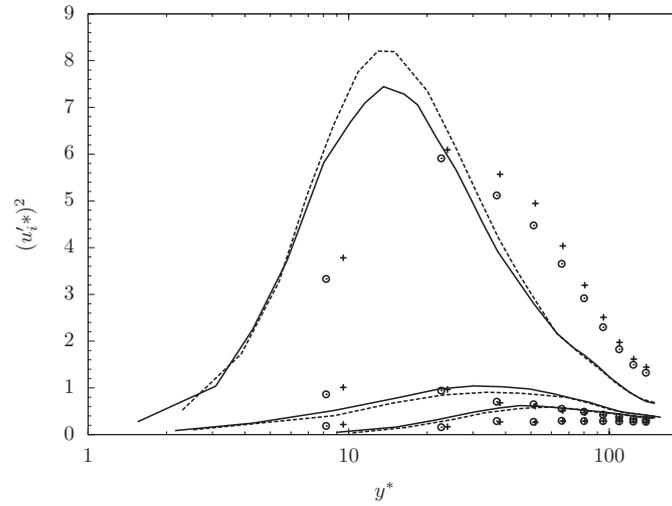


FIG. 22. Velocity fluctuations for the compressible regime: (—) Coleman DNS at Mach = 1.5, (---) Coleman DNS at Mach = 3, (○) WMLES with TBL model at Mach = 1.5, (+) WMLES with TBL model at Mach = 3. From bottom to top:  $v'$ ,  $w'$ ,  $u'$ .

The TBL model shows on these supersonic cases its ability to predict accurate mean wall fluxes. However, the additional computational cost due to the numerical integration of the TBL equations needs to be investigated. It is shown in Sec. 2 of the Appendix that the computational cost of a WMLES simulation with the TBL model is almost proportional to the local Reynolds number  $Re_x = \rho_\infty U_\infty x / \mu_\infty$ . This has to be compared with the cost to solve the inner layer of a boundary layer flow with wall-resolved LES, which scales like  $Re_x^{1.8}$ . Thus, the WMLES with TBL model approach significantly reduces the computational time dependency with Reynolds number compared to wall-resolved LES. As a result, the potential of TBL-type models to tackle high Reynolds number wall-bounded flows is fully justified, both in terms of physical content and computational cost.

## VI. CONCLUDING REMARKS

This study describes a compressible wall model for LES as well as its interaction with the flow solver. Cures for errors due to the interaction between the LES solver and the wall model are proposed and assessed. They allow to significantly reduce both numerical and subgrid-scale modelling errors near the wall. The RANS-LES matching error due to the connection of a RANS wall model to fluctuating LES quantities is almost cancelled without adding any empirical parameter, and only local quantities are involved in this correction, making it usable for complex geometry cases. On a slightly anisothermal plane channel flow, the wall model approach returns accurate prediction of both mean wall fluxes and mean primitive variable profiles on a wide range of Reynolds number. On the more discriminant supersonic channel flow case, the wall model demonstrates its ability to handle compressibility effects compared to a simpler quasi-incompressible wall model. Since the wall model strategy introduces various sources of error, a specific wall model analysis is performed independently of the flow solver. The choice of an appropriate wall distance scaling in the Van-Driest damping function of the wall model is shown to be crucial as soon as compressibility effects become significant. The wall model specific analysis also gives insight into the wall model strategy, especially because it allows to discriminate the error due to the wall model itself from the error due to the interaction between the wall model and the flow solver. The lack of higher Reynolds number compressible DNS data with wall heat transfer is clearly a limitation to the validation of compressible wall models. Thanks to the previous extensive work on turbulence near-wall models, algebraic mixing-length based turbulence models suited for complex physical effects exist. Thus, the LES with wall model approach has the potential to tackle complex physical effects in wall-bounded

flows. Despite the computational overhead due to the integration of the wall model equations, the computational cost of this LES with wall model strategy is significantly less Reynolds number dependent than wall-resolved LES.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge AIRBUS France and Foundation for research in aeronautics and space (FNRAE) for their support. We thank G. N. Coleman for kindly providing DNS data of his supersonic channel flow, as well as Bertrand Aupoix and Hugues Deniau for fruitful discussions.

## APPENDIX A: ACCURACY, COMPUTATIONAL TIME, AND NUMERICAL PROCEDURE FOR THE TBL MODEL

### 1. Choice of the number of Gauss points

As indicated in Sec. II B, the sole numerical parameter to manually prescribe to the TBL model is the number of Gauss points  $nb_{Gauss}$ . In the following, we determine  $nb_{Gauss}$  as a function of the wall distance  $\delta_1^+$  where the TBL model takes the LES data as boundary conditions. The same strategy as in the specific wall model analysis (see Sec. V B) is used considering the DNS of Hoyas<sup>4</sup> as the reference data. For various  $nb_{Gauss}$ , we collect on the same plot the error on the friction coefficient  $\Delta(Cf_b) = (Cf_b(\text{TBL}) - Cf_b(\text{DNS}))/Cf_b(\text{DNS})$  and the error on the Nusselt number  $\Delta(Nu_b) = (Nu_b(\text{TBL}) - Nu_b(\text{DNS}))/Nu_b(\text{DNS})$ . We consider the error for the largest  $nb_{Gauss}$ , which is  $nb_{Gauss} = 100$ , as the reference TBL data in terms of accuracy. Then, for a given  $nb_{Gauss} < 100$ , we estimate the  $\delta_{1,max}^+$  from which the error departs from the  $nb_{Gauss} = 100$  curve. Table IX summarizes the  $\delta_{1,max}^+$  above which  $(\Delta(Cf_b)_{nb_{Gauss}} - \Delta(Cf_b)_{100})/\Delta(Cf_b)_{100} > 0.01$  (second column) and  $(\Delta(Nu_b)_{nb_{Gauss}} - \Delta(Nu_b)_{100})/\Delta(Nu_b)_{100} > 0.01$ .

Since the DNS Hoyas is performed at  $Re_\tau = 2003$ , no estimation of  $\delta_{1,max}^+$  is available at higher Reynolds number. Table IX shows that the inaccuracy on  $Cf_b$  is largest than the one on  $Nu_b$  for a given  $\delta_1^+$ . Thus, the  $\delta_{1,max}^+$  considering the error on  $Cf_b$  is the adequate value to determine  $nb_{Gauss}$  for an accurate estimation of both wall fluxes with the TBL model. Note that the reference DNS data considered here corresponds to the quasi-incompressible regime. However, the values of  $\delta_{1,max}^+$  given in Table IX still apply to the compressible cases. Indeed, as the Mach number increases,  $Re_\tau = \overline{\rho_w} u_\tau \delta / \overline{\mu_w}$  tends to increase for a given bulk Reynolds number due to the growing difference between the bulk temperature and the cold wall temperature, leading to a larger  $\overline{\rho_w}$ . Thus, the criterion on the TBL accuracy determined for the quasi-incompressible regime are *a fortiori* correct for the compressible regime on cold walls.

### 2. Computational time overhead of the TBL model

It is interesting to estimate the computational time  $T_{WMLES}$  of a WMLES simulation as a function of the Reynolds number. Indeed, the WMLES approach would be useless if its computational time dependence with Reynolds number was heavier than the one of LES or DNS. The computational overhead due to the use of a quasi-analytical model like the QA model can be considered as negligible compared to the LES solver. Thus, on a plane channel flow, the computational time of

TABLE IX.  $\delta_1^+$  above which the TBL model returns inaccurate wall fluxes for a given  $nb_{Gauss}$ .

$nb_{Gauss}$	$\delta_{1,max}^+$ considering $Cf_b$	$\delta_{1,max}^+$ considering $Nu_b$
10	123	144
20	510	552
32	1250	1370
64	>2000	>2000
100	>2000	>2000

a WMLES simulation using a quasi-analytical model  $T_{\text{WMLES, QA}}$  is Reynolds number independent. Indeed as shown in Sec. IV, a given mesh can handle a very large number of Reynolds number while keeping a satisfactory prediction of the wall fluxes. For a spatially developing boundary layer flow,  $T_{\text{WMLES, QA}}$  is slightly Reynolds number dependent. Indeed, if we can estimate that the mesh size in the streamwise  $\Delta_x$  and spanwise  $\Delta_z$  directions is proportional to the boundary layer thickness  $\delta$ .<sup>1</sup> Thus, we have  $\Delta_x \propto \delta$ ,  $\Delta_z \propto \delta$ , and  $\Delta_y = \text{cst}$ . For a fixed domain volume  $V$ , the number of cells  $N$  is  $N = V/(\Delta_x \Delta_y \Delta_z) \propto V/(\Delta_y \delta^2)$ . For a flat plate boundary layer, the boundary layer thickness is related to the local Reynolds number  $Re_x = \rho_\infty U_\infty x / \mu_\infty$  by<sup>38</sup>

$$\delta = 0.38x / Re_x^{0.2}. \quad (\text{A1})$$

As a result, the number of cells is related to the local Reynolds number by  $N \propto Re_x^{0.4}$ , which gives

$$T_{\text{WMLES, QA}} = O(Re_x^{0.4}). \quad (\text{A2})$$

However, even on plane channel flow, the computational time of a WMLES simulation using a TBL model for a given number of Gauss points  $T_{\text{WMLES, TBL}}$  is Reynolds number dependent, since a larger number of Gauss points must be used as the Reynolds number increases. Running WMLES computations of a plane channel flow with the TBL model and various number of Gauss points  $nb_{\text{Gauss}} = \{10, 20, 32, 64, 100\}$ , we can estimate the ratio between the computational time with TBL model and the computational time with the QA model, which is also the computational time without wall model since we assume the cost of the QA model negligible

$$\frac{T_{\text{WMLES, TBL}}}{T_{\text{WMLES, QA}}} = 1 + \frac{\Delta T_{\text{TBL}} N_{\text{int}}}{\Delta T_{\text{QA}} N_{\text{cell}}}. \quad (\text{A3})$$

Equation (A3) gives the computational time overhead of the TBL model compared to the computational with no model or with the QA model. In this equation,  $\Delta T_{\text{TBL}}$  and  $\Delta T_{\text{QA}}$  are, respectively, the computational time per iteration and per wall-adjacent cell using the TBL model and the QA model. These local computational times are, respectively, weighted by the number of wall-adjacent cells or equivalently the number of wall interfaces  $N_{\text{int}}$  and by the total number of cells  $N_{\text{cell}}$ , since the TBL model is only solved in the wall-adjacent cells and not over the entire domain. Thus, the TBL model computational overhead is dependent on the ratio  $N_{\text{int}}/N_{\text{cell}}$ . Note that for a boundary layer mesh of size  $N_x \times N_y \times N_z$  with  $y$  being the wall-normal direction,  $N_{\text{int}}/N_{\text{cell}} \approx 1/N_y$ . If we combine the data of Table IX with Eq. (A3), we can plot  $\frac{T_{\text{WMLES, TBL}}}{T_{\text{WMLES, QA}}}$  versus  $\delta_1^+ \text{max}$  for the first three number of Gauss points  $\{10, 20, 32\}$  as shown in Fig. 23. This plot corresponds to a given ratio  $N_{\text{int}}/N_{\text{cell}} = 1/100$ . However, changing this ratio only shifts the curve up or down without changing its slope.

Figure 23 gives cost of a WMLES simulation with TBL model as a function of  $\delta_1^+ \text{max}$ . In order to obtain this cost as a function of the Reynolds number, we need to relate  $\delta_1^+$  to the Reynolds number  $Re_x$ . This can be done considering the flat plate relations  $\bar{\tau}_w / (0.5 \rho_\infty U_\infty^2) = 0.0594 / Re_x^{0.2}$  and Eq. (A1), from which we obtain  $\delta_1^+ = O(Re_x^{0.7})$ . Finally, we use Eq. (A2),  $\frac{T_{\text{WMLES, TBL}}}{T_{\text{WMLES, QA}}} = (\delta_1^+ \text{max})^{0.82}$  and  $\delta_1^+ = O(Re_x^{0.7})$  to get the Reynolds number dependency of a WMLES with TBL model:  $T_{\text{WMLES, TBL}} \propto ((Re_x^{0.7})^{0.82} (Re_x)^{0.4})$ , which gives  $T_{\text{WMLES, TBL}} = O(Re_x)^{0.97}$ .

### 3. Numerical method used for solving the compressible TBL wall model

The method used to solve Eqs. (10) and (11) is described in this section. The coupling between these two equations arises from the density profile  $\bar{\rho}(y)$ , the viscosity profile  $\bar{\mu}(y)$ , and the viscous heating term  $\bar{u}(y) \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} y + \bar{\tau}_w \right)$ .

As described in Sec. II, the wall model operates locally in a given cell. It integrates the TBL equations from the wall to the cell center along a one-dimensional line aligned with the wall-normal direction.

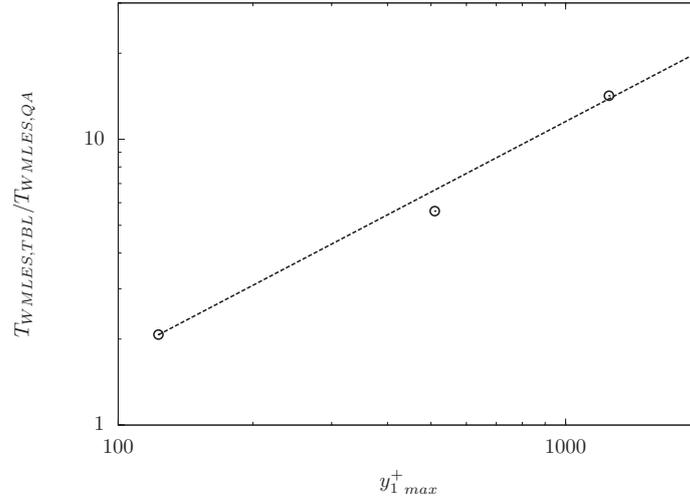


FIG. 23. Computational overhead of the TBL model for  $N_{int}/N_{cell} = 1/100$ : ( $\odot$ ) WMLES with TBL model of a plane channel flow: from left to right,  $nb_{Gauss} = \{10, 20, 32\}$ , (---)  $\frac{T_{WMLES,TBL}}{T_{WMLES,QA}} = (\delta_{1,max}^+)^{0.82}$ .

In the following, we describe the numerical procedure used to integrate Eqs. (10) and (11) in a cell adjacent to a wall boundary. Here, we choose to integrate the equations using Gauss quadrature as proposed by Monfort.<sup>40</sup>

First, we focus on the momentum equation. Then the integration of the energy equation is presented. Finally, the procedure used to couple Eqs. (10) and (11) is presented.

#### a. Integration of the momentum equation on an isothermal wall

As explained in Sec. II B, the density and viscosity at the wall  $\bar{\rho}_w$  and  $\bar{\mu}_w$  are directly available for an isothermal wall. In addition, the density and viscosity profiles  $\bar{\rho}(y)$  and  $\bar{\mu}(y)$  can be computed from the temperature profile  $\bar{T}(y)$  between the wall and the cell center.

Since in this section we only consider the momentum equation, no coupling procedure is involved between the momentum and the energy equation so that the temperature, density, and viscosity profiles can be considered as constant along the wall-normal direction  $\mathbf{n}$ .

Integrating the momentum equation (10) leads to

$$(\bar{\mu}(y) + \mu_t(y)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(y) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y + \bar{\tau}'_w. \quad (\text{A4})$$

The turbulent viscosity  $\mu_t$  is given by Eq. (12).

Equation (A4) is first expressed in wall coordinates using the following relationships:

$$\begin{cases} u_\tau = \sqrt{\frac{|\bar{\tau}'_w|}{\bar{\rho}_w}}, \\ y^+ = y \frac{\bar{\rho}_w u_\tau}{\bar{\mu}_w}, \\ u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \\ F^+ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\bar{\mu}_w}{u_\tau^2 \bar{\rho}_w}. \end{cases}$$

The momentum equation now reads

$$\left[ \frac{\bar{\mu}(y^+)}{\bar{\mu}_w} + \frac{\bar{\rho}(y^+)}{\bar{\rho}_w} (\kappa y^+ V D(y^+))^2 \right] \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) = F^+ y^+ + \text{sign}(\bar{\tau}'_w). \quad (\text{A5})$$

TABLE X. Choice of solution.

Case	$\overline{\tau'_w}$	$sign_2$	$F^+$	$F^+y^+ + sign_2$	$\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)$	$sign_1$	D
1	>0	1	<0	>0 ( $y^+ < \frac{-1}{F^+}$ )	>0	1	>0
2	>0	1	<0	<0 ( $y^+ > \frac{-1}{F^+}$ )	<0	-1	>0
3	>0	1	>0	>0 ( $y^+ > \frac{-1}{F^+}$ )	>0	1	>0
4	>0	1	>0	<0: impossible	...	...	...
5	<0	-1	<0	Not allowed ( $\tilde{u}'_1 > 0$ )	...	...	...
6	<0	-1	>0	>0 ( $y^+ > \frac{1}{F^+}$ )	>0	1	>0
7	<0	-1	>0	<0 ( $y^+ < \frac{1}{F^+}$ )	<0	-1	>0

$sign(\overline{\tau'_w})$  is necessary to take into account negative values of  $\overline{\tau'_w}$ , which can arise for weak velocity under adverse pressure gradients. The sign of  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}$  also needs to be introduced because of the absolute value. For simplicity, we note

$$sign_1 = sign(\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)); sign_2 = sign(\overline{\tau'_w}); \text{ and } Lm^{2+} = (\kappa y^+ V D(y^+))^2.$$

For a given value of  $y^+$ , Eq. (A5) can be written as a second order polynomial  $A (\frac{\partial u^+}{\partial y^+})^2 + B \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + C = 0$  with

$$\begin{cases} A = sign_1 \frac{\overline{\rho_w}(y^+)}{\rho_w} Lm^{2+}(y^+), \\ B = \frac{\overline{\mu}(y^+)}{\mu_w}, \\ C = -(F^+ y^+ + sign_2). \end{cases}$$

We note  $\Delta = (\frac{\overline{\mu}(y^+)}{\mu_w})^2 + 4sign_1 \frac{\overline{\rho_w}(y^+)}{\rho_w} Lm^{2+}(F^+ y^+ + sign_2)$  and the 2 solutions  $\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$  or equivalently  $\frac{-2C}{B \pm \sqrt{\Delta}}$  read

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) = \frac{2(F^+ y^+ + sign_2)}{\frac{\overline{\mu}(y^+)}{\mu_w} \pm \sqrt{\Delta}}. \quad (A6)$$

In order to select the appropriate solution, a table summarizing the different possibilities is now constructed. The denominator in Eq. (A6) is noted  $D$ .

In Table X, the sign of  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)$  is deduced from the sign of  $\overline{\tau'_w}$  and the location of  $y^+$  compared to  $\frac{-sign_2}{F^+}$ , which is the point where  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) = 0$ . More precisely,  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)$  takes the same sign as  $\overline{\tau'_w}$  when  $y^+ < \frac{-sign_2}{F^+}$  and the opposite sign when  $y^+ > \frac{-sign_2}{F^+}$ . Then the sign of  $D$  is deduced from the sign of  $F^+ y^+ + sign_2$  and  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)$  (Eq. (A6)).

Case 5 where  $\overline{\tau'_w} < 0$  and  $F^+ < 0$  would lead to a negative velocity at  $\delta_1$  which is not possible since in the local frame of reference  $(\mathbf{x}', \mathbf{n})$  the velocity imposed is  $\tilde{u}'_1 > 0$ . Finally, we deduce that  $D$  is always positive, so that the solution of the second order polynomial is

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) = \frac{2(F^+ y^+ + sign_2)}{\frac{\overline{\mu}(y^+)}{\mu_w} + \sqrt{(\frac{\overline{\mu}(y^+)}{\mu_w})^2 + 4sign_1 \frac{\overline{\rho_w}(y^+)}{\rho_w} Lm^{2+}(F^+ y^+ + sign_2)}}. \quad (A7)$$

From this velocity derivative, the velocity at  $\delta_1$  can be recovered by integration. For cases 2 and 6, the integral has to be splitted because the values of  $sign_1$  and  $sign_2$  change at  $y^+ = \frac{-sign_2}{F^+}$

$$u_1^+ = \frac{\tilde{u}'_1}{u_\tau} = \int_0^{\frac{-sign_2}{F^+}} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(\xi) d\xi + \int_{\frac{-sign_2}{F^+}}^{y_1^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(\xi) d\xi. \quad (A8)$$

For the other cases,  $sign_1$  and  $sign_2$  keep constant values and  $u_1^+$  can be directly expressed as

$$u_1^+ = \frac{\tilde{u}_1^+}{u_\tau} = \int_0^{y_1^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(\xi) d\xi. \quad (\text{A9})$$

In order to compute these integrals, a Gauss-Legendre quadrature method is used. It consists in approximating the integral by a weighted sum on  $n_g$  points

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n_g} w_i f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{b+a}{2}\right). \quad (\text{A10})$$

The point abscissas  $\xi_i$  and weights  $w_i$  are specifically chosen to give the exact integral for a polynomial of degree  $2n - 1$ . They are obtained from the Legendre polynomials. If  $P_n(\xi)$  is the  $n$ th Legendre polynomial, then the abscissas  $\xi_i$  are the  $n_g$  zeroes of  $P_n(\xi)$  and the weights are given by  $w_i = \frac{2}{(1-\xi_i^2)[P_n'(\xi_i)]^2}$ .

At this point, it can be seen that the unknown  $\overline{v_w}$  or equivalently  $u_\tau$  does not appear explicitly in Eq. (A9), since it is hidden in  $y_1^+$  and  $F^+$ . Thus, a Newton method is chosen to solve Eq. (A11) where the unknown is  $u_\tau$

$$f(u_\tau) = u_\tau u_1^+ - u_1 = 0. \quad (\text{A11})$$

As part of the Newton method, the derivative of  $f$  with respect to  $u_\tau$  is needed

$$\frac{\partial f}{\partial u_\tau} = u_1^+ + u_\tau \frac{\partial u_1^+}{\partial u_\tau}. \quad (\text{A12})$$

$u_1^+$  is obtained from Eq. (A9). To compute the term  $\frac{\partial u_1^+}{\partial u_\tau}$ , we have to compute the derivative of an integral with an upper limit  $y_1^+$  which depends on  $u_\tau$ . If  $k(u_\tau) = \int_a^{b(u_\tau)} l(u_\tau, \xi) d\xi$ , then the derivative of  $k$  with respect to  $u_\tau$  is

$$k'(u_\tau) = \int_a^{b(u_\tau)} \frac{\partial l}{\partial u_\tau}(u_\tau, \xi) d\xi + l(u_\tau, b(u_\tau))b'(u_\tau). \quad (\text{A13})$$

In our case, the integrand is given by Eq. (A6). Here, we rewrite this relation so that the dependency to the variable of integration and  $u_\tau$  appears explicitly

$$l(u_\tau, \xi) = \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(u_\tau, \xi) = \frac{2\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \frac{\overline{\mu_w}}{u_\tau^2 \rho_w^2} \xi + sign_2\right)}{\frac{\overline{\mu}(\xi)}{\mu_w} + \sqrt{\left(\frac{\overline{\mu}(\xi)}{\mu_w}\right)^2 + 4sign_1 \frac{\overline{\rho}(\xi)}{\rho_w} Lm^{2+} \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \frac{\overline{\mu_w}}{u_\tau^2 \rho_w^2} \xi + sign_2\right)}}. \quad (\text{A14})$$

The upper limit  $b(u_\tau)$  is here  $y_1^+(u_\tau) = \delta_1 \frac{\overline{\rho_w} u_\tau}{\overline{\mu_w}}$ .  
After some calculation, we obtain

$$\frac{\partial l}{\partial u_\tau}(u_\tau, \xi) = \frac{-6F^+ \xi \frac{1}{u_\tau} \left[ \left(\frac{\overline{\mu}}{\mu_w} + \sqrt{\Delta}\right) \sqrt{\Delta} - 2(F^+ \xi + sign_2) (sign_1 \frac{\overline{\rho}}{\rho_w} Lm^{2+}) \right]}{\left(\frac{\overline{\mu}}{\mu_w} + \sqrt{\Delta}\right)^2 \sqrt{\Delta}}. \quad (\text{A15})$$

Finally, according to Eq. (A13)

$$\frac{\partial u_1^+}{\partial u_\tau} = \int_0^{y_1^+} \frac{\partial l}{\partial u_\tau}(u_\tau, \xi) d\xi + \frac{2\delta_1 \frac{\bar{\rho}_w}{\bar{\mu}_w} (F^+ y_1^+ + \text{sign}_2)}{\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_w} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_w}\right)^2 + 4\text{sign}_1 \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_w} Lm^{2+} (F^+ y_1^+ + \text{sign}_2)}}. \quad (\text{A16})$$

The Newton method can now iterate on  $u_\tau$ . At iteration  $n$  the updated  $u_\tau^{n+1}$  is computed from Eqs. (A11) and (A12) according to

$$u_\tau^{n+1} = u_\tau^n - \frac{f}{\frac{\partial f}{\partial u_\tau}}. \quad (\text{A17})$$

The loop is stopped according to a criterion on the relative error between two consecutive iterations

$$\left| \frac{u_\tau^{n+1} - u_\tau^n}{u_\tau^{n+1}} \right| < 10^{-5}. \quad (\text{A18})$$

### b. Integration of the energy equation

Integrating the energy equation (11) gives

$$\bar{\phi}_w = C_p \left( \frac{\bar{\mu}(y)}{Pr} + \frac{\mu_t(y)}{Prt} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(y) \bar{\tau}(y), \quad (\text{A19})$$

where  $\bar{\tau} = (\bar{\mu}(y) + \mu_t(y)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ .

Integrating to the cell center, the temperature gradient in Eq. (A19) gives

$$T_w = \tilde{T}_1 + \frac{\bar{\phi}_w}{C_p} \int_0^{\delta_1} \frac{1}{\left( \frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_t(\xi)}{Prt} \right)} d\xi + \frac{1}{C_p} \int_0^{\delta_1} \frac{\bar{u}(\xi) \bar{\tau}(\xi)}{\left( \frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_t(\xi)}{Prt} \right)} d\xi. \quad (\text{A20})$$

The unknown  $\bar{\phi}_w$  appears explicitly

$$\bar{\phi}_w = \frac{C_p (T_w - \tilde{T}_1) - \int_0^{\delta_1} \frac{\bar{u}(\xi) \bar{\tau}(\xi)}{\left( \frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_t(\xi)}{Prt} \right)} d\xi}{\int_0^{\delta_1} \frac{1}{\left( \frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_t(\xi)}{Prt} \right)} d\xi}. \quad (\text{A21})$$

Once the momentum equation has been solved, all the terms in the right-hand side of Eq. (A21) are directly available:

- $\mu_t$  is reconstructed from the local velocity gradient  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+)$  (Eq. (A7)) and the length scale  $Lm^2 = (\kappa y V D(y))^2$  as follows:

$$\mu_t(y) = \frac{\bar{\rho}(y) Lm^2 \left| \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(y^+) \right| \bar{\rho}_w u_\tau^2}{\bar{\mu}_w}, \quad (\text{A22})$$

- and the viscous heating term is expressed as :  $\bar{\tau}(y) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y + \bar{\tau}'_w$  (Eq. (A4)).

Again the Gauss-Legendre quadrature is used to compute the integrals, leading to a numerical solution for  $\bar{\phi}_w$ .

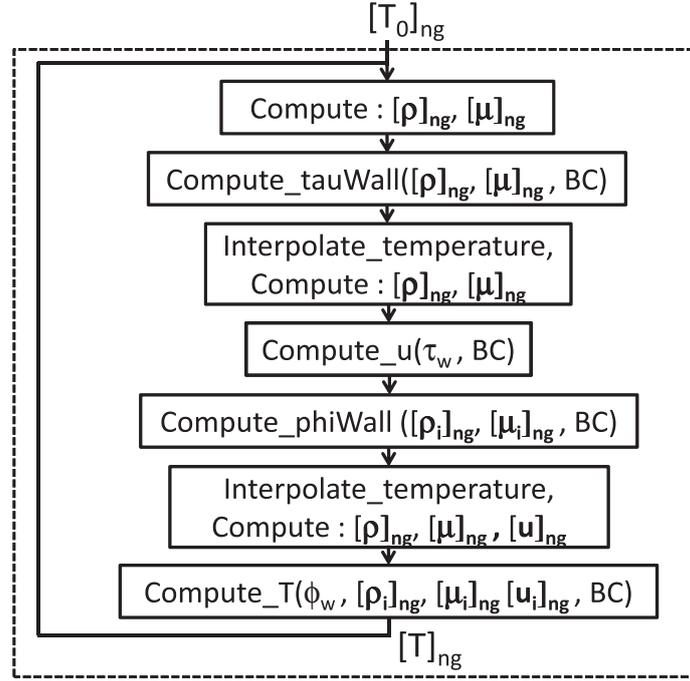


FIG. 24. Coupling procedure.

### c. Equation coupling procedure

The methods described in Secs. A 3 a and A 3 b integrate separately the momentum and energy equations. In order to solve this system in a coupled way, we remark that the only variables depending on the temperature in the momentum equation are the density and viscosity profiles  $\bar{\rho}(y)$  and  $\bar{\mu}(y)$ , which can both be computed from the temperature profile  $\bar{T}(y)$ . As a result, the only variable that controls the coupling of this two-equation system is the temperature profile.

As previously explained, the momentum and energy equations are solved using the Gauss-Legendre quadrature with  $n_g$  points. Thus, the function to integrate must be computed at the  $n_g$  Gauss points. Since the density and viscosity profiles enter in the definition of this function, the temperature profile from which these profiles are computed must be discretized into a vector of size  $n_g$ .

An iterative procedure shown in Fig. 24 assumes an initial temperature vector  $[\bar{T}_0]_{n_g}$ . Then at each iteration, the five following steps are repeated:

- *Step 1*: The perfect gas hypothesis combined with the constant pressure  $P$  along the wall-normal direction allows to compute the density vector  $[\bar{\rho}]_{n_g}$  directly from the temperature vector. Again directly from the temperature vector, the Sutherland law is used to compute the viscosity vector  $[\bar{\mu}]_{n_g}$ ;
- *Step 2*: Once the density and viscosity profiles are known on the interval  $[0, y_1^+]$ , a routine that implements the method described in Sec. A 3 a computes the wall friction  $\tau_w'$  from the wall model boundary conditions and the density and viscosity vectors;
- *Step 3*: The velocity profile is now reconstructed at Gauss points on the interval  $[0, y_1^+]$  using Eq. (A8) or Eq. (A9). If  $y_{g_i}$  denotes the  $i$ th Gauss point, we have

$$u(y_{g_i}) = u_\tau \int_0^{y_{g_i}^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}(\xi) d\xi. \quad (\text{A23})$$

Here, one difficulty arises because the density and viscosity appear in  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}$  (Eq. (A7)). If we wanted the velocity at  $\delta_1$ , we could use directly the density and viscosity vectors computed

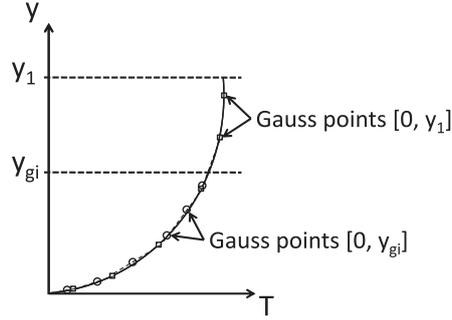


FIG. 25. Interpolation from global to local integration intervals.

previously, whose values are given at Gauss points on the interval  $[0, y_1^+]$ . But here we want to compute the integral on the intervals  $[0, y_{g_i}^+]$  where  $y_{g_i}^+ \in [0, y_1^+]$ , so that we do not know the values of  $\bar{\rho}(y)$  and  $\bar{\mu}(y)$  at these intermediate points. To overcome this problem, the temperature vector is linearly interpolated using the right and left neighbouring values as shown in Fig. 25. Once the temperature vector is interpolated on the interval  $[0, y_{g_i}^+]$ , the corresponding density and viscosity vectors written  $[\bar{\rho}_i]_{n_g}$  and  $[\bar{\mu}_i]_{n_g}$  can be computed as explained in *step 1*. Note that in *step 2*, the cases 2 or 6 of Table X can occur, which means that the integral is not computed on the interval  $[0, y_1^+]$  but on the intervals  $[0, \frac{-sign_2}{F^+}]$  and  $[\frac{-sign_2}{F^+}, y_1^+]$ . Thus, interpolation is also needed in these two cases;

- *Step 4*: Then the wall heat flux  $\bar{\phi}_w$  is computed according to the procedure described in Sec. A 3 b. Since the integral to compute goes from the wall to  $\delta_1$  (Eq. (A21)), the density and viscosity vectors as well as the velocity vector which has been computed at *step 3* can be directly used;
- *Step 5*: Finally, the temperature profile is computed at Gauss points on the interval  $[0, \delta_1]$  in the same manner as shown in Eq. (A20)

$$\bar{T}(y_{g_i}) = T_w - \frac{\bar{\phi}_w}{C_p} \int_0^{y_{g_i}} \frac{1}{\left(\frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_i(\xi)}{Pr_t}\right)} d\xi - \frac{1}{C_p} \int_0^{y_{g_i}} \frac{\bar{u}(\xi)\bar{\tau}(\xi)}{\left(\frac{\bar{\mu}(\xi)}{Pr} + \frac{\mu_i(\xi)}{Pr_t}\right)} d\xi. \quad (\text{A24})$$

As for the velocity profile, the values of density, viscosity, and velocity are not known at the intermediate Gauss points and interpolation is needed.

In order to stop this loop, a criterion is defined on the variable on which the procedure iterates, which is here the temperature vector  $[\bar{T}]_{n_g}$ . At each iteration, the absolute relative error between two consecutive temperature vectors is computed. Then a norm must be chosen to define the threshold under which the error is considered negligible. We choose here to use the maximum error contained in the error vector

$$\max_{i=1, n_g} \left| \frac{\bar{T}_i^{n+1} - \bar{T}_i^n}{\bar{T}_i^{n+1}} \right| < 10^{-5}. \quad (\text{A25})$$

#### 4. Derivation of the mean momentum balance

The mean momentum balance equation can be derived in the same way as RANS boundary layer equations are derived. For simplicity, we consider the two-dimensional case. We start from the streamwise LES momentum equation in conservative form

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = S_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y}, \quad (\text{A26})$$

where  $\tau_{ij}$  is the total stress tensor

$$(\tilde{\mu} + \mu_{sgs})\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}(\tilde{\mu} + \mu_{sgs})\delta_{ij}\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \quad (\text{A27})$$

and  $S_x$  is the momentum source term defined in Eq. (30). Then the LES variables are splitted into a steady part  $\langle \cdot \rangle$  and a remaining unsteady part. The fluctuation of the density  $\tilde{\rho}$  is neglected and we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(\langle \tilde{u} \rangle + \tilde{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\rho}(\langle \tilde{u} \rangle + \tilde{u}')(\langle \tilde{v} \rangle + \tilde{v}')}{\partial y} \\ = \langle S_x \rangle + S_x' - \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \rangle}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} \\ + \frac{\partial \langle \tau_{11} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tau_{21} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{21}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

Developing and applying the averaging operator  $\langle \cdot \rangle$  leads to

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u} \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u}^2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u} \rangle \langle \tilde{v} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle}{\partial y} \\ = \langle S_x \rangle - \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tau_{11} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tau_{21} \rangle}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

Introducing the same splitting into the mass conservation equation gives

$$\frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{v} \rangle}{\partial y} = 0. \quad (\text{A30})$$

Cancelling the  $\frac{\partial}{\partial x}$  derivatives since we consider a plane channel flow, and integrating Eq. (A30) over  $y$  with  $\langle v \rangle = 0$  at the wall gives

$$\langle \tilde{v} \rangle = 0. \quad (\text{A31})$$

Using Eq. (A31) and  $\frac{\partial \langle \tilde{v} \rangle}{\partial y} \ll \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}$  for this boundary layer flow, Eq. (A29) becomes

$$\frac{\partial \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle}{\partial y} = \langle S_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} [(\tilde{\mu} + \mu_{sgs}) \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}]. \quad (\text{A32})$$

Integrating over  $y$  finally gives the mean momentum equation for plane channel flow

$$(\tilde{\mu} + \mu_{sgs}) \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle = \langle \tilde{\tau}_w \rangle - \langle S_x \rangle y. \quad (\text{A33})$$

<sup>1</sup> U. Piomelli and E. Balaras, "Wall-layer models for large-eddy simulations," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 349–374 (2002).

<sup>2</sup> P. R. Spalart, S. Deck, M. L. Shur, K. D. Squires, M. K. Strelets, and A. Travin, "A new version of detached eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **20–3**, 181–195 (2006).

<sup>3</sup> P. Spalart, "Detached-eddy simulation," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 181–202 (2009).

<sup>4</sup> S. Hoyas and J. Jimenez, "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_{\tau} = 2003$ ," *Phys. Fluids* **18**, 011702 (2006).

<sup>5</sup> B. S. Pethukov, "Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties," *Adv. Heat Transfer* **6**, 503–564 (1970).

<sup>6</sup> A. Keating and U. Piomelli, "A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation," *J. Turbul.* **7**(12), 1–24 (2006).

<sup>7</sup> F. Nicoud, J. S. Baggett, P. Moin, and W. Cabot, "Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation," *Phys. Fluids* **13**, 2968–2984 (2001).

<sup>8</sup> J. A. Templeton, M. Wang, and P. Moin, "A predictive wall model for large-eddy simulation based on optimal control techniques," *Phys. Fluids* **20**, 065104 (2008).

- <sup>9</sup>F. Tessicini, L. Temmerman, and M. Leschziner, "Approximate near-wall treatments based on zonal and hybrid RANS-LES methods for LES at high Reynolds numbers," *Int. J. Heat Fluid Flow* **27**, 789–799 (2006).
- <sup>10</sup>P. Quéméré, P. Sagaut, and V. Couailler, "A new multi-domain/multi-resolution method for large-eddy simulation," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **36–4**, 391–416 (2001).
- <sup>11</sup>E. Labourasse and P. Sagaut, "Advance in RANS-LES coupling: A review and an insight on the NLDE approach," *Arch. Comput. Methods Eng.* **11–3**, 199–256 (2004).
- <sup>12</sup>E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli, "Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations," *AIAA J.* **34**, 1111–1119 (1996).
- <sup>13</sup>M. Wang and P. Moin, "Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows," *Phys. Fluids* **14**, 2043–2051 (2002).
- <sup>14</sup>Y. Benarafa and O. Cioni, "Temperature wall modelling for large-eddy simulation in a heated turbulent plane channel flow," *Int. J. Heat Mass Transfer* **50**, 4360–4370 (2007).
- <sup>15</sup>W. Kays, M. E. Crawford, and A. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer* (McGraw-Hill, 2004).
- <sup>16</sup>G. V. Diurno, E. Balaras, and U. Piomelli, "Wall-layer models for LES of separated flows," in *Modern Simulation Strategies for Turbulent Flows*, edited by B. Geurts (R.T. Edwards, Philadelphia, 2001), pp. 207–222.
- <sup>17</sup>W. Cabot, "Wall models in large eddy simulation of separated flow," Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 1997.
- <sup>18</sup>W. Cabot and P. Moin, "Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow," *Flow Turbul. Combust.* **63**, 269–291 (1999).
- <sup>19</sup>S. Kawai and J. Larsson, "A dynamic wall model for large-eddy simulation of high Reynolds number compressible flows," Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 2010.
- <sup>20</sup>S. Deck, "Delayed detached eddy simulation of the end-effect regime and side-loads in an overexpanded nozzle flow," *Shock Waves* **19–3**, 239–249 (2009).
- <sup>21</sup>J. Riou, E. Garnier, S. Deck, and C. Basdevant, "Improvement of delayed-detached eddy simulation applied to separated flow over missile fin," *AIAA J.* **47–2**, 345–360 (2009).
- <sup>22</sup>S. Trapier, S. Deck, and P. Duveaut, "Delayed detached eddy simulation and analysis of supersonic inlet buzz," *AIAA J.* **46–1**, 118–131 (2008).
- <sup>23</sup>N. Chauvet, S. Deck, and L. Jacquin, "Zonal detached eddy simulation of a controlled propulsive jet," *AIAA J.* **45–10**, 2458–2473 (2007).
- <sup>24</sup>N. Chauvet, S. Deck, and L. Jacquin, "Numerical study of mixing enhancement in a supersonic round jet," *AIAA J.* **45–7**, 1675–1687 (2007).
- <sup>25</sup>F. Simon, S. Deck, R. Guillen, P. Cayzac, and A. Merlen, "Zonal-detached-eddy simulation of projectiles in the subsonic and transonic regimes," *AIAA J.* **45–7**, 1606–1619 (2007).
- <sup>26</sup>E. Garnier, N. Adams, and P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Compressible Flows* (Springer, 2009).
- <sup>27</sup>P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol, *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence* (Imperial College Press, 2006).
- <sup>28</sup>O. Cabrit, "Direct simulations for wall modeling of multicomponent reacting compressible turbulent flows," *Phys. Fluids* **21**, 055108 (2009).
- <sup>29</sup>C. D. Rakopoulos, G. M. Kosmadakis, and E. G. Pariotis, "Critical evaluation of current heat transfer models used in CFD in-cylinder engine simulations and establishment of comprehensive wall-function formulation," *Appl. Energy* **87**, 1612–1630 (2010).
- <sup>30</sup>J. Larsson and S. Kawai, "Wall-modeling in large eddy simulation: Length scales, grid resolution and accuracy," Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 2010.
- <sup>31</sup>L. Cambier and M. Gazaix, "elsA: An efficient object-oriented solution to CFD complexity," in *Proceedings of the 40th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno*, AIAA Paper No. 2002-0108, 2002, pp. 14–17.
- <sup>32</sup>S. Rajagopalan and R. A. Antonia, "Some properties of the large structure in a fully developed turbulent duct flow," *Phys. Fluids* **22**, 614–622 (1979).
- <sup>33</sup>I. Marusic, G. J. Kunkel, and F. Porté-Agel, "Experimental study of wall boundary conditions for large-eddy simulation," *J. Fluid Mech.* **446**, 309–320 (2001).
- <sup>34</sup>I. Marusic, B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits, and K. R. Sreenivasan, "Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues," *Phys. Fluids* **22**, 065103 (2010).
- <sup>35</sup>T. Cebeci and A. Smith, *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Applied Mathematics and Mechanics (Academic, 1974), Vol. 15.
- <sup>36</sup>E. R. Van Driest, "On turbulent flow near a wall," *J. Aeronaut. Sci.* **23**, 1007–1011, 1036 (1956).
- <sup>37</sup>B. Aupoix, and S. Viala, "Compressible turbulent boundary layer modelling," in *Transitional and Turbulent Compressible Flows*, Fluids Engineering Division Vol 224, edited by L. D. Kral, E. F. Spina, and C. Arakawa (ASME, Hilton Head Island, 1995), pp. 139–146.
- <sup>38</sup>J. Cousteix, *Turbulence et Couche limite* (Cepadues, 1989).
- <sup>39</sup>D. E. Coles, "The law of the wake in the turbulent boundary Layer," *J. Fluid Mech.* **1**, 191–226 (1956).
- <sup>40</sup>D. Monfort, S. Benhamadouche, and P. Sagaut, "Meshless approach for wall treatment in large-eddy simulation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **199**, 881–889 (2009).
- <sup>41</sup>V. C. Patel and M. R. Head, "Reversion of turbulent to laminar flow," *J. Fluid Mech.* **34**(2), 371–392 (1968).
- <sup>42</sup>G. N. Coleman, J. Kim, and R. D. Moser, "A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow," *J. Fluid Mech.* **305**, 159–183 (1995).
- <sup>43</sup>B. A. Kader, "Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers," *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1541–1544 (1981).
- <sup>44</sup>F. Nicoud and F. Ducros, "Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient," *Flow Turbul. Combust.* **62**(3), 183–200 (1999).

- <sup>45</sup> P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, 3rd ed. (Springer, 2006).
- <sup>46</sup> N. Hutchins and I. Marusic, "Large-scale influences in near-wall turbulence," *Philos. Trans. R. Soc.* **365**, 647–664 (2007).
- <sup>47</sup> B. J. Balakumar and R. J. Adrian, "Large and very large scale motions in channel and boundary-layer flows," *Philos. Trans. R. Soc.* **365**, 665–681 (2007).
- <sup>48</sup> H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo, "Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_{\tau} = 1020$  with  $Pr = 0.025$  and  $0.71$ ," *Int. J. Heat Fluid Flow* **25**, 404–419 (2004).
- <sup>49</sup> C. A. Sleicher and M. W. Rouse, "A convenient correlation for heat transfer to constant and variable property fluids in turbulent pipe flow," *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 677–683 (1973).
- <sup>50</sup> E. Lenormand, P. Sagaut, and L. Ta Phuoc, "Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel at moderate Reynolds number," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **32**, 369–406 (2000).
- <sup>51</sup> P. Quéméré and P. Sagaut, "Zonal multi-domain RANS/LES simulations of turbulent flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **40**(7), 903–925 (2002).
- <sup>52</sup> P. Sagaut, E. Montreuil, O. Labbé, and C. Cambon, "Analysis of the near-wall behaviour of some self-adaptive subgrid-scale models in finite-differenced simulations of channel flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **40**(10), 1275–1302 (2002).
- <sup>53</sup> O. Labbé, E. Montreuil, and P. Sagaut, "Large-eddy simulation of heat transfer over a backward facing step," *Int. J. Numer. Heat Transfer, Part A* **42**, 73–90 (2002).
- <sup>54</sup> E. Tromeur, E. Garnier, P. Sagaut, and C. Basdevant, "Large-eddy simulation of aero-optical effects in a turbulent boundary layer," *J. Turbul.* **5**(4), 005 (2003).
- <sup>55</sup> L. Larchevêque, P. Sagaut, I. Mary, O. Labbé, and P. Comte, "Large-eddy simulation of a compressible flow past a deep cavity," *Phys. Fluids* **15**(1), 193–210 (2003).
- <sup>56</sup> L. Larchevêque, P. Sagaut, T. Thiên-Hiêp Lê, and P. Comte, "Large-eddy simulation of a compressible flow in three-dimensional open cavity at high Reynolds number," *J. Fluid Mech.* **516**, 265–301 (2004).
- <sup>57</sup> E. Montreuil, O. Labbé, and P. Sagaut, "Assessment of non-Fickian subgrid-scale models for passive scalar in a channel," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **49**(1), 75–98 (2005).
- <sup>58</sup> F. Simon, S. Deck, P. Guillen, and P. Sagaut, "Reynolds-average Navier-Stokes/large-eddy simulations of supersonic base flow," *AIAA J.* **44**(11), 2578–2590 (2006).
- <sup>59</sup> V. Levasseur, P. Sagaut, and M. Mallet, "Subgrid models for large-eddy simulation using unstructured grids in a stabilized finite element framework," *J. Turbul.* **7**, N28 (2006).
- <sup>60</sup> J. Dandois, E. Garnier, and P. Sagaut, "Unsteady simulation of a synthetic jet in a cross," *AIAA J.* **44**(2), 225–238 (2006).
- <sup>61</sup> J. Dandois, E. Garnier, and P. Sagaut, "Numerical simulation of active separation control by synthetic jet," *J. Fluid Mech.* **574**, 25–58 (2007).
- <sup>62</sup> L. Larchevêque, P. Sagaut, and O. Labbé, "Large-eddy simulation of a subsonic cavity flow including asymmetric three-dimensional effects," *J. Fluid Mech.* **577**, 105–126 (2007).
- <sup>63</sup> F. Gand, S. Deck, V. Brunet, and P. Sagaut, "Flow dynamics past a simplified wing-body junction," *Phys. Fluids* **22**, 115111 (2010).

## 5.3 Compléments

Deux compléments à cet article sont proposés en annexe.

Le premier complément (annexe A) est une validation hors LES supplémentaire du modèle TBL sur un écoulement à faible Mach et grand écart de température (régime compressible IV du tableau 1.1). Une synthèse de la validation hors LES du modèle TBL est ensuite effectuée, reprenant toutes les validations des régimes compressibles I à IV.

Le second complément (annexe B) est une étude détaillée de la correction de la viscosité de sous-maille dans les cellules adjacentes à la paroi (équations 5.2 (35) et (37)). En effet, cette correction n'a été appliquée qu'à un seul modèle de sous-maille, le modèle de Smagorinsky, et un seul maillage. Cette étude détaillée étend l'application de cette correction au modèle de sous-maille WALE sur les deux maillages utilisés dans l'article ci-dessus. Une description détaillée de la manière d'implémenter cette correction est également donnée.

## 5.4 Conclusions intermédiaires

L'étude des erreurs liées à l'approche WMLES proposée dans l'article ci-dessus et les annexes associées permettent de tirer les conclusions intermédiaires suivantes :

- dans le modèle TBL, l'utilisation de l'adimensionnement  $y_3^+$  à la place de  $y^+$  dans la fonction d'amortissement de Van-Driest est cruciale pour une estimation correcte des flux pariétaux aux régimes compressibles III et IV. Ce résultat confirme qu'une validation hors LES du modèle de paroi est primordiale avant de mener un calcul WMLES ;
- l'erreur due aux conditions limites de type LES sur les équations TBL() ou TBL(dpdx) est faible, ce qui ne serait pas le cas pour les équations TBL(conv+dpdx)<sup>1</sup>. Cependant, cette erreur dépend de nombreux paramètres et il n'est pas certain qu'elle reste négligeable pour des nombres de Reynolds et des hauteurs de cellule  $\Delta_{y_1}^+$  différents de ceux testés ici ;
- l'erreur due à la modélisation de sous-maille dans les cellules adjacentes à la paroi s'est révélée importante avec le modèle de Smagorinsky. Le flux de sous-maille est en effet sur-estimé d'un facteur 100, ce qui induit environ 10% d'erreur sur le frottement pariétal. Nous avons proposé une correction à cette erreur, pouvant s'appliquer à n'importe quel modèle de sous-maille et ne nécessitant pas de direction statistiquement homogène ;
- sur des écoulements de canaux quasi-incompressible (régime compressible I) et supersonique (régime compressible III), une estimation correcte du frottement pariétal, du flux de chaleur pariétal et des profils de vitesse et de température est possible avec l'approche WMLES, pourvu que les trois sources d'erreur correspondant aux trois points précédents soient correctement traitées.

---

1. Voir le tableau 4.4 pour les notations associées aux équations TBL



---

## Effet de la méthode numérique sur la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi

---

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>6.2</b>	<b>Le bilan de quantité de mouvement comme outil d'étude de la WMLES . .</b>	<b>142</b>
6.2.1	Formulation discrétisée du bilan de quantité de mouvement . . . . .	142
6.2.2	Un lien entre le bilan de quantité de mouvement, le frottement pariétal et le profil vitesse . . . . .	143
6.2.3	Conséquences des flux d'origine numérique au bilan de quantité de mouvement . . . . .	144
<b>6.3</b>	<b>Effet de la dissipation artificielle sur l'approche WMLES . . . . .</b>	<b>145</b>
6.3.1	Maillage grossier . . . . .	145
6.3.2	Maillage fin . . . . .	148
<b>6.4</b>	<b>Effet du modèle de sous-maille sur l'approche WMLES . . . . .</b>	<b>152</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusions intermédiaires . . . . .</b>	<b>155</b>

---

### 6.1 Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre

L'écoulement de canal étudié dans le chapitre précédent possède une géométrie simple sur laquelle la qualité du maillage est idéale. Pour des cas de calculs présentant une géométrie plus

complexe ou des effets physiques impliquant des gradients plus abrupts, la méthode numérique utilisée dans le chapitre précédent va manquer de robustesse. Ce chapitre est donc dédié à l'étude de la WMLES avec une méthode numérique plus robuste, étape indispensable pour l'application de la WMLES à des écoulements plus complexes.

On montrera tout d'abord que le bilan de quantité de mouvement appliqué à l'écoulement moyen constitue un outil pour étudier certaines erreurs générées par la WMLES. Puis, l'augmentation de la robustesse de la méthode numérique s'opérera suivant deux aspects. Le premier est l'ajout de dissipation artificielle au schéma de discrétisation spatial. Le second est l'utilisation du modèle de sous-maille WALE [Nicoud and Ducros, 1999], qui se montrera plus robuste que le modèle de Smagorinsky avec fonction sélective sur l'écoulement de jet débouchant étudié au chapitre 9.

Il est à noter qu'à notre connaissance, aucune étude spécifique concernant l'effet de la dissipation artificielle sur l'approche WMLES existe dans la littérature, bien que ce problème soit crucial pour étendre l'utilisation de la WMLES à des applications complexes.

## 6.2 Le bilan de quantité de mouvement comme outil d'étude de la WMLES

L'étude de l'erreur due au modèle de sous-maille menée dans le paragraphe 5.2 IV.C. a montré que si l'équation de quantité de mouvement selon  $x$  appliquée au champ LES moyen :

$$(\langle \tilde{\mu} \rangle + \langle \mu_{sgs} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle = \langle \tilde{\tau}_p \rangle - \langle S_x \rangle y \quad (6.1)$$

n'est pas vérifiée, alors le profil de vitesse et le frottement pariétal sont mal estimés. Le bilan de quantité de mouvement semble donc constituer un outil pour expliquer les raisons d'une mauvaise estimation du frottement pariétal et du profil de vitesse, ce qui est d'un intérêt majeur pour la validation de l'approche WMLES.

Pour montrer en quoi le bilan de quantité de mouvement permet d'étudier certaines sources d'erreur liées à la WMLES, la forme discrète aux centres des cellules de l'équation 6.1 sera tout d'abord donnée. Puis, le lien entre le bilan de quantité de mouvement et le frottement pariétal sera expliqué. Pour finir, on appliquera le bilan de quantité de mouvement aux calculs menés dans le paragraphe 5.2, ce qui constituera un premier exemple d'application du bilan de quantité de mouvement comme outil d'analyse de la WMLES.

### 6.2.1 Formulation discrétisée du bilan de quantité de mouvement

L'équation 6.1 correspond à la forme continue du bilan de quantité de mouvement. Or, dans le paragraphe 5.2 IV.C., nous avons tracé le bilan de quantité de mouvement aux centres des cellules

sous sa forme discrète. Pour analyser ces graphiques, il est donc nécessaire de chercher le lien entre la forme continue et la forme discrète aux centres des cellules de l'équation 6.1.

Du point de vue du code de calcul utilisé ici, on a vu dans le chapitre 3 que l'équation de quantité de mouvement correspond à un bilan de flux vérifié aux interfaces entre cellules (équation 3.2). Si la dissipation artificielle décrite dans le paragraphe 3.2.1.3 est activée, le flux total  $F_{j-1/2}$  à un interface  $j - 1/2$  est la somme du flux convectif, diffusif et de dissipation artificielle :

$$F_{j-1/2} = F_{c_{j-1/2}} + F_{d_{j-1/2}} + d_{j-1/2} \quad (6.2)$$

Pour transposer aux centres des cellules le bilan de quantité de mouvement aux interfaces, il faut tenir compte des erreurs supplémentaires suivantes :

- l'approximation du profil de vitesse par une fonction linéaire par morceaux, ce qui n'est pas vérifié dans les premières cellules au dessus de la paroi d'un maillage WMLES (voir le paragraphe 5.2 III.). Cette approximation conduit à une mauvaise estimation du gradient de vitesse aux centres des cellules près de la paroi, impactant à la fois le flux diffusif et la viscosité de sous-maille, dans laquelle le gradient de vitesse intervient ;
- l'erreur de troncature du schéma de discrétisation spatial.

Ces deux erreurs rentrent dans le cadre des erreurs de sous-maille  $E_{SGS}$  et de discrétisation spatiale  $E_{NUM}$  (voir le tableau 4.5). La forme discrète aux centres des cellules de l'équation 6.1 doit donc tenir compte de ces deux sources d'erreur supplémentaires, incluses sous la forme d'un flux supplémentaire noté  $e$ . On obtient alors à un centre de cellules  $j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \langle \tilde{\mu}_j \rangle + \langle \mu_{sgs_j} \rangle \right) \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j - \langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle = \langle r h s_j \rangle \\ \langle r h s_j \rangle = \langle \tilde{\tau}_p \rangle - \langle S_x \rangle y_j \\ \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y} = \frac{\langle \tilde{u}_{j+1/2} \rangle - \langle \tilde{u}_{j-1/2} \rangle}{\Delta_y} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

### 6.2.2 Un lien entre le bilan de quantité de mouvement, le frottement pariétal et le profil vitesse

Nous venons de voir que la forme discrète du bilan de quantité de mouvement aux centres des cellules met en jeu deux flux d'origine purement numérique  $d_j$  et  $e_j$ . Pour estimer l'effet de ces flux numériques sur la qualité du profil de vitesse et du frottement pariétal, il est intéressant d'estimer la dépendance de ces deux derniers aux flux du bilan de quantité de mouvement donné par l'équation 6.3.

Pour exprimer vitesse et frottement pariétal en fonction des quantités débitantes, Fukagata et al. [2002] ont proposé d'intégrer une fois selon  $y$  l'équation 6.1 pour obtenir le profil de vitesse et deux fois pour obtenir le frottement pariétal. Suivant cette méthode, on obtient pour un canal plan

bi-périodique, quasi-incompressible et stationnaire en moyenne :

$$\begin{aligned}
 C_{fb} &= \underbrace{\frac{6}{Re_\delta}}_{\text{contribution laminaire}} + \underbrace{\frac{6}{\langle \tilde{\rho} \rangle \delta^2 u_b^2} \int_0^\delta \int_0^y \left( \mu_{sgs} \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle \right) d\xi dy}_{\text{contribution turbulente}} \\
 \frac{\langle \tilde{u}(y) \rangle}{u_b} &= \underbrace{\frac{1}{2} Re_\delta C_{fb} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right]}_{\text{contribution laminaire}} - \underbrace{\frac{Re_\delta}{\langle \tilde{\rho} \rangle u_b^2 \delta} \int_0^y \left( \mu_{sgs} \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle \right) d\xi}_{\text{contribution turbulente}}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

où  $C_{fb} = \langle \tilde{\tau}_p \rangle / (\frac{1}{2} \langle \tilde{\rho} \rangle u_b^2)$  et  $Re_\delta$  est le nombre de Reynolds débitant basé sur la demi-hauteur du canal :  $Re_\delta = \langle \tilde{\rho} \rangle u_b \delta / \langle \tilde{\mu} \rangle$ .

En utilisant la méthode des rectangles pour calculer les intégrales, l'équation ci-dessus appliquée à la forme discrète du bilan de quantité de mouvement aux centres des cellules (équation 6.3) donne :

$$\begin{aligned}
 C_{fb} &= \frac{6}{Re_\delta} + \frac{6}{\langle \tilde{\rho} \rangle \delta^2 u_b^2} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^j \left( \langle \mu_{sgs_k} \rangle \frac{\langle \tilde{u}_{k+1/2} \rangle - \langle \tilde{u}_{k-1/2} \rangle}{\Delta_y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_k - \langle d_k \rangle + \langle e_k \rangle \right) \Delta_y^2 \\
 \frac{\langle \tilde{u}_j \rangle}{u_b} &= \frac{1}{2} Re_\delta C_{fb} \left[ \frac{y_j}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y_j}{\delta} \right)^2 \right] - \frac{Re_\delta}{\langle \tilde{\rho} \rangle u_b^2 \delta} \sum_{k=0}^j \left( \langle \mu_{sgs_k} \rangle \frac{\langle \tilde{u}_{k+1/2} \rangle - \langle \tilde{u}_{k-1/2} \rangle}{\Delta_y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_k - \langle d_k \rangle + \langle e_k \rangle \right) \Delta_y
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

### 6.2.3 Conséquences des flux d'origine numérique au bilan de quantité de mouvement

Les flux  $d_j$  et  $e_j$  sont des flux d'origine numérique et ne sont donc pas basés sur la physique des écoulements pariétaux. Idéalement, on souhaiterait que la contribution  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$  au bilan de quantité de mouvement soit négligeable. Pour fixer les idées, on peut par exemple considérer que  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$  reste inférieur au flux de sous-maille  $\langle \mu_{sgs_j} \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ .

L'impact des flux  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$  sur le profil de vitesse et le frottement pariétal peut être évalué qualitativement grâce à l'équation 6.5. On observe en effet que  $\langle u_j \rangle$  dépend de l'intégrale selon  $y$  de  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ , alors que  $C_{fb}$  dépend de la double intégrale selon  $y$  de  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ . Une valeur élevée de  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ , mais localisée en une ou deux cellules, n'aura donc pas forcément un impact majeur sur le profil de vitesse ou le frottement pariétal car l'intégration selon  $y$  va lisser cette erreur locale.

On a par exemple vu dans le paragraphe 5.2 IV.C. qu'une surestimation très importante du flux

de sous maille d'un facteur supérieur à 100 au premier centre au dessus de la paroi n'entraîne "que" 10% d'erreur sur  $C_{fb}$ .

## 6.3 Effet de la dissipation artificielle sur l'approche WMLES

Dans le but de rendre utilisable la WMLES sur une géométrie plus complexe qu'un écoulement de canal plan, nous allons désormais introduire un niveau non négligeable de dissipation artificielle. Le paramètre  $k_4$  qui contrôle le niveau de dissipation artificielle sera fixé à  $5 \times 10^{-3}$ , ce qui est considéré comme un niveau moyen de dissipation artificielle dans le cadre de la LES (voir le paragraphe 3.2.1.3). On s'intéressera également à l'influence du senseur décrit dans le paragraphe 3.2.1.3, qui permet de réduire la dissipation artificielle en ne l'appliquant qu'aux endroits où des oscillations numériques sont détectées.

Pour étudier l'effet de cette méthode numérique dissipative sur la WMLES, on se place de nouveau au régime de la DNS de canal plan de Hoyas and Jiménez [2006]. Les différents choix de paramètres numériques contrôlant la dissipation artificielle sont indiqués dans le tableau 6.1. Excepté l'ajout de dissipation artificielle, les maillages et les autres paramètres numériques restent identiques à ceux décrits dans le chapitre précédent. Le modèle de sous-maille de Smagorinsky avec fonction sélective est notamment conservé.

On commencera par présenter les résultats sur le maillage le plus grossier avant de passer au maillage fin.

TABLE 6.1 : Cas de calculs pour l'étude de l'influence d'une méthode numérique dissipative. L'écoulement correspond à la DNS de canal plan de Hoyas and Jiménez [2006] à  $Re_\tau = 2000$ .

cas	$k_4$	senseur
<i>sans_dissip</i>	0	oui
<i>dissip_sans_senseur</i>	$5 \times 10^{-3}$	non
<i>dissip_senseur</i>	$5 \times 10^{-3}$	oui

### 6.3.1 Maillage grossier

L'influence de la dissipation artificielle sur le champ moyen et sur le développement des structures turbulentes est tout d'abord étudié sur le maillage grossier comportant (25, 21, 21) cellules. Pour étudier le comportement de la WMLES, on reproduit la procédure suivie au chapitre précédent qui consiste à tracer le bilan de quantité de mouvement, le profil de vitesse moyenne et les variances de la vitesse.

Les bilans de quantité de mouvement sont donnés sur la figure 6.1. On rappelle tout d'abord que le terme  $\langle e_j \rangle$  est directement visible sur le cas *sans\_dissip* puisque  $\langle d_j \rangle$  y est nul.

Sur les deux cas avec dissipation artificielle, on observe que  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$  prend des valeurs bien

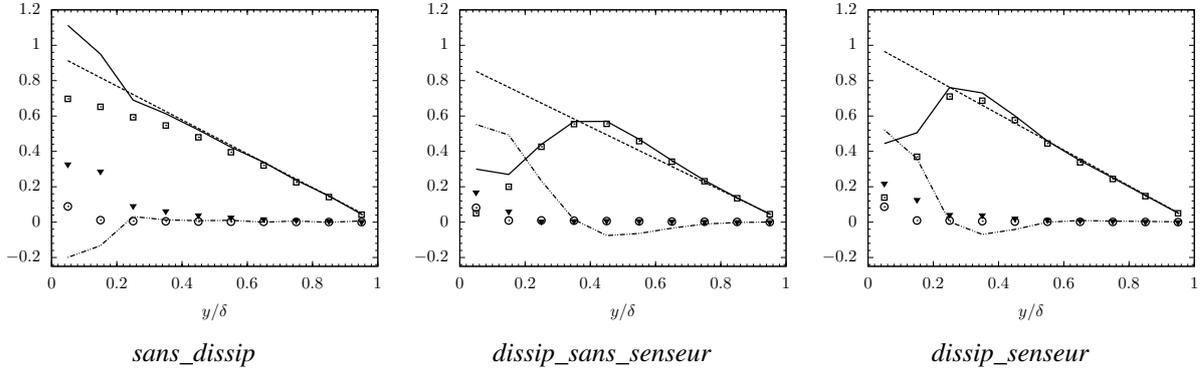


FIGURE 6.1 : Bilan de quantité de mouvement correspondant à l'équation 6.3. LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (25, 21, 21). (○) contribution laminaire  $\langle \tilde{\mu}_j \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , (▼) contribution de sous-maille  $\langle \mu_{sgs_j} \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , (□) contribution turbulente  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$ , (—) cisaillement total  $\left( \langle \tilde{\mu}_j \rangle + \langle \mu_{sgs_j} \rangle \right) \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$ , (- . .) contribution numérique  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ , (- -) membre de droite  $\langle rhs_j \rangle$ . Tous les termes sont divisés par le frottement pariétal de la DNS.

supérieures à  $\langle e_j \rangle$ . On peut donc considérer que la contribution de  $\langle e_j \rangle$ , représentant les erreurs de troncature et de discrétisation du profil de vitesse, est faible devant la contribution du flux de dissipation artificielle.

On constate de plus que  $\langle d_j \rangle$  prend des valeurs significatives aux sept premiers points au dessus de la paroi dans le cas *dissip\_sans\_senseur* et aux cinq premiers points dans le cas *dissip\_senseur*. Même dans le cas *dissip\_senseur*, la contribution de  $\langle d_j \rangle$  apparaît nettement supérieure à celle du flux de sous-maille, ce qui est problématique car contrairement au flux de sous-maille,  $\langle d_j \rangle$  n'est pas calibré pour respecter la physique de la turbulence pariétale. Il faut donc s'attendre à une dégradation significative du profil de vitesse et du frottement pariétal lorsque la dissipation artificielle est utilisée.

Sur le cas *dissip\_senseur*, une des conséquences de ce flux de dissipation artificielle est également une nette diminution de la contribution turbulente  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$  aux deux premiers points au dessus de la paroi ainsi qu'une sur-production de  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$  au quatrième point au dessus de la paroi.

La figure 6.2 montre l'effet de la dissipation artificielle sur le profil de vitesse. Comparé au calcul *sans\_dissip*, le profil de vitesse du calcul *dissip\_sans\_senseur* est dégradé sur presque toute la hauteur du canal, ce qui est cohérent avec les valeurs importantes de  $\langle d_j \rangle$  aux sept premiers points au dessus de la paroi.

Le profil de vitesse du cas *dissip\_senseur* est plus proche du cas sans dissipation, excepté aux second et troisième points de calcul au dessus de la paroi où un déficit de vitesse est apparent. La dégradation plus modérée du profil de vitesse dans ce cas s'explique par la contribution plus faible de  $\langle d_j \rangle$  au bilan de quantité de mouvement.

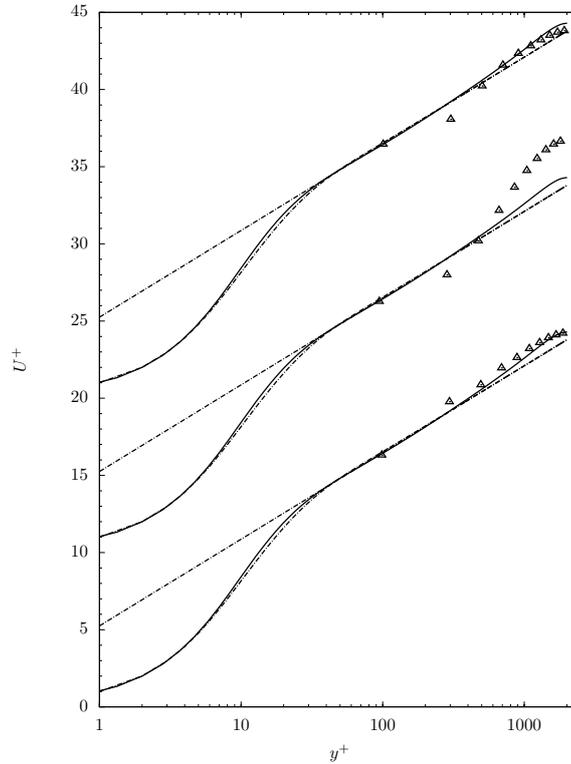


FIGURE 6.2 : Profils de vitesse moyenne exprimés en unité de paroi. De bas en haut : *sans\_dissip*, *dissip\_sans\_senseur* et *dissip\_senseur*. (· · ·) loi logarithmique  $u^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  et loi de Reichardt donnée dans le tableau 4.3, (—) DNS de Hoyas and Jiménez [2006], ( $\Delta$ ) LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (25, 21, 21) (cas 2000\_QA\_100). Les profils sont décalés de 10 unités de paroi par soucis de clarté.

Les erreurs sur l'estimation du frottement pariétal données dans le tableau 6.2 confirment que le cas *dissip\_senseur* est plus proche des données DNS que le cas *dissip\_sans\_senseur*, avec des erreurs s'élevant respectivement à  $-1$ ,  $6\%$  et  $-10\%$ .

L'influence de la dissipation artificielle sur le développement des structures turbulentes est visible sur les variances de la vitesse montrées sur la figure 6.3. Devant la dégradation importante des résultats lorsque la dissipation artificielle sans le senseur est utilisée, le cas *dissip\_sans\_senseur* n'est pas considéré.

Par rapport au cas sans dissipation, le calcul *dissip\_senseur* présente un amortissement des fluctuations de vitesse normale et transversale à la paroi, principalement visible au niveau des deux premiers points au dessus de la paroi. La dissipation artificielle entraîne de plus un décalage du pic de la composante longitudinale  $\langle \tilde{u}^2 \rangle$  qui se retrouve plus loin de la paroi. Ce pic passe en effet du premier point dans le cas *sans\_dissip* au troisième point au dessus de la paroi dans le cas *dissip\_senseur*. Ce pic, qui atteste de la présence des structures turbulentes non physiques

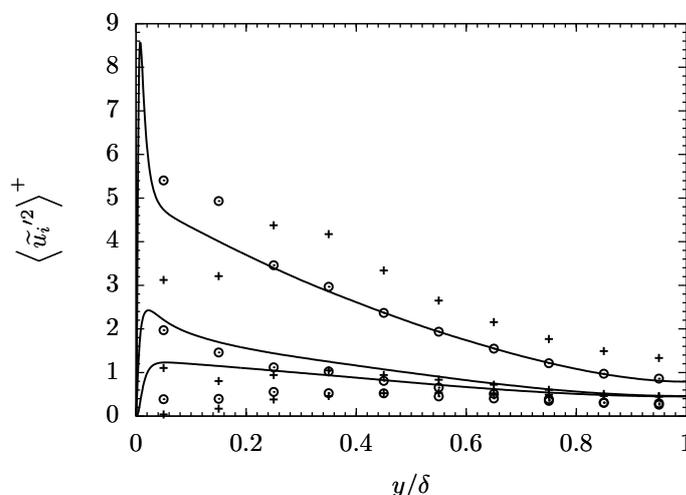


FIGURE 6.3 : Variance de vitesse résolues par la LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (25, 21, 21). De bas en haut :  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{w}'^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . (—) DNS de Hoyas and Jiménez [2006]. (○) : sans\_dissip, (+) : dissip\_senseur.

appelées *superstreaks* (voir le paragraphe 4.3.1.3), montre que la dissipation artificielle repousse le développement des *superstreaks* plus loin de la paroi.

Il est intéressant de constater que cette diminution des variances de la vitesse concerne les mêmes points que la diminution du terme  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$  notée ci-dessus sur le bilan de quantité de mouvement.

En ajoutant de la dissipation artificielle, on observe donc que les fluctuations de vitesse estimées par la WMLES deviennent inexploitables dans une couche de plus en plus épaisse au dessus de la paroi.

### 6.3.2 Maillage fin

Pour confirmer les remarques tirées de l'étude sur le maillage grossier, l'influence de la dissipation artificielle est maintenant étudiée sur le maillage fin comportant (49, 41, 41) cellules.

Les bilans de quantité de mouvement tracés sur la figure 6.4 montrent une remarquable similitude avec leurs homologues obtenus sur le maillage grossier. L'effet de la dissipation artificielle est en effet visible sur le même nombre de points au dessus de la paroi qu'avec le maillage grossier, c'est-à-dire sept et cinq points respectivement pour les cas *dissip\_sans\_senseur* et *dissip\_senseur*. On constate donc que la dissipation artificielle n'affecte pas une hauteur donnée mais un nombre de cellules donné au dessus de la paroi.

La figure 6.5 montre, comme sur le maillage grossier, que le profil de vitesse du cas *dissip\_sans\_senseur* est plus dégradé que sur le cas *dissip\_senseur*.

### 6.3. Effet de la dissipation artificielle sur l'approche WMLES

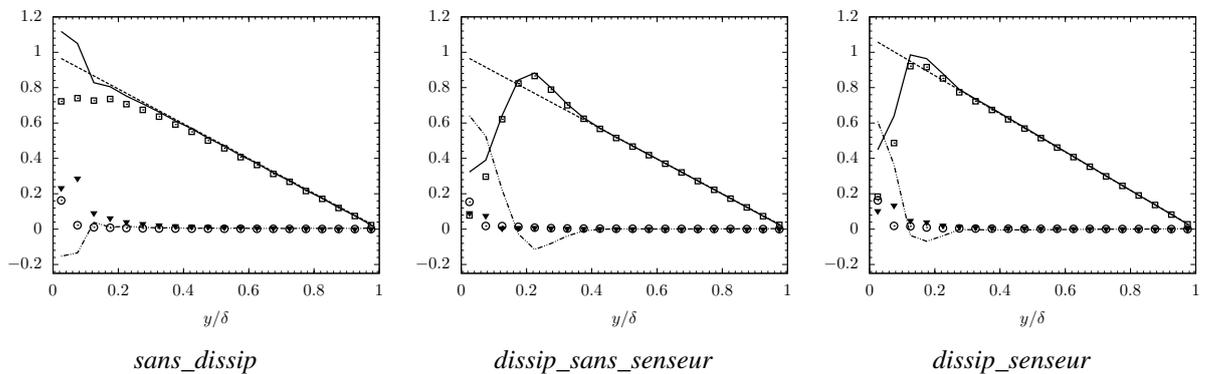


FIGURE 6.4 : Bilan de quantité de mouvement. LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (49, 41, 41). Voir la légende sur la figure 6.1.

Cependant, l'erreur sur le frottement pariétal ne vaut que  $-1,2\%$  dans le cas *dissip\_sans\_senseur* et atteint  $8,5\%$  dans le cas *dissip\_senseur*. Ce résultat non-intuitif confirme que l'erreur générée par la dissipation artificielle est difficile à anticiper à cause de la nature purement numérique de la dissipation artificielle, qui n'est pas fondée sur la physique des écoulements pariétaux.

Les variances de la vitesse montrées sur la figure 6.6 confirment les tendances observées sur le maillage grossier, c'est-à-dire un amortissement des composantes normale et transversale à la paroi et un décalage du pic de la composante longitudinale plus loin de la paroi.

Comme sur les bilans de quantité de mouvement, on constate que cet amortissement et ce décalage concernent les mêmes points au dessus de la paroi que sur le maillage grossier. Cette dernière observation confirme que la dissipation artificielle affecte un nombre de points donné au dessus de la paroi et non une région de hauteur donnée. Un maillage plus fin va donc réduire la hauteur de la région concernée par la présence de structures turbulentes non physiques.

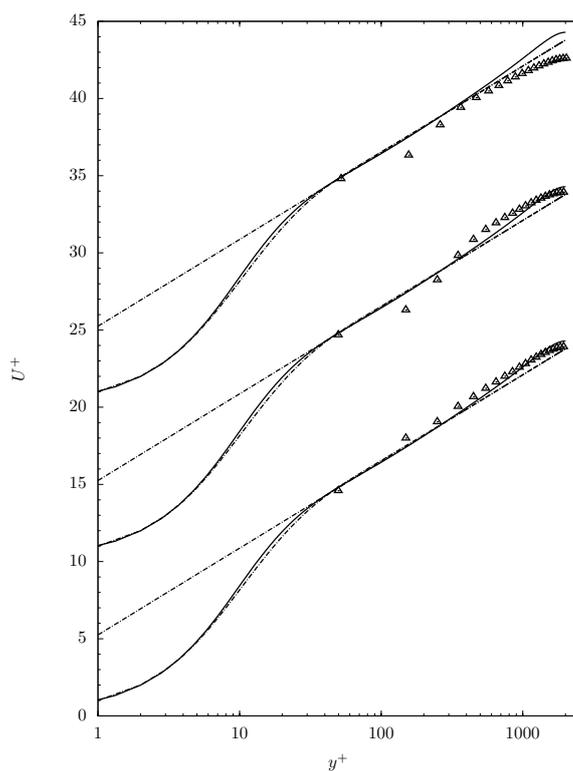


FIGURE 6.5 : Profils de vitesse moyenne exprimés en unité de paroi. De bas en haut : sans\_dissip, dissip\_sans\_senseur et dissip\_senseur. (- · -) loi logarithmique  $u^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  et loi de Reichardt donnée dans le tableau 4.3, (—) DNS de Hoyas and Jiménez [2006], ( $\Delta$ ) LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (49, 41, 41) (cas 2000\_QA\_50). Les profils sont décalés de 10 unités de paroi par soucis de clarté.

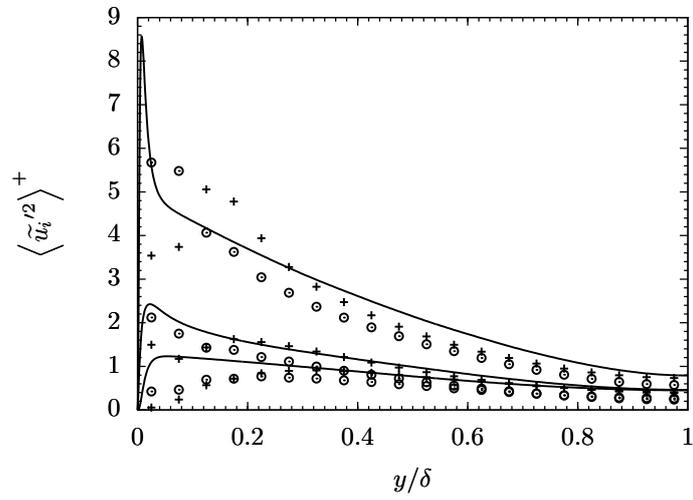


FIGURE 6.6 : Variances de vitesse résolues par la LES avec modèle de paroi QA sur le maillage (49, 41, 41). De bas en haut :  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{w}'^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . (—) DNS de Hoyas and Jiménez [2006]. (○) : sans\_dissip, (+) : dissip\_senseur.

## 6.4 Effet du modèle de sous-maille sur l'approche WMLES

Pour appliquer la WMLES sur un écoulement complexe, l'utilisation d'une méthode numérique dissipative n'est pas le seul élément garantissant le bon déroulement du calcul. Le modèle de sous-maille conditionne la stabilité du calcul pour une part aussi importante que la méthode numérique.

On étudie dans ce paragraphe la possibilité d'utiliser le modèle de sous-maille WALE, ce qui nous donnera une option supplémentaire au cas où le modèle de Smagorinsky avec fonction sélective ne garantit pas la stabilité du calcul sur un écoulement plus complexe.

Le modèle de sous-maille WALE est ici utilisé en présence de dissipation artificielle sur les maillages grossier et fin. Vu les résultats précédents, on ne considère ici que le cas *dissip\_senseur*, où le modèle de Smagorinsky avec fonction sélective est remplacé par le modèle WALE.

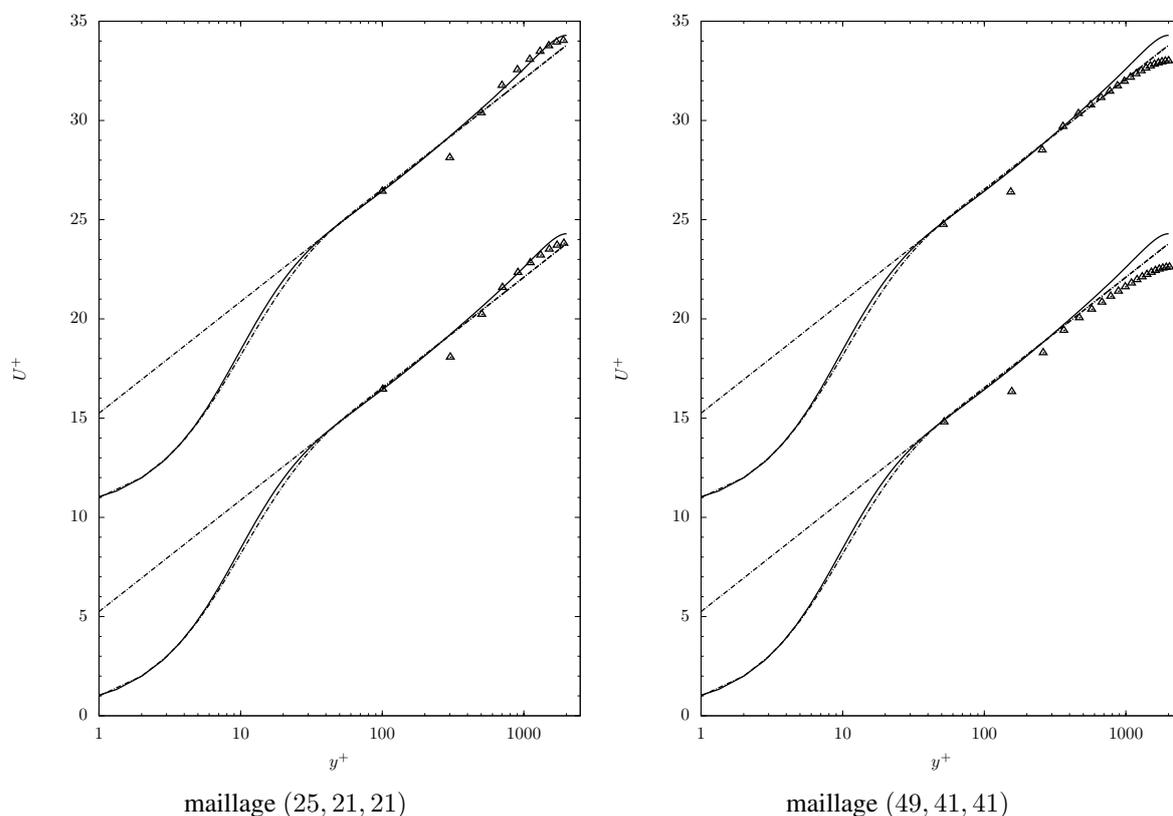


FIGURE 6.7 : Profils de vitesse moyenne exprimés en unité de paroi. En bas : *dissip\_senseur* avec modèle de Smagorinsky et fonction sélective. En haut : *dissip\_senseur* avec modèle WALE. (- · -) loi logarithmique  $u^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  et loi de Reichardt donnée dans le tableau 4.3, (—) DNS de Hoyas and Jiménez [2006], ( $\Delta$ ) LES avec modèle de paroi QA. Les profils sont décalés de 10 unités de paroi par soucis de clarté.

Sur la figure 6.7, les profils de vitesse moyenne avec le modèle WALE sont comparés aux résultats précédents obtenus avec le modèle de Smagorinsky et fonction sélective. Sur les deux maillages, on observe des résultats très similaires entre les deux modèles de sous-maille, avec une comparaison légèrement meilleure à la DNS loin de la paroi pour le modèle WALE.

Les erreurs sur le frottement pariétal suivent également des tendances très similaires aux cas avec le modèle de Smagorinsky et fonction sélective, avec pour le modèle WALE une erreur très faible de  $-0,1\%$  sur le maillage grossier et une erreur de  $5\%$  sur le maillage fin.

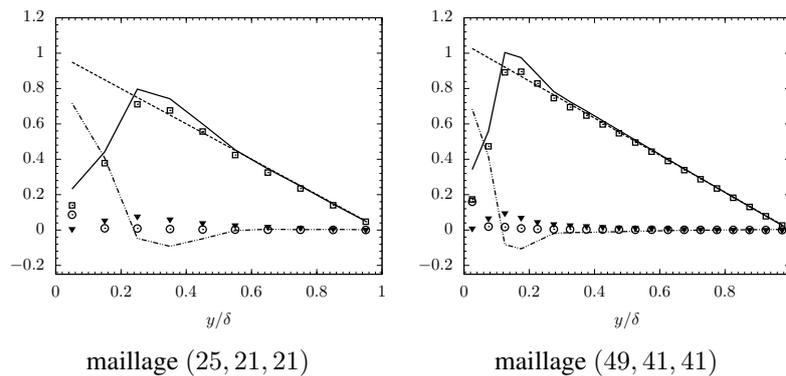


FIGURE 6.8 : Bilan de quantité de mouvement. LES avec modèle de paroi QA : cas dissip\_senseur avec modèle de sous-maille WALE. Voir la légende sur la figure 6.1.

Pour expliquer ces résultats très similaires, les bilans de quantité de mouvement obtenus avec le modèle WALE sont tracés sur la figure 6.8. Ces bilans sont à comparer aux bilans tracés sur les figures 6.1 et 6.4 et obtenus avec le modèle de Smagorinsky et fonction sélective.

Par rapport aux cas avec le modèle de Smagorinsky, on observe avec le modèle WALE que seul le terme de sous-maille est légèrement modifié près de la paroi. Le modèle WALE retourne en effet une viscosité de sous-maille plus faible au centre des cellules adjacentes à la paroi.

Le fait que les flux de sous-maille soient proches explique le comportement très similaire de la WMLES avec les modèles WALE et Smagorinsky avec fonction sélective.

Le tableau 6.2 résume les erreurs sur le frottement pariétal pour tous les calculs WMLES menés dans ce chapitre.

TABLE 6.2 : Erreur relative en % par rapport à la DNS de Hoyas and Jiménez [2006] sur le coefficient de frottement  $C_{fb} = \frac{\langle \widehat{\tau}_p \rangle}{\frac{1}{2} \rho_b u_b^2}$ .

Cas	Maillage	Modèle de sous-maille	$\Delta(C_{fb})$ en %
<i>sans_dissip</i>	(25, 21, 21)	Smagorinsky avec fonction sélective	-3,9
<i>dissip_sans_senseur</i>	(25, 21, 21)	Smagorinsky avec fonction sélective	-10,3
<i>dissip_senseur</i>	(25, 21, 21)	Smagorinsky avec fonction sélective	-1,6
<i>sans_dissip</i>	(49, 41, 41)	Smagorinsky avec fonction sélective	-1,1
<i>dissip_sans_senseur</i>	(49, 41, 41)	Smagorinsky avec fonction sélective	-1,2
<i>dissip_senseur</i>	(49, 41, 41)	Smagorinsky avec fonction sélective	8,5
<i>dissip_senseur</i>	(25, 21, 21)	WALE	-0,1
<i>dissip_senseur</i>	(49, 41, 41)	WALE	5,2

## 6.5 Conclusions intermédiaires

L'effet de la dissipation artificielle et du modèle de sous-maille sur la WMLES étudiée dans ce chapitre permet de tirer plusieurs conclusions intermédiaires :

- le tracé du bilan de quantité de mouvement selon  $x$  appliqué à l'écoulement moyen permet de détecter l'erreur due au modèle de sous-maille (erreur  $E_{SGS}$ ). Avec le modèle de Smagorinsky, il est obligatoire d'utiliser la fonction sélective ou la correction donnée par les équations 5.2 (35) et (37). Avec le modèle WALE, l'erreur  $E_{SGS}$  se révèle acceptable sans correction supplémentaire sur les cas traités ( $Re_\tau = 2000$  et  $100 < \Delta_{y_1}^+ < 200$ );
- le bilan de quantité de mouvement permet également d'estimer l'erreur due à l'utilisation de dissipation artificielle (erreur  $E_{NUM}$ ). Malgré l'utilisation du senseur de réduction de dissipation artificielle défini par l'équation 3.8, l'introduction d'une dissipation artificielle à un niveau moyen ( $k_4 = 5 \times 10^{-3}$ ) modifie de façon importante le bilan de quantité de mouvement. En conséquence, une dégradation du profil de vitesse et du flux de chaleur pariétal est observée. L'erreur sur le frottement pariétal ne dépasse cependant pas 10% sur le canal plan à  $Re_\tau = 2000$  traité ici;
- la dissipation artificielle altère également le développement des structures turbulentes près de la paroi. Une couche de plus en plus épaisse de cellules au dessus de la paroi se retrouve alors peuplée de structures turbulentes non physiques à mesure que la dissipation artificielle augmente. Puisque la dissipation artificielle agit sur un nombre de cellules donné au dessus de la paroi, le raffinement du maillage réduit la hauteur d'influence de la dissipation artificielle au dessus de la paroi;
- bien que non testée ici, une réduction de la dissipation artificielle dans les premières rangées de cellules au dessus de la paroi est donc à envisager.

Le tableau 6.3 résume l'analyse et la correction des erreurs liées à la WMLES menées dans ce chapitre et le précédent :

TABLE 6.3 : Outils d'étude et corrections proposées aux quatre sources d'erreur liées à la WMLES. Bilan de QDM  $x$  signifie bilan de quantité de mouvement selon  $x$  appliqué à l'écoulement moyen.

erreur	Outils d'étude	Corrections proposées
E_PHYS	Validation hors LES	modèle TBL() avec adimensionnement $y_3^+$
E_CL	erreur sur les flux de paroi définie par les équations 5.2 (47) et (48)	équations 5.2 (44) et (46)
E_SGS	bilan de QDM $x$ (flux de sous-maille et flux $e_j$ )	équations 5.2 (35) et (37), modèle de Smagorinsky avec fonction sélective, modèle WALE
E_NUM	bilan de QDM $x$ , (flux $e_j$ et $d_j$ )	réduction de la dissipation artificielle (non testé)

## **Troisième partie**

# **Une méthode d'injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi**



---

## Revue bibliographique sur l'injection de turbulence pariétale pour la LES et les méthodes hybrides RANS-LES

---

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Propriétés requises et critères d'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale . . . . .</b>	<b>161</b>
7.1.1	Propriétés requises . . . . .	161
7.1.2	Critères d'efficacité . . . . .	162
<b>7.2</b>	<b>Injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles</b>	<b>163</b>
7.2.1	Méthode de recyclage . . . . .	164
7.2.2	Méthode utilisant un calcul préliminaire . . . . .	165
7.2.3	Méthode d'injection de turbulence synthétique . . . . .	165
7.2.3.1	Reconstruction des paramètres de la turbulence synthétique . . . . .	166
7.2.3.2	Approche spectrale . . . . .	167
7.2.3.3	Imitation des structures cohérentes . . . . .	167
7.2.4	Méthodes utilisant un terme de contrôle . . . . .	169
7.2.4.1	Formulation du terme de contrôle . . . . .	170
7.2.4.2	Démonstration de l'efficacité du terme de contrôle volumique	171
<b>7.3</b>	<b>Injection de turbulence pariétale pour les approches hybrides RANS-LES .</b>	<b>174</b>
7.3.1	Description de l'approche ZDES mode III . . . . .	174
7.3.2	Comportement de l'injection de turbulence pariétale . . . . .	175
7.3.3	Nouvelle formulation du terme de contrôle . . . . .	177
<b>7.4</b>	<b>Conclusions intermédiaires . . . . .</b>	<b>178</b>

---

Jusqu'ici, seule une configuration de calcul périodique a été traitée avec l'approche WMLES. Puisque l'on vise l'application de la WMLES à un écoulement pariétal en développement spatial, il devient nécessaire de spécifier une condition limite d'entrée.

Pour simplifier la formulation de cette condition d'entrée, le plus simple serait de la placer loin en amont de la région d'intérêt, de sorte que l'écoulement y soit laminaire et uniforme. Même si l'écoulement admettait en amont une région laminaire et uniforme, une telle approche impliquerait néanmoins un domaine de calcul de très grande taille. Or un domaine de très grande taille va à l'encontre du but premier des approches hybrides RANS-LES, qui est de réduire le temps de calcul.

Pour un temps de calcul optimal, la condition limite d'entrée va donc se trouver proche de la région d'intérêt. Il est alors très probable que la condition limite d'entrée soit adjacente à la paroi et soit traversée par un écoulement pariétal turbulent. Dans ce cas, il est obligatoire de mettre en place une méthode pour générer cette turbulence pariétale.

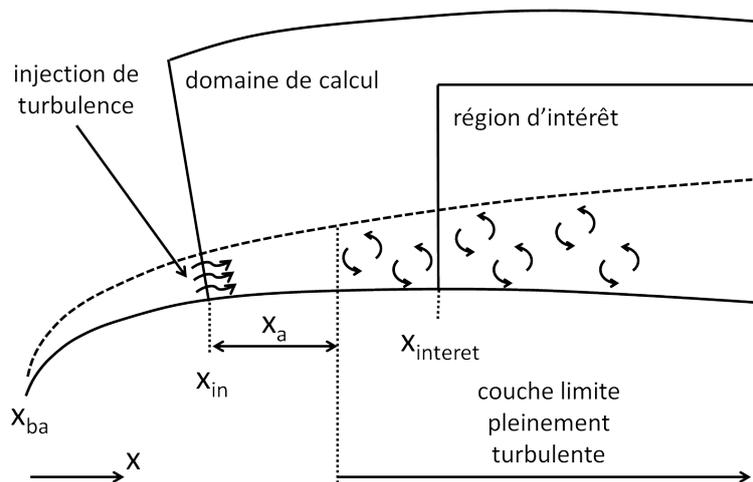


FIGURE 7.1 : Problème de l'injection de turbulence pariétale à la frontière d'entrée sur l'exemple d'un profil d'aile.  $x_{ba}$  désigne la position du bord d'attaque.

La figure 7.1 représente de façon schématique le problème de l'injection de turbulence pariétale. La région où le phénomène d'intérêt a lieu débute à  $x_{interet}$ . Le plan d'entrée du domaine de calcul débute est placé à  $x_{in}$ , où une méthode d'injection de turbulence pariétale est utilisée. On note  $x_a$  la distance d'adaptation, définie comme la distance en aval du plan d'entrée à partir de laquelle la turbulence pariétale injectée est pleinement développée.

Plusieurs contraintes imposent que  $x_a$  soit la plus courte possible :

- la géométrie du cas impose que  $x_a$  soit nécessairement inférieure à  $x_{interet} - x_{ba}$  ;
- la stratégie idéale de maillage pour la WMLES, donnée par l'équation 4.2, requiert  $Re_\tau > 2000$ . Or plus  $x_a$  est grand, plus l'épaisseur de couche limite à  $x_{in}$  diminue et plus  $Re_{\tau_{in}}$

## 7.1. Propriétés requises et critères d'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale

diminue. Pour respecter au mieux la condition  $Re_\tau > 2000$ , il faut donc une distance d'adaptation minimale ;

- le coût de calcul augmente avec  $x_a$ , et ce pour deux raisons. Premièrement, la longueur du domaine de calcul augmente avec  $x_a$ , ce qui augmente le nombre de cellules du maillage. Deuxièmement, en considérant un nombre fixé de cellules dans l'épaisseur de la couche limite (par exemple  $n_y = 20$ ), plus  $x_a$  augmente, plus l'épaisseur de couche limite à  $x_{in}$  diminue et donc plus la dimension des cellules à  $x_{in}$  diminue. La petite taille de ces cellules peut à la fois se propager dans tout le domaine et conduire à une augmentation du nombre total de cellules, mais aussi réduire le pas de temps du calcul qui est directement lié à la dimension de la plus petite cellule dans le cas d'une intégration temporelle explicite.

Il est donc primordial d'utiliser une méthode d'injection suffisamment efficace pour obtenir une distance d'adaptation minimale.

Le but de ce chapitre est donc de donner, pour la LES et les méthodes hybrides RANS-LES, l'état de l'art des méthodes d'injection de turbulence pariétale les plus efficaces, avec les distances d'adaptation obtenues. On verra que l'injection de turbulence pour les méthodes hybrides RANS-LES s'avère plus difficile que pour la LES en termes de distance d'adaptation.

On se restreint dans la suite à l'injection de turbulence pariétale en régime quasi-incompressible (régime I et II, voir le tableau 1.1). Seule l'injection de fluctuations de vitesse va donc nous intéresser.

On commencera par donner les propriétés requises et les critères permettant de juger de l'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale. Puis on présentera différentes méthodes d'injection de turbulence pariétale, tout d'abord dans le cadre de la LES puis dans le cadre des méthodes hybrides RANS-LES.

### 7.1 Propriétés requises et critères d'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale

Pour développer et valider une méthode performante d'injection de turbulence pariétale, il est crucial de respecter certaines propriétés et de définir des critères permettant de juger de son efficacité.

#### 7.1.1 Propriétés requises

On peut définir une méthode d'injection de turbulence pariétale comme performante si elle respecte les critères suivants :

- **distance d'adaptation minimale** : comme on l'a vu ci-dessus, en plus de réduire le coût de calcul, obtenir une distance d'adaptation minimale est parfois une contrainte géométrique imposée par l'écoulement ;

- **contrôles des propriétés de la turbulence injectée** : il est nécessaire d'injecter une turbulence pariétale respectant du mieux possible certaines propriétés dictées par les données de référence, car ces propriétés peuvent influencer le comportement de l'écoulement dans la région d'intérêt située en aval. Les propriétés d'une couche limite turbulente peuvent être données sous la forme de grandeurs intégrales comme le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement ( $Re_\tau$ ), sur l'épaisseur de couche limite ( $Re_\delta = \frac{\rho_\infty U_\infty \delta}{\mu_\infty}$ ), sur l'épaisseur de déplacement ( $Re_{\delta_1}$ ) ou sur l'épaisseur de quantité de mouvement ( $Re_{\delta_2}$ ). On peut également souhaiter que la couche limite injectée respecte des tensions de Reynolds ( $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  et  $-\overline{u'v'}$ ) imposées.
- **l'absence d'artefact** : la méthode d'injection peut laisser une empreinte parasite en aval de la distance d'adaptation. La présence de cet artefact n'est pas souhaitable, surtout si le phénomène d'intérêt y est sensible, comme c'est par exemple le cas pour une bulle de recirculation [Spille-Kohoff and Kaltenbach, 2001] ;
- **limitation du surcoût de calcul et de l'espace de stockage** : le surcoût de calcul inclue notamment les opérations informatiques supplémentaires permettant de construire les fluctuations de vitesse qui vont générer la turbulence pariétale, comme l'appel à des fonctions trigonométriques ou aléatoires. Mais la durée du transitoire avant l'établissement de la turbulence injectée est également un paramètre important pouvant alourdir ce surcoût de calcul.

### 7.1.2 Critères d'efficacité

La distance d'adaptation  $x_a$  est le principal juge de l'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence pariétale. La détermination de  $x_a$  repose cependant sur la définition d'un critère qui permet de juger à quel endroit la turbulence pariétale injectée est pleinement développée.

Le tableau 7.1 présente les critères couramment utilisés dans la littérature. Ces critères sont basés sur des grandeurs intégrales, moyennes ou instantanées.

Tout d'abord, les critères instantanés mettent en évidence le développement des structures cohérentes de la turbulence pariétale. Ainsi, l'obtention de structures cohérentes à une courte distance de l'entrée du domaine permet de juger qualitativement de l'efficacité de la méthode d'injection. On peut cependant remarquer, comme l'indique Jiménez [2011], qu'un critère instantané n'est pas pertinent pour visualiser les structures cohérentes, du fait de leur nature turbulente. Pour une visualisation plus fidèle de ces structures, une moyenne conditionnelle comme celle utilisée par Lozano-Durán et al. [2012] est préférable.

Ensuite, le tracé de grandeurs intégrales en fonction de  $x$ , comme les épaisseurs de couche limite et le frottement pariétal, permet une estimation plus quantitative de  $x_a$ . Ces grandeurs intégrales permettent de plus de vérifier que la turbulence injectée respecte les propriétés visées.

Enfin, le tracé des grandeurs moyennes à différents  $x$  fixés permet une comparaison précise du comportement de la turbulence injectée par rapport aux données de référence. En plus des quantités classiques comme le profil de vitesse ou les tensions de Reynolds, certains auteurs se sont intéressés à  $-\langle \tilde{v}^2 \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}$  [Keating et al., 2004]. Cette quantité est en effet le terme de production dans l'équation de transport de  $-\langle \tilde{u}'\tilde{v}' \rangle$  [Spille-Kohoff and Kaltenbach, 2001]. Or, l'équation 6.4

## 7.2. Injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles

TABLE 7.1 : Liste non exhaustive des critères utilisés dans la littérature pour juger du caractère pleinement développé de la turbulence pariétale.  $k$  désigne l'énergie cinétique de turbulence.

Type de grandeur	Critère
<b>Instantané</b>	isosurface de critère $Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}$
	isosurface de $\lambda_2$ [Jeong and Hussain, 1995]
	isosurface de vorticité
	isosurface de vitesse dans la zone logarithmique (par exemple à $y^+ = 100$ )
<b>Moyenne</b>	$u^+ = f(y^+)$
	$\langle \tilde{u}'^2 \rangle, \langle \tilde{v}'^2 \rangle, \langle \tilde{w}'^2 \rangle$
	isosurface de $-\langle \tilde{v}'^2 \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y}$
	$-\langle \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$
	$k$
	$\sqrt{(\frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial x})^3 / (\frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial x})^2}$
<b>Intégrale</b>	$C_f$
	$\delta, \delta_1, \delta_2, H_{12} = \delta_1 / \delta_2$
	$\int_0^\delta (\langle \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle - \langle \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_{cible}) dy$
	$\int_0^\delta (k - k_{cible}) dy$

indique que le frottement pariétal dépend de l'aire sous le profil  $-\langle \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$ . S'assurer d'un niveau suffisant de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  en aval de l'entrée est donc crucial pour l'obtention d'un frottement pariétal correct.

## 7.2 Injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles

La plupart des travaux sur l'injection de turbulence pariétale à la frontière d'entrée concerne la LES et donc des maillages fins<sup>1</sup>. Le cas des méthodes hybrides RANS-LES, qui implique des maillages nettement plus grossiers, ajoutent des difficultés au problème d'injection de turbulence pariétale et sera abordé dans le paragraphe 7.3 de ce chapitre.

En accord avec la figure 7.2, on distingue maintenant quatre méthodes d'injection de turbulence pariétale : (1) les méthodes de recyclage, (2) les méthodes utilisant un calcul préliminaire, (3) les méthodes d'injection de turbulence synthétique et (4) les méthodes avec un terme de contrôle.

On abordera dans un premier temps les méthodes (1), (2) et (3) qui sont basées sur l'injection de fluctuations dans le plan d'entrée et reposent sur une décomposition du champ LES en une partie moyenne et une partie fluctuante. Les méthodes (4) utilisant un terme de contrôle, qui sont transversales aux trois méthodes précédentes, seront ensuite discutées.

1. Pour fixer les idées :  $\Delta_x^+ \approx 50$ ,  $\Delta_y^+ \approx 1$  et  $\Delta_z^+ \approx 15$ .

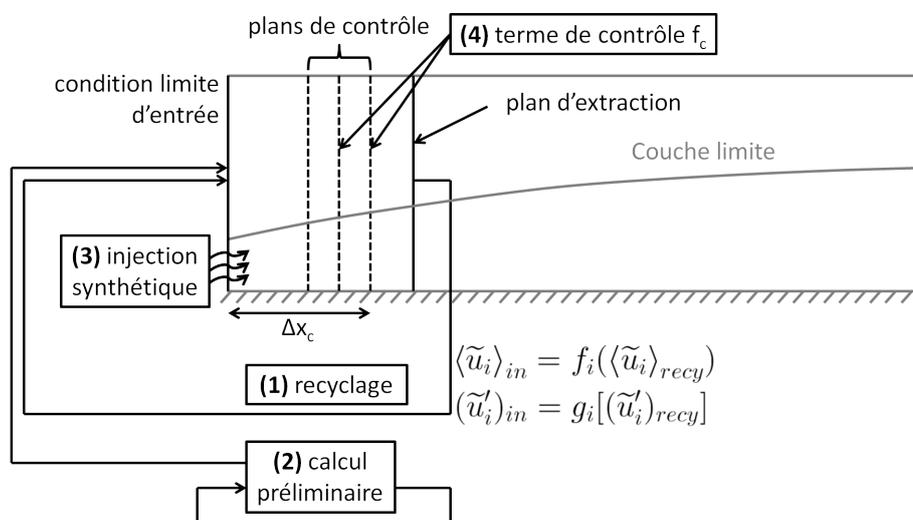


FIGURE 7.2 : Principe schématique des quatre principaux groupes de méthodes d'injection de turbulence pariétale.

### 7.2.1 Méthode de recyclage

Les méthodes de recyclage, introduites par Lund et al. [1998], reposent sur l'extraction du champ instantané sur un plan parallèle à l'entrée. Pour tenir compte du développement spatial de la turbulence pariétale, le champ moyen  $\langle \tilde{u}_i \rangle_{recy}$  et les fluctuations de vitesse  $(\tilde{u}'_i)_{recy}$  au plan d'extraction sont mises à l'échelle par le biais des fonctions  $f_i$  et  $g_i$  avant d'être injectés à l'entrée (voir la figure 7.2).

Les méthodes de recyclage permettent une distance d'adaptation très courte et sont d'ailleurs souvent utilisées comme référence pour juger de l'efficacité des autres méthodes d'injection. Cependant, les défauts suivants sont reprochés aux méthodes de recyclage :

- la mise à l'échelle des données extraites : la mise à l'échelle du champ moyen et des fluctuations de vitesse n'est pas triviale, notamment lorsque l'écoulement pariétal est soumis à un gradient de pression longitudinal ou à des effets de compressibilité. De plus, suivant la formulation de la mise à l'échelle, une dérive de l'écoulement moyen est possible. Sagaut et al. [2004] résument la manière dont le recyclage peut tenir compte des effets de compressibilité et comment cette dérive peut être évitée. Pour éviter la mise à l'échelle du champ moyen et donc sa dérive, Shur et al. [2011] recouvrent le domaine LES par un domaine RANS dont la frontière aval s'étend jusqu'au plan d'extraction. Le champ RANS est alors utilisé pour définir le champ moyen à la fois au plan d'entrée et au plan d'extraction. Seule la mise à l'échelle des fluctuations est alors nécessaire ;
- la génération d'une fréquence parasite : le fait de recycler entre deux plans parallèles situés

- à une distance constante introduit une perturbation périodique artificielle dans l'écoulement. Puisque l'amplitude de cette perturbation est proportionnelle à l'inverse de la distance entre les deux plans [Pamiès et al., 2009], la recherche d'une très courte distance d'adaptation conduit à une augmentation de l'amplitude de la perturbation. Cependant, si le plan d'entrée possède une direction statistiquement homogène, il est possible par translation ou rotation du plan d'extraction de réduire l'amplitude de la perturbation [Laraufie, 2012; Morgan et al., 2011];
- une longue durée d'évacuation du transitoire : selon le champ initial imposé, la méthode de recyclage peut conduire à un long transitoire avant d'obtenir une turbulence pariétale développée, ce qui augmente le coût de calcul. Sur un écoulement de couche limite sans gradient de pression, Lund et al. [1998] définissent le champ initial comme la somme d'un champ moyen, obtenu par la loi de Spalding, et de perturbations aléatoires. Ils obtiennent un temps d'établissement de  $1100\delta_{in}/U_\infty$ , ce qui correspond à 133 passages de l'écoulement entre les deux plans de recyclage. Pamiès et al. [2009] présentent une revue de différentes méthodes d'initialisation qui permettent une réduction de ce transitoire.

### 7.2.2 Méthode utilisant un calcul préliminaire

L'injection de turbulence pariétale peut également s'effectuer en stockant des plans de vitesse instantanée tirés d'un calcul périodique préliminaire. Comme avec la méthode de recyclage, une mise à l'échelle du champ moyen et des fluctuations stockés est nécessaire. Ces plans sont ensuite interpolés sur la frontière d'entrée du maillage LES.

Cette méthode d'injection par calcul préliminaire permet de contrôler finement les propriétés intégrales de la turbulence pariétale injectée, comme le frottement pariétal ou l'épaisseur de couche limite. Néanmoins, le coût du calcul préliminaire, le stockage des données et la procédure d'interpolation constituent un frein à l'utilisation de cette méthode.

Le coût du calcul préliminaire peut être réduit en le menant à un nombre de Reynolds plus faible que le calcul principal. Néanmoins les conséquences de cette différence de nombre de Reynolds entre le calcul préliminaire et le calcul principal restent inexplorées [Keating et al., 2004].

Pour réduire le volume de stockage des données, Abéguilé et al. [2007] leur applique la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD). Ils évaluent ensuite comment l'efficacité de l'injection turbulente se dégrade lorsqu'une part de moins en moins importante d'énergie turbulente est conservée dans les données réduites.

### 7.2.3 Méthode d'injection de turbulence synthétique

Le troisième groupe de méthode permettant d'injecter de la turbulence pariétale consiste à superposer à un champ moyen prédéfini des fluctuations turbulentes synthétiques. Ces fluctuations sont obtenues grâce à des fonctions analytiques généralement composée d'une partie déterministe et d'une partie aléatoire.

Un champ turbulent instantané n'étant pas reproductible, seules des grandeurs statistiques sont

pertinentes pour décrire la turbulence à injecter. Bien qu'ayant connue des avancées récentes (voir par exemple [Jiménez, 2011]), la description statistique de la dynamique des structures cohérentes de la turbulence pariétale reste inachevée [Marusic et al., 2010b]. L'injection d'une turbulence pariétale synthétique ne sera donc pas totalement fidèle à la réalité et reposera sur la spécification d'un nombre arbitraire de grandeurs statistiques comme les tensions de Reynolds, la distribution spectrale de l'énergie turbulente ou les corrélations spatiales et temporelles en deux points.

### 7.2.3.1 Reconstruction des paramètres de la turbulence synthétique

La spécification des tensions de Reynolds nécessite un modèle, car même adimensionnées par le frottement pariétal, elles restent dépendantes du nombre de Reynolds. Pour alimenter ce modèle, des données empiriques peuvent être utilisées si l'écoulement est suffisamment canonique. Pour traiter une gamme plus large d'écoulements, il est possible d'effectuer au préalable un calcul RANS permettant d'alimenter le modèle.

Laraufie [2012] décrit trois méthodes de fidélité croissante pour reconstruire les tensions de Reynolds normales :

- l'hypothèse de turbulence isotrope :  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3}k$  ;
- l'hypothèse de Wilcox [2006], valable dans la région logarithmique d'une couche limite sans gradient de pression :  $\overline{u'^2} = \frac{4}{9}2k$  ;  $\overline{v'^2} = \frac{2}{9}2k$  ;  $\overline{w'^2} = \frac{1}{3}2k$  ;
- le modèle de Perry et Marusic (voir par exemple [Perry et al., 2002]) :

$$\begin{cases} \overline{u_i'^2} = f_{I_i}(y^+) f_{T_i}(y^+, \delta^+) & \text{si } y^+ < 30 \\ \overline{u_i'^2} = f_{O_i}(y^+) & \text{si } y^+ > 150 \end{cases} \quad (7.1)$$

où la fonction  $f_{T_i}$  prend en compte l'interaction de la région externe sur la région interne. Une interpolation cubique permet la description de la région  $30 < y^+ < 150$ .

Si le modèle de turbulence transporte l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , les deux premières méthodes permettent d'estimer les tensions de Reynolds normales directement à partir du champ RANS. Le modèle de Marusic nécessite quant à lui de calculer l'épaisseur de couche limite.

Si le modèle de turbulence ne donne pas directement accès à  $k$ , comme c'est le cas du modèle de Spalart-Allmaras, il est possible d'estimer  $k$  à partir de la tension de Reynolds croisée [Bradshaw et al., 1967; Townsend, 1976] en utilisant  $k \approx -\overline{u'v'}/0,3$ .

Pour estimer la validité de ces trois méthodes, Laraufie [2012] reconstruit les tensions de Reynolds à partir de données de référence expérimentales et DNS à différents nombre de Reynolds. Il obtient les conclusions suivantes. Le modèle de Perry et Marusic fournit la description la plus fidèle des tensions de Reynolds et montre notamment sa supériorité sur l'estimation de  $\overline{u'^2}$  dans la région interne. L'hypothèse de Wilcox permet une estimation correcte de  $\overline{v'^2}$  pour  $y^+ > 100$ .

La tension de Reynolds croisée est quant à elle directement accessible à partir du champ RANS par la relation  $-\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ , ce qui complète la description du tenseur de Reynolds pour une

turbulence pariétale bi-dimensionnelle en moyenne.

Maintenant que les tensions de Reynolds sont estimées, il reste à construire les fluctuations de vitesse associées permettant d'injecter la turbulence synthétique. On donne ci-dessous deux approches pour y parvenir : l'approche spectrale basée sur une décomposition en fonctions sinusoïdales et une approche plus empirique consistant à imiter la forme des structures cohérentes de la turbulence pariétale. Pour un aperçu plus large du panel des méthodes d'injection de turbulence synthétique, on pourra se référer à Pamiès et al. [2009] et Tabor and Baba-Ahmadi [2010].

### 7.2.3.2 Approche spectrale

L'approche spectrale construit les fluctuations de vitesse à partir d'une somme de fonctions sinusoïdales, paramétrées pour respecter des tensions de Reynolds et un spectre d'énergie turbulente donnés.

Par exemple, dans la méthode de Batten et al. [2004] décrite dans le tableau 7.2, les tensions de Reynolds sont imposées par le tenseur  $a_{ij}$  et le spectre d'énergie turbulente est de la forme  $d^4 \exp(-d^2)$ , avec  $d$  la longueur d'onde des structures turbulentes [Keating et al., 2004]. Tout comme l'est la turbulence pariétale, la turbulence synthétique injectée est de plus anisotrope grâce à l'échelle de longueur  $\hat{d}_j^n / L_b$  qui est pondérée par les tensions de Reynolds prescrites  $\overline{u_l' u_m'}$ . Les structures turbulentes injectées sont ainsi allongées dans la direction des plus grandes tensions de Reynolds.

La méthode de Batten et al. a été évaluée par [Keating et al., 2004] et [Jarrin et al., 2009]. Ils rapportent des distances d'adaptation de 20 à  $25\delta_{in}$  sur un écoulement de canal plan, ce qui est supérieur aux distances d'adaptation obtenues habituellement en LES, généralement inférieures à  $15\delta_{in}$  (voir les tableaux 7.2 et 7.3).

### 7.2.3.3 Imitation des structures cohérentes

Dans cette seconde approche, les paramètres sont choisis de manière plus empirique pour imiter au mieux la forme des structures cohérentes de la turbulence pariétale. La méthode de Sandham et al. [2003] et la *Synthetic Eddy Method* (SEM) sont deux exemples d'une telle approche.

**La Méthode de Sandham et al.** Comme indiqué dans le tableau 7.2, cette méthode est basée sur la somme de plusieurs modes de fluctuation de vitesse placés à différentes hauteurs au dessus de la paroi. Chaque mode est caractérisé par une échelle de longueur selon la direction transversale  $z$  et une échelle de temps, chacune de ces deux échelles étant imposées par une fonction sinusoïdale.

Sandham et al. utilisent un mode interne dans la zone tampon à  $y^+ = 12$  en considérant des structures de longueur  $\lambda_x^+ = 500\pi$ , de largeur  $\lambda_z^+ = 100$  qui sont convectées à la vitesse  $U_c = 10u_\tau$ . L'amplitude de ce mode interne est fixé à  $c_{1,0} = 3,7 \times 10^{-2}U_\infty$  et  $c_{2,0} = -5,9 \times 10^{-4}U_\infty$ . Il est à noter que l'on divise ici  $c_{1,0}$  et  $c_{2,0}$  par  $\exp(-1) \approx 0,368$  de sorte que

TABLE 7.2 : Exemples de méthodes d'injection de turbulence synthétique. Les composantes des fluctuations de vitesse sont notées  $u'_i$  avec  $i = 1, 2$  et  $3$  respectivement pour les directions longitudinale, normale et transversale à la paroi. Le critère utilisé pour estimer la distance d'adaptation est indiqué entre parenthèses.

auteur	formulation	$x_a$
Batten et al.	$u'_i = a_{ik}v'_k;$ $a_{ij} : \text{décomposition de Cholesky du tenseur de Reynolds ;}$ $v'_i = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \left[ p_i^n \cos \left( \frac{2\pi \hat{d}_i^n}{L_b} x_j^n + \frac{2\pi \omega^n}{T_b} t \right) + q_i^n \sin \left( \frac{2\pi \hat{d}_j^n}{L_b} x_j^n + \frac{2\pi \omega^n}{T_b} t \right) \right];$ <p>échelle de longueur et de temps de la turbulence :</p> $T_b = k/\epsilon, L_b = T_b V_b, V_b = \sqrt{k};$ <p>nombre d'onde des structures turbulentes :</p> $\hat{d}_j^n = d_j^n V_b / c^n, c_n = \sqrt{\frac{3}{2} u'_l u'_m \frac{d_l^n d_m^n}{d_k^n d_k^n}};$ <p>amplitude de <math>v'_i</math></p> $p_i^n = \epsilon_{ijk} \zeta_j^n d_k^n, q_i^n = \epsilon_{ijk} \xi_j^n d_k^n;$ <p><math>d_j^n, \zeta_j^n</math> et <math>\xi_j^n</math> : nombres aléatoires suivant la loi gaussienne</p>	$20\delta_{in}$ selon Keating et al. ( $C_f(x)$ ) $25\delta_{in}$ selon Jarrin et al. ( $C_f(x)$ )
Sandham et al.	$u'_i = u'_{i0}{}^{inner} + \sum_{j=1}^3 u'_{ij}{}^{outer};$ <p>mode de la région interne</p> $u'_{10}{}^{inner} = \frac{c_{1,0}}{0,368} y^+ \exp(-y^+/y_{p0}^+) \sin(\omega_0 t) \cos(\beta_0 z + \phi_0)$ $u'_{20}{}^{inner} = \frac{c_{2,j}}{0,368} (y^+)^2 \exp(-(y^+/y_{p0}^+)^2) \sin(\omega_0 t) \cos(\beta_0 z + \phi_0)$ $\nabla \cdot (u'_{10}{}^{inner}, u'_{20}{}^{inner}, u'_{30}{}^{inner}) = 0;$ <p>modes de la région externe</p> $u'_{1j}{}^{outer} = \frac{c_{1,j}}{0,368} \frac{y}{y_{pj}} \exp(-y/y_{pj}) \sin(\omega_j t) \cos(\beta_j z + \phi_j)$ $u'_{2j}{}^{outer} = \frac{c_{2,j}}{0,368} \frac{y^2}{y_{pj}^2} \exp(-(y/y_{pj})^2) \sin(\omega_j t) \cos(\beta_j z + \phi_j)$ $\nabla \cdot (u'_{1j}{}^{outer}, u'_{2j}{}^{outer}, u'_{3j}{}^{outer}) = 0;$ <p>bruit blanc de 4% ajouté à <math>u'_{1j}{}^{outer}</math>.</p>	$40\delta_{in}$ ( $u^+ = f(y^+), \overline{u'_i u'_j}$ ) (soit $5\delta_{in}$ en utilisant les corrélations empiriques de Cousteix [1989])
Pamiès et al.	$u'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{u}_j;$ $\tilde{u}_j = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\sqrt{N(p)}} \sum_{k=1}^{N(p)} \epsilon_k \Xi \left( \frac{t-t_k-l_p^t}{l_p^t} \right) \Phi \left( \frac{y-y_k}{l_p^y} \right) \Psi \left( \frac{z-z_k}{l_p^z} \right);$ <p>la turbulence pariétale est divisée en <math>P</math> couches ;</p> <p><math>t_k, y_k</math> et <math>z_k</math> : temps d'apparition et positions des structures, choisis aléatoirement ;</p> <p><math>l_p^t = l_p^x / c_p</math> : échelle de temps des structures, où <math>c_p</math> est la vitesse de convection ;</p> <p><math>\Xi \Phi \Psi, l_p^x, l_p^y</math> et <math>l_p^z</math> déterminent la forme des structures</p>	$5, 5\delta_{in}$ ( $C_f(x)$ )

$c_{1,0}$  et  $c_{2,0}$  correspondent à la valeur maximale du mode.

Dans la région externe, Sandham et al. introduisent trois modes placés à des distances à la paroi  $y_{pj}/\delta_1 = 1; 1,5$  et  $2$ . Ils considèrent des structures de longueur  $\lambda_x = 16\delta_1$ , convectées à une vitesse  $U_c = 0.75U_\infty$  et dont la périodicité  $\beta_j$  selon la direction transversale est rendue égale à la largeur du domaine de calcul. L'amplitude des modes externes est fixée à  $c_{1,j} = 0,11U_\infty$  et  $c_{2,j} = -2,2 \times 10^{-2}U_\infty$ .

Sandham et al. annoncent une distance d'adaptation de  $40\delta_{1in}$  en utilisant comme critère la qualité des profils de vitesse et des tensions de Reynolds par rapport à la DNS de couche limite sans gradient de pression de Spalart [1988].

**La Synthetic Eddy Method** La *Synthetic Eddy Method* (SEM) a été initialement développée par Jarrin et al. [2006] mais on présente ici la version de Pamiès et al. [2009]. Pamiès et al. divisent le plan d'entrée en plusieurs couches et introduisent des structures spécifiques à chaque couche dans le but de représenter plus fidèlement la forme des structures cohérentes de la couche limite turbulente.

Ces différentes couches sont la zone tampon, la zone logarithmique et la zone de sillage, où Pamiès et al. introduisent respectivement des structures de forme allongée selon la direction de l'écoulement (*streaks*), des structures en forme d'épingle à cheveux (*hairpin*) et des structures isotropes.

Par rapport à la méthode de Sandham et al. , la SEM injecte donc des structures synthétiques à des positions choisies aléatoirement sur le plan d'entrée et permet un contrôle plus fin de leur forme. Pamiès et al. rapportent une distance d'adaptation de  $5,5\delta_{in}$  en se basant sur le tracé de  $C_f(x)$ .

On s'aperçoit que l'injection de turbulence synthétique conduit à des distances d'adaptation très variables allant de  $5$  à  $25\delta_{in}$  (voir le tableau 7.2). De plus, Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001] indiquent qu'avec l'injection synthétique, il est difficile de contrôler les grandeurs intégrales comme le frottement pariétal ou l'épaisseur de couche limite à la fin de la distance d'adaptation. Pour répondre à ces deux défauts, Spille-Kohoff et al. proposent de contrôler le développement de la turbulence dans un volume situé en aval du plan d'entrée.

#### 7.2.4 Méthodes utilisant un terme de contrôle

L'injection de turbulence pariétale par un terme de contrôle développée par Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001] met en oeuvre deux méthodes. La première est, comme décrit ci-dessus, une méthode d'injection de fluctuations de vitesse dans le plan d'entrée. Spille-Kohoff et al. ont choisi une méthode de recyclage mais n'importe quelle autre méthode d'injection pourrait être utilisée. La seconde est une méthode de contrôle du développement de la turbulence par un terme source introduit dans l'équation de quantité de mouvement.

Spille-Kohoff et al. ont introduit plusieurs termes de contrôle agissant sur la tension de Rey-

nolds  $-\langle u'v' \rangle$ , l'épaisseur de couche limite et le gradient de pression longitudinal. On se concentre ici sur le terme de contrôle agissant sur  $-\langle u'v' \rangle$ . Une fois la formulation de ce terme de contrôle donnée, on montrera sa capacité à raccourcir la distance d'adaptation.

### 7.2.4.1 Formulation du terme de contrôle

Comme indiqué sur la figure 7.2, Spille-Kohoff et al. utilisent un terme de contrôle  $f_c$  de type proportionnel-intégral :

$$\begin{aligned}
 f_c &= r_c(\tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle) & \text{si} & \begin{cases} 0,05 < y/\delta < 0,5 \\ |\tilde{u}'| < 0,6U_\infty \\ |\tilde{v}'| < 0,4U_\infty \\ |\tilde{u}'\tilde{v}'| > 0,0015U_\infty^2 \end{cases} \\
 f_c &= 0 & \text{sinon} & \\
 r_c &= \alpha_p e_c + \beta_p \int_0^t e_c dt' \\
 e_c &= -\langle \tilde{\rho}\tilde{u}'\tilde{v}' \rangle - (-\overline{\rho u'v'}_{cible})
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

$f_c$  est défini sur des plans parallèles au plan d'entrée. La distance entre le plan d'entrée et le plan de contrôle le plus en aval définit la distance de contrôle  $\Delta x_c$ . Les coefficients  $\alpha_p$  et  $\beta_p$  permettent d'ajuster l'amplitude du contrôle.  $\langle \cdot \rangle$  désigne la combinaison d'une moyenne spatiale selon la direction transversale et d'une moyenne temporelle sur un temps de l'ordre de  $10\delta_{in}/U_\infty$ . Les conditions sur  $|\tilde{u}'|$ ,  $|\tilde{v}'|$  et  $|\tilde{u}'\tilde{v}'|$  permettent d'éviter des valeurs non réalistes du terme de contrôle et de concentrer son application sur les événements turbulents les plus énergétiques. Ce terme de contrôle est ensuite ajouté comme un terme source selon la normale à la paroi  $f_c \mathbf{y}$  dans le membre de droite de l'équation LES de quantité de mouvement (équation 1.10).

L'utilisation d'un terme source selon la normale à la paroi a pour effet d'augmenter ou de réduire la vitesse instantanée normale à la paroi  $\tilde{v}$  selon que  $f_c$  est respectivement positif ou négatif. Keating et al. [2004] remarquent que si la turbulence pariétale n'est pas pleinement développée, on s'attend à ce que  $\langle -\tilde{\rho}\tilde{u}'\tilde{v}' \rangle < -\overline{\rho u'v'}_{cible}$ .  $f_c$  a donc un signe opposé à  $\tilde{u}'$ , ce qui amplifie les événements turbulents de type  $\tilde{\rho}\tilde{u}'\tilde{v}' < 0$ , caractéristiques des phénomènes d'éjection et de *sweep*. Comme indiqué dans le paragraphe 7.1.2, un profil correct de  $\langle -\tilde{\rho}\tilde{u}'\tilde{v}' \rangle$  implique un frottement pariétal turbulent correct.

En utilisant le frottement pariétal comme critère, Spille-Kohoff et al. obtiennent, avec trois plans de contrôle, une distance d'adaptation d'environ  $5,5\delta_{in}$ , ce qui correspond à la position du plan de contrôle le plus en aval.

**7.2.4.2 Démonstration de l'efficacité du terme de contrôle volumique**

Suite au travail de Spille-Kohoff et al. , certains auteurs ont étudié l'effet du terme de contrôle sur des cas de turbulence pariétale avec et sans gradient de pression. Contrairement à Spille-Kohoff et al. , qui utilisent une méthode de recyclage, ces auteurs utilisent une méthode d'injection de turbulence synthétique.

TABLE 7.3 : Etudes montrant l'efficacité du terme de contrôle à réduire la distance d'adaptation  $x_a$ , estimée en se basant sur  $C_f(x)$ . La distance d'adaptation obtenue sans le terme de contrôle est donnée entre parenthèses. ZPG, FPG et APG signifient respectivement sans gradient de pression, gradient de pression favorable et gradient de pression adverse.

auteur	injection dans le plan d'entrée	paramètres du terme de contrôle	cas d'étude	$x_a$
Keating and Piomelli	Batten et al.	4 plans de contrôle ; $\alpha_p = 1 ; \beta_p = 1$	canal plan	$13\delta_{in}$ ( $24\delta_{in}$ )
			couche limite ZPG	$15\delta_{in}$ ( $26\delta_{in}$ )
Roidl et al.	Batten et al.	non indiqué	couche limite ZPG	$6\delta_{in}$
	Jarrin et al.			$2\delta_{in}$
Keating et al.	Batten et al.	$\alpha_p = 1 ; \beta_p = 30$	couche limite ZPG	$60\delta_{1in}$ (soit $7, 5\delta_{in}$ suivant les corrélations de Cousteix)
			couche limite FPG	non quantifiable
			couche limite APG	

**Cas d'une couche limite sans gradient de pression** Le tableau 7.3 donne les distances d'adaptation basées sur le critère  $C_f(x)$  pour différentes études utilisant le terme de contrôle de Spille-Kohoff et al. . On constate que les distances d'adaptation obtenues avec le terme de contrôle sont inférieures à  $15\delta_{in}$ , malgré l'utilisation de différentes méthodes numériques et différentes méthodes d'injection.

**Cas d'une couche limite sous un gradient de pression intense** Comme indiqué dans le tableau 7.3, Keating et al. [2006] ont évalué l'efficacité du terme de contrôle de Spille-Kohoff et al. sur deux écoulements de couche limite sur plaque plane avec un gradient de pression intense. Dans chaque cas, un domaine RANS est placé en amont du domaine LES avec une région où les deux domaines se recouvrent. Les plans de contrôle sont placés dans la région de recouvrement.

La méthode de Batten et al. est utilisée pour injecter la turbulence dans le plan d'entrée et les tensions de Reynolds normales sont reconstruites en considérant la turbulence isotrope.  $k$  et  $-\overline{\rho u'v'}$  cible sont définis par la solution RANS dans la région de recouvrement.

Sur chacun des deux cas de couche limite, Keating et al. comparent les résultats avec et sans

terme de contrôle à un calcul LES de référence, réalisé dans l'ensemble des domaines RANS et LES.

Le premier cas correspond à l'expérience de Warnack and Fernholz [1998], où un gradient de pression favorable intense entraîne la relaminarisation de la couche limite. L'utilisation du terme de contrôle permet d'obtenir un frottement pariétal plus proche du frottement de référence dès la fin de la zone de contrôle. Après la zone de relaminarisation, l'écoulement re-transitionne vers la turbulence, ce qui s'accompagne d'une augmentation du frottement pariétal. L'utilisation du terme de contrôle permet d'estimer plus fidèlement cette augmentation de  $C_f$ .

Le second cas correspond à la DNS de Na and Moin [1998], où un gradient de pression adverse entraîne le décollement de la couche limite et une bulle de recirculation. L'utilisation du terme de contrôle prévoit une forme de la bulle de recirculation plus proche des données de référence. Néanmoins, il apparaît crucial sur cet écoulement que les données d'entrée du terme de contrôle ( $k$  et  $-\overline{\rho u'v'}$  cible) soient correctement estimées. La région de recouvrement RANS-LES doit donc être placée dans une région où le calcul RANS retourne des résultats corrects.

Sous un gradient de pression intense, l'injection de turbulence pariétale par une méthode d'injection synthétique apparaît donc difficile sans l'utilisation additionnelle du terme de contrôle.

L'utilisation du terme de contrôle de Spille-Kohoff et al. assure donc une courte distance d'adaptation pour différentes méthodes d'injection, méthodes numériques et effets physiques sur la turbulence pariétale.

Pour conclure sur l'injection de turbulence pariétale pour la LES, le tableau 7.4 résume les avantages, inconvénients et améliorations possibles des différentes méthodes d'injection abordées.

7.2. Injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles

TABLE 7.4 : Comparaison des méthodes d'injection de turbulence pariétale.

méthode d'injection	avantages	inconvénients	améliorations possibles
recyclage	$x_a$ faible	définition de la mise à l'échelle de $\langle \tilde{u}_i \rangle_{recy}$ et $(\tilde{u}'_i)_{recy}$ dérive possible du champ moyen	calcul RANS pour définir le champ moyen dans la zone de recyclage Shur et al.
		fréquence parasite	translation/rotation du plan de recyclage Morgan et al.
		durée du transitoire	définition du champ initial Pamiès et al.
calcul préliminaire	$x_a$ faible	stockage et manipulation des données	POD Abéguilé et al.
		surcoût du calcul préliminaire	réduction du Reynolds
injection synthétique	coût de calcul	$x_a$ élevée	terme de contrôle Spille-Kohoff and Kaltenbach
		reconstruction des tensions de Reynolds	hypothèse de Wilcox Modèle de Perry et al.
		contrôle des propriétés intégrales ( $C_f, \delta$ )	terme de contrôle Spille-Kohoff and Kaltenbach

## 7.3 Injection de turbulence pariétale pour les approches hybrides RANS-LES

Les études portant sur l'injection de turbulence pariétale en entrée d'une simulation hybride RANS-LES sont plus rares que celles concernant la LES.

En particulier, l'injection de turbulence pariétale pour l'approche WMLES a focalisé très peu d'attention. Deux études sur la WMLES mentionnent la méthode d'injection utilisée. La première est l'étude de Kawai and Larsson [2011], qui ont utilisé une méthode de recyclage pour simuler le développement d'une couche limite supersonique sur une plaque plane sans gradient de pression. La seconde est l'étude de Hallez et al. [2010], qui a simulé un jet débouchant dans un écoulement transverse avec et sans injection de turbulence synthétique en entrée de l'écoulement transverse. A notre connaissance, aucune analyse spécifique sur le comportement de l'injection de turbulence pariétale en entrée d'un calcul WMLES n'a été publiée.

Grâce à une communauté d'utilisateurs plus large, la plupart des travaux sur l'injection de turbulence pariétale pour les méthodes hybrides RANS-LES concernent la DES et ses variantes. L'approche ZDES mode III a été particulièrement étudiée dans le cadre de l'injection de turbulence pariétale. Une description de cette approche sera donc tout d'abord donnée. Puis, le comportement de l'injection de turbulence pariétale pour les méthodes hybrides RANS-LES et particulièrement la ZDES mode III sera étudié. On montrera qu'une nouvelle formulation du terme de contrôle de Spille-Kohoff et al. permet une nette réduction de la distance d'adaptation. Cette nouvelle formulation du terme de contrôle sera finalement présentée.

### 7.3.1 Description de l'approche ZDES mode III

Une brève description de la DES 1997, introduite par Spalart et al. [1997], a été donnée dans le paragraphe 4.2.2. La ZDES mode III, introduite par Deck [2005], représente l'une des dernières variantes de la DES.

ZDES signifie *Zonal DES*. L'adjectif *Zonal* indique que l'utilisateur peut spécifier les zones à traiter en mode RANS et en mode DES 1997. Le "mode III" indique que la majeure partie de la couche limite est traitée par la DES 1997 et que le mode RANS est imposé dans une mince couche au dessus de la paroi pour garantir une estimation plus précise du frottement pariétal.

Plus précisément, la ZDES mode III se formule de la manière suivante [Laraufie et al., 2011]. Considérons le domaine de calcul subdivisé en  $N$  zones. Deux arguments  $A_n$  et  $B_n$  sont attribués à chaque zone. L'argument  $A_n$  permet de spécifier les zones RANS et DES :

$$\begin{cases} A_n = 0 & \text{si domaine RANS} \\ A_n = 1 & \text{si domaine DES 1997} \end{cases} \quad (7.3)$$

L'argument  $B_n$  permet de forcer le mode RANS dans une couche d'épaisseur  $d_{prescrite}$  au dessus de la paroi :

$$\begin{cases} B_n = 0 & \text{si } y > d_{prescrite} \\ B_n = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.4)$$

Puis, la taille caractéristique des structures turbulentes modélisées  $\tilde{d}$  (voir le paragraphe 4.2.2) est remplacée par  $\tilde{d}_{ZDES}$  avec :

$$\begin{cases} \tilde{d}_{ZDES} = (1 - A_n)y & \text{(mode RANS)} \\ \quad + A_n B_n \tilde{d} & \text{(mode DES 1997)} \\ \quad + A_n(1 - B_n)y & \text{(mode RANS forcé près de la paroi)} \end{cases} \quad (7.5)$$

avec  $\tilde{d}$  déterminée comme pour la DES 1997, mais en considérant que la dimension caractéristique des cellules est définie par  $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ .

### 7.3.2 Comportement de l'injection de turbulence pariétale

Le tableau 7.5 rassemble les études utilisant une injection de turbulence pariétale sur des calculs hybrides RANS-LES. Par rapport à l'injection de turbulence pour la LES, discutée jusqu'ici dans ce chapitre, on remarque que ces travaux utilisent des maillages nettement plus grossiers.

TABLE 7.5 : Liste non exhaustive des études sur l'injection de turbulence pariétale en entrée d'un calcul hybride RANS-LES.  $x_a$  est déterminée en prenant comme critère  $C_f(x)$ . Voir le tableau 7.3 pour les notations ZPG, FPG et APG.

auteur	approche hybride RANS-LES	méthode d'injection de la turbulence pariétale		Cas d'étude et maillage	$x_a$
		injection dans le plan d'entrée	terme de contrôle de Spille-Kohoff et al.		
Shur et al.	IDDES (Improved Delayed DES)	recyclage	non	couche limite ZPG ; $\Delta_x^+ = 1600 ; \Delta_z^+ = 800$	$6\delta_{in}$
Deck et al.	ZDES mode III	synthétique Jarrin et al.	non	couche limite ZPG $\Delta_x^+ = 100, \Delta_x^+ = 50$ $\Delta_x^+ = 200, \Delta_x^+ = 100$	$25\delta_{in}$ $> 50\delta_{in}$
Laraufie et al.	ZDES mode III	synthétique Pamiès et al.	non	couche limite ZPG $\Delta_x^+ = 100 ; \Delta_z^+ = 50$	$35\delta_{in}$
			$(\rho_\infty U_\infty \delta) \sum \alpha_p = 19000 ;$ $\Delta x_c = 12\delta_{in}$		
			$e_c = - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle - (-\rho u' v'_{cible}) ;$ $f_c = r_c (\tilde{v} - \langle \tilde{v} \rangle)$	$\Delta_x^+ = 100 ; \Delta_z^+ = 50$	$35\delta_{in}$
			$e_c = \langle \tilde{\rho} \tilde{v}'^2 \rangle - (\rho v'^2_{cible}) ;$ $f_c = r_c (\tilde{v} - \langle \tilde{v} \rangle)$	$\Delta_x^+ = 100 ; \Delta_z^+ = 50$ $\Delta_x^+ = 200 ; \Delta_z^+ = 100$	$12\delta_{in}$ $20\delta_{in}$

Avec une méthode de recyclage, Shur et al. [2011] obtiennent une courte distance d'adaptation de  $6\delta_{in}$ . Comme en LES, les méthode de recyclage font donc également référence sur des calculs hybrides RANS-LES en termes de distance d'adaptation.

Les autres travaux utilisent l'approche ZDES mode III. Avec cette approche, Deck et al. [2011] évaluent la méthode d'injection synthétique de Jarrin et al. [2006] sur des maillages de plus en plus grossier. Pour des cellule de dimensions ( $\Delta_x^+ > 100$ ;  $\Delta_z^+ > 50$ ), Deck et al. rapportent des distances d'adaptation supérieures à  $50\delta_{in}$ . Ce résultat est confirmé par Laraufie et al. [2011], qui obtient  $x_a = 35\delta_{in}$  avec la méthode d'injection synthétique de Pamiès et al. [2009].

Vue la grossièreté des maillages utilisés avec les méthodes hybrides RANS-LES, il semble difficile d'exiger des distances d'adaptation aussi courtes qu'en LES, c'est-à-dire d'environ  $15\delta_{in}$ . Cependant, des distances d'adaptation supérieures à  $50\delta_{in}$  seront rédhibitoires sur la majorité des applications, dès que la géométrie sera un peu complexe.

Pour répondre à ce problème, Laraufie et al. [2011] utilisent un terme de contrôle permettant d'obtenir des distances d'adaptation beaucoup plus acceptables. Pour un même raffinement du maillage, ils parviennent en effet à diviser  $x_a$  par un facteur trois.

### 7.3.3 Nouvelle formulation du terme de contrôle

Le terme de contrôle permettant à Laraufie et al. d'obtenir des distances d'adaptation acceptables en ZDES mode III est une reformulation du terme de contrôle de Spille-Kohoff et al. . Laraufie et al. choisissent en effet de contrôler la fluctuation de vitesse normale à la paroi  $\langle \widetilde{\rho v'^2} \rangle$  au lieu de contrôler  $-\langle \widetilde{\rho u'v'} \rangle$ . Ils considèrent donc l'erreur sur  $\langle \widetilde{\rho v'^2} \rangle$  et rendent  $f_c$  proportionnel à la fluctuation de vitesse normale à la paroi plutôt que la fluctuation de vitesse longitudinale :

$$\begin{aligned}
 f_c &= r_c(\widetilde{v} - \langle \widetilde{v} \rangle) & \text{si} & \begin{cases} 0,05 < y/\delta < 0,5 \\ |\widetilde{u}'| < 0,6U_\infty \\ |\widetilde{v}'| < 0,4U_\infty \\ |\widetilde{u}'\widetilde{v}'| > 0,0015U_\infty^2 \end{cases} \\
 f_c &= 0 & \text{sinon} & \\
 r_c &= \alpha_p e_c \\
 e_c &= \langle \widetilde{\rho v'^2} \rangle - \overline{\rho v'^2}_{cible}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Pour reconstruire  $\overline{\rho v'^2}_{cible}$ , Laraufie et al. utilisent l'hypothèse de Wilcox [2006] qui permet une approximation correcte de  $\overline{\rho v'^2}_{cible}$  pour  $y^+ > 100$  (voir le paragraphe 7.2.3.1). On remarque de plus que la partie intégrale du terme de contrôle n'est pas utilisée ( $\beta_p = 0$ ). Au lieu d'une simple moyenne temporelle, Laraufie et al. préfèrent un filtre temporel causal avec un noyau exponentiel glissant :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta_f} \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{\tau - t}{\Delta_f}\right) f(\tau) d\tau \quad (7.7)$$

où  $\Delta_f$  représente la largeur du filtre. En pratique, il est plus commode d'écrire l'équation 7.7 sous la forme :

$$\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \frac{1}{\Delta_f} (f(t) - \langle f(t) \rangle) \quad (7.8)$$

Puis, par une différence finie à l'ordre un de la dérivée temporelle  $\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \frac{\langle f(t + \Delta_t) \rangle - \langle f(t) \rangle}{\Delta_t}$ , on obtient :

$$\langle f(t + \Delta_t) \rangle = \frac{\Delta_t}{\Delta_f} f(t) + \left(1 - \frac{\Delta_t}{\Delta_f}\right) \langle f(t) \rangle \quad (7.9)$$

qui permet une implémentation plus aisée. Par rapport à une simple moyenne temporelle, le filtrage exponentiel permet naturellement de ne pas prendre en compte la phase transitoire avant l'établissement de la turbulence pariétale et reste valide sur un écoulement instationnaire en moyenne. Laraufie et al. choisissent  $\Delta_f = 2\delta_{in}/U_\infty$ .

Laraufie et al. déterminent de plus que la longueur optimale de forçage vaut  $\Delta x_c = 12\delta_{in}$ . Contrairement à Spille-Kohoff et al. , qui utilisent trois plans de contrôle, Laraufie et al. utilisent autant de plans de contrôle qu'il y a de cellules selon la direction  $x$  dans la zone de contrôle. Plutôt que le nombre de plans de contrôle, ils indiquent que le paramètre pertinent pour définir l'intensité du contrôle est  $(\rho_\infty U_\infty \delta) \sum \alpha_p$ , dont ils déterminent la valeur optimale de 19000.

Ce terme de contrôle permet non seulement de réduire la distance d'adaptation, mais également de la rendre indépendante de la méthode numérique. En effet, Laraufie et al. utilisaient jusqu'ici le schéma spatial *Advection Upstream Splitting Method Plus* (AUSMP) [Liou, 1996] avec un senseur d'oscillations numériques similaire à celui que nous utilisons (voir le paragraphe 3.2.1.3). En désactivant ce senseur, Laraufie et al. montrent que le terme de contrôle permet de conserver la même distance d'adaptation, ce qui n'est pas le cas sans contrôle.

Sur des simulations hybrides RANS-LES utilisant des maillages nettement plus grossiers qu'en LES, le terme de contrôle décrit par l'équation 7.6 permet donc d'obtenir des distances d'adaptation inférieures à  $20\delta_{in}$  pour différentes dimensions des cellules et méthodes numériques.

## 7.4 Conclusions intermédiaires

La revue bibliographique menée dans ce chapitre permet de tirer les conclusions suivantes :

---

- Différents types de critères existent pour déterminer la distance d'adaptation : les critères basés sur des grandeurs instantanées, moyennes ou intégrales. Si  $C_f$  est majoritairement utilisé comme critère, l'utilisation de critères de différents types permet de déterminer la distance d'adaptation avec plus de fiabilité ;
- dans le cadre des simulations LES, une distance d'adaptation de  $15\delta_{in}$  est considérée comme l'état de l'art sur une couche limite sans gradient de pression ;
- à notre connaissance, aucune étude spécifique sur l'injection de turbulence pour la WMLES n'a été publiée et la majorité des travaux se sont concentrés sur la ZDES mode III ;
- l'utilisation d'un terme de contrôle [Spille-Kohoff and Kaltenbach, 2001; Laraufie et al., 2011] permet systématiquement de raccourcir la distance d'adaptation. Le terme de contrôle augmente de plus la robustesse de la méthode d'injection vis à vis d'effets physiques défavorables (gradient de pression intense), de la méthode numérique et du raffinement du maillage ;
- dans le cadre des simulations hybrides RANS-LES, le terme de contrôle reformulé par Laraufie et al. [2011] permet des distances d'adaptation inférieures à  $20\delta_{in}$ , ce qui peut être considéré comme l'état de l'art sur une couche limite sans gradient de pression.

Pour l'injection de turbulence pariétale dans un calcul WMLES, nous estimons devant ces conclusions qu'une méthode d'injection synthétique combinée au terme de contrôle de Laraufie et al. [2011] constitue un bon compromis entre robustesse, facilité de mise en oeuvre, efficacité et durée du transitoire.



---

## Développement et étude d'une méthode d'injection de turbulence pariétale pour la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi

---

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .</b>	<b>182</b>
<b>8.2</b>	<b>Présentation et modélisation du cas de validation . . . . .</b>	<b>183</b>
8.2.1	Caractéristiques physiques de l'écoulement de couche limite . . . . .	183
8.2.2	Construction du maillage . . . . .	183
8.2.3	Modélisation physique et numérique . . . . .	184
<b>8.3</b>	<b>Description de la méthode d'injection de turbulence pariétale . . . . .</b>	<b>185</b>
8.3.1	Formulation de l'injection de turbulence synthétique . . . . .	185
8.3.1.1	Fluctuations de vitesse de Sandham et al. . . . .	186
8.3.1.2	Ajout des fluctuations de vitesse à la condition limite d'entrée . . . . .	187
8.3.2	Choix des paramètres de la méthode de Sandham et al. . . . .	187
8.3.2.1	Simulation de canal plan bi-périodique . . . . .	188
8.3.2.2	Détermination des paramètres de Sandham et al. basés sur des critères numériques . . . . .	188
8.3.3	Formulation du terme de contrôle . . . . .	190
8.3.4	Choix des paramètres du terme de contrôle . . . . .	190
<b>8.4</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>191</b>
8.4.1	Influence de la dissipation artificielle sur la couche limite turbulente pleinement développée . . . . .	192
8.4.1.1	Données de référence . . . . .	192

8.4.1.2	Frottement pariétal . . . . .	193
8.4.1.3	Profils de vitesse . . . . .	195
8.4.1.4	Bilans de quantité de mouvement . . . . .	196
8.4.1.5	Variances de la vitesse . . . . .	198
8.4.2	Développement de la turbulence synthétique injectée . . . . .	200
8.4.2.1	Dissipation artificielle négligeable . . . . .	200
8.4.2.2	Dissipation artificielle significative : effet du terme de contrôle avec les paramètres de Sandham et al. numériques . . . . .	200
8.4.2.3	Dissipation artificielle significative : effet du terme de contrôle avec les paramètres de Sandham et al. physiques . . . . .	205
<b>8.5</b>	<b>Conclusions intermédiaires . . . . .</b>	<b>208</b>

---

## 8.1 Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre

Comme expliqué au chapitre 7, l'utilisation de l'approche WMLES sur une simulation spatiale requiert une injection efficace de turbulence pariétale à l'entrée du domaine. Dans la revue bibliographique du chapitre précédent, nous n'avons trouvé aucune étude spécifique sur l'injection de turbulence pariétale pour la WMLES. Le travail réalisé et décrit dans le présent chapitre consiste donc à :

- identifier et implémenter dans le code elsA une méthode d'injection de turbulence pariétale adaptée à la WMLES ;
- avec et sans le terme de contrôle décrit au chapitre précédent, étudier le développement de la turbulence pariétale injectée pour différents paramètres d'injection ;
- déterminer la distance d'adaptation et conclure sur l'utilité du terme de contrôle.

Cette démonstration de la faisabilité d'une méthode d'injection efficace pour la WMLES, si elle s'avère concluante, permettra d'agrandir le champ d'action de la WMLES aux écoulements pariétaux en développement spatial.

En accord avec les conclusions du chapitre précédent, nous sélectionnons une injection de turbulence synthétique combinée à un terme de contrôle (voir le paragraphe 7.3.3) et visons une distance d'adaptation d'environ  $20\delta_{in}$ .

Dans le but d'utiliser l'injection de turbulence sur des configurations à la géométrie complexe, nous mènerons cette étude en présence de dissipation artificielle.

Le cas de validation et la méthode d'injection à implémenter seront tout d'abord décrits. Puis, sur un écoulement de couche limite sans gradient de pression, on étudiera le comportement de la WMLES une fois la turbulence pariétale pleinement développée. Enfin, on se concentrera sur la région proche du plan d'entrée en étudiant l'influence des principaux paramètres contrôlant le développement de la turbulence injectée.

## 8.2 Présentation et modélisation du cas de validation

Devant l'absence d'étude spécifique sur l'injection de turbulence pariétale pour la WMLES, on choisit un cas d'étude au régime quasi-incompressible sur une géométrie simple. On se démarque néanmoins de l'écoulement de canal traité précédemment en sélectionnant ici un écoulement externe : le développement spatial d'une couche limite turbulente sur une plaque plane sans gradient de pression, qui a été fréquemment utilisée pour étudier l'injection de turbulence pariétale (voir le chapitre 7).

### 8.2.1 Caractéristiques physiques de l'écoulement de couche limite

TABLE 8.1 : Paramètres de l'écoulement de couche limite sans gradient de pression sur plaque plane. L'indice  $f$  désigne le bord de fuite de la plaque plane.

$\rho_\infty$	$U_\infty$	$T_\infty$	$\delta_{in}$	$Re_{\tau_{in}}(Re_{\tau_f})$	$Re_{x_{in}}(Re_{x_f})$	$M$
$1,2 \text{ kg.m}^{-3}$	$56 \text{ m.s}^{-1}$	$293 \text{ K}$	$3,4 \text{ mm}$	$635(2430)$	$4,5 \times 10^5(2,2 \times 10^6)$	$0,17$

Les caractéristiques de l'écoulement de couche limite choisi sont données dans le tableau 8.1. La couche limite se développe sur une plaque plane isotherme dont la température est fixée à  $T_\infty$ . Le nombre de Mach est faible et cet écoulement correspond donc au régime compressible I (voir le tableau 1.1).

Les caractéristiques de cette couche limite sont choisies pour correspondre à la couche limite en entrée du jet débouchant traité dans le chapitre suivant. Cette couche limite est également proche de celle traitée par Laroche et al. [2011] en ZDES mode III, où  $U_\infty = 70 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\delta_{in} = 3,8 \text{ mm}$ . Il sera donc possible de comparer directement de l'efficacité de l'injection de turbulence pariétale obtenue ici en WMLES avec les résultats de Laroche et al. .

Le faible nombre de Reynolds  $Re_{\tau_{in}}$  en début de plaque limitera la marge de manoeuvre dans le choix de  $\Delta_{y_1}^+$ . Au bord de fuite de la plaque, le nombre de Reynolds est nettement plus élevé avec des valeurs de  $Re_\tau$  supérieures à 2000, ce qui est comparable aux cas de canaux traités précédemment.

### 8.2.2 Construction du maillage

Le principal paramètre qui va guider la construction du maillage est le nombre de Reynolds de frottement à l'entrée du domaine  $Re_{\tau_{in}} = 635$ . En considérant la stratégie idéale de maillage pour la WMLES donnée par l'équation 4.2, ce faible nombre de Reynolds va imposer, à l'entrée du domaine, un compromis entre le nombre de cellules dans la couche limite  $n_{y_{in}}$  et la hauteur des cellules adjacentes à la paroi  $\Delta_{y_{1in}}^+$ . Nous avons déjà dû faire un tel compromis sur les simulations de canal plan basées sur les DNS de Coleman et al. [1995], qui présentent également un faible nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 222$  et  $451$ ).

On choisit ici un nombre minimal de cellules dans la couche limite de  $n_{y_{in}} = 14$  sur le plan d'entrée, de façon à obtenir une hauteur de cellule maximale de  $\Delta_{y_{1in}}^+ = 38$ , cette dernière restant néanmoins inférieure à la valeur recommandée de  $\Delta_{y_1}^+ = 100$ . La valeur  $n_{y_{in}} = 14$  est inférieure à la valeur de  $n_y = 20$  recommandée dans le chapitre 4. Cependant, l'épaississement de la couche limite entraîne une augmentation de  $n_y$  en fonction de  $x$  et  $n_y$  devient supérieur à 20 dans les trois derniers quarts du domaine.

En accord avec les recommandations de l'équation 4.2 sur la forme des cellules, les dimensions longitudinale et transversale des cellules sont fixées à  $\Delta_x^+ = 200$  et  $\Delta_z^+ = 100$  dans l'ensemble du domaine. Il se trouve que ces valeurs sont identiques au maillage le plus grossier utilisé par Larauflie et al. , ce qui de nouveau facilitera la comparaison avec leurs résultats en termes de distance d'adaptation. Les principales caractéristiques du maillage obtenu sont résumées dans le tableau 8.2.

TABLE 8.2 : Taille du domaine de calcul et caractéristiques du maillage. Un rapport d'expansion de  $\frac{\Delta_{y_{j+1}}}{\Delta_{y_j}} = 1,03$  est prescrit dans la direction normale à la paroi.  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  représentent les dimensions du domaine et  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_z$  le nombre de cellules selon chaque direction.

$L_x$	$L_y$	$L_z$	$N_x$	$N_y$	$N_z$	$n_{y_{in}}$	$\frac{\Delta_x}{\Delta_{y_1}}$	$\frac{\Delta_z}{\Delta_{y_1}}$	$\Delta_{x_{in}}^+$	$\Delta_{y_{1in}}^+$	$\Delta_{z_{in}}^+$
$141\delta_{in}$	$4,4\delta_{in}$	$8\delta_{in}$	472	40	54	14	5	2,5	200	38	100

L'utilisation d'une couche limite à un nombre de Reynolds plus important aurait permis plus de liberté dans la construction du maillage, avec un meilleur respect des recommandations de l'équation 4.2. En pratique cependant, les contraintes pesant sur la construction du domaine pour un calcul spatial (voir le début du chapitre 7) n'autorisent pas une grande liberté de choix sur  $Re_{\tau_{in}}$  et il est probable que l'on obtienne de telles valeurs de  $Re_{\tau_{in}}$  sur de nombreux cas de calcul spatiaux. Le faible  $Re_{\tau_{in}}$  considéré ici représente donc un cas défavorable qui permet une validation réaliste de l'injection de turbulence pour la WMLES.

### 8.2.3 Modélisation physique et numérique

Le fluide est considéré comme un gaz parfait, avec  $C_v = 717,5 J.kg^{-1}.K^{-1}$  et  $\gamma = 1,4$ . Le nombre de Prandtl moléculaire est fixé à  $Pr = 0,72$  et la viscosité moléculaire suit la loi de Sutherland (voir le paragraphe 1.3), avec  $T_{ref} = 288,15K$  et  $\mu_{ref} = 1,789 \times 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$ .

Dans les calculs WMLES, le comportement du fluide est modélisé par les équations LES compressibles (équation 1.14), complétées par le modèle WALE (voir le paragraphe 1.5.4.1) et un nombre de Prandtl de sous-maille  $Pr_{sgs} = 0,9$ . Les conditions limites utilisées sont données dans le tableau 8.3.

Une description de l'avance en temps et de la discrétisation des flux convectifs et diffusifs est donnée dans le paragraphe 3.2. Une condition CFL acoustique maximale égale à 0,9 est imposée,

TABLE 8.3 : Conditions limites de l'écoulement de couche limite. Les conditions *inj1* et *outpres* sont décrites dans le paragraphe 3.3.

entrée	sortie	paroi	côtés	dessus
<i>inj1</i>	<i>outpres</i>	modèle de paroi QA (version isotherme)		<i>outpres</i>

ce qui conduit à un pas de temps  $\Delta t = 4,16 \times 10^{-7} s$ .

Concernant la dissipation artificielle d'ordre quatre, on a montré au chapitre 6 que la valeur  $k_4 = 5 \times 10^{-3}$  utilisée avec le senseur d'oscillations numériques (voir le paragraphe 3.2.1.3) entraîne une dissipation significative des structures turbulentes dans les premières rangées de cellules au dessus de la paroi. N'ayant pas la preuve qu'une réduction de cette dissipation artificielle près de la paroi soit possible, on mènera donc des simulations à la fois avec la valeur  $k_4 = 5 \times 10^{-3}$  et avec la valeur quasiment négligeable de  $k_4 = 10^{-4}$ . Dans ces deux cas, le senseur d'oscillations numériques sera activé. La méthode numérique est donc identique aux calculs de canal menés dans le paragraphe 6.4.

Les calculs WMLES seront comparés à un calcul RANS utilisant un maillage résolu à la paroi ( $\Delta_{y_1}^+ = 1$ ), qui constitue un résultat de référence pour cet écoulement de couche limite sur plaque plane sans gradient de pression. Dans ce calcul RANS, la viscosité turbulente est donnée par le modèle de Spalart-Allamaras et la discrétisation spatiale est assurée par un schéma de Roe du second ordre.

## 8.3 Description de la méthode d'injection de turbulence pariétale

Dans le chapitre précédent, nous avons conclu qu'une injection synthétique combinée à un terme de contrôle constitue un bon compromis pour l'injection de turbulence en entrée d'un calcul WMLES. Après une présentation de la méthode d'injection synthétique retenue, nous décrivons le terme de contrôle choisi.

### 8.3.1 Formulation de l'injection de turbulence synthétique

La méthode d'injection de turbulence synthétique retenue ici est celle de Sandham et al. [2003]. Bien qu'a priori moins raffinée que la méthode SEM de Pamiès et al. [2009] utilisée par Laraufige et al. , ce choix est motivé par les deux arguments suivants.

Premièrement, l'approche WMLES ne résout pas les structures turbulentes typiques de la sous-couche visqueuse et de la zone tampon. Or la méthode SEM de Pamiès et al. [2009] injecte des structures de formes différentes suivant que l'on se situe dans les zones tampon, logarithmique ou de sillage.

Deuxièmement, le chapitre 6 a montré que la grossièreté du maillage combinée à une méthode numérique d'ordre deux et à l'utilisation de dissipation artificielle modifie significativement le développement des structures turbulentes près de la paroi. On s'attend donc à ce que la forme optimale des structures à injecter repose plus sur des critères numériques que physiques. Cette remarque sera confirmée dans le paragraphe 8.4.2.3.

La méthode de Sandham et al. nous paraît donc suffisante pour cette première étude spécifique portant sur l'injection de turbulence pour la WMLES. La formulation des fluctuations de vitesse de la méthode de Sandham et al. étant donnée dans le chapitre précédent, on soulignera uniquement ici les quelques différences mineures entre la formulation retenue et la formulation d'origine de Sandham et al. . Puis, on décrira une manière d'injecter les fluctuations de vitesse de Sandham et al. dans le code de calcul compressible utilisé.

### 8.3.1.1 Fluctuations de vitesse de Sandham et al.

La méthode de Sandham et al. consiste à ajouter des fluctuations de vitesse synthétiques sur un état moyen défini sur la frontière d'entrée. Les variables conservatives correspondantes à cet état moyen sont déterminées à partir d'un profil de vitesse moyenne, de  $\rho_\infty$  et de  $T_\infty$ . Le profil de vitesse moyenne est obtenu par la loi de Reichardt [1951] à partir du frottement pariétal donné par la corrélation empirique 8.3.

La formulation des fluctuations de vitesse selon Sandham et al. est donnée dans le tableau 7.2. Nous utilisons la même formulation aux deux différences près indiquées ci-dessous :

- le mode interne n'est pas utilisée ( $u_{i0}^{inner} = 0$ ) car les structures turbulentes de la zone tampon ne sont pas résolues par la WMLES ;
- le bruit blanc ajouté à la composante longitudinale des modes externes est confiné autour du point d'injection par une fonction d'amortissement :

$$u_1' = \sum_{j=1}^3 u_{1j}'^{outer} + \frac{1}{0.368} \frac{y}{y_{pj}} e^{-y/y_{pj}} bb(0, 05U_\infty) \quad (8.1)$$

On rappelle que  $u_{1j}'^{outer}$  est le mode de Sandham et al. pour la région externe de la couche limite et  $y_{pj}$  est la hauteur d'injection au dessus de la paroi.  $bb(0, 05U_\infty)$  désigne un bruit blanc d'amplitude maximale égale à 5% de la vitesse infinie en amont. Cet amortissement du bruit blanc évitera d'activer inutilement le terme de contrôle en dehors de la turbulence pariétale.

Une fois les fluctuations de vitesse déterminées, il reste à les incorporer aux cinq variables conservatives sur le plan d'entrée tout en restant cohérent avec la condition limite d'entrée.

### 8.3.1.2 Ajout des fluctuations de vitesse à la condition limite d'entrée

La manière d'ajouter les fluctuations de vitesse de Sandham et al. sur la frontière d'entrée va dépendre de la condition limite qui y est définie. Nous utilisons ici la condition limite *injl* décrite dans le paragraphe 3.3. En accord avec cette condition limite, on choisit de conserver la température totale constante lors de l'ajout des fluctuations de vitesse aux cinq variables conservatives. En pratique, pour l'intégration temporelle explicite utilisée ici, les étapes suivantes sont effectuées à chaque sous pas du schéma de Runge-Kutta :

1. calcul des fluctuations de vitesse de Sandham et al. dans le repère de couche limite  $(x, y, z)$  selon le paragraphe 8.3.1.1 ;
2. changement de repère pour se ramener dans le repère global si la normale à la paroi n'est pas selon l'axe  $y$  ;
3. calcul des fluctuations des variables conservatives sur la frontière d'entrée à partir des fluctuations de vitesse de Sandham et al. . La conservation de la température totale intervient ici dans la détermination de  $(\rho E)'$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = 0 \\ (\rho u)' = \rho u_{outer} \\ (\rho v)' = \rho v_{outer} \\ (\rho w)' = \rho w_{outer} \\ (\rho E)' = \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma\rho} \{ [(\rho u)_{in} + (\rho u)']^2 + ((\rho v)_{in} + (\rho v)')^2 + ((\rho w)_{in} + (\rho w)')^2 \} \\ - [(\rho u)_{in}^2 + (\rho v)_{in}^2 + (\rho w)_{in}^2] \end{array} \right. \quad (8.2)$$

4. ajout des fluctuations de l'équation 8.2 aux variables conservatives  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_{in}$  sur la frontière d'entrée. Par cohérence avec la définition des cellules fictives, qui sont remplies par extrapolation des valeurs sur la frontière, les fluctuations de l'équation 8.2 sont également ajoutées aux variables conservatives  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)_0$  dans les cellules fictives (voir la figure 3.2).

### 8.3.2 Choix des paramètres de la méthode de Sandham et al.

Par rapport à un calcul LES, nous avons vu que l'approche WMLES présente des caractéristiques spécifiques. Les paramètres déterminés par Sandham et al. en se basant sur les structures turbulentes de la couche limite risquent donc de ne pas être optimaux dans le cadre de la WMLES.

Nous allons ainsi déterminer deux jeux de paramètres. Le premier jeu sera identique aux choix de Sandham et al. et formera le jeu de paramètre basé sur des critères physiques. Le second jeu de paramètres sera basé sur des critères numériques et déterminé à l'aide d'une simulation annexe de canal plan bi-périodique.

### 8.3.2.1 Simulation de canal plan bi-périodique

Cette simulation de canal bi-périodique va permettre d'obtenir une turbulence pariétale pleinement développée. Pour obtenir un régime d'écoulement similaire sur le cas de canal et de couche limite, on choisit d'imposer le nombre de Reynolds débitant dans le canal égal au nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de couche limite à la frontière d'entrée, soit  $Re_b = Re_{\delta_{in}}$ . On impose donc  $\rho_b = \rho_\infty$ ,  $U_b = U_\infty$  et  $T_b = T_\infty$ . Le nombre de Reynolds de frottement obtenu dans le canal sera donc  $Re_\tau \approx 635$ .

Comme sur la couche limite, les parois du canal sont modélisées par le modèle de paroi QA dans sa version isotherme, avec une température imposée à  $T_\infty$ . Les dimensions du domaine sont ( $L_x = 17,6\delta$ ;  $L_y = 2\delta$ ;  $L_z = 8\delta$ ) et le nombre de cellules utilisé est  $N_x = 56$ ,  $N_y = 40$  et  $N_z = 50$ . On obtient alors une dimension des cellules valant ( $\Delta_x^+ = 200$ ;  $\Delta_y^+ = 32$ ;  $\Delta_z^+ = 100$ ), ce qui est très proche des dimensions des cellules adjacentes à la paroi à l'entrée de la couche limite.

La méthode numérique reste identique à celle utilisée sur la couche limite et concernant la dissipation artificielle, on se place dans le cas le plus défavorable pour le développement de la turbulence pariétale, c'est-à-dire  $k_4 = 5 \times 10^{-3}$ .

### 8.3.2.2 Détermination des paramètres de Sandham et al. basés sur des critères numériques

Le problème est de déterminer les paramètres des trois modes externes de Sandham et al. à partir de critères numériques. Pour simplifier la détermination de ces paramètres, on considère un mode central (mode  $j = 2$ ) autour duquel sont répartis deux modes auxiliaires (modes  $j = 1$  et  $3$ ). Les amplitudes des modes auxiliaires sont choisies identiques à celle du mode central. Par contre, de façon similaire à Sandham et al. , leur hauteur d'injection ainsi que leur périodicité spatiale et temporelle sont décalées par rapport au mode central, respectivement d'un facteur 1,33 et 0,67.

La détermination des paramètres de Sandham et al. numériques revient donc à spécifier le mode  $j = 2$ . On utilise les variances de la vitesse obtenues sur l'écoulement de canal pour déterminer les amplitudes  $c_{1j}$  et  $c_{2j}$  ainsi que la hauteur d'injection  $y_{p2}$ .

La figure 8.1 montre les variances de la vitesse normalisées par la vitesse débitante, qui sont comparées à la DNS de Hoyas and Jiménez [2006] à  $Re_\tau = 550$ . On observe que le maximum de la composante longitudinale est très proche des données DNS. On peut donc déterminer l'amplitude  $c_{1j}$  en identifiant la variance du mode  $j = 2$  avec le maximum de la variance de vitesse longitudinale, soit  $c_{1j} = \sqrt{2} \left( \sqrt{\langle \tilde{u}^2 \rangle} \right)_{max} \approx 0,24U_\infty$ .

Par contre, comme observé dans le chapitre 6, la composante normale à la paroi montre des valeurs nettement plus faibles que la DNS. Puisque la consigne du terme de contrôle  $\overline{\rho v'^2}_{cible}$  sera proche des données DNS, on préfère donc déterminer l'amplitude  $c_{2j}$  à partir des données DNS, soit  $c_{2j} = \sqrt{2} \left( \sqrt{v'^2} \right)_{DNS,max} \approx 0,09U_\infty$ .

La hauteur d'injection  $y_{p2}$  est déterminée par la position du maximum de  $\sqrt{\langle \tilde{u}^2 \rangle}$  sur la simu-

lation de canal, ce qui donne  $y_{p2} \approx \delta_{in}/4$ .

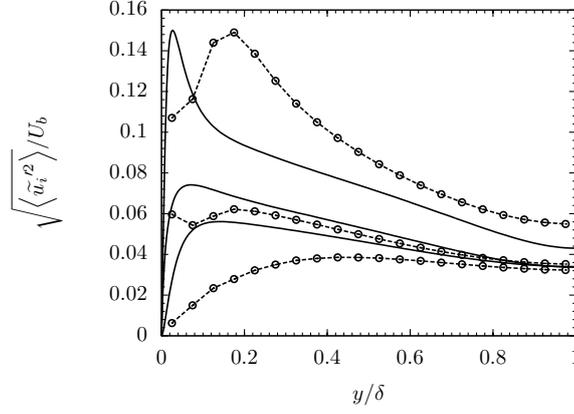


FIGURE 8.1 : (- - $\odot$ ) : variances de la vitesse sur l'écoulement annexe de canal plan. (—) : DNS de Hoyas and Jiménez [2006] à  $Re_\tau = 550$ .  $Re_\tau$ , la dimension des cellules et la méthode numérique sont identiques au cas de couche limite. De bas en haut :  $\sqrt{v'^2}$ ,  $\sqrt{w'^2}$  et  $\sqrt{u'^2}$ .

Enfin, la périodicité spatiale selon la direction transversale et la périodicité temporelle des modes injectés sont déterminées en considérant que huit cellules sont nécessaires à la discrétisation d'une structure, ce qui conduit à une erreur de phase de 10% (voir le tableau 3.1).

Le mode le plus difficile à capturer est celui ayant la périodicité spatiale la plus courte, soit  $0,67\lambda_{z2}$ . La périodicité spatiale  $\lambda_{z2}$  du mode  $j = 2$  est donc déterminée par la relation  $0,67\lambda_{z2} = 8\Delta_z$ , avec  $\Delta_z = L_z/N_z \approx 0,5mm$ . On en déduit le paramètre  $\beta_2 = 2\pi/\lambda_{z2}$ .

Pour déterminer la périodicité temporelle  $T$ , il est nécessaire de fixer une vitesse de convection  $U_c$  des modes. On a alors  $T = \lambda_x/U_c$ , avec  $\lambda_x$  la périodicité spatiale selon la direction longitudinale qui vaut ici  $\lambda_x = 8\Delta_x$ . En considérant le pire des cas, c'est-à-dire la vitesse de convection maximale  $U_c = U_\infty$ , on obtient alors le paramètre  $\omega_2 = \frac{2\pi}{\lambda_x/U_\infty}$ .

Le tableau 8.4 rassemble les deux jeux de paramètres des modes de Sandham respectivement basés sur des critères physiques et numériques.

On constate que les périodicités spatiales  $\beta_j$  et temporelle  $\omega_j$  déterminées à partir de critères physiques et numériques sont similaires. Par contre, les critères numériques conduisent à des amplitudes de mode plus grandes et à des hauteurs d'injection  $y_{pj}$  au dessus de la paroi environ trois fois plus grandes qu'avec les critères physiques.

On précise que si un calcul DNS avait été utilisé pour estimer les paramètres de Sandham et al., nous aurions obtenu les paramètres originaux de Sandham et al. basés sur des critères physiques. Les différences entre paramètres physiques et numériques sont donc dues aux spécificités de l'approche WMLES.

TABLE 8.4 : Paramètres des modes de Sandham et al. déterminés à partir de critères numériques et physiques.

critères de choix des paramètres	$j$	$c_{1j}$ ( $m.s^{-1}$ )	$c_{2j}$ ( $m.s^{-1}$ )	$\omega_j$ ( $s^{-1}$ )	$\beta_j$ ( $m^{-1}$ )	$\phi_j$ ( $rad$ )	$y_{pj}$ ( $m$ )
numériques	1	$0.24U_\infty$	$-0.1U_\infty$	$0.67\omega_2$	$1.33\beta_2$	0.	$1.33y_{p2}$
	2	$0.24U_\infty$	$-0.1U_\infty$	$\frac{2\pi}{7\Delta_x/U_\infty}$ $= 5 \times 10^4$	$\frac{2\pi}{7\Delta_z/0.67}$ $= 1,1 \times 10^3$	0.1	$\delta_{in}/4$ $= 8,5 \times 10^{-4}$
	3	$0.24U_\infty$	$-0.1U_\infty$	$1.33\omega_2$	$0.67\beta_2$	0.15	$0.67y_{p2}$
physiques	1	$0,11U_\infty$	$-0.022U_\infty$	$\frac{2\pi}{16\delta_{in}/(0,75U_\infty)}$ $= 5,2 \times 10^4$	$\frac{2\pi}{L_z/5}$ $= 1,2 \times 10^3$	0.	$\delta_{in}$ $= 3,1 \times 10^{-4}$
	2	$0.11U_\infty$	$-0.022U_\infty$	$\omega_1/2$	$\beta_1/1,5$	0.1	$1,5\delta_{in}$
	3	$0.11U_\infty$	$-0.022U_\infty$	$\omega_1/4$	$\beta_1/3$	0.15	$2\delta_{in}$

### 8.3.3 Formulation du terme de contrôle

La formulation de Laraufie et al. [2011] du terme de contrôle de Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001] décrite dans le paragraphe 7.3.3 est utilisée pour contrôler le développement de la turbulence synthétique de Sandham et al. .

La fluctuation de vitesse normale à la paroi visée,  $\overline{\rho v'^2}_{cible}$ , est déterminée suivant l'hypothèse de Wilcox (voir le paragraphe 7.2.3.1) et nécessite un champ de viscosité turbulente  $\mu_t$  et de gradient de vitesse  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ . Ces deux champs sont ici fournis par le calcul RANS. En pratique,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  est ici directement obtenu à partir du module de la vorticité  $\|\overline{\Omega}\|$ .

### 8.3.4 Choix des paramètres du terme de contrôle

Le terme de contrôle nécessite de spécifier trois paramètres :

- le premier paramètre est la longueur de la région de contrôle  $\Delta x_c$ . N'ayant pas conduit d'étude spécifique pour déterminer la valeur optimale de  $\Delta x_c$  pour la WMLES, nous fixons ici  $\Delta x_c = 18\delta_{in}$ , qui correspond à la longueur de contrôle maximale admissible sur l'application de jet débouchant traitée au chapitre suivant. Par comparaison, Laraufie et al. ont déterminé la valeur optimale  $\Delta x_c = 12\delta_{in}$  dans le cadre de la ZDES mode III ;
- le second paramètre est l'intensité du contrôle. Laraufie et al. indiquent que la quantité pertinente pour mesurer l'intensité du contrôle est  $(\rho_\infty U_\infty \delta_{in}) \sum \alpha_p$ , où  $\alpha_p$  est le coefficient permettant d'ajuster l'amplitude du contrôle. Comme Laraufie et al. , nous utilisons un contrôle continu, c'est-à-dire que nous plaçons autant de plans de contrôle qu'il y a de cellules selon la direction  $x$  dans la zone de contrôle, soit 59 plans de contrôle pour le maillage utilisé ici.

On montrera qu'une intensité du contrôle fixée à  $(\rho_\infty U_\infty \delta_{in}) \sum \alpha_p = 3660$  est suffisante pour un contrôle efficace du développement de la turbulence pariétale injectée. Cette valeur de  $(\rho_\infty U_\infty \delta_{in}) \sum \alpha_p$  est cinq fois plus faible que la valeur optimale déterminée par Laraufie et al.

Il est possible de faire un lien entre ce résultat et les résultats de Mason and Thomson [1992] et Keating and Piomelli [2006]. En effet, ces auteurs introduisent un terme de forçage respectivement pour supprimer les *superstreaks* dans le cadre de la WMLES et pour traiter la région d'interface dans le cadre de la DES (voir le paragraphe 4.2.3.1). Keating et al. indiquent que l'amplitude de ce terme de forçage est plus faible en WMLES qu'en DES, résultat confirmé dans notre cas ;

- le troisième paramètre est la taille  $\Delta_f$  du filtre temporel exponentiel dans l'équation 7.7. Pour tirer parti des avantages du filtrage exponentiel (voir le paragraphe 7.3.3), on considère que  $\Delta_f$  doit être le plus faible possible tout en permettant de correctement moyenner les modes de Sandham et al. . On fixe donc  $\Delta_f$  à deux fois la plus longue période des modes de Sandham injectés, soit  $\Delta_f = 2(2\pi/\omega_1) = 3,8 \times 10^{-4} s$ . On remarque que  $\Delta_f \approx 6\delta_{in}/U_\infty$ , ce qui est cohérent avec la valeur  $\Delta_f = O(\delta_{in}/U_\infty)$  indiquée par Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001].

## 8.4 Résultats

Les résultats des simulations WMLES sont moyennés en temps entre  $T_0 = 1,56 \times 10^{-2} s$  et  $T_f = 4,16 \times 10^{-2} s$ , ce qui correspond respectivement à 1,8 et 4,9 temps de passage  $L_x/U_\infty$ . Ce champ moyen en temps est ensuite moyenné en espace selon la direction transversale  $z$ .

Concernant le coût de ce calcul, une simulation durant le temps physique  $T_f$  correspond à  $10^5$  itérations effectuées sur ce maillage de  $1,02 \times 10^6$  cellules. Une LES résolue à la paroi avec les critères de maillage  $\Delta_x^+ = 50$  et  $\Delta_z^+ = 15$  aurait conduit à un maillage de  $27 \times 10^6$  cellules en considérant un nombre identique de cellules selon  $y$ . Avec une intégration temporelle explicite et  $\Delta_{y_1}^+ = 1$ , le pas de temps aurait été 38 fois plus petit qu'ici, soit  $\Delta_t = 1,1 \times 10^{-8} s$ , conduisant à  $3,8 \times 10^6$  itérations. Le coût de calcul aurait donc été multiplié par 1000.

Le tableau 8.5 résume les différentes simulations menées dans la suite de ce chapitre.

On discutera des résultats en deux temps. Tout d'abord, on s'intéressera à la région la plus en aval de la plaque où la couche limite turbulente est pleinement développée. Puis, on se concentrera sur la région juste en aval du plan d'entrée pour étudier le développement de la turbulence injectée, en s'intéressant à l'effet du terme de contrôle.

TABLE 8.5 : Dénomination et paramètres des cas de validation. Dans tous les cas, le senseur LES est activé.

cas	$k_4$	terme de contrôle	critères de choix des paramètres de Sandham et al.
<i>num</i>	$1 \times 10^{-4}$	non	numériques
<i>c_num_d</i>	$5 \times 10^{-3}$	oui	numériques
<i>num_d</i>	$5 \times 10^{-3}$	non	numériques
<i>c_phys_d</i>	$5 \times 10^{-3}$	oui	physiques
<i>phys_d</i>	$5 \times 10^{-3}$	non	physiques

### 8.4.1 Influence de la dissipation artificielle sur la couche limite turbulente pleinement développée

On sait grâce au chapitre 6 que la dissipation artificielle a un effet significatif sur le comportement de la WMLES. Pour étudier son influence, on utilise les cas *num* et *num\_d* du tableau 8.5. L'utilisation du terme de contrôle n'a en effet pas d'importance tant que l'on s'intéresse à la turbulence pleinement développée. Il sera intéressant de comparer le comportement obtenu sur cette couche limite avec celui observé sur le canal plan étudié au chapitre 6.

#### 8.4.1.1 Données de référence

Les calculs WMLES sont comparés à trois résultats de référence : les profils de la DNS de couche limite de Spalart [1988] à  $Re_\tau = 650$ , un calcul RANS résolu à la paroi ( $\Delta_{y_1}^+ = 1$ ) avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras, valide sur cet écoulement de couche limite sans gradient de pression, et la corrélation donnée par Cousteix [1989] :

$$\begin{cases} C_f = 0,0594/Re_x^{1/5} \\ \delta = 0,38(x + \Delta_{xba})/Re_x^{1/5} \end{cases} \quad (8.3)$$

avec  $Re_x = \frac{\rho_\infty U_\infty (x + \Delta_{xba})}{\mu_\infty}$  et  $\Delta_{xba}$  la distance entre le bord d'attaque de la plaque et le plan d'entrée du domaine, estimée à  $\Delta_{xba} = 0,123m$  en insérant  $\delta_{in}$  et  $\tau_{pin}$  dans l'équation 8.3.

Si l'estimation de  $\tau_p$  est directement donnée par les simulations, l'estimation de l'épaisseur de couche limite est moins triviale. Plutôt que la définition habituelle  $u(\delta) = 0,99U_\infty$ , on préfère le critère plus robuste suivant :

$$\begin{cases} \tau(\delta)/\tau_{max} = \epsilon \\ \epsilon = 0,01 \\ \tau = (\bar{\mu} + \mu_t) \|\bar{\Omega}\| & \text{en RANS} \\ \tau = (\langle \tilde{\mu} \rangle + \mu_{sgs}) \|\langle \tilde{\Omega} \rangle\| - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle & \text{en LES} \end{cases} \quad (8.4)$$

où le module de la vorticité  $||\Omega||$  est une bonne approximation du gradient de vitesse  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Autrement dit,  $\delta$  est la distance à la paroi à laquelle le frottement  $\tau$  devient négligeable devant la valeur maximale de  $\tau$ .

La figure 8.2 montre l'évolution du coefficient de frottement  $C_f = \langle \tilde{\tau}_p \rangle / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2)$  et de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  le long de la plaque pour le calcul RANS et les corrélations. Pour  $x/\delta_{in} > 20$ , le frottement retourné par le calcul RANS est égal à la corrélation à moins de 3% près. L'épaisseur de couche limite du calcul RANS sous-estime légèrement la corrélation à hauteur de 8% à  $x = 120\delta_{in}$ , ce qui valide la méthode de calcul de l'épaisseur de couche limite définie par l'équation 8.4.

#### 8.4.1.2 Frottement pariétal

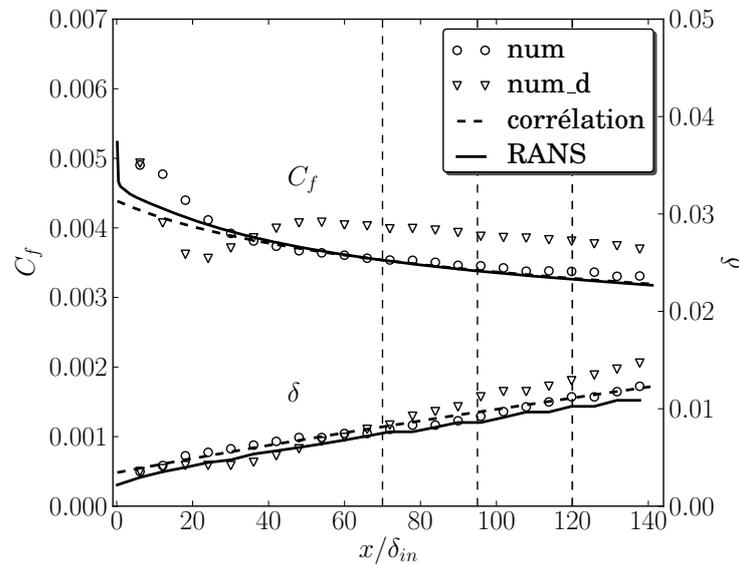


FIGURE 8.2 : Evolution du frottement pariétal  $C_f = \langle \tilde{\tau}_p \rangle / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2)$  et de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  le long de la plaque pour les cas num et num\_d, comparés au calcul RANS et aux corrélations empiriques données par Cousteix [1989].

Le frottement pariétal et l'épaisseur de couche limite le long de la plaque sont tracés sur la figure 8.2 pour les calculs WMLES num et num\_d. Pour  $x/\delta_{in} > 60$ , on observe dans les deux cas une pente du coefficient de frottement similaire aux données de référence. On peut donc considérer la turbulence comme pleinement développée dans cette région. On choisit ainsi d'extraire les résultats aux trois stations  $x = 70\delta_{in}$ ,  $x = 95\delta_{in}$  et  $x = 120\delta_{in}$ .

Ces trois stations sont représentées par des lignes verticales pointillées sur la figure 8.2 et le ta-

TABLE 8.6 : Reynolds de frottement et caractéristiques du maillage du cas num dans la région où la couche limite turbulente est pleinement développée.

$x/\delta_{in}$	$Re_\tau$	$n_y$	$\Delta_{y_1}^+$
70	1230	26	32
95	1420	29	31
120	1710	33	30

bleau 8.6 y rassemble le nombre de Reynolds de frottement et les caractéristiques du maillage. On observe que le nombre de cellules  $n_y$  qui discrétise l'épaisseur de la couche limite augmente avec  $x$ , puisque  $\Delta_{y_1}$  est constant dans l'ensemble du domaine alors que la couche limite s'épaissit. A  $x = 120\delta_{in}$ , il y a ainsi deux fois plus de cellules dans la couche limite qu'à l'entrée du domaine. La station  $x = 70\delta_{in}$ , avec  $n_y = 26$ , se rapproche du cas de canal traité dans le chapitre 6 sur le maillage fin, où 20 cellules étaient placées dans la demi-hauteur du canal. A cette station, on pourra donc comparer les résultats entre la couche limite et le canal.

On constate également que  $\Delta_{y_1}^+$  diminue légèrement lorsque  $x$  augmente, à cause de la diminution du frottement pariétal suivant  $x$ .

TABLE 8.7 : Erreurs sur  $C_f$  et  $\delta$  pour les cas num et num\_d.

$x/\delta_{in}$	num		num_d	
	$\frac{C_{f_{WMLES}} - C_{f_{RANS}}}{C_{f_{RANS}}}$	$\frac{\delta_{WMLES} - \delta_{RANS}}{\delta_{RANS}}$	$\frac{C_{f_{WMLES}} - C_{f_{RANS}}}{C_{f_{RANS}}}$	$\frac{\delta_{WMLES} - \delta_{RANS}}{\delta_{RANS}}$
70	0, 24%	9, 5%	13, 1%	15, 6%
95	2, 1%	7, 5%	15, 1%	24, 6%
120	3, 5%	9, 5%	16, 8%	25, 7%

Les erreurs commises par les deux calculs num et num\_d sur le frottement pariétal et l'épaisseur de couche limite sont données dans le tableau 8.7 aux trois stations d'étude.

Le calcul avec dissipation artificielle négligeable (num) estime précisément le frottement pariétal avec une erreur maximale à la station la plus aval de 3, 5%. L'erreur sur l'épaisseur de couche limite est constante autour de 9% par rapport au calcul RANS et encore plus faible par rapport à la corrélation.

Le calcul avec dissipation artificielle (num\_d) présente des erreurs nettement plus grandes sur le frottement pariétal, qui sont en légère augmentation pour atteindre presque 17% à la station la plus en aval.

L'augmentation de cette erreur est surprenante car la couche limite est de mieux en mieux discrétisée suivant  $x$  du fait de son épaississement et l'on s'attendait donc plutôt à une amélioration des résultats. Il est de plus difficile de déterminer si cette augmentation de l'erreur sur  $C_f$  est due à l'augmentation du nombre de cellules  $n_y$  dans la couche limite ou à la diminution de la hauteur des cellules adjacentes à la paroi  $\Delta_{y_1}^+$ . Il serait donc intéressant de reproduire cette étude avec un maillage construit de telle sorte que  $\Delta_{y_1}^+$  reste constant suivant  $x$ .

L'erreur sur l'épaisseur de couche limite s'écarte des valeurs de référence de manière plus rapide. Ce résultat est cohérent avec l'équation 8.3, qui indique que  $\delta \propto (x + \Delta_{xba})C_f$ , c'est-à-dire qu'une erreur constante sur  $C_f$  implique une erreur sur  $\delta$  proportionnelle à  $x$ .

#### 8.4.1.3 Profils de vitesse

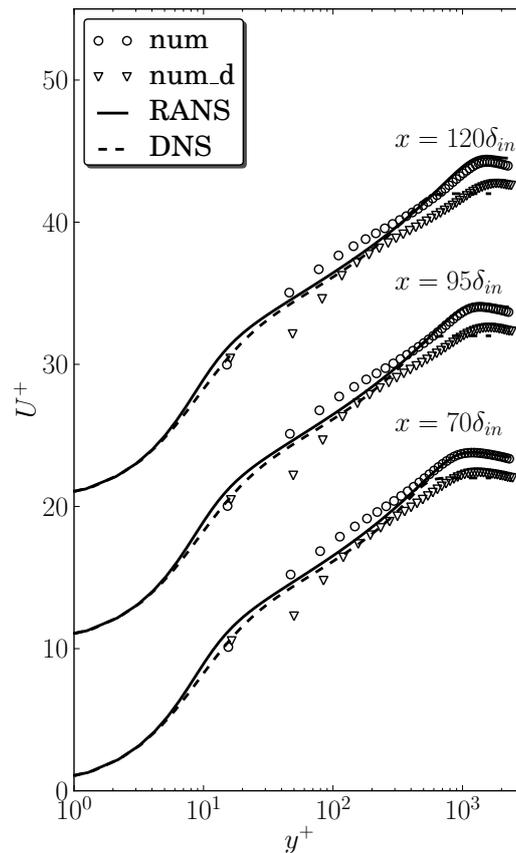


FIGURE 8.3 : Profils de vitesse pour les cas num et num\_d, comparés au calcul RANS et à la DNS de Spalart [1988]. Pour une meilleure lisibilité, les profils sont décalés de 10 unités d'une station à la suivante.

On poursuit avec l'étude des profils de vitesse tracés sur la figure 8.3. On note tout d'abord que la zone de sillage du profil DNS apparaît pour de plus petits  $y^+$  car ces données sont à plus faible nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 650$ ). Le calcul avec dissipation artificielle négligeable (num) est en très bon accord avec le calcul RANS dans la zone de sillage, ce qui est cohérent avec la faible erreur sur le frottement observée ci-dessus. Vu le nombre de Reynolds de frottement, la

zone logarithmique n'est potentiellement visible que sur la plage de  $50 < y^+ < 150$ . Dans cette zone, le cas *num* montre un décalage vers le haut, ce qui signifie que la constante  $\kappa$  de la loi logarithmique est bien estimée mais que la constante additive  $B$  est surestimée.

La figure 8.3 montre que le calcul avec dissipation artificielle (*num\_d*) présente une nette sous-estimation de la vitesse au second point au dessus de la paroi. Ce phénomène a déjà été observé sur le canal étudié au chapitre 6 (voir les figures 6.2 et 6.5) et est un effet direct de la dissipation artificielle. Le reste du profil de vitesse est décalé vers le bas par rapport au calcul RANS à cause de la surestimation du frottement.

#### 8.4.1.4 Bilans de quantité de mouvement

Pour expliquer la surestimation du frottement pariétal sur le cas *num\_d*, on s'intéresse aux bilans de quantité de mouvement. Le bilan de bilan de quantité de mouvement pour un écoulement de couche limite comporte plus de termes que le bilan de quantité de mouvement dans un canal bi-périodique. En effet les dérivées selon  $x$  du champ moyen ne s'annulent plus et la vitesse moyenne normale à la paroi n'est plus nulle, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\langle \tilde{\mu} \rangle + \langle \mu_{sgs} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle &= rhs \\ rhs &= \langle \tilde{\tau}_p \rangle + \int_0^y \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (8.5)$$

Le membre de droite est estimé à partir du calcul RANS après correction par le frottement pariétal :

$$rhs = \frac{\tau_{PWMLLES}}{\tau_{PRANS}} \left[ (\bar{\mu} + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (8.6)$$

Il est à noter que cette expression de  $rhs$  à partir d'un calcul RANS n'est valide que pour une couche limite pleinement développée, comme le suppose le modèle de turbulence RANS.

La forme correspondante discrétisée aux centres des cellules devient, en accord avec le paragraphe 6.2.1 :

$$\begin{aligned} (\langle \tilde{\mu}_j \rangle + \langle \mu_{sgs_j} \rangle) \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y} - \langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j + \langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle &= rhs_j \\ rhs_j &= \frac{\tau_{PWMLLES_j}}{\tau_{PRANS_j}} \left[ (\bar{\mu}_j + \mu_{t_j}) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (8.7)$$

Les termes de l'équation 8.7 sont tracés sur la figure 8.4 pour les cas *num* et *num\_d*. Sur le cas *num*, le flux de dissipation artificielle  $\langle d_j \rangle \approx 0$  et il ne reste donc que la contribution des erreurs numériques  $\langle e_j \rangle$ , qui est faible vu la faible aire contenue sous cette courbe devant, par exemple, l'aire sous le flux de sous-maille.

Sur le cas *num\_d*, on observe par contre une contribution significative de  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ , qui

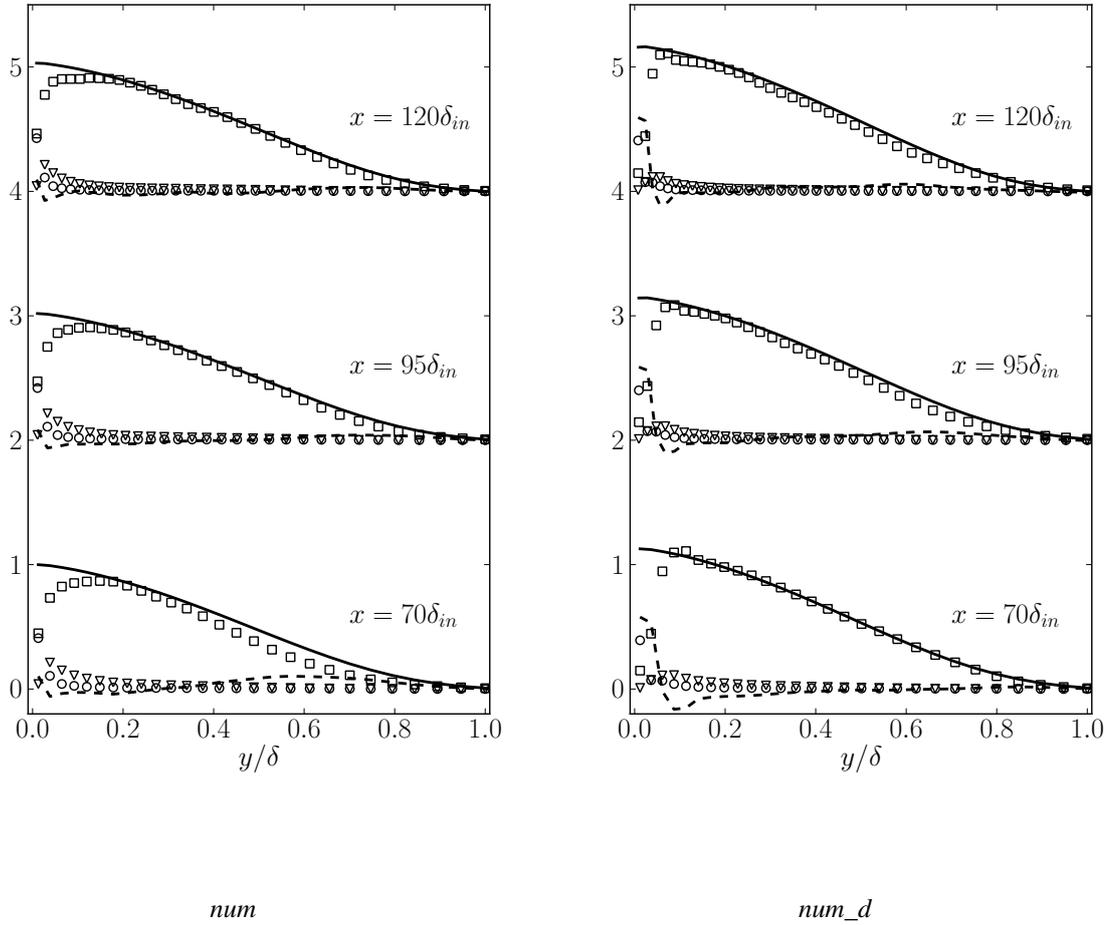


FIGURE 8.4 : Bilans de quantité de mouvement pour les cas *num* et *num\_d*. ( $\odot$ ) contribution laminaire  $\langle \tilde{\mu}_j \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , ( $\nabla$ ) contribution de sous-maille  $\langle \mu_{sgs,j} \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , ( $\square$ ) contribution turbulente  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$ , (---) terme  $\langle d_j \rangle + \langle e_j \rangle$ , (—) membre de droite  $\langle rhs_j \rangle$ . Tous les termes sont divisés par le frottement pariétal RANS. Pour une meilleure lisibilité, les profils sont décalés de 2 unités d'une station à la suivante.

apparaît au moins aussi importante que celle du flux de sous-maille. Comme sur l'écoulement de canal, on peut donc considérer  $\langle e_j \rangle$  négligeable devant  $\langle d_j \rangle$ .

Par rapport au cas *num*, on note que la dissipation artificielle amorti la contribution  $-\langle \tilde{\rho}u'v' \rangle$  dans les deux premières cellules au dessus de la paroi et entraîne une sur-production de  $-\langle \tilde{\rho}u'v' \rangle$  dans la quatrième et cinquième cellule. De nouveau, ce comportement est identique à celui observé sur les simulations de canal (cas *dissip\_senseur* sur la figure 6.4).

### 8.4.1.5 Variances de la vitesse

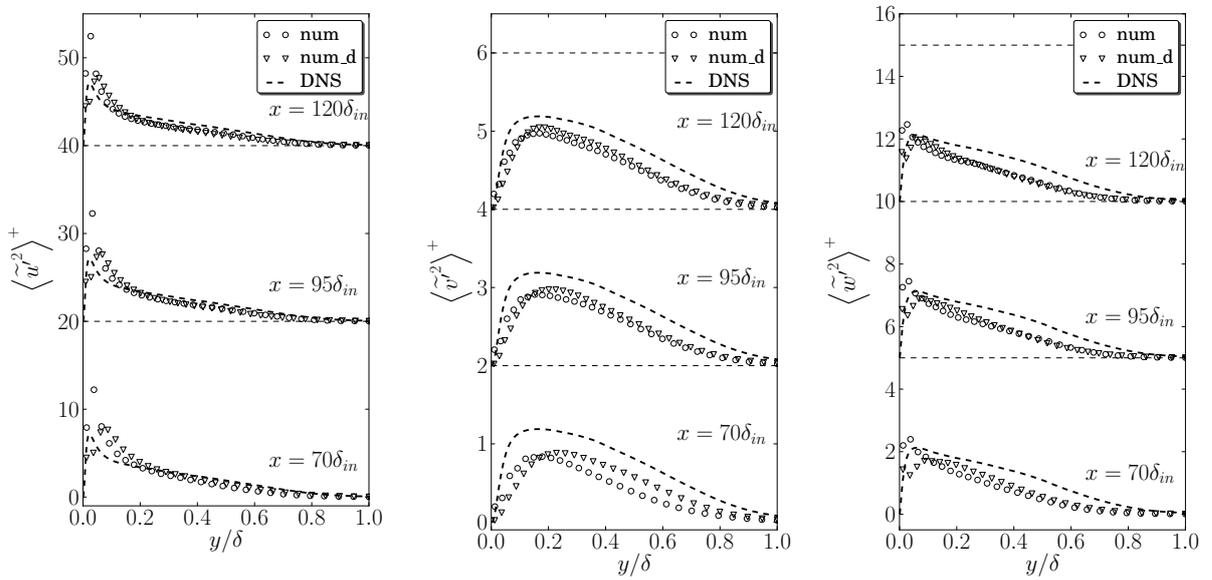


FIGURE 8.5 : Variances des trois composantes de la vitesse dans la région pleinement développée pour les cas *num* et *num\_d*, comparées à la DNS de Spalart [1988]. Pour une meilleure lisibilité, les profils de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle^+$ ,  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle^+$  et  $\langle \tilde{w}'^2 \rangle^+$  sont respectivement décalés de 20 ; 2 et 5 unités d'une station à la suivante.

La variance des trois composantes de la vitesse est tracée sur la figure 8.5. On observe que le pic de la composante longitudinale  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle^+$  du cas avec dissipation artificielle négligeable (*num*) montre une amplitude surestimée par un facteur deux environ par rapport aux données DNS, alors que le cas avec dissipation artificielle (*num\_d*) est nettement plus en accord avec ces dernières, bien qu'une faible surestimation subsiste. Ce comportement est similaire à celui observé sur le maillage fin du cas de canal (cas *dissip\_senseur* sur la figure 6.6), mais la surestimation du pic de  $\langle u'^2 \rangle^+$  par le cas *num* est ici beaucoup plus prononcée.

Sur le cas *num*, ce pic apparaît dans la seconde cellule au dessus de la paroi alors que sur le cas *num\_d*, il apparaît dans la quatrième cellule. Comme observé sur le canal, la dissipation artificielle agit donc sur un nombre constant de cellules au dessus de la paroi plutôt que sur une

hauteur constante. Puisque le nombre de cellules dans la couche limite augmente avec  $x$ , le pic de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  se rapproche de la paroi à mesure que  $x$  augmente.

On remarque que la dissipation artificielle affecte  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$  et  $\langle u'^2 \rangle^+$  aux mêmes points, c'est-à-dire ici aux deux premiers points au dessus de la paroi.

Les deux calculs *num* et *num\_d* sous estiment la composante normale à la paroi  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle^+$ . Mais contrairement aux observations précédentes sur l'écoulement de canal, l'amplitude de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle^+$  est comparable dans les deux cas. Comme noté sur la composante longitudinale, le pic de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  apparaît à un nombre constant de cellules au dessus de la paroi : à la sixième cellule pour le cas *num* et à la neuvième cellule pour le cas *num\_d*.

## 8.4.2 Développement de la turbulence synthétique injectée

Après s'être intéressé à la région aval de la plaque où la turbulence pariétale est pleinement développée, on se concentre maintenant sur le développement de la turbulence près du plan d'entrée. Le but est d'étudier l'effet du terme de contrôle sur la distance d'adaptation en fonction de la dissipation artificielle et des paramètres de l'injection synthétique.

### 8.4.2.1 Dissipation artificielle négligeable

En observant sur la figure 8.2 l'évolution du  $C_f$  en présence d'une dissipation artificielle négligeable (cas *num*), on remarque que pour  $x > 24\delta_{in}$ ,  $C_f$  est très proche des données de référence. Ainsi, en présence d'une dissipation artificielle négligeable, une distance d'adaptation de  $24\delta_{in}$  est obtenue sans nécessiter le terme de contrôle.

Il est à noter que la surestimation de  $C_f$  dans la région  $x < 24\delta_{in}$  est due à l'amplitude des modes de Sandham et al. . La distance d'adaptation pourrait donc être encore raccourcie en réduisant les paramètres  $c_{1j}$  et  $c_{2j}$ .

Sans dissipation artificielle, une injection efficace de turbulence dans un calcul WMLES est donc possible sans recourir à une méthode d'injection avancée. On se concentre donc maintenant sur l'injection de turbulence avec dissipation artificielle.

### 8.4.2.2 Dissipation artificielle significative : effet du terme de contrôle avec les paramètres de Sandham et al. numériques

Nous commençons par comparer les cas avec et sans terme de contrôle utilisant les paramètres de Sandham et al. basés sur des critères numériques (cas *c\_num\_d* et *num\_d*).

La figure 8.6 montre l'évolution du frottement pariétal le long de la plaque pour ces deux cas. Comme on vient de le noter, on remarque que  $C_f$  est tout d'abord surestimé. Cette surestimation est plus importante que sur le calcul sans dissipation à cause de la tendance à la surestimation de  $C_f$  induite par la dissipation artificielle (voir le paragraphe 8.4.1). Puis  $C_f$  décroît pour devenir inférieur aux données de référence et finalement ré-augmente pour atteindre la valeur correspondant à la couche limite pleinement développée. Ce comportement oscillatoire de  $C_f$  sera observé sur tous les cas avec dissipation artificielle ( $k_4 = 5 \times 10^{-3}$ ). En conséquence, on choisit ici de définir la distance d'adaptation comme la distance au plan d'entrée à partir de laquelle  $C_f$  redevient supérieur ou égal aux données de référence.

On observe que le cas sans terme de contrôle *num\_d* présente une diminution initiale de  $C_f$  plus prononcée que le cas *c\_num\_d*. La distance d'adaptation du cas sans contrôle est donc plus grande. En accord avec la définition de  $x_a$  donnée ci-dessus, on obtient  $x_a = 28\delta_{in}$  et  $x_a = 35\delta_{in}$  respectivement pour les cas *c\_num\_d* et *num\_d*.

Puisque la distance d'adaptation s'étend jusqu'à environ  $40\delta_{in}$ , on poursuit l'analyse en défi-

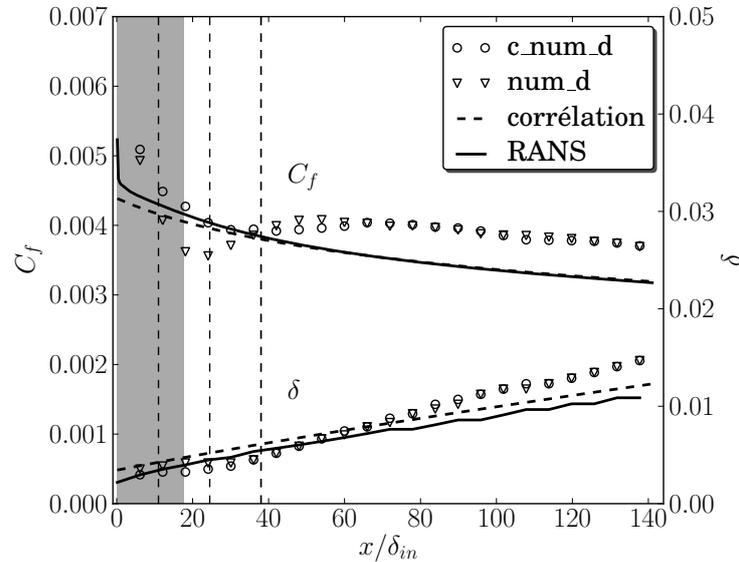


FIGURE 8.6 : Evolution du frottement pariétal  $C_f = \langle \tilde{\tau}_p \rangle / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2)$  et de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  le long de la plaque pour les cas  $c\_num\_d$  et  $num\_d$ . Dans le cas où le terme de contrôle est activé, la zone grisée représente la zone de contrôle.

nissant les trois stations suivantes pour extraire les résultats :  $x = 11\delta_{in}$ ,  $x = 24\delta_{in}$  et  $x = 38\delta_{in}$ . Ces stations sont représentées par des traits verticaux sur la figure 8.6.

Les profils de vitesse sont tracés sur la figure 8.7 à ces trois stations. Sur le calcul sans terme de contrôle  $num\_d$ , la surestimation de  $u^+$  induite par la sous-estimation du frottement pariétal est particulièrement visible à la station  $x = 24\delta_{in}$ , qui correspond au minimum de  $C_f$ .

Comme indiqué dans le paragraphe 7.1.2,  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  intervient dans le terme de production de  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle$ , ce dernier assurant l'estimation d'un frottement pariétal de type turbulent. Il apparaît donc important d'estimer l'effet du terme de contrôle sur  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$ .

La figure 8.8 montre le champ de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  pour les cas  $c\_num\_d$  et  $num\_d$ . L'effet du terme de contrôle est particulièrement visible dans la région ( $7 < x/\delta_{in} < 18$ ;  $0,2 < y/\delta_{in} < 0,4$ ), où  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle / U_\infty^2 > 0,7 \times 10^{-3}$  alors que sans le terme de contrôle,  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle / U_\infty^2$  chute jusqu'à  $0,43 \times 10^{-3}$ . Ce surcroît de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  obtenu grâce au terme de contrôle explique la réduction de la distance d'adaptation par rapport au cas sans contrôle.

En s'intéressant aux variances de la vitesse, tracées sur la figure 8.9, on remarque tout d'abord à la station  $x = 11\delta_{in}$  que les variances sont toutes supérieures avec le terme de contrôle que sans. De plus, on note une évolution plus progressive de leur amplitude suivant  $x$  lorsque le terme de contrôle est utilisé, ce qui particulièrement visible sur la composante  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ .

Bien que la figure 8.9 suggère une établissement plus rapide des variances de vitesse grâce au

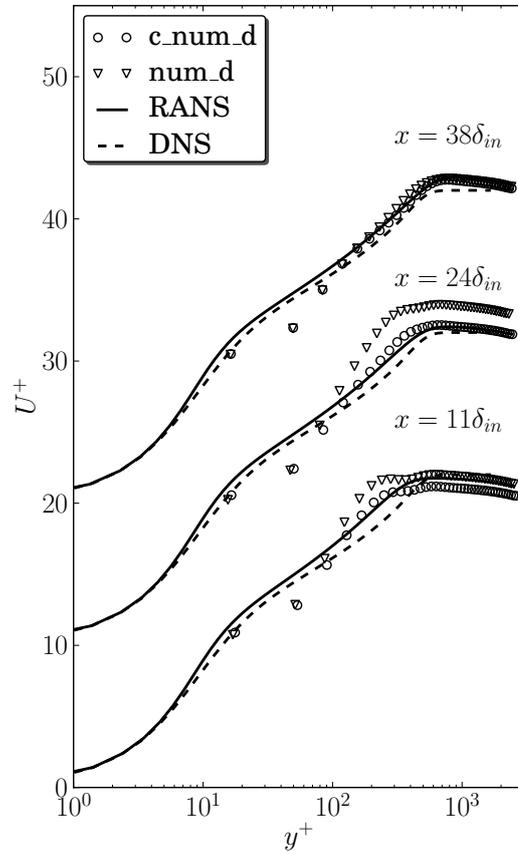


FIGURE 8.7 : Profils de vitesse pour les cas  $c\_num\_d$  et  $num\_d$ , comparés au calcul RANS et à la DNS de Spalart [1988]. Pour une meilleure lisibilité, les profils sont décalés de 10 unités d'une station à la suivante.

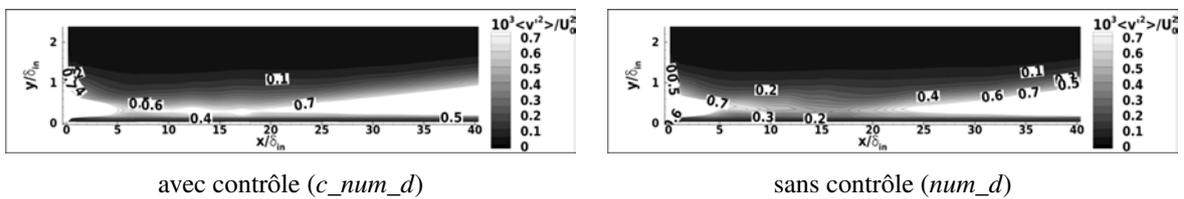


FIGURE 8.8 : Champ de  $\langle \tilde{v}^2 \rangle$  pour les cas  $c\_num\_d$  et  $num\_d$ .

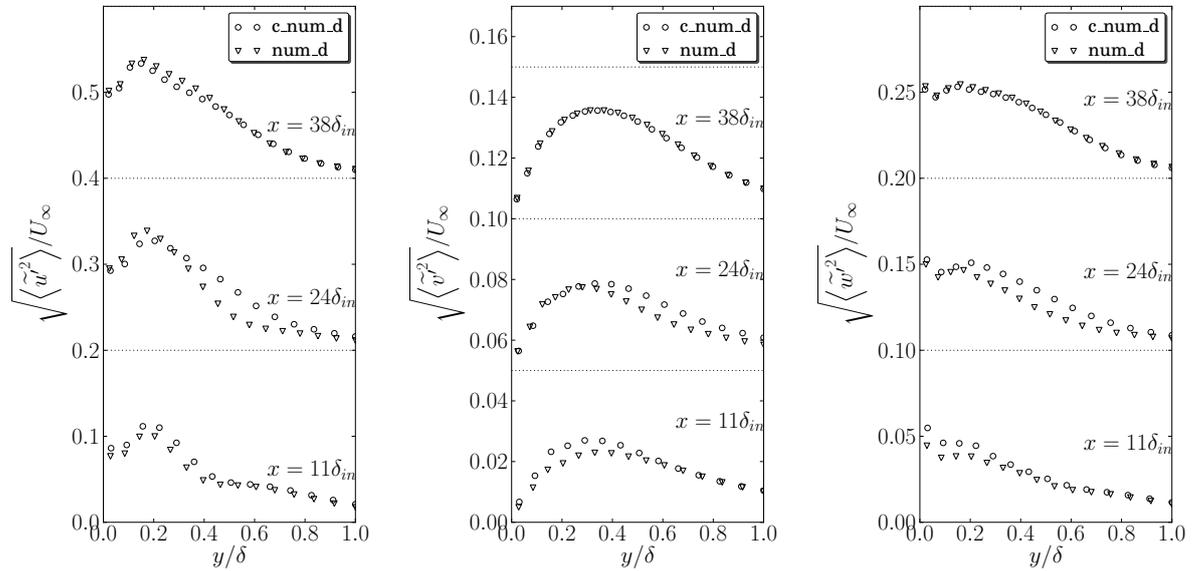
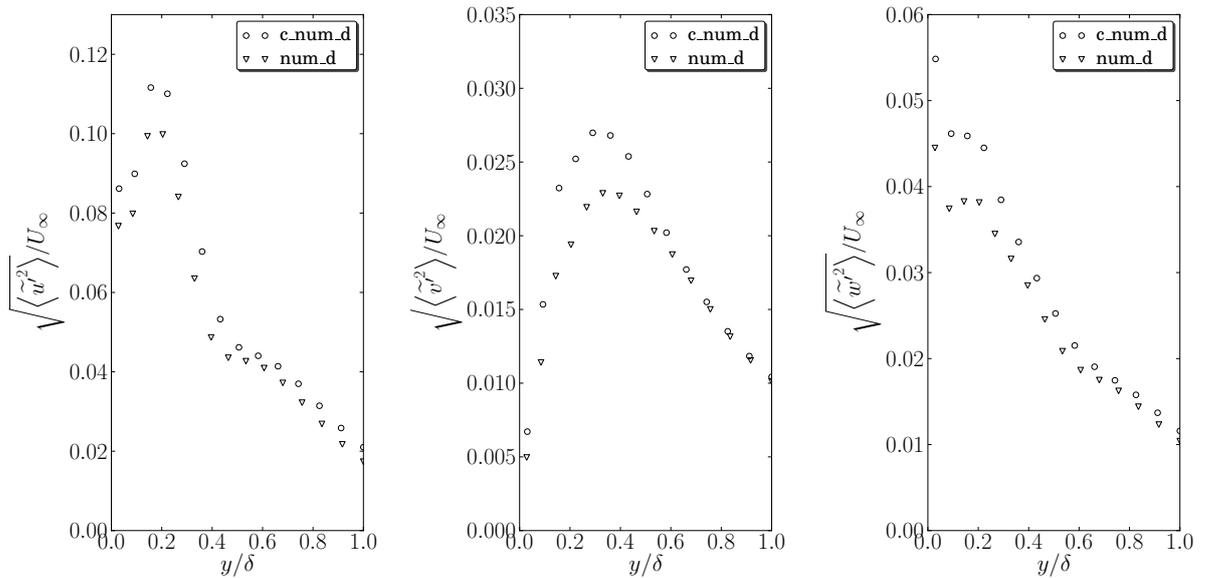
Stations  $x = 11\delta_{in}$ ,  $x = 24\delta_{in}$  et  $x = 38\delta_{in}$ Zoom sur la station  $x = 11\delta_{in}$ 

FIGURE 8.9 : Variances des trois composantes de la vitesse durant le développement de la turbulence pariétale pour les cas *c\_num\_d* et *num\_d*. Pour une meilleure lisibilité, les profils de  $\langle \tilde{u}^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{v}^2 \rangle$  et  $\langle \tilde{w}^2 \rangle$  sont respectivement décalés de 0, 2; 0,05 et 0,1 unité d'une station à la suivante.

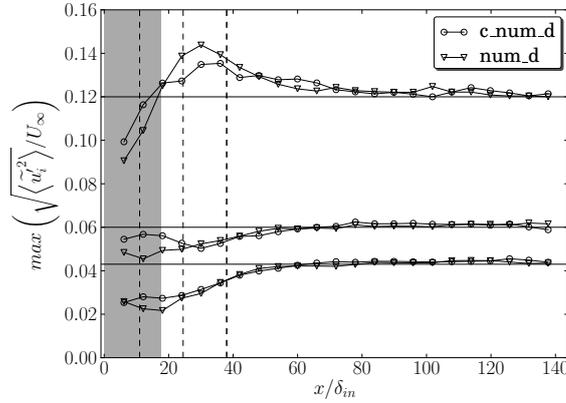


FIGURE 8.10 : Evolution du maximum des variances de vitesse le long de la plaque pour les cas  $c\_num\_d$  et  $num\_d$ . De bas en haut :  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{w}'^2 \rangle$  et  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . Les lignes horizontales correspondent à la valeur du maximum relevée dans la région pleinement développée. Dans le cas où le terme de contrôle est activé, la zone grisée représente la zone de contrôle.

terme de contrôle, il paraît important d'étudier plus précisément l'évolution des trois variances de vitesse tout au long de la plaque. En effet, la turbulence pariétale ne peut pas être considérée comme exploitable si les variances de vitesse sont éloignées des valeurs obtenue une fois la couche limite pleinement développée.

Dans ce but, on trace sur la figure 8.10 le maximum des trois variances de vitesse en fonction de  $x$ . Du fait de la nature plus locale du maximum, on note tout d'abord que la convergence de ces maximums vers la valeur pleinement développée est plus lente que la convergence de  $C_f$ , notamment pour la composante longitudinale  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . Il apparaît donc qu'en plus de  $C_f$ , l'évolution de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  suivant  $x$  doit être considérée. Pour un écart de moins de 10% entre le maximum de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  et sa valeur dans la région pleinement développée, il faut attendre  $x > 40\delta_{in}$  pour le cas  $c\_num\_d$  et  $x > 48\delta_{in}$  pour le cas  $num\_d$ .

Lorsque le terme de contrôle est activé, il ressort que le maximum de chaque variance de vitesse reste plus proche de la valeur pleinement développée et que le maximum de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  est plus élevé dans la zone de contrôle. Bien que l'action du terme de contrôle porte sur  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$ , on constate donc également une action bénéfique sur les deux autres variances et notamment sur  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ .

### 8.4.2.3 Dissipation artificielle significative : effet du terme de contrôle avec les paramètres de Sandham et al. physiques

On s'intéresse maintenant aux cas  $c\_phys\_d$  et  $phys\_d$ , qui utilisent les paramètres de Sandham et al. déterminés à partir de critères physiques (voir le tableau 8.4).

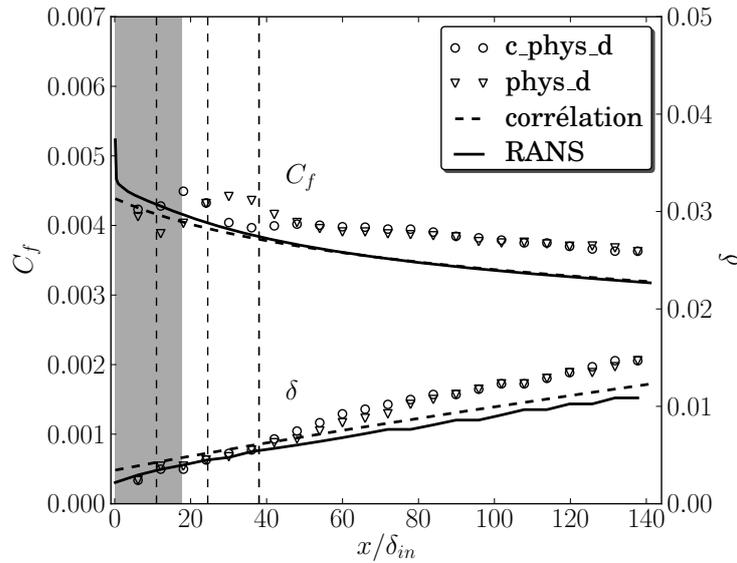


FIGURE 8.11 : Evolution du frottement pariétal  $C_f = \langle \tilde{\tau}_p \rangle / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2)$  et de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  le long de la plaque pour les cas  $c\_phys\_d$  et  $phys\_d$ . Dans le cas où le terme de contrôle est activé, la zone grisée représente la zone de contrôle.

En l'absence de contrôle, la diminution de  $C_f$  apparaît plus faible avec ces paramètres physiques qu'avec les paramètres numériques. Après cette diminution, on constate cependant une augmentation brutale de  $C_f$  qui conduit à sa surestimation jusque  $x = 50\delta_{in}$ .

Avec le terme de contrôle, on observe deux oscillations successives de  $C_f$  autour des données de référence. Ce comportement très oscillatoire de  $C_f$  rend difficile ici l'estimation de la distance d'adaptation. A titre d'indication, suivant le critère défini précédemment sur  $C_f$  dans le paragraphe 8.4.2.2, on obtient  $x_a = 6\delta_{in}$  pour le cas  $c\_phys\_d$  et  $x_a = 20\delta_{in}$  pour le cas  $phys\_d$ . L'étude des variances de la vitesse va permettre une estimation plus fiable de la distance d'adaptation.

Les variances de vitesse tracées sur la figure 8.12 montrent que les composantes  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  et  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  prennent des valeurs plus élevées qu'avec les paramètres de Sandham et al. numériques, alors que les amplitudes des modes de Sandham et al. physiques sont plus faibles. Il semble donc qu'une production brutale de turbulence démarre très près du plan d'entrée dans la région  $x < 11\delta_{in}$ . Comme noté précédemment, l'évolution selon  $x$  des variances de vitesse est plus progressive avec le terme de contrôle.

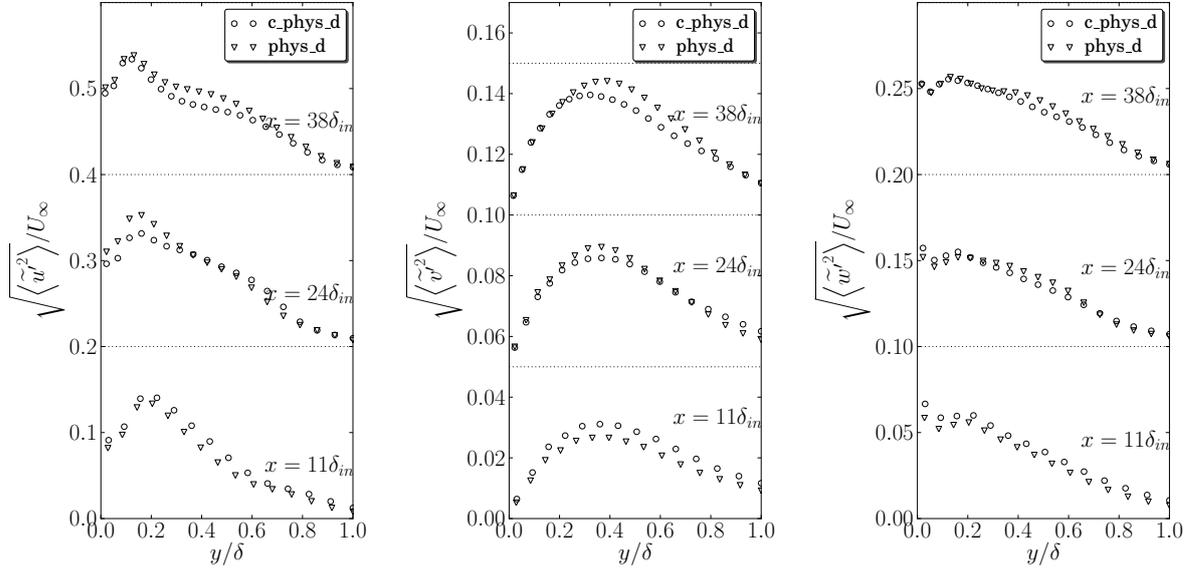


FIGURE 8.12 : Variance des trois composantes de la vitesse durant le développement de la turbulence pariétale pour les cas `c_phys_d` et `phys_d`. Pour une meilleure lisibilité, les profils de  $\langle \tilde{u}^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{v}^2 \rangle$  et  $\langle \tilde{w}^2 \rangle$  sont respectivement décalés de 0, 2 ; 0, 05 et 0, 1 unité d'une station à la suivante.

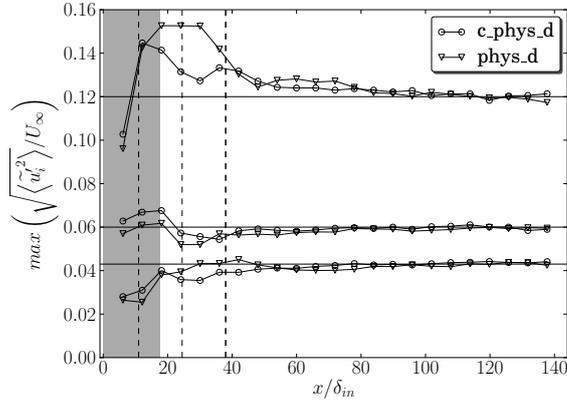


FIGURE 8.13 : Evolution du maximum des variances de vitesse le long de la plaque pour les cas `c_phys_d` et `phys_d`. De bas en haut :  $\langle \tilde{v}^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{u}^2 \rangle$  et  $\langle \tilde{w}^2 \rangle$ . Les lignes horizontales correspondent à la valeur du maximum relevée dans la région pleinement développée. Dans le cas où le terme de contrôle est activé, la zone grisée représente la zone de contrôle.

L'évolution du maximum de chaque variance de vitesse selon  $x$  est donnée sur la figure 8.13. Par rapport aux cas avec les paramètres de Sandham et al. numériques, on remarque tout d'abord que le maximum de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  atteint ici des valeurs plus élevées durant le développement de la turbulence pariétale, notamment lorsque le terme de contrôle n'est pas utilisé. Pour un écart de moins de 10% entre le maximum de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  et sa valeur dans la région pleinement développée, il faut attendre  $x > 42\delta_{in}$  pour le cas  $c\_phys\_d$  et  $x > 41\delta_{in}$  pour le cas  $phys\_d$ .

Même avec le terme de contrôle, on observe de plus une diminution de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  à la fin de la zone de contrôle qui n'était pas visible avec les paramètres de Sandham et al. numériques.

Il apparaît donc que le jeu de paramètres physiques soit moins adapté que le jeu de paramètres numériques, causant la diminution de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  en sortie de la zone de contrôle et une surestimation plus importante de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ .

Concernant l'effet du terme de contrôle avec ces paramètres physiques, on constate comme avec les paramètres numériques qu'il permet d'obtenir un  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  supérieur dans la zone de contrôle et de réduire l'écart entre le maximum des variances de vitesse et leur valeur dans la région pleinement développée.

Le tableau 8.8 résume les distances d'adaptation obtenues sur les quatre cas avec dissipation artificielle significative, en considérant un critère sur  $C_f$  et un critère sur  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ .

TABLE 8.8 : Distances d'adaptation obtenues suivant un critère sur  $C_f$  et un critère sur  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ .

Cas	Critère	
	$C_f$ redevient supérieur au $C_f$ de référence	erreur inférieure à 10% entre le maximum de $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ et sa valeur pleinement développée
$c\_num\_d$	$28\delta_{in}$	$40\delta_{in}$
$num\_d$	$35\delta_{in}$	$48\delta_{in}$
$c\_phys\_d$	$6\delta_{in}$	$42\delta_{in}$
$phys\_d$	$20\delta_{in}$	$41\delta_{in}$

Concernant l'estimation de l'épaisseur de couche limite, tous les calculs WMLES présentent des erreurs sur  $\delta$  négligeables en  $x = x_a$ . Ainsi, les distances d'adaptation obtenues sont trop courtes pour laisser apparaître des erreurs significatives sur  $\delta$ , ce qui permet d'affirmer que la couche limite injectée possède l'épaisseur attendue à la fin de la distance d'adaptation.

Enfin, en termes de temps de calcul, le surcoût engendré par l'injection de Sandham et al. avec contrôle est très raisonnable et s'élève à 3%, pour un volume de contrôle occupant ici un huitième du domaine total de calcul.

## 8.5 Conclusions intermédiaires

Un écoulement de couche limite sur plaque plane sans gradient de pression vient d'être simulé avec l'approche WMLES. Pour générer la turbulence pariétale à l'entrée du domaine, nous avons utilisé une injection de turbulence synthétique [Sandham et al., 2003] combinée à un terme de contrôle [Spille-Kohoff and Kaltenbach, 2001; Laraufie et al., 2011]. Quelques conclusions intermédiaires peuvent être tirées de cette étude.

Premièrement, la couche limite pleinement développée montre un comportement de la WMLES similaire à celui observé sur l'écoulement de canal avec le maillage fin au chapitre 6. On constate notamment une surestimation de  $C_f$  en présence de dissipation artificielle. Les erreurs concernant l'estimation de  $C_f$  et de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  observées sur cet écoulement de couche limite sont néanmoins supérieures à celles obtenues sur le cas de canal.

Deuxièmement, l'étude du développement de la turbulence synthétique injectée montre que :

- $C_f$  n'est pas le seul paramètre déterminant la distance d'adaptation : l'évolution de la variance de vitesse longitudinale  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  le long de la plaque doit également être considérée ;
- lorsque l'injection de turbulence est inadaptée, on constate une augmentation brutale des variances de vitesse, particulièrement visible sur  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . Cette production brutale de turbulence entraîne une surestimation persistante de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ , qui pénalise la distance d'adaptation déterminée à partir de  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$ . Étonnamment, cette production brutale de turbulence a un effet bénéfique sur la distance d'adaptation déterminée à partir de  $C_f$  ;
- indépendamment des paramètres d'injection synthétique, le terme de contrôle permet de réduire les oscillations de  $C_f$  et du maximum des variances de vitesse autour de la valeur pleinement développée. De plus, le terme de contrôle permet dans tous les cas d'obtenir un niveau de  $\langle \tilde{v}'^2 \rangle$  plus élevé dans la zone de contrôle, ce qui raccourci la distance d'adaptation ;
- grâce au terme de contrôle, la distance d'adaptation minimale obtenue est de  $6\delta_{in}$  avec le critère sur  $C_f$  et de  $40\delta_{in}$  avec le critère sur  $\langle \tilde{u}'^2 \rangle$  ;
- la couche limite possède l'épaisseur attendue au niveau de la distance d'adaptation ;
- l'effet d'une autre méthode d'injection synthétique, de la longueur de contrôle et de l'amplitude du contrôle sur la distance d'adaptation restent à étudier.

---

## Application de la Simulation des Grandes Echelles avec modèle de paroi et injection de turbulence pariétale à un jet chaud débouchant

---

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre . . . . .</b>	<b>210</b>
9.1.1	Point de vue général . . . . .	210
9.1.2	Cas particulier des écoulements de jets débouchants en aéronautique . .	210
9.1.2.1	Structures cohérentes et paramètres de similitude . . . . .	211
9.1.2.2	Positionnement par rapport aux précédentes études numériques	213
<b>9.2</b>	<b>Présentation de l'écoulement de jet débouchant . . . . .</b>	<b>213</b>
<b>9.3</b>	<b>Mise en place d'une stratégie RANS-LES <i>embedded</i> simplifiée . . . . .</b>	<b>215</b>
<b>9.4</b>	<b>Modélisation physique et numérique . . . . .</b>	<b>217</b>
9.4.1	Simulation RANS . . . . .	217
9.4.2	Simulation WMLES . . . . .	218
<b>9.5</b>	<b>Construction du maillage WMLES . . . . .</b>	<b>219</b>
9.5.1	Aperçu global . . . . .	220
9.5.2	Contraintes sur l'injection de turbulence pariétale . . . . .	220
<b>9.6</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>223</b>
9.6.1	Développement de la turbulence injectée . . . . .	224
9.6.1.1	Pression pariétale . . . . .	224
9.6.1.2	Frottement pariétal et épaisseur de couche limite . . . . .	225
9.6.1.3	Profils de vitesse . . . . .	226
9.6.1.4	Variances de la vitesse . . . . .	228
9.6.1.5	Flux de chaleur pariétal . . . . .	229

9.6.1.6	Conclusions intermédiaires sur l'injection de turbulence . . .	231
9.6.2	Résultats dans le sillage du jet . . . . .	232
9.6.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	232
9.6.2.2	Structures cohérentes . . . . .	233
9.6.2.3	Vitesse dans le sillage du jet . . . . .	235
9.6.2.4	Température pariétale dans le sillage du jet . . . . .	239
9.6.2.5	Analyse spectrale dans le sillage du jet . . . . .	242

---

## 9.1 Positionnement par rapport à l'état de l'art et enjeux du chapitre

Les enjeux de ce chapitre ainsi que son positionnement par rapport à l'état de l'art sont tout d'abord discutés d'un point de vue général, avant de se concentrer sur les écoulements de jets débouchants en aéronautique.

### 9.1.1 Point de vue général

Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué la WMLES avec injection de turbulence pariétale sur un écoulement à géométrie simple, sans effet physique défavorable comme un gradient de pression. Le but de ce chapitre est de démontrer la faisabilité de la WMLES avec injection de turbulence pariétale sur un écoulement moins académique, dont la géométrie sera plus complexe et le maillage de moins bonne qualité. De plus, cet écoulement imposera des contraintes géométriques strictes sur la distance d'adaptation maximale autorisée et présentera un gradient de pression adverse au niveau de l'entrée du domaine, ce qui est défavorable à la méthode d'injection comme l'a montré Keating et al. [2006]. Des enseignements intéressants sur le comportement de l'injection de turbulence pourront être tirés de ce cas d'étude car, comme on l'a vu dans le chapitre 7, les simulations hybrides RANS-LES avec injection de turbulence pariétale ont surtout été étudiées sur une couche limite sans gradient de pression.

### 9.1.2 Cas particulier des écoulements de jets débouchants en aéronautique

Les jets débouchants dans un écoulement transverse (JICF) sont utilisés dans diverses applications aéronautiques, comme le refroidissement d'aubes de turbine, le contrôle d'écoulement dans les dispositifs de réduction de traînée ou le dégivrage des bords d'attaque des nacelles moteurs. C'est cette dernière application qui nous intéresse ici.

Comme montré sur la figure 9.1, une circulation d'air chaud prélevé sur le moteur réchauffe le bord d'attaque de la nacelle et évite l'accumulation de glace sur celle-ci. L'accumulation de glace

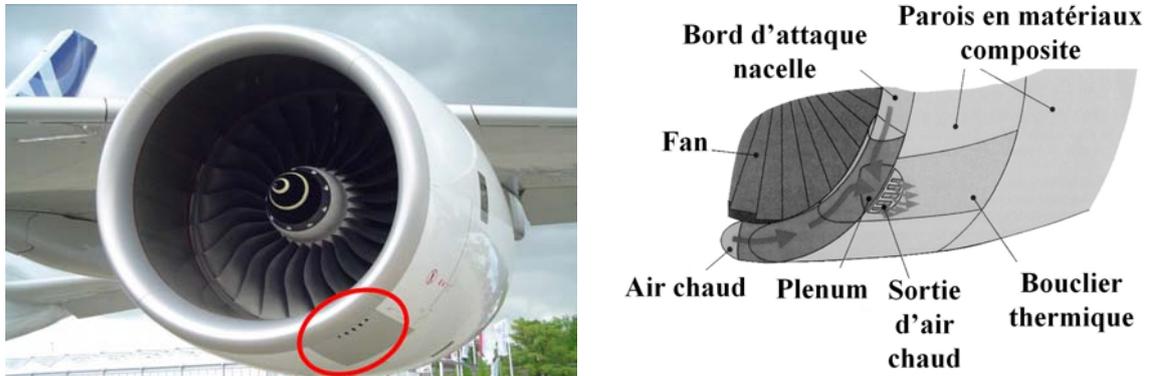


FIGURE 9.1 : A gauche : Système de dégivrage des nacelles moteurs. Les trous de sortie d'air chaud et le bouclier thermique sont visibles. A droite : vue schématique de la circulation d'air chaud dans le bord d'attaque de la nacelle. L'air chaud se mélange dans le plenum avant de sortir pour former un JICF.

nuit en effet à l'homogénéité de l'écoulement arrivant sur le fan du réacteur et dégrade l'efficacité de ce dernier. L'air chaud arrive ensuite dans une cavité, appelée ici un plenum, avant de sortir dans l'écoulement extérieur en formant un JICF.

Il apparaît que ce jet chaud débouchant impacte la paroi de la nacelle formée de matériaux composites. Or les matériaux composites sont particulièrement sensibles aux contraintes mécaniques générées par cet échauffement, pouvant donner lieu à une fatigue prématurée de la structure. Pour prévenir ces dommages, des boucliers thermiques sont placés sur la nacelle en aval du jet débouchant. La taille de ces boucliers, qui doit être minimale pour éviter une masse superflue, dépend directement du champ de température pariétale sur la nacelle. L'estimation du champ de température pariétale en aval du JICF est donc cruciale.

Le JICF du système de dégivrage fait partie des écoulements pariétaux à très grand nombre de Reynolds pour lesquels la LES va présenter un coût de calcul prohibitif (voir le paragraphe 4.1). Cet écoulement est donc un cas d'application typique de la WMLES. Ici, au lieu de simuler le jet débouchant sur l'avion, nous simulerons une maquette de cet écoulement étudiée expérimentalement en soufflerie par Albugues [2005]. En termes de nombre de Reynolds et de complexité géométrique, la simulation de cette maquette représente une étape intermédiaire vers la simulation du JICF sur l'avion.

Avant de donner un aperçu des études numériques déjà menées sur cette maquette, il convient d'introduire quelques notions sur les structures cohérentes et les paramètres de similitude d'un jet débouchant.

### 9.1.2.1 Structures cohérentes et paramètres de similitude

Albugues [2005] a proposé une revue des structures cohérentes et des paramètres de similitude

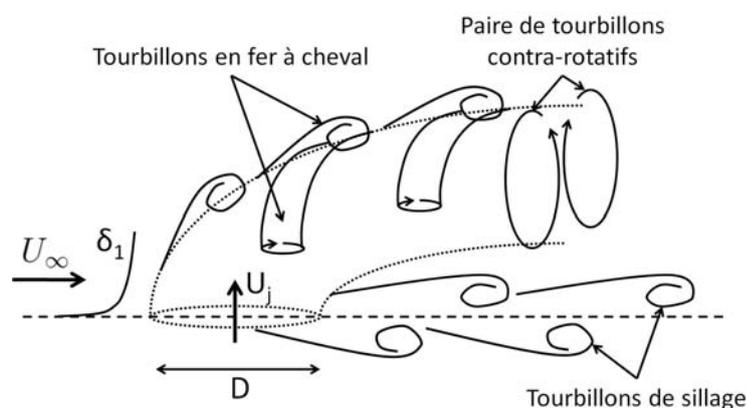


FIGURE 9.2 : Quelques unes des structures cohérentes d'un JICF. Une paire de tourbillons contra-rotatifs se forme dans le cœur du jet, entraînés par l'écoulement transverse qui le contourne. Des tourbillons en fer à cheval sont supposés être générés dans la couche de cisaillement à l'interface entre le jet et l'écoulement transverse. Un lâcher périodique de tourbillons de sillage se forme lorsque l'écoulement transverse contourne le jet.

caractérisant un JICF. Comme montré sur la figure 9.2, l'interaction entre le jet débouchant et la couche limite amont entraîne, entre autres, la formation :

- de tourbillons de couche cisailée. Suivant Albugues [2005], ces tourbillons seront assimilés à des tourbillons en fer à cheval formant des arches dans le sillage du jet. Andreopoulos [1985] a montré que le développement de ces tourbillons en fer à cheval est en partie contrôlé par l'amplitude des fluctuations turbulentes dans la couche limite amont, qui va plus ou moins rapidement diffuser ces tourbillons ;
- de tourbillons de sillage. De façon analogue à l'allée de von Kármán générée par l'écoulement autour d'un cylindre, l'écoulement transverse génère en contournant le jet débouchant un lâcher alternatif de tourbillons à une fréquence donnée. Ce phénomène crée des méandres, visibles sur le champ de température pariétale instantané et est appelé *jet meandering* par Duda [2012]. On proposera une visualisation de ce phénomène dont la fréquence sera identifiée et comparée aux données expérimentales.

Les principaux paramètres de similitude relevés par Albugues [2005] et permettant de caractériser un JICF sont : le rapport de quantité de mouvement entre le jet et l'écoulement transverse  $C_R = \frac{\rho_j U_j}{\rho_\infty U_\infty}^2$ , la forme du trou de sortie, la distribution de pression pariétale et le rapport entre l'épaisseur de déplacement de la couche limite amont sur le diamètre du jet  $\frac{\delta_1}{D}$ .

Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre du jet  $Re_D$ , le nombre de Mach et l'écart de température entre le jet et l'écoulement transverse  $\Delta_T$  forment un jeu de paramètres secondaires.

1. Ce paramètre est pertinent pour de faibles écarts de température entre le jet et l'écoulement transverse.

### 9.1.2.2 Positionnement par rapport aux précédentes études numériques

Le jet débouchant que l'on traitera dans la suite du chapitre a déjà été étudié numériquement. Un aperçu des simulations RANS, URANS et hybrides RANS-LES déjà effectuées sur ce JICF est donné dans la suite, ce qui permet de positionner le travail réalisé dans ce chapitre par rapport à ces précédentes études.

Albugues [2005] a évalué l'approche RANS avec le modèle de turbulence à deux équations  $k - l$  de Smith [1994]. Il rapporte une sévère sous-estimation de l'extension latérale du champ de température pariétale (voir Albugues [2005], p. 286), qui apparaît deux fois plus faible que dans les mesures expérimentales.

Duda [2012] a évalué les approches URANS et *Scale-Adaptive Simulation* (SAS) sur ce même JICF. L'approche SAS est une modification du modèle de turbulence  $k - \omega$  par l'ajout d'un terme source [Menter and Egorov, 2010]. De façon similaire aux résultats RANS, les calculs URANS montrent une nette sous-estimation de l'extension latérale du champ de température pariétale. En revanche, l'approche SAS retourne un champ de température pariétale en bon accord avec l'expérience. Les structures cohérentes décrites ci-dessus sont également présentes dans le calcul SAS et la fréquence des tourbillons de sillage est correctement estimée.

Enfin, Jouhaud et al. [2007] et Hallez et al. [2010] ont mené des calculs WMLES avec un autre code de calcul et une autre implémentation de l'approche modèle de paroi. Dans ces deux études, le champ de température pariétale est correctement estimé. Cependant, le problème de l'injection de turbulence pariétale n'est pas détaillé. Hallez et al. indiquent simplement avoir testé avec et sans injection de turbulence pariétale, sans noter de différence sur les résultats.

L'originalité de ce chapitre ne résidera donc pas dans l'application de la WMLES à ce jet débouchant, mais dans l'étude détaillée d'une injection de turbulence pariétale pour la WMLES sur cet écoulement non-académique.

## 9.2 Présentation de l'écoulement de jet débouchant

L'écoulement de jet débouchant simulé ici correspond à la maquette montrée sur la figure 9.3. Dans le repère global d'origine  $O$ , les directions longitudinale, verticale et transversale sont respectivement notées  $X$ ,  $Z$ ,  $Y$  et les composantes de la vitesse associées sont notées  $U$ ,  $W$ ,  $V$ . Dans le repère de la couche limite, on conserve les notations  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $u$ ,  $v$ ,  $w$  respectivement pour la direction de l'écoulement, la direction normale à la paroi et la direction transversale.

La veine de la soufflerie mesure  $5 \times 1,4 \times 1,8m$  respectivement selon  $X$ ,  $Z$  et  $Y$ . Un profil d'aile de corde  $C = 0,7m$  est fixé entre les deux parois latérales de la veine. L'utilisation d'un profil d'aile au lieu d'une simple plaque plane vise à mieux reproduire la distribution de pression pariétale présente sur la nacelle du moteur. La transition de la couche limite vers la turbulence est déclenchée en amont de la grille d'éjection par un ruban collé sur la largeur du profil.

De l'air chaud à une température totale de  $363K$  est injecté par deux tuyaux symétriques passant à l'intérieur du profil à un débit  $q_j = 0,0177kg.s^{-1}$  par tuyau. L'air injecté débouche ensuite

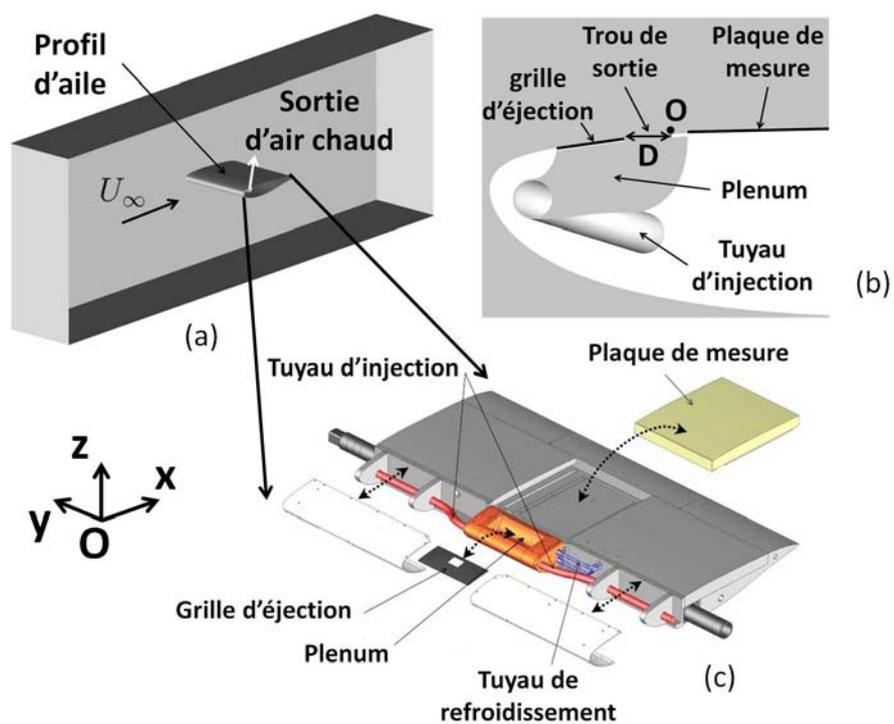


FIGURE 9.3 : (a) : vue globale du montage de la maquette dans la veine de la soufflerie. (b) : vue de côté. La forme du plenum est visible, ainsi que l'origine  $O$  du repère global  $(X, Y, Z)$  située au milieu de l'arête aval du trou de sortie. (c) : vue éclatée de la maquette. La plaque de mesure est dédiée aux mesures de température pariétale par caméra infrarouge.

dans le plenum, qui est surmonté par une grille d'éjection en cuivre d'une épaisseur  $d = 2mm$ . Un trou carré de côté  $D = 3cm$  percé dans la grille d'éjection permet la sortie de l'air chaud dans l'écoulement extérieur à température ambiante.

Il est à noter que les parois du plenum sont refroidies par de l'eau froide circulant dans un réseau de tuyaux. Ainsi l'air chaud voit sa température totale chuter au contact des parois froides du plenum, pour atteindre une température totale de  $353K$  au niveau du trou de sortie. La température statique de l'air chaud à cet endroit vaut  $T_j = 352,3K$ .

TABLE 9.1 : Régime de l'écoulement et paramètres de similitude du jet débouchant.

$\rho_\infty$	$U_\infty$	$T_\infty$	$Re_c$	$Re_D$	$M_\infty$	$E_c$	$C_R$	$\frac{\delta_1}{D}$	$\frac{T_\infty}{T_j - T_\infty}$
$1,2kg.m^{-3}$	$47,25m.s^{-1}$	$295K$	$2,2 \times 10^6$	$9,3 \times 10^5$	$0,14$	$0,039$	$0,69$	$17 \times 10^{-3}$	$5,2$

Le régime de l'écoulement et les paramètres de similitude du JICF sont donnés dans le tableau 9.1. Le nombre de Mach est faible et l'écart de température entre le jet et l'écoulement transverse est modéré et vaut  $T_j - T_\infty = 57K$ . Devant le nombre d'Eckert  $E_c$  et le rapport de température  $\frac{T_\infty}{T_j - T_\infty}$  qui en résulte, l'écoulement peut être considéré comme quasi-incompressible (régime compressible I du tableau 1.1) et la température assimilée à un scalaire passif.

### 9.3 Mise en place d'une stratégie RANS-LES *embedded simplifiée*

Malgré l'utilisation de l'approche WMLES pour réduire le coût de calcul, deux difficultés persistent quant à la simulation de ce JICF :

- la veine de la soufflerie présente de grandes dimensions par rapport à la taille du trou de sortie  $D$ . La veine mesure en effet  $166D \times 46D \times 60D$ . Si la totalité de la veine est simulée, une injection de turbulence isotrope devra être mise en place à la frontière d'entrée et transportée jusqu'au profil. Le transport de cette turbulence va nécessiter un maillage fin dans toute la moitié amont de la veine, conduisant à un nombre de cellules et donc un coût de calcul prohibitif. En transposant ce raisonnement sur l'avion, avec par exemple une aile d'une corde de  $10m$  et un trou de sortie de  $3cm$ , le rapport entre la dimension du domaine de calcul et la dimension du trou de sortie serait plus de dix fois supérieure au cas maquette, soit un coût de calcul multiplié par un facteur  $10^4$  ;
- le calcul WMLES du profil d'aile complet pose problème. En effet, il semble difficile de justifier l'approche WMLES dans la région où la couche limite transitionne vers la turbulence. De plus, la stratégie de maillage WMLES au bord d'attaque du profil, où la couche limite est d'épaisseur quasi-nulle, semble délicate à déterminer.

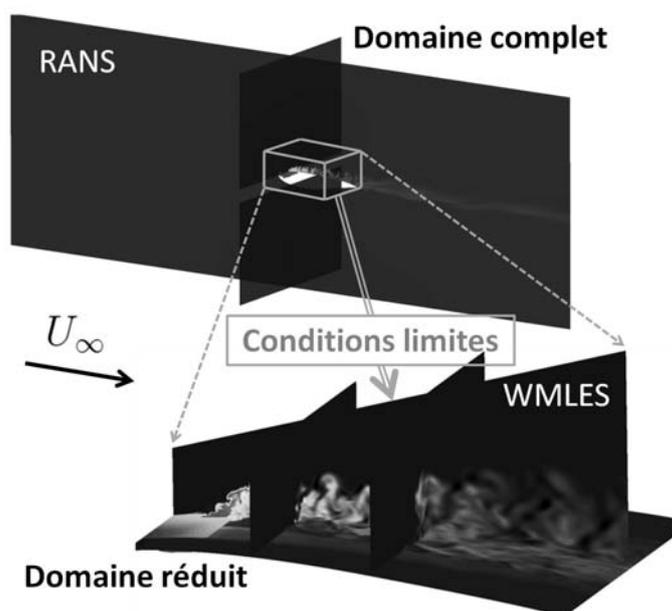


FIGURE 9.4 : Approche RANS-LES *embedded* à deux étapes : un calcul RANS est effectué dans le domaine complet, puis un calcul WMLES est mené dans le domaine réduit. La solution RANS permet de définir le champ initial et les conditions limites du calcul WMLES.

Les deux constats précédents motivent la mise en place d'une stratégie RANS-LES *embedded*. Comme montré sur la figure 9.4, cette stratégie consiste en deux étapes. Tout d'abord une simulation RANS de faible coût de calcul est effectuée sur le domaine complet. Puis un calcul WMLES est effectué dans un domaine réduit, dont le champ initial et les conditions limites sont définies par la solution RANS.

La stratégie RANS-LES *embedded* utilisée ici est simplifiée par rapport à sa formulation habituelle, qui consiste à mener les calculs RANS et LES en même temps. Cette version simplifiée, où le calcul WMLES est mené après le calcul RANS, évite de définir des conditions limites RANS à partir des grandeurs WMLES, mais suppose en contrepartie que la solution WMLES ne modifie pas la solution RANS.

La stratégie RANS-LES *embedded* permet une nette réduction du domaine de calcul. En effet, le domaine réduit ne mesure plus que  $19D \times 13D \times 8D$ , soit un volume 230 fois moindre que le domaine complet. De plus, le domaine réduit peut être choisi pour ne concerner que la région pleinement turbulente du profil, où l'approche WMLES est justifiée.

## 9.4 Modélisation physique et numérique

Le fluide est modélisé de la même manière que sur le cas de couche limite du chapitre précédent (voir le paragraphe 8.2.3).

La stratégie RANS-LES *embedded* impliquant un calcul RANS puis un calcul WMLES, nous donnons maintenant la modélisation utilisée pour chacun d'eux.

### 9.4.1 Simulation RANS

La simulation RANS repose sur la modélisation compressible donnée par l'équation 1.7, combinée au modèle de turbulence de Spalart-Allmaras et un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t = 0,9$ . Un schéma de Roe du troisième ordre est utilisé pour discrétiser les flux convectifs. Les conditions limites utilisées sont données dans le tableau 9.2.

TABLE 9.2 : Conditions limites du calcul RANS. Une description de ces conditions limites est donnée dans le paragraphe 3.3.

Entrée	Sortie	Plaque de mesure, Plenum, face inférieure de la grille d'éjection	Face supérieure de la grille d'éjection	Tuyaux d'injection et parois de la veine
<b>Ecoulement transverse :</b> <i>NSCBCin</i> $(T_{phys} = 295K,$ $u_{phys} = 47,25m.s^{-1},$ $\tilde{\nu} = 0,024m^2.s^{-1})$	<i>outpres</i> $p_{phys} = 101325Pa$	non-glissante adiabatique	non-glissante isotherme avec distribution non-uniforme de température	glissante adiabatique
<b>Tuyaux d'injection :</b> <i>injmfr1</i> $(T_{i,phys} = 353K,$ $(\rho u)_{phys} = 0,01771kg.s^{-1})$				

La condition adiabatique imposée sur la plaque de mesure est justifiée par les caractéristiques du matériau composant cette dernière (voir Albugues [2005], p. 61).

Le choix d'une condition adiabatique sur les parois du plenum n'est quant à lui pas évident. Puisque les parois du plenum sont refroidies par une circulation d'eau froide, il semblerait logique d'utiliser une condition isotherme. Cependant, la distribution de température sur ces parois n'est pas connue. Même un calcul couplant la résolution du fluide avec la température dans le solide serait difficile à mettre en place, car les conditions limites aux frontières du solide ne seraient pas connues. Nous choisissons donc de suivre la stratégie de Duda [2012], qui consiste à imposer une

condition adiabatique sur les parois du plenum et à spécifier en entrée des tuyaux d'injection la température  $T_j$  mesurée expérimentalement au niveau du trou de sortie.

Le choix d'une condition isotherme sur la face supérieure de la grille d'éjection requiert également une justification. Bien que les interfaces fluide-métal soient généralement modélisées par une condition isotherme, la faible épaisseur  $d = 2\text{mm}$  de la grille rend ici ce choix moins trivial. Les trois grandeurs suivantes permettent de déterminer la condition limite thermique à imposer :

- Hallez et al. [2010] propose d'utiliser le rapport du temps de diffusion dans le solide sur le temps de diffusion dans le fluide :  $\frac{T_s}{T_f} = \frac{d^2/\alpha_s}{D/U_\infty}$ , avec  $\alpha_s = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{p_s}}$  la diffusivité thermique du solide. Hallez et al. estiment que  $\frac{T_s}{T_f} = 1580$  pour cette interface air-cuivre, ce qui signifie qu'une variation de température se propage beaucoup plus lentement dans le solide que dans le fluide ;
- Hallez et al. proposent également de considérer le rapport entre l'effusivité du solide et du fluide, estimé à 1450. Ce rapport élevé indique qu'une variation de température dans le fluide crée une variation de température négligeable dans le solide ;
- enfin, l'épaisseur du solide adimensionnée  $d^{++} = \frac{\rho_p u_\tau d}{\mu_p} \sqrt{\alpha_f/\alpha_s}$  est utilisée par Chatelain [2004], qui indique qu'une condition isotherme est valide tant que  $d^{++}$  ne tend pas vers zéro. Ici  $d^{++} = 620$ .

Au regard de ces trois critères, une condition isotherme sur la face supérieure de la grille d'éjection est donc justifiée. Pour une description réaliste du champ de température à imposer, nous utilisons, au lieu d'une température uniforme, la même distribution de température que celle utilisée et déterminée par Duda à partir d'un calcul RANS couplant la résolution du fluide avec la température dans le solide. Cette distribution de température est visible sur la figure 9.19 dans la zone  $-2 < X/D < 0$ .

### 9.4.2 Simulation WMLES

Le comportement du fluide dans les calculs WMLES est modélisé par les équations LES compressibles (équation 1.14), complétées par le modèle WALE (voir le paragraphe 1.5.4.1) et un nombre de Prandtl de sous-maille  $Pr_{sgs} = 0,9$ . Les conditions limites utilisées sont données dans le tableau 9.3.

Une description de l'avance en temps et de la discrétisation des flux convectifs et diffusifs est donnée dans le paragraphe 3.2. Une condition CFL acoustique maximale égale à 0,9 est imposée, ce qui conduit à un pas de temps  $\Delta t = 2,56 \times 10^{-7} \text{s}$ . La dissipation artificielle d'ordre quatre présentée dans le paragraphe 3.2.1.3 est utilisée avec le paramètre  $k_4 = 5 \times 10^{-3}$ , en combinaison avec le senseur d'oscillations numériques. La méthode numérique est donc strictement identique aux calculs avec dissipation artificielle effectués précédemment sur les écoulements de canal et de couche limite.

TABLE 9.3 : Conditions limites du calcul WMLES. Le plenum et les tuyaux d'injection sont traités comme en RANS. Le modèle de paroi QA est décrit dans le paragraphe 5.2 II. C.

Entrée	Sortie	Profil	Face supérieure de la grille d'éjection	Frontière supérieure	Frontières latérales
<b>Ecoulement :</b>	<i>NSCBCout</i>	modèle QA	modèle QA	<i>outpres</i>	<i>NSCBCin</i>
<b>transverse</b>	$p_{phys} = 101325Pa$	adiabatique	isotherme	$p_{phys}$	$u_{phys}$ et
<i>injl</i>			avec distribution	du RANS	$T_{phys}$
$(T_{i_{phys}},$			de température		du RANS
$p_{i_{phys}},$			non-uniforme		
$\alpha_{phys}$ et					
$\beta_{phys}$ du RANS)					
<b>Tuyaux d'injection :</b>					
<i>injmfrl</i>					
$(T_{i_{phys}} = 353K,$					
$(\rho u)_{phys} = 0,01771kg.s^{-1})$					

L'utilisation de l'approche WMLES est ici justifiée par la faible valeur de  $C_R$ , qui indique que la pénétration du jet dans l'écoulement transverse est faible et que le jet sera vite rabattu près de la paroi. Le modèle de paroi QA sera utilisé car valide pour cet écoulement quasi-incompressible globalement attaché à la paroi et une estimation correcte du frottement et du flux de chaleur pariétal est donc attendue. Seule la zone de recirculation (voir la figure 9.15) juste en aval du trou de sortie sort du domaine de validité du modèle QA et une erreur sur le frottement pariétal est possible. Devant la longueur modérée de cette recirculation, on ne s'attend pas à une dégradation significative des résultats, notamment du champ de température pariétale.

La méthode d'injection de turbulence pariétale utilisée en entrée du calcul WMLES est strictement identique à la description donnée dans le paragraphe 8.3.1. Les paramètres de Sandham et al. basés sur les critères numériques sont utilisés (voir le tableau 8.4).

## 9.5 Construction du maillage WMLES

Un aperçu global de la géométrie du domaine sera tout d'abord donné. Puis, on se focalisera sur la région proche du plan d'entrée, en expliquant les contraintes sévères portant sur la mise en place de l'injection de turbulence.

### 9.5.1 Aperçu global

La figure 9.5 donne un aperçu global de la géométrie du domaine WMLES. On observe que la géométrie réelle du système d'alimentation en air chaud et du plenum est prise en compte. La complexité géométrique obtenue peut donc être considérée comme intermédiaire vers le cas avion, qui impliquerait notamment une géométrie plus complexe du trou de sortie. Cette complexité géométrique, même si elle n'est qu'intermédiaire, justifie l'utilisation de dissipation artificielle.

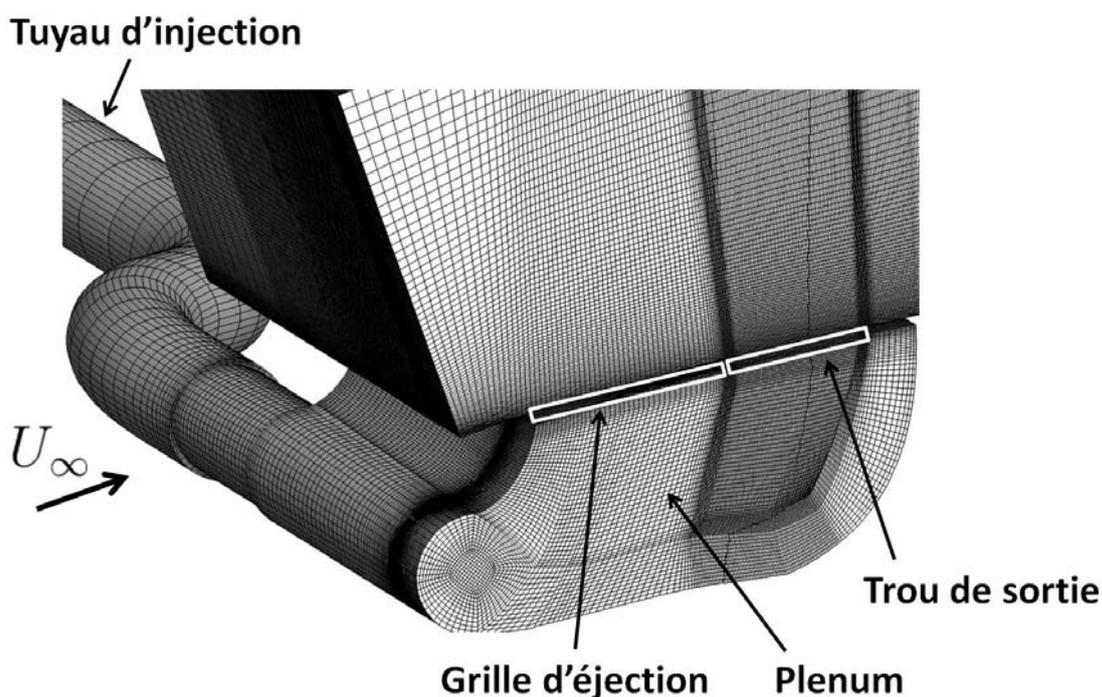


FIGURE 9.5 : Aperçu de la géométrie du domaine WMLES. Les tuyaux d'injection et le plenum sont fidèlement pris en compte.

### 9.5.2 Contraintes sur l'injection de turbulence pariétale

Pour les raisons suivantes, cet écoulement de jet débouchant est plus discriminant pour l'injection de turbulence que la couche limite sans gradient de pression étudiée au chapitre précédent :

- comme expliqué dans le paragraphe 4.3.1.1, l'utilisation de l'approche WMLES impose des contraintes sur le nombre de Reynolds  $Re_{\tau_{in}}$  et le nombre de cellules  $n_{y_{in}}$  dans l'épaisseur de couche limite au niveau du plan d'entrée. Idéalement, on souhaiterait que  $Re_{\tau_{in}} > 2000$  et  $n_{y_{in}} > 20$  ;

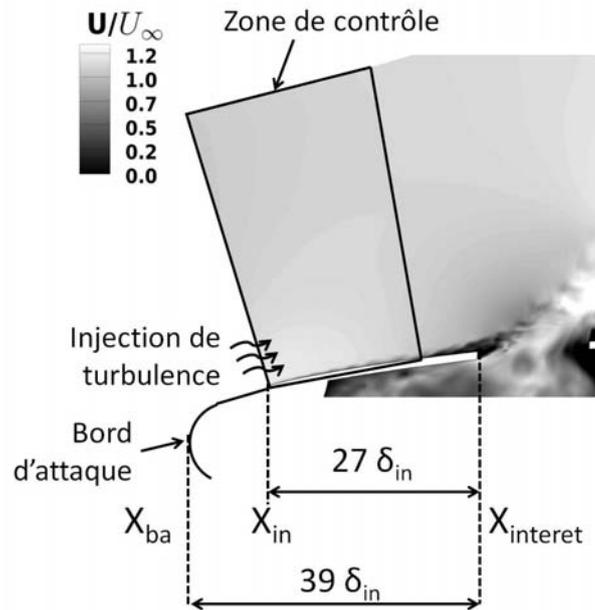


FIGURE 9.6 : Illustration du compromis sur la position du plan d'entrée du domaine WMLES. La faible distance  $X_{interet} - X_{ba}$  laisse peu de marge de manoeuvre.

- comme montré sur la figure 9.6, la distance  $X_{interet} - X_{ba}$  vaut  $2,7D$ , soit  $39\delta_{in}$ . Cette courte distance impose une courte distance d'adaptation et une faible épaisseur de couche limite  $\delta_{in}$  sur le plan d'entrée. Comme expliqué dans le paragraphe 8.2.2, un faible  $\delta_{in}$  conduit à un faible  $Re_{\tau_{in}}$ , ce qui empêche le respect des critères de maillage WMLES donnés ci-dessus et impose donc un compromis. De plus, un faible  $\delta_{in}$  implique des cellules de petites dimensions sur le plan d'entrée, ce qui augmente le nombre de cellules dans le domaine et alourdit le coût du calcul ;
- des cellules plus anisotropes. Pour réduire le coût de calcul, la forme des cellules est ici fixée à  $\frac{\Delta_x}{\Delta_{y1}} = 8$  et  $\frac{\Delta_z}{\Delta_{y1}} = 4$ . Cette forme est plus anisotrope que celle utilisée sur l'écoulement de couche limite au chapitre précédent et rend plus difficile l'injection de turbulence<sup>2</sup> ;
- un gradient de pression adverse en amont du jet. On verra que la couche limite en amont du jet est soumise à un gradient de pression adverse significatif à cause de l'obstacle fluide que représente le jet vis à vis de l'écoulement transverse.

On s'attend donc à ce que le terme de contrôle joue un rôle encore plus primordial pour une injection efficace de turbulence sur cet écoulement que sur une couche limite sans gradient de

2. Sur l'écoulement de couche limite du chapitre précédent et avec la même méthode numérique, cette forme plus aplaties des cellules s'est montrée défavorable à l'injection de turbulence. En effet, même avec le terme de contrôle, on a observé une rechute de 8% de  $C_f$  à la fin de la zone de contrôle, qui n'était pas présente avec les cellules plus isotropes du chapitre précédent.

pression.

Devant ces contraintes, le compromis trouvé est de placer le plan d'entrée à  $0,8D$  en aval du bord d'attaque. L'épaisseur de couche limite sur le plan d'entrée, déterminée à partir de la solution RANS avec le critère défini par l'équation 8.4, est alors  $\delta_{in} = 2,1mm$ . Comme montré sur la figure 9.6, la distance d'adaptation maximale admissible est alors égale à  $27\delta_{in}$ . Le nombre de cellules discrétisant l'épaisseur de la couche limite à l'entrée est fixé à  $n_{y_{in}} = 15$ , ce qui est similaire à la valeur choisie au chapitre précédent.

Les caractéristiques de la couche limite et du maillage sur le plan d'entrée sont résumées dans le tableau 9.4. Puisque l'on vise une injection de turbulence pariétale sur toute la largeur de la grille d'éjection, les règles de maillage indiquées ci-dessus sont respectées pour  $-2D < Y < 2D$ . A l'extérieur de cette zone,  $\Delta_z$  augmente progressivement pour limiter le coût de calcul.

La figure 9.7 montre les différences entre les maillages WMLES et RANS au niveau de l'entrée du domaine WMLES et illustre la discrétisation de la couche limite dans ces deux cas.

TABLE 9.4 : Caractéristiques de la couche limite et du maillage sur le plan d'entrée. Les valeurs données sont respectées pour  $-2D < Y < 2D$ . Un rapport d'expansion de  $\frac{\Delta_{y_{j+1}}}{\Delta_{y_j}} = 1,03$  est prescrit dans la direction normale à la paroi.

$\delta_{in}$	$Re_{\delta_{in}}$	$Re_{\tau_{in}}$	$n_{y_{in}}$	$\Delta_{x_{in}}^+$	$\Delta_{y_{1in}}^+$	$\Delta_{z_{in}}^+$	$\frac{\Delta_x}{\Delta_{y_1}}$	$\frac{\Delta_z}{\Delta_{y_1}}$
2,1mm	6500	420	15	190	23	94	8	4

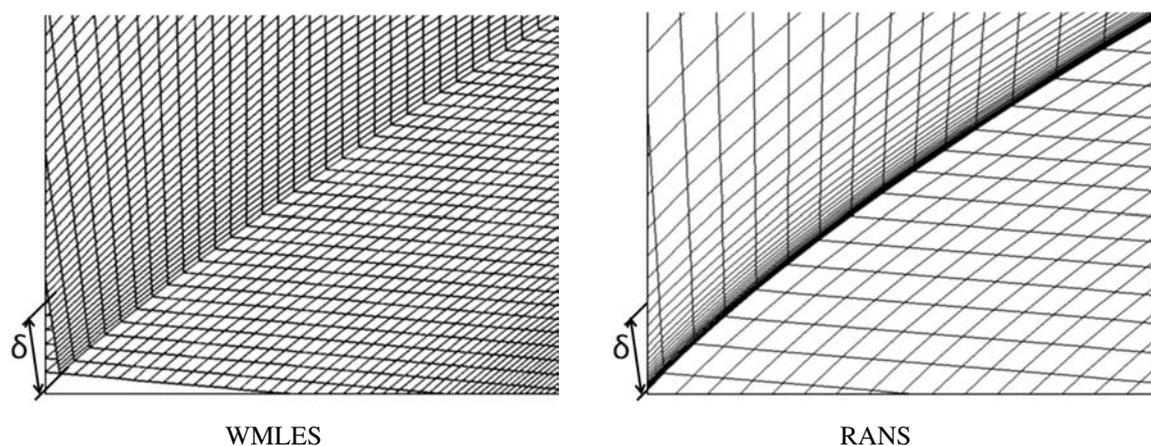


FIGURE 9.7 : Comparaison des maillages WMLES et RANS au niveau du plan d'entrée du domaine WMLES. Le plan vertical représente le plan de symétrie et le plan horizontal représente la paroi. Pour mieux juger de la discrétisation de la couche limite, son épaisseur sur le plan d'entrée est indiquée.

La faible hauteur des cellules adjacentes à la paroi  $\Delta_{y_1} = 0,12mm$  imposée au plan d'entrée par la mise en place de l'injection est augmentée suivant  $X$  pour limiter le coût de calcul et retrouver des valeurs de  $\Delta_{y_1}^+$  proches de 100. Ainsi  $\Delta_{y_1}$  atteint  $0,21mm$  au niveau du trou de sortie et  $0,5mm$  dans le sillage du jet à  $X/D = 8$ .

Au final, le maillage WMLES comporte  $14 \times 10^6$  cellules. Pour un maillage structuré représentant la géométrie réelle de la maquette et construit pour permettre une injection de turbulence pariétale sur toute la largeur de la grille d'éjection, ce nombre de cellules reste raisonnable grâce à la combinaison des approches WMLES et RANS-LES *embedded*.

## 9.6 Résultats

Le tableau 9.5 résume les paramètres des trois calculs WMLES menés dans la suite de ce chapitre.

TABLE 9.5 : *Dénomination et paramètres des trois calculs WMLES. La méthode numérique et les paramètres du terme de contrôle sont identiques au chapitre précédent, avec les paramètres de Sandham et al. basés sur des critères numériques (voir le tableau 8.4).*

cas	injection de turbulence	terme de contrôle
<i>inj_c</i>	Sandham et al.	oui
<i>inj</i>	Sandham et al.	non
<i>sans_inj</i>	aucune	non

Les résultats de ces simulations sont moyennés en temps entre  $T_0 = 4,6 \times 10^{-2}s$  et  $T_f = 0,17s$ , ce qui permet de converger les variables conservatives et les variances de vitesse. Il est à noter que le cas *inj\_c* est poursuivi jusque  $T_f = 0,3s$  pour permettre le post-traitement des spectres de vitesse tracés dans le paragraphe 9.6.2.5. Cet écoulement ne possédant aucune direction d'homogénéité statistique, aucune moyenne spatiale supplémentaire n'est permise.

En termes de coût de calcul, on rappelle que les simulations WMLES sont menées sur un maillage de  $14 \times 10^6$  cellules, avec un pas de temps proportionnel à la hauteur des cellules adjacentes à la paroi au niveau de l'entrée du domaine, ici égales à  $\Delta_{y_1 in}^+ = 23$ . Un calcul LES résolue à la paroi avec les critères de maillage  $\Delta_{x_1}^+ = 50$ ,  $\Delta_{y_1}^+ = 1$  et  $\Delta_{z_1}^+ = 15$  nécessiterait plus de  $300 \times 10^6$  cellules rien que dans le domaine réduit. Avec une intégration temporelle explicite, le pas de temps serait 23 fois plus grand qu'en WMLES, conduisant à un coût de calcul environ 500 fois supérieur à la WMLES.

La discussion des résultats s'effectuera en deux temps. On s'intéressera tout d'abord au développement en amont du jet de la turbulence injectée, avant de passer aux résultats dans le sillage du jet.

### 9.6.1 Développement de la turbulence injectée

L'étude du développement de la turbulence injectée débutera par la pression pariétale, sur laquelle de nets écarts seront visibles suivant la méthode d'injection utilisée. Ensuite, comme pour l'étude de la couche limite au chapitre précédent, on poursuivra avec le tracé du frottement pariétal, de l'épaisseur de la couche limite, des profils de vitesse et des variances de vitesse. Enfin, puisque l'on s'intéresse au champ de température pariétale dans le sillage du jet, la répartition du flux de chaleur sur la grille d'éjection sera étudiée.

En l'absence de résultats expérimentaux, le calcul RANS sera considéré comme un résultat de référence dans la région en amont du jet, où l'écoulement reste attaché à la paroi.

#### 9.6.1.1 Pression pariétale

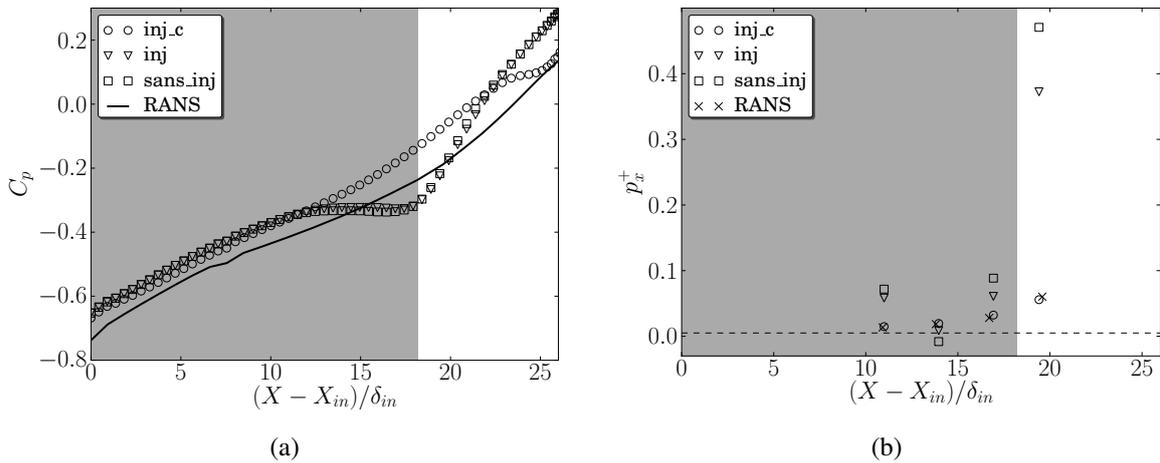


FIGURE 9.8 : (a) : évolution du coefficient de pression  $C_p = \frac{\langle p_p \rangle - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$  suivant  $X$  sur le plan de symétrie. (b) : gradient de pression adimensionné  $p_x^+ = \frac{\mu_p}{\rho_p^2 u_\tau^3} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}$  sur le plan de symétrie aux stations  $X - X_{in} = 11\delta_{in}, 14\delta_{in}, 17\delta_{in}$  et  $19\delta_{in}$ . Au dessus de la ligne horizontale en pointillée, placée à  $p_x^+ = 5 \times 10^{-3}$ , les lois logarithmique et de Reichardt ne sont plus strictement valides (voir le paragraphe 4.3.2.3). Dans le cas où le terme de contrôle est activé, la zone grisée représente la zone de contrôle.

La figure 9.8 (a) montre l'évolution de la pression pariétale suivant  $X$  entre le plan d'entrée et l'arête amont du trou de sortie pour les trois calculs WMLES et le calcul RANS. On observe dans tous les cas une augmentation globale de la pression pariétale due à l'obstacle fluide que représente le jet débouchant pour l'écoulement transverse. Il est à noter que la différence de pression visible sur le plan d'entrée ( $X = X_{in}$ ) s'explique par le fait que la condition *inj1* n'impose pas la pression

statique.

Le cas avec contrôle  $inj\_c$  montre une pente similaire au calcul RANS. Par contre, la pression pariétale retournée par les deux cas sans terme de contrôle  $inj$  et  $sans\_inj$  s'écartent nettement du calcul RANS à partir de  $X - X_{in} = 12\delta_{in}$ .

L'évolution du gradient de pression adimensionné  $p_x^+ = \frac{\mu_p}{\rho_p^2 u_\tau^3} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}$ , tracé sur la figure 9.8 (b), permet d'évaluer l'effet du gradient de pression sur la couche limite. Les gradients de pression adimensionnés des calculs RANS et  $inj\_c$  apparaissent proches en comparaison des valeurs très élevées affichées par les deux cas sans contrôle, notamment pour  $X - X_{in} = 19\delta_{in}$ . On s'attend donc à un comportement très différent de la couche limite avec et sans le terme de contrôle.

L'augmentation de  $p_x^+$ , visible sur les calculs RANS et  $inj\_c$ , indique un effet de plus en plus intense du gradient de pression adverse sur la couche limite. Dans la région  $X - X_{in} > 19\delta_{in}$ ,  $p_x^+ \gg 5 \times 10^{-3}$ , ce qui signifie que la loi logarithmique et donc la loi de Reichardt (voir le tableau 4.3) ne sont plus valides (voir le paragraphe 4.3.2.1). On atteint donc les limites du modèle de paroi QA pour  $X - X_{in} > 19\delta_{in}$ , ce qui sera visible sur le frottement pariétal et les profils de vitesse.

### 9.6.1.2 Frottement pariétal et épaisseur de couche limite

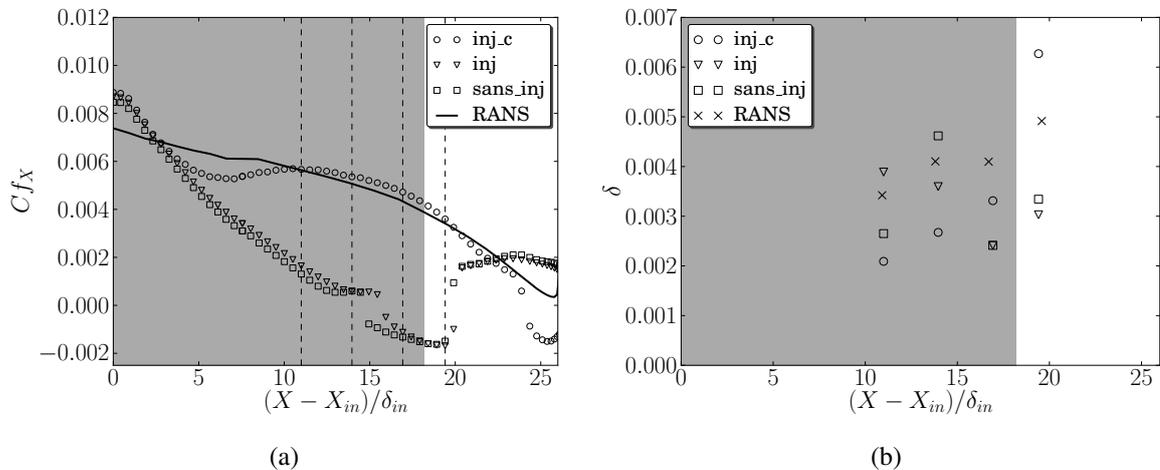


FIGURE 9.9 : (a) : évolution de la composante longitudinale du coefficient de frottement  $C_{fX} = \langle \tilde{\tau}_p \rangle \cdot \mathbf{X} / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2)$  en fonction de  $X$  sur le plan de symétrie. (b) épaisseur de couche limite sur le plan de symétrie aux stations  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ ,  $14\delta_{in}$ ,  $17\delta_{in}$  et  $19\delta_{in}$ .

L'évolution de la composante longitudinale du frottement pariétal  $C_{fX}$  est tracée sur la figure 9.9 (a). Après une diminution initiale jusque  $X - X_{in} = 6\delta_{in}$ , le frottement pariétal estimé par le calcul WMLES avec contrôle est en très bon accord avec les données RANS pour  $10\delta_{in} < X - X_{in} < 23\delta_{in}$ . Puis, dans la région  $X - X_{in} > 23\delta_{in}$ , c'est-à-dire très près du

jet débouchant,  $C_{fX}$  diminue et s'écarte du calcul RANS, indiquant une réaction différente de la couche limite dans les calculs WMLES et RANS lorsque  $p_x^+$  est le plus intense. Comme noté ci-dessus, l'une des explications de ce phénomène est la non-validité de la loi de Reichardt pour ces valeurs de  $p_x^+$ .

Par contre, les deux calculs sans contrôle retournent un  $C_{fX}$  négatif dans la région  $15\delta_{in} < X - X_{in} < 20\delta_{in}$ , indiquant la présence d'un décollement de la couche limite et d'une bulle de recirculation<sup>3</sup>. Pour  $X - X_{in} > 20\delta_{in}$ ,  $C_{fX}$  augmente ensuite brutalement pour se rapprocher des données RANS.

Certaines applications nécessitent une estimation précise de l'épaisseur de la couche limite à la fin de la distance d'adaptation. Ainsi, sur un écoulement de JICF, on a vu au paragraphe 9.1.2.1 que l'épaisseur de la couche limite au niveau du trou de sortie intervient dans les paramètres de similitude.

On trace donc sur la figure 9.9 (b) l'épaisseur de couche limite suivant  $X$ . On observe que le calcul avec contrôle *inj\_c* et le calcul RANS prévoient une augmentation graduelle de  $\delta$ . A la station  $X - X_{in} = 19\delta_{in}$ , c'est-à-dire à la sortie de la zone de contrôle, le calcul *inj\_c* surestime de 27% l'épaisseur de couche limite. Il est à noter que si une estimation plus précise de  $\delta$  est primordiale, il est possible de mettre en place un contrôle sur  $\delta$ , comme l'ont proposé Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001].

Les deux calculs sans contrôle montrent quant à eux un comportement moins physique, avec une diminution de  $\delta$  entre les stations  $X - X_{in} = 14\delta_{in}$  et  $X - X_{in} = 17\delta_{in}$ , ce qui correspond à la recirculation notée précédemment.  $\delta$  se retrouve alors sous-estimé à  $X - X_{in} = 19\delta_{in}$ .

### 9.6.1.3 Profils de vitesse

L'étude des profils de vitesse moyenne va permettre, d'une part, de mettre en évidence la bulle de recirculation observée sur les cas sans contrôle, et d'autre part, de caractériser plus précisément la qualité de la couche limite générée.

Les profils de vitesse moyenne simplement divisés par  $U_\infty$  sont tracés sur la figure 9.10 aux quatre stations. A la station la plus en amont  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ , les profils de vitesse des deux calculs sans contrôle présentent une pente à la paroi nettement plus faible que celle du calcul avec contrôle et du calcul RANS, ce qui est typique d'une couche limite laminaire. A partir de la station  $X - X_{in} = 14\delta_{in}$ , la couche limite générée par les deux calculs sans contrôle décolle et aux deux stations les plus en aval, une vitesse négative est visible dans la seconde cellule au dessus de la paroi.

Les profils de vitesse du calcul avec contrôle restent quant à eux proches de la solution RANS, même si une sous-estimation de la vitesse est visible et va en s'accroissant vers les stations les plus en aval sous l'augmentation du gradient de pression adverse.

Pour une étude plus fine des profils de vitesse du cas avec contrôle, la figure 9.11 montre ces derniers exprimés en variables de paroi.

---

3. A ne pas confondre avec la recirculation se formant en aval du jet.

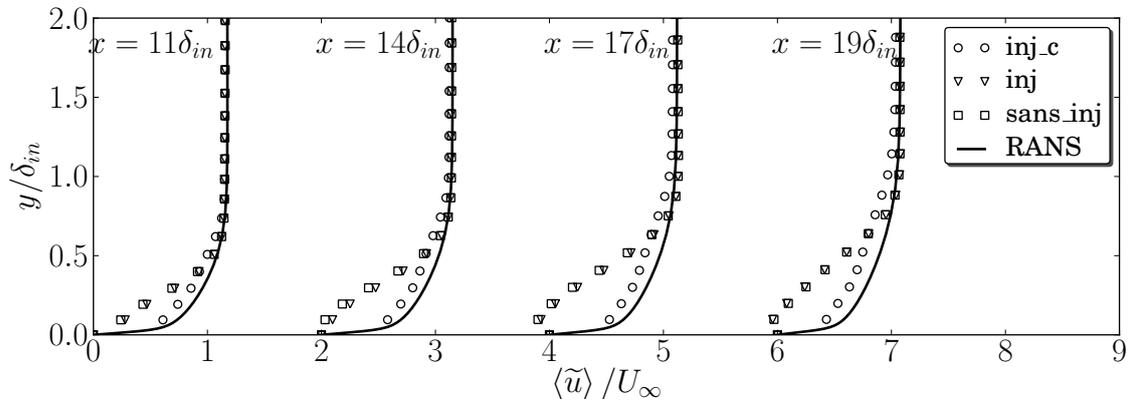


FIGURE 9.10 : Profils de vitesse moyenne sur le plan de symétrie aux stations  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ ,  $14\delta_{in}$ ,  $17\delta_{in}$  et  $19\delta_{in}$ . Pour une meilleure lisibilité, les profils sont décalés de 2 unités d'une station à la suivante.

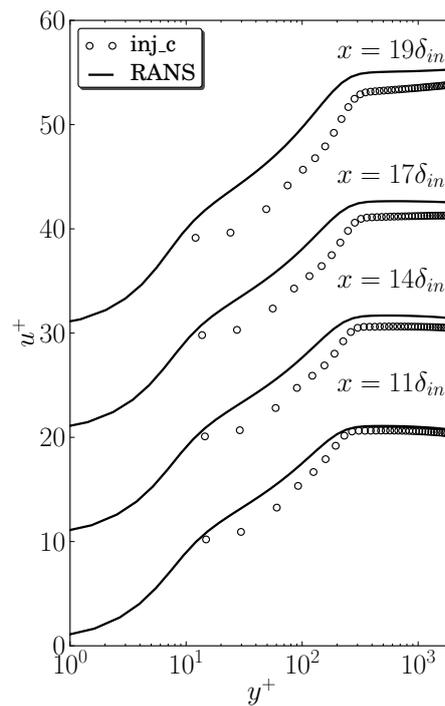


FIGURE 9.11 : Profils de vitesse moyenne en variable de paroi sur le plan de symétrie aux stations  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ ,  $14\delta_{in}$ ,  $17\delta_{in}$  et  $19\delta_{in}$ . Pour une meilleure lisibilité, les profils sont décalés de 10 unités d'une station à la suivante.

On observe tout d'abord que la vitesse au point le plus proche de la paroi ( $u^+(y_1^+)$ ), qui correspond au centre des cellules adjacentes à la paroi, s'écarte du profil RANS à mesure que  $X$  augmente. Or dans le cadre de la WMLES,  $u^+(y_1^+)$  dépend directement du modèle de paroi. En supposant que les profils de vitesse RANS soient exacts, l'écart progressif observé sur  $u^+(y_1^+)$  par rapport au RANS confirme donc que la loi de Reichardt utilisée dans le modèle de paroi QA est de moins en moins valide sous l'effet du gradient de pression adverse, comme anticipé sur le tracé de  $p_x^+$ . La non validité de la loi de Reichardt reste néanmoins négligeable aux trois premières stations.

Comme déjà noté sur la figure 9.10, on retrouve une sous-estimation de la vitesse sur toute la hauteur de la couche limite. Cette sous-estimation s'accroît à mesure que  $X$  augmente et est attribuée à deux facteurs. Le premier facteur est la dissipation artificielle qui, comme montré sur l'écoulement de couche limite au chapitre précédent, n'affecte que la seconde et troisième cellule au dessus de la paroi (voir la figure 8.3). Le second facteur est le gradient de pression adverse, qui explique la sous-estimation au dessus de la troisième cellule.

Il serait intéressant de mener une étude spécifique du comportement de la WMLES sur une couche limite avec gradient de pression, dans le but de déterminer à la fois la limite de validité d'un modèle de paroi basé sur la loi logarithmique et la dépendance des résultats au nombre de cellules  $n_y$  placés dans la couche limite.

#### 9.6.1.4 Variances de la vitesse

Les variances de la vitesse tracées sur la figure 9.12 fournissent une première information sur le développement des structures turbulentes.

Sur le calcul avec contrôle, à la station amont  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ , on observe que les trois variances sont supérieures aux variances des deux calculs sans contrôle. Puis, chaque variance du calcul avec contrôle montre une amplitude globalement constante à mesure que  $X$  augmente.

Par contre, les deux calculs sans contrôle retournent des variances qui augmentent brutalement à partir de  $X - X_{in} = 13\delta_{in}$ , pour atteindre à la station aval  $X - X_{in} = 19\delta_{in}$  des amplitudes environ deux fois supérieures à celles observées sur le calcul avec contrôle. Sur la couche limite du chapitre précédent, cette tendance à la surestimation des variances de vitesse en l'absence du terme de contrôle a déjà été constatée, notamment sur la composante  $\sqrt{\langle \tilde{u}^2 \rangle}$  (voir les figures 8.10 et 8.13).

En se basant sur l'évolution de  $C_{fX}$  et sur l'amplitude constante selon  $X$  des variances de vitesse aux quatre stations, on peut considérer que la distance d'adaptation du calcul avec contrôle est  $X_a = 12\delta_{in}$ . Concernant les deux calculs sans contrôle, l'évolution de  $C_{fX}$  et des variances de vitesse montrent que  $X_a > 20\delta_{in}$ , ce qui est très proche de l'arête amont du trou de sortie, située à  $27\delta_{in}$  du plan d'entrée. Sans le contrôle, il est donc difficile de dire qu'une couche limite turbulente est correctement générée avant la sortie du jet.

La couche limite générée par les deux calculs sans contrôle est donc différente de la réalité expérimentale et du calcul RANS sur la majeure partie de la grille d'éjection. L'étude du flux de chaleur sur la grille d'éjection menée dans le paragraphe suivant va montrer les conséquences de

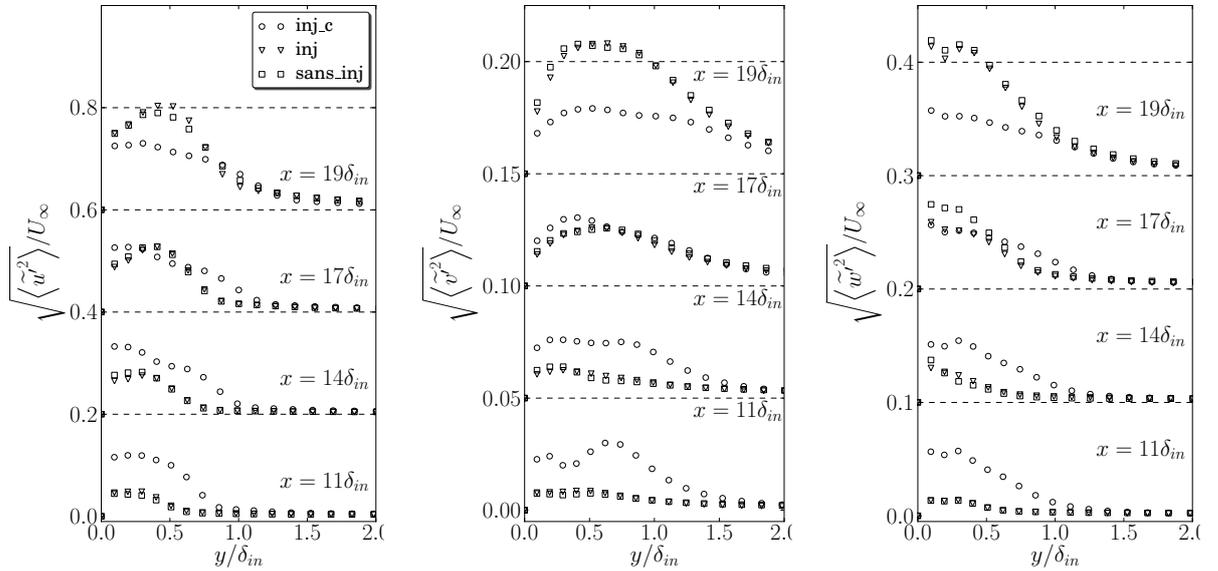


FIGURE 9.12 : Variance de la vitesse sur le plan de symétrie aux stations  $X - X_{in} = 11\delta_{in}$ ,  $14\delta_{in}$ ,  $17\delta_{in}$  et  $19\delta_{in}$ . Pour une meilleure lisibilité, les profils de  $\sqrt{\langle \tilde{u}^2 \rangle}$ ,  $\sqrt{\langle \tilde{v}^2 \rangle}$  et  $\sqrt{\langle \tilde{w}^2 \rangle}$  sont respectivement décalés de 0, 2 ; 0, 05 et 0, 1 unité d'une station à la suivante.

cette mauvaise injection de turbulence.

### 9.6.1.5 Flux de chaleur pariétal

Tout comme le frottement pariétal, le flux de chaleur pariétal est différent suivant que la couche limite est laminaire ou turbulente. Puisqu'une condition limite isotherme chaude est imposée sur la grille d'éjection, il est possible d'y tracer le flux de chaleur pariétal, ce qui constitue un bon indicateur de l'effet de l'injection de turbulence sur l'ensemble de la grille d'éjection.

La figure 9.13 montre le flux de chaleur pariétal adimensionné  $Nu = \frac{\langle \tilde{\phi}_p \rangle}{\lambda_\infty (T_\infty - T_j) / D}$  sur la grille d'éjection. En amont du trou de sortie, le calcul avec contrôle présente un comportement proche du calcul RANS, avec dans les deux cas une diminution progressive de  $Nu$  de 200 à 80 à l'approche du trou de sortie.

Sur les deux calculs sans contrôle, un comportement différent apparaît, avec un minimum de  $Nu$  atteint à  $X \approx 0,8D$ , suivi d'une augmentation brutale à l'approche du trou de sortie. Le minimum de  $Nu$  puis son augmentation brutale correspondent respectivement à la bulle de recirculation et à l'augmentation brutale de  $C_f$  et des variances de vitesse décrites ci-dessus.

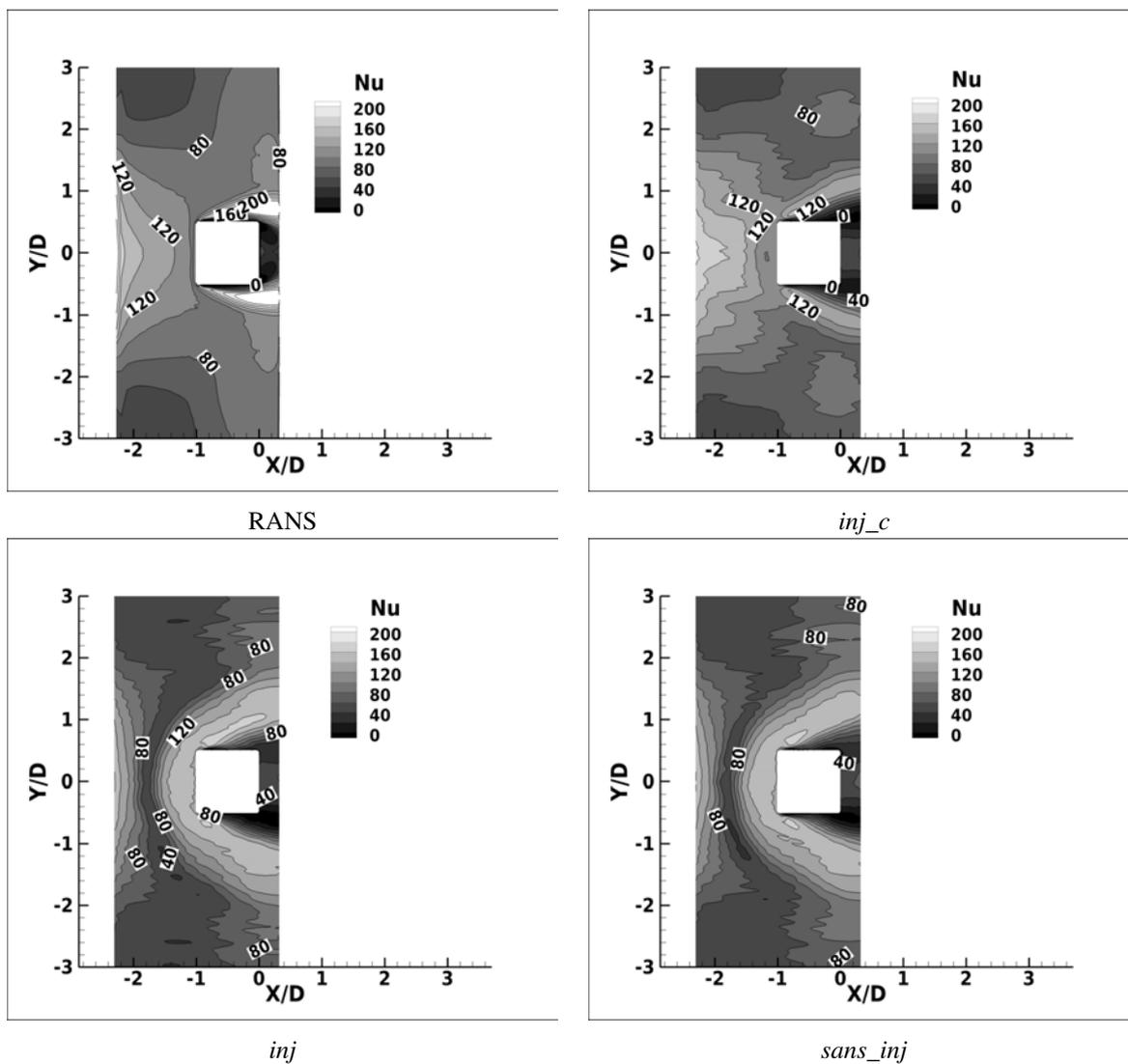


FIGURE 9.13 : Flux de chaleur pariétal adimensionné  $Nu = \frac{\langle \tilde{\phi}_p \rangle}{\lambda_p(T_p - T_\infty)/D}$  sur la grille d'éjection.

### 9.6.1.6 Conclusions intermédiaires sur l'injection de turbulence

Avant de poursuivre avec les résultats dans le sillage du jet, on propose de conclure dès maintenant sur le comportement de l'injection de turbulence pariétale sur cet écoulement de JICF :

- par la géométrie du domaine WMLES et la qualité non-idéale du maillage qui en découle, par la faible distance  $X_{interet} - X_{ba}$  et par le gradient de pression adverse en amont du jet, cet écoulement de JICF est un cas plus discriminant pour l'injection de turbulence que la couche limite sans gradient de pression étudiée au chapitre précédent ;
- l'utilisation du terme de contrôle conduit à une couche limite turbulente attachée après une distance d'adaptation de  $12\delta_{in}$ . Sur le plan de symétrie, la pression pariétale, frottement pariétal et profils de vitesse sont en bon accord avec les résultats RANS de référence. De plus, le flux de chaleur pariétal est proche du calcul RANS sur l'ensemble de la grille d'éjection, ce qui est certainement le résultat résumant le mieux le succès de l'injection avec contrôle. Des écarts sont tout de même constatés sur l'épaisseur de couche limite et sur la réponse du profil de vitesse au gradient de pression adverse. Sans étude spécifique de la WMLES sur une couche limite avec gradient de pression, il n'est pas possible de dire si ces écarts proviennent de l'injection de turbulence ou de l'approche WMLES ;
- sans contrôle, la couche limite injectée montre un comportement radicalement différent. En effet, cette dernière décolle sous l'effet du gradient de pression adverse pour former une bulle de recirculation. En aval de cette bulle, une production brutale de turbulence entraîne une forte augmentation du frottement pariétal juste en amont du jet. La distribution du flux de chaleur sur la grille d'éjection montre bien le comportement non-physique de la couche limite injectée sans contrôle ;
- en considérant que peu d'études ont porté sur l'injection de turbulence pariétale pour les méthodes hybride RANS-LES, a fortiori pour la WMLES, injecter de la turbulence pariétale sur toute la largeur de la grille d'éjection, soit  $20cm$ , à un nombre de Reynolds conséquent de  $Re_D = 93000$ , avec un gradient de pression adverse et la vraie géométrie de la maquette représente un challenge. La faisabilité d'une injection de turbulence pariétale pour la WMLES sur un cas non-académique présentant de fortes contraintes physiques et géométriques est donc démontrée ;
- une étude spécifique concernant l'effet du gradient de pression sur la distance d'adaptation reste à effectuer, en reprenant par exemple les cas de référence choisis par Keating et al. [2006].

## 9.6.2 Résultats dans le sillage du jet

Les conclusions ci-dessus montrent que seule une injection de turbulence avec contrôle (cas *inj\_c*) permet à la WMLES de se rapprocher des résultats RANS de référence en amont du jet. La suite logique consisterait à étudier l'effet de l'injection de turbulence sur les résultats dans le sillage du jet. Nous faisons néanmoins quelques remarques à ce sujet :

- au moins deux phénomènes pourraient expliquer des résultats différents dans le sillage du jet entre les cas avec et sans contrôle. Le premier est l'interaction du jet débouchant avec la couche limite amont, qui modifie le développement des structures cohérentes en fer à cheval (voir le paragraphe 9.1.2.1). Le second est la distribution du flux de chaleur pariétal, qui conduit à un échauffement de la couche limite amont et une modification de la température pariétale dans le sillage du jet ;
- concernant le premier phénomène, le comportement de la couche limite injectée est plus physique sur le calcul avec contrôle, qui montre l'absence de bulle de recirculation et des variances de vitesse bien établies. Cependant, l'erreur obtenue au niveau de l'arête amont du trou de sortie sur le frottement pariétal et l'épaisseur de couche limite est similaire avec et sans contrôle. En termes de grandeurs intégrales, les couches limites générées avec et sans contrôle au niveau de l'arête amont du trou de sortie sont donc d'une qualité similaire. Même si la couche limite au niveau de l'arête amont du trou de sortie était radicalement différente avec et sans contrôle, il resterait à étudier l'effet de la méthode numérique et du raffinement du maillage sur l'interaction du jet débouchant avec la couche limite amont et sur le développement des structures en fer à cheval, pour éviter une compensation d'erreur menant à de fausses conclusions ;
- concernant le second phénomène, on verra dans le paragraphe 9.6.2.4 que les hypothèses liées à l'approche WMLES empêchent de conclure concernant l'effet du flux de chaleur en amont du jet sur la température pariétale dans le sillage du jet.

L'étude de l'effet de l'injection sur les résultats dans le sillage du jet sort donc du cadre de ce travail, car pour permettre de conclure, elle nécessiterait plusieurs raffinements du maillage et des modifications de l'approche WMLES. Les deux calculs sans contrôle *inj* et *sans\_inj* sont donc mis de côté pour ne s'intéresser qu'à la comparaison du calcul *inj\_c* aux résultats RANS et expérimentaux dans le sillage du jet.

Après une rapide présentation des moyens de mesure expérimentaux, un aperçu des structures cohérentes sera donné. On s'assurera ensuite que le champ de vitesse moyenne est correctement estimé dans le sillage du jet, avant d'étudier la température pariétale moyenne. Enfin, deux sondes situées dans la recirculation en aval du jet permettront une analyse spectrale de la vitesse.

### 9.6.2.1 Résultats expérimentaux

Cet écoulement de JICF a fait l'objet d'une campagne de mesure expérimentale menée par Albugues [2005] dans la soufflerie F2 du centre Fauga de l'ONERA. Puisque les résultats de

calcul vont être comparés aux données expérimentales, nous donnons ici une brève description des moyens de mesure et des incertitudes associées, ce qui sera particulièrement important pour une comparaison pertinente des spectres de vitesse numériques et expérimentaux.

La vitesse moyenne et ses variances sont mesurées par Anémométrie Doppler Laser (LDA) tridimensionnelle. Une description de la LDA est donnée par Albugues [2005] (p. 96). Il indique qu'il est impossible de déterminer l'incertitude de mesure globale de la LDA mais en considérant un point de mesure particulier, il trouve une incertitude relative de 0,8% sur la vitesse moyenne  $\bar{U}$  et de 5% sur la variance de vitesse  $\sqrt{U'^2}$ .

La température pariétale est mesurée par thermographie infrarouge (voir Albugues p. 73), dont l'incertitude de mesure est de  $\pm 0,5K$ . Il est à noter qu'une erreur dans le post-traitement des données conduit à une incertitude relative supplémentaire estimée à 3%.

Enfin, le signal permettant le calcul des spectres de vitesse est collecté grâce à la LDA. Des caractéristiques détaillées sur l'acquisition et le calcul des spectres expérimentaux seront données dans le paragraphe 9.6.2.5.

### 9.6.2.2 Structures cohérentes

Les tourbillons en fer à cheval et les tourbillons de sillage décrits dans le paragraphe 9.1.2.1 contrôlent la longueur et l'extension latérale de la zone de sillage. Nous mettons en évidence ces structures en utilisant la température, qui est ici un scalaire passif. Avant l'étude plus quantitative menée dans la suite grâce aux champs moyens, ces structures cohérentes permettent une première discussion sur les caractéristiques de l'écoulement.

On observe sur la figure 9.14 que l'interaction du jet avec la couche limite amont met en jeu des structures sur une large gamme d'échelles. Au niveau de l'arête amont du trou de sortie, la taille des structures cohérentes est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite. Cette dernière vaut, selon la figure 9.9, environ  $\delta = 5mm$ . Les plus grosses structures visibles sur la figure 9.14 (a) sont les tourbillons en fer à cheval dont Andreopoulos [1985] a proposé une visualisation expérimentale pour différents  $C_R$  et  $Re_D$ . Andreopoulos indique que les tourbillons en fer à cheval s'apparient et que leur taille augmente avec  $X$  pour atteindre 2 à  $3D$  avant d'être finalement dissipés. La dissipation des structures est ici également visible pour  $X > 4D$ . Pour déterminer si l'origine de cette dissipation est physique ou numérique, un changement de méthode numérique ou de raffinement du maillage serait nécessaire.

La figure 9.14 (b) montre les tourbillons de sillage, qui forment des méandres sur le champ de température pariétale instantané comme l'a déjà mis en évidence Duda [2012]. Ces méandres apparaissent à une fréquence constante qui sera quantifiée par l'analyse spectrale du paragraphe 9.6.2.5. De plus, ils contrôlent l'extension latérale du sillage et du champ de température pariétale. Les méandres sont finalement dissipés pour  $X > 12D$ .

La présence de ces structures cohérentes instationnaires s'étalant sur une large plage de fré-

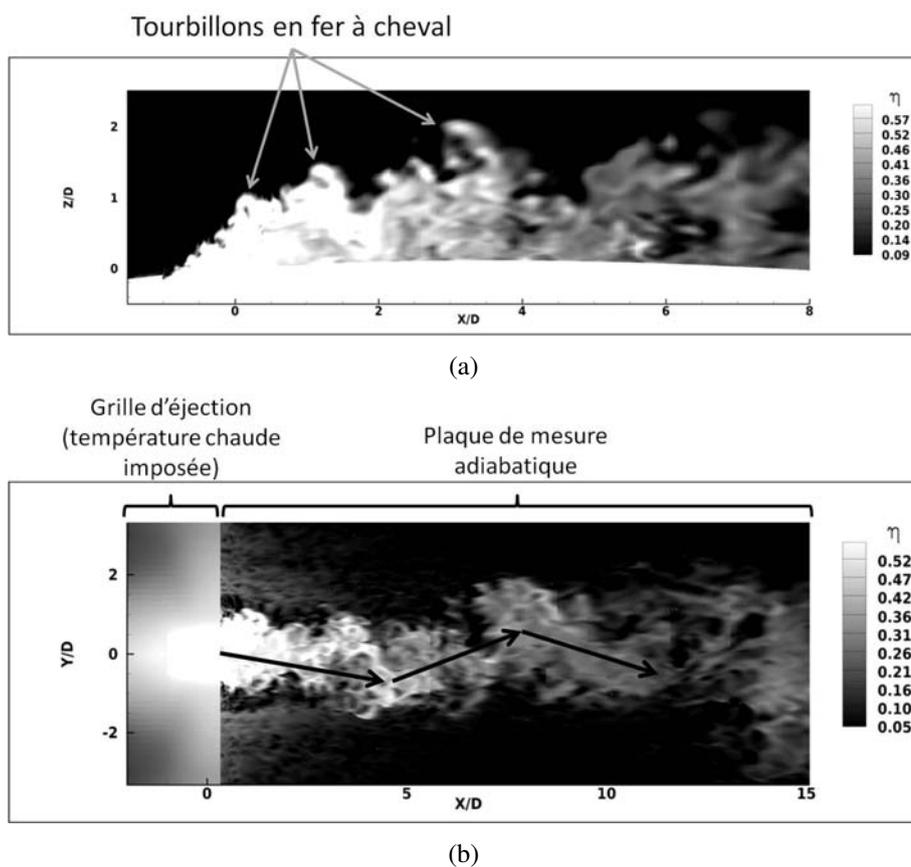


FIGURE 9.14 : (a) : vue instantanée de la température sans dimension  $\eta = (T - T_\infty)/(T_j - T_\infty)$  sur le plan de symétrie. Les tourbillons en fer à cheval formés dans la couche de cisaillement sont visibles. (b) : vue instantanée de la température pariétale, montrant la trace des tourbillons de sillage.

quences explique la difficulté de l'approche RANS à correctement estimer le champ de température pariétale, comme on le montrera dans le paragraphe 9.6.2.4.

### 9.6.2.3 Vitesse dans le sillage du jet

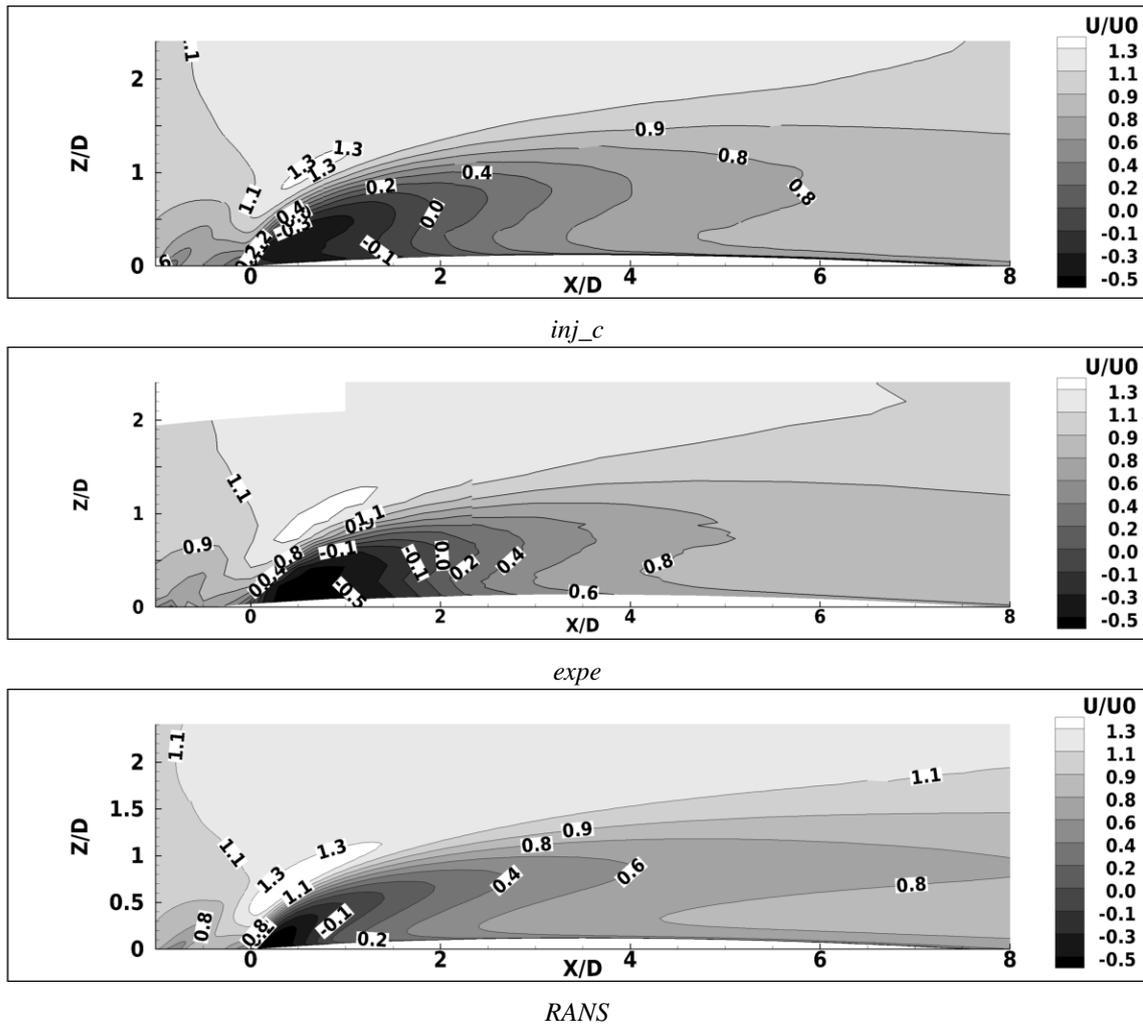


FIGURE 9.15 : Vitesse longitudinale moyenne sur le plan de symétrie.  $U_0$  signifie  $U_\infty$ .

La vitesse longitudinale moyenne sur le plan de symétrie est tracée sur la figure 9.15. L'accord entre le calcul *inj\_c* et l'expérience est très satisfaisant. La principale différence provient de la recirculation en aval du trou de sortie ( $0 < X/D < 1,5$ ), dont la longueur et la vitesse de retour sont sous-estimées. La ligne de niveau  $U/U_\infty = 0,8$  montre également que la longueur du sillage est légèrement surestimée.

Le calcul RANS présente des résultats nettement plus en désaccord avec l'expérience. La sur-estimation de la longueur du sillage et la sous-estimation de la longueur de recirculation montrent en effet une ampleur beaucoup plus importantes que sur le calcul *inj\_c*.

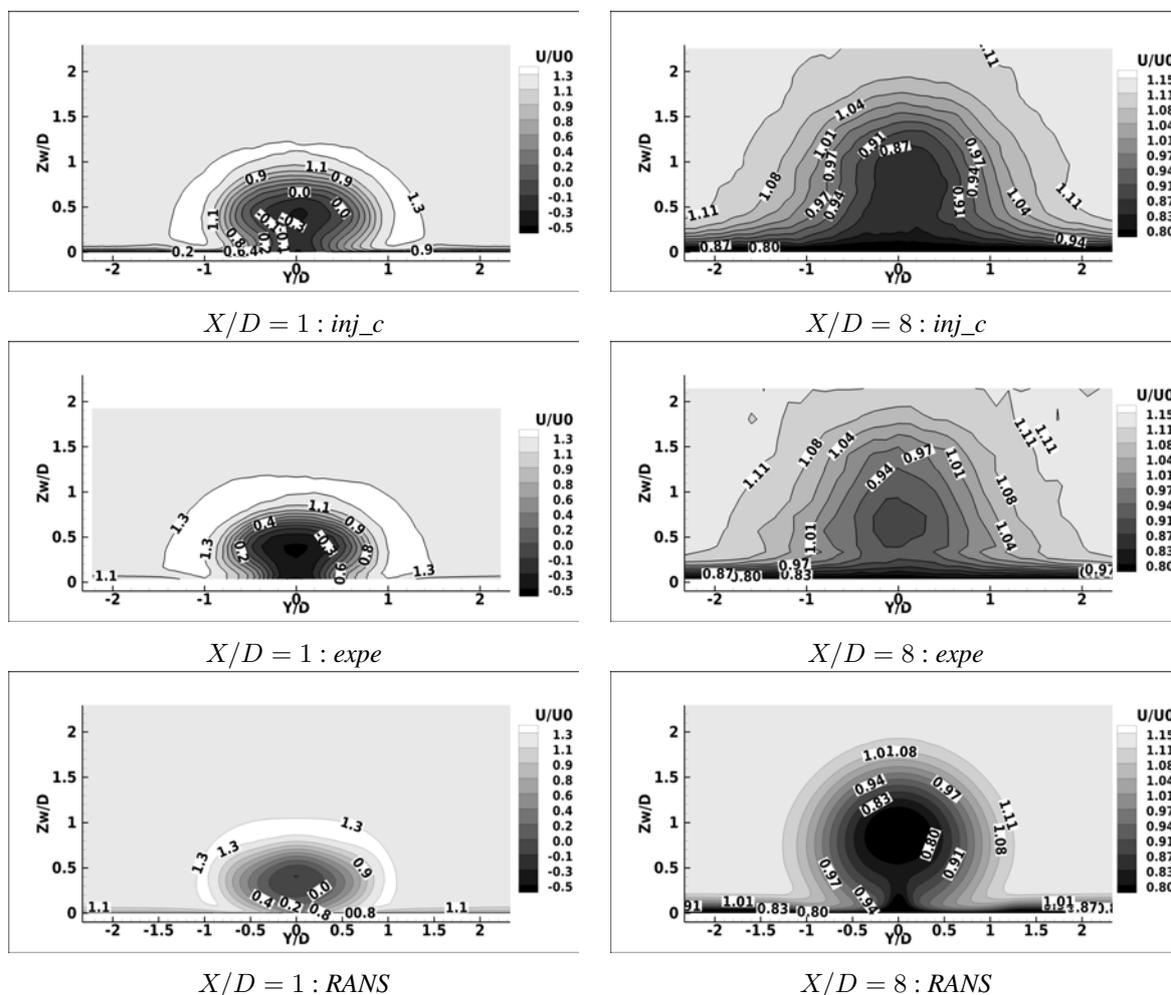


FIGURE 9.16 : Vitesse longitudinale moyenne sur les plans  $X/D = 1$  et  $X/D = 8$ .

La figure 9.16 montre également la vitesse longitudinale moyenne tracée sur les plans  $X/D = 1$  et  $X/D = 8$ . Par rapport au calcul RANS, les résultats du calcul *inj\_c* sont beaucoup plus proches de l'expérience. A  $X/D = 1$ , on retrouve la sous-estimation de la longueur de recirculation en regardant notamment la ligne de niveau  $U/U_\infty = 0,3$ . A partir de  $X/D = 8$ , on observe de plus un déficit de vitesse plus prononcé par rapport à l'expérience, qui correspond à la surestimation de la longueur du sillage notée ci-dessus.

Sur les résultats RANS, la recirculation n'est plus visible à partir de  $X/D = 1$  et à  $X/D = 8$ , on observe une extension latérale du sillage près de la paroi nettement plus étroite que dans

l'expérience. On retrouvera cette erreur majeure du calcul RANS sur le champ de température pariétale.

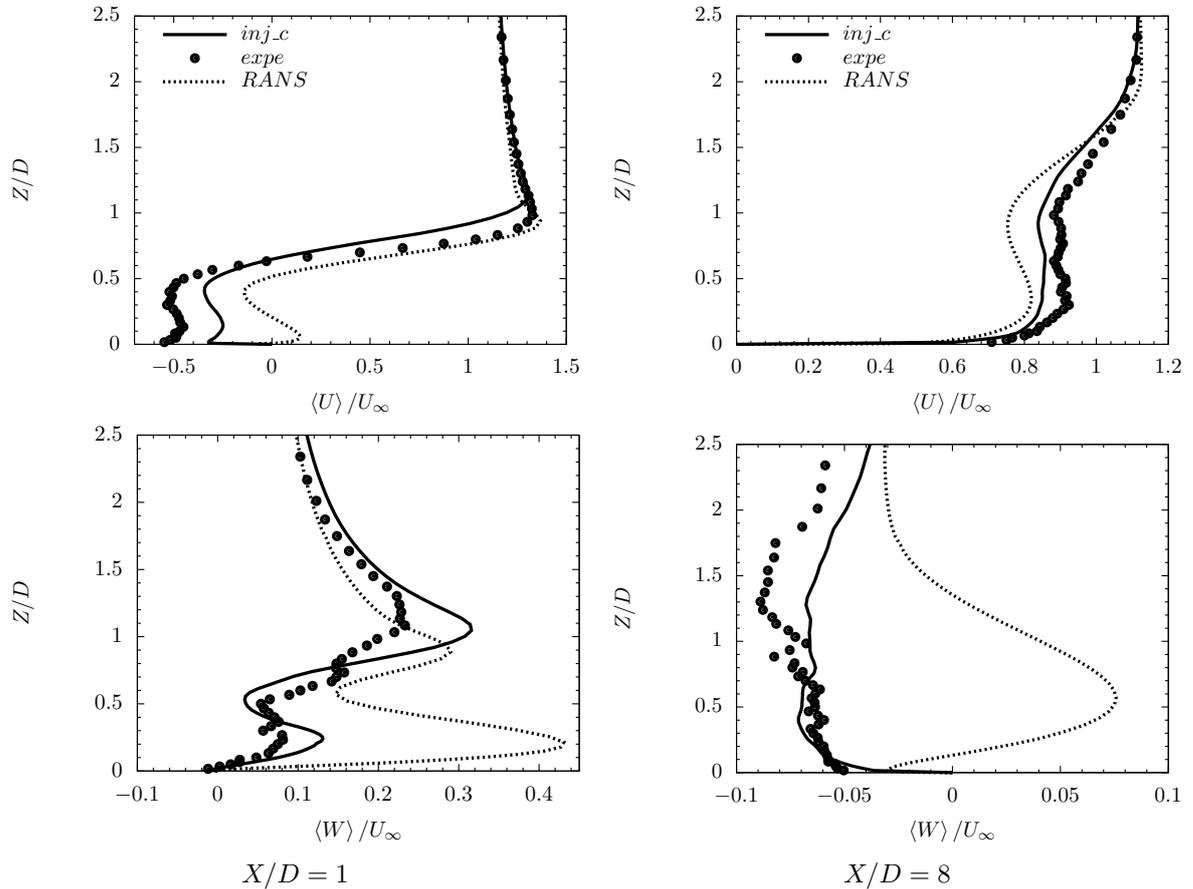


FIGURE 9.17 : Vitesse moyenne longitudinale et verticale sur les plans  $X/D = 1$  et  $X/D = 8$ .

Une comparaison plus locale du champ de vitesse est proposée sur la figure 9.17. A  $X/D = 1$ , on retrouve sur la composante longitudinale  $\langle U \rangle$  des calculs  $inj\_c$  et RANS la sous-estimation de la vitesse de retour dans la zone de recirculation.

A  $X/D = 1$  et  $X/D = 8$ , la vitesse verticale  $\langle W \rangle$  montre un accord très satisfaisant entre le calcul  $inj\_c$  et l'expérience, alors que le calcul RANS affiche quant à lui des écarts importants.

Pour terminer avec le champ de vitesse, le tracé des variances sur la figure 9.18 va permettre une validation plus profonde du calcul  $inj\_c$ .

Sur les résultats expérimentaux, on remarque tout d'abord une amplitude très élevée des variances à  $X/D = 1$ , jusqu'à  $\sqrt{\langle \tilde{U}^2 \rangle} = 0,7U_\infty$ , soit cinq fois l'amplitude relevée à  $X/D = 8$ .

A  $X/D = 1$ , la forme des profils de variance du calcul  $inj\_c$  est similaire à l'expérience mais le

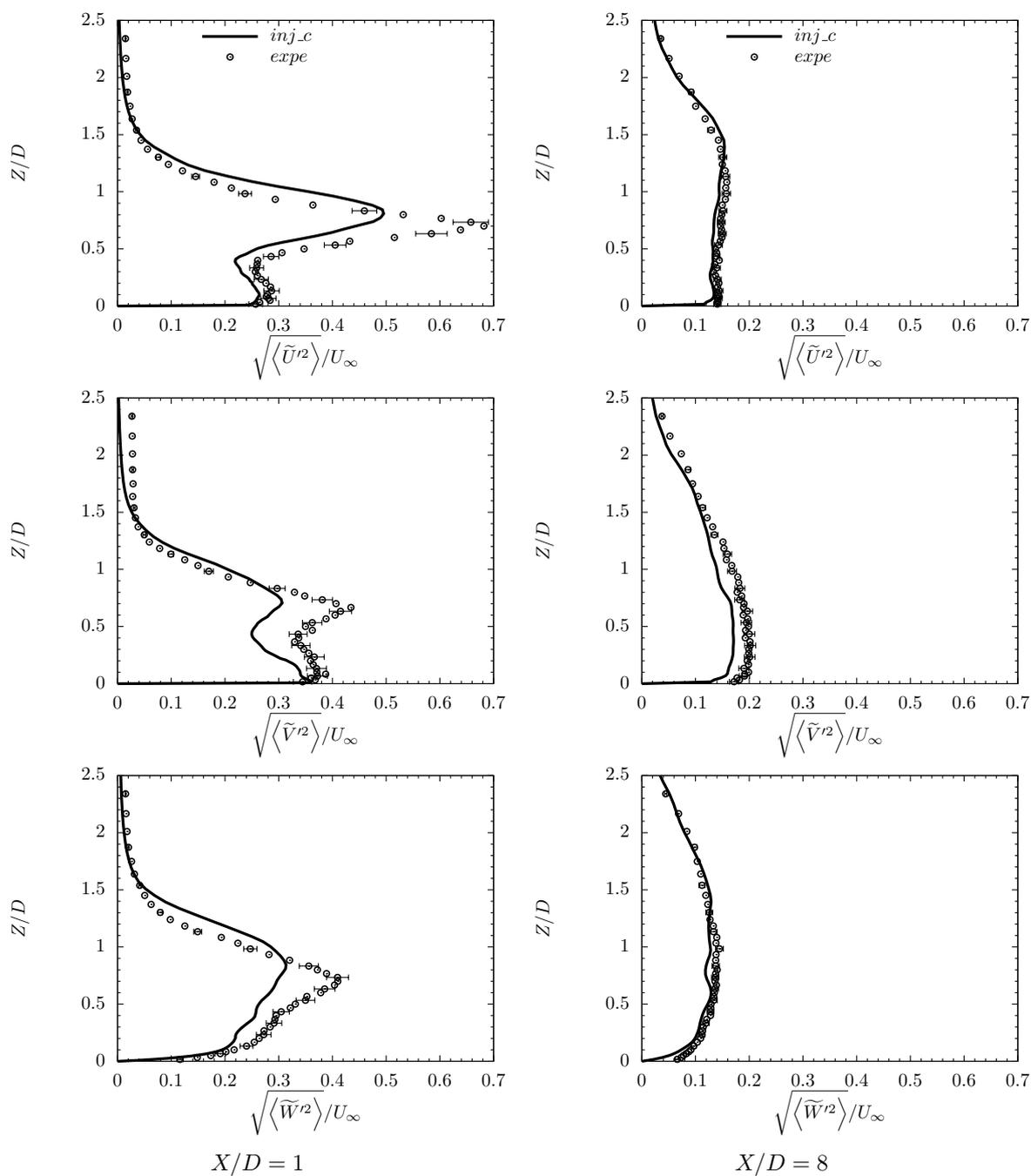


FIGURE 9.18 : Variances de la vitesse sur les plans  $X/D = 1$  et  $X/D = 8$ . Les barres d'erreur correspondent à une incertitude relative de  $\pm 5\%$  (voir le paragraphe 9.6.2.1).

maximum est systématiquement sous-estimé. Ce comportement, combiné aux désaccords relevés précédemment sur la vitesse moyenne, montre qu'une méthode numérique plus précise ou qu'un maillage plus raffiné devrait être utilisé dans la zone de recirculation. La dimension caractéristique des cellules dans cette zone devra donc être inférieure à la dimension utilisée ici, qui est d'environ  $\Delta = 0,8mm$ .

A  $X/D = 8$ , il n'y a plus de pics étroits sur les profils de variance expérimentaux et l'accord entre le calcul  $inj\_c$  et l'expérience devient excellent.

#### 9.6.2.4 Température pariétale dans le sillage du jet

La figure 9.19 montre la température pariétale moyenne sans dimension  $\eta = \frac{\langle T_p \rangle - T_\infty}{T_j - T_\infty}$ . Un accord satisfaisant est obtenu entre le calcul  $inj\_c$  et l'expérience. Comme précédemment noté sur le champ de vitesse, la longueur de la région chaude est légèrement surestimée. Le fait que le champ de température pariétale soit contrôlé par le champ de vitesse est logique puisque la température est passivement convectée.

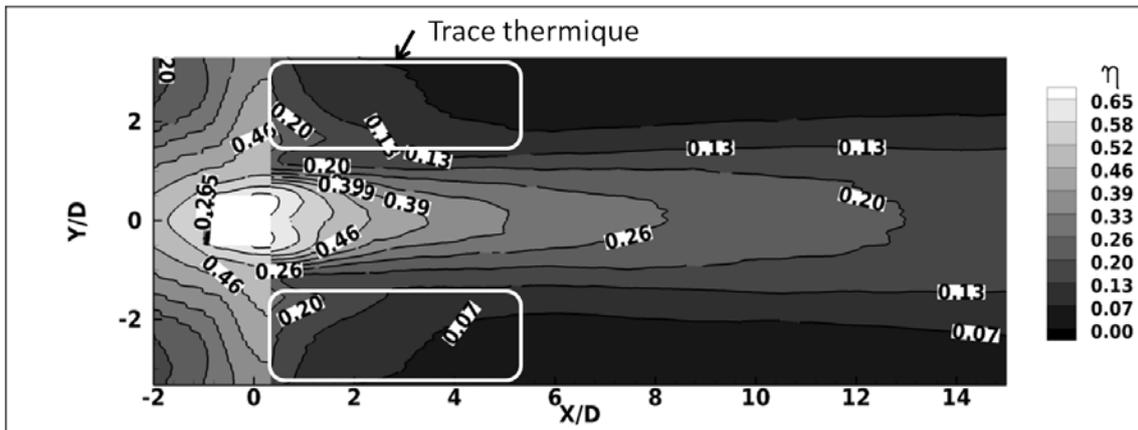
Le calcul RANS est par contre en sévère désaccord avec l'expérience. La région chaude est en effet trop longue et présente surtout une extension latérale beaucoup trop faible.

Sur les calculs  $inj\_c$  et RANS, on observe sur la plaque de mesure adiabatique une trace thermique juste en aval de la grille d'éjection isotherme. Or l'expérience ne montre pas la présence de cette trace thermique. Les raisons expliquant sa présence sont différentes entre les calculs RANS et  $inj\_c$ .

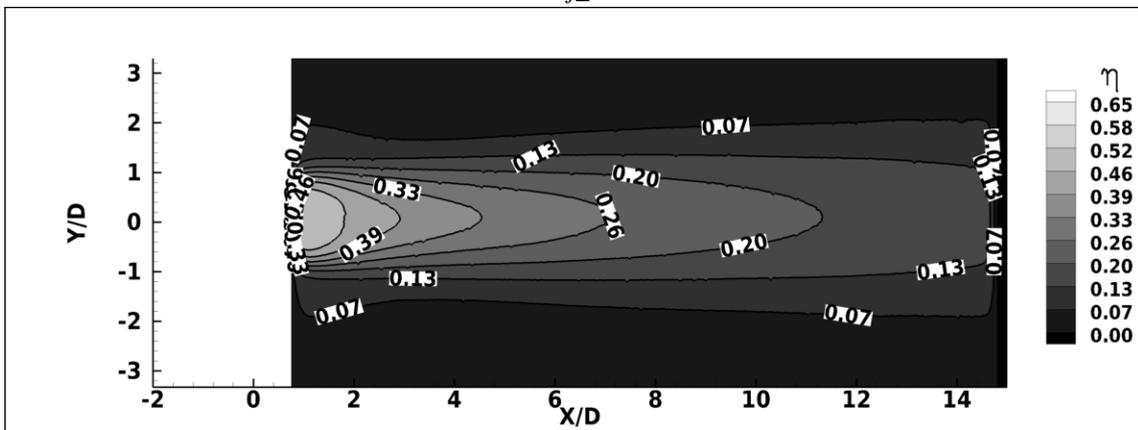
Dans le calcul RANS, la bonne représentation du passage brutal de la grille d'éjection isotherme à la plaque adiabatique nécessiterait un raffinement des cellules dans la direction  $X$  au niveau de l'interface isotherme-adiabatique. N'ayant pas identifié le problème de cette trace thermique suffisamment tôt, le maillage RANS a été construit en ignorant ce problème, c'est-à-dire sans ce raffinement selon  $X$ . La diffusion de la température lorsque la couche limite chaude passe au dessus de la plaque adiabatique est donc sous-estimée, conduisant à cette trace thermique d'une longueur trop importante.

Dans le calcul  $inj\_c$ , la représentation de ce passage brutal d'une condition isotherme chaude à une condition adiabatique va à l'encontre des hypothèses liées à la WMLES. En effet, l'approche WMLES suppose une couche limite à l'équilibre, dans laquelle les variations de vitesse moyenne, température moyenne et statistiques turbulentes selon la direction longitudinale sont faibles. On atteint donc ici les limites de l'approche WMLES, qui sous-estime largement la diffusion de la température lorsque la couche limite chaude passe au dessus de la plaque adiabatique, expliquant cette trace thermique non-physique d'une ampleur encore plus importante que dans le calcul RANS. Pour correctement capturer l'interface isotherme-adiabatique, il faudrait revenir à une approche LES avec des cellules de hauteur  $\Delta_{y1}^+ \approx 1$  et raffinées selon  $X$ . La finesse du maillage serait alors proche d'un calcul DNS.

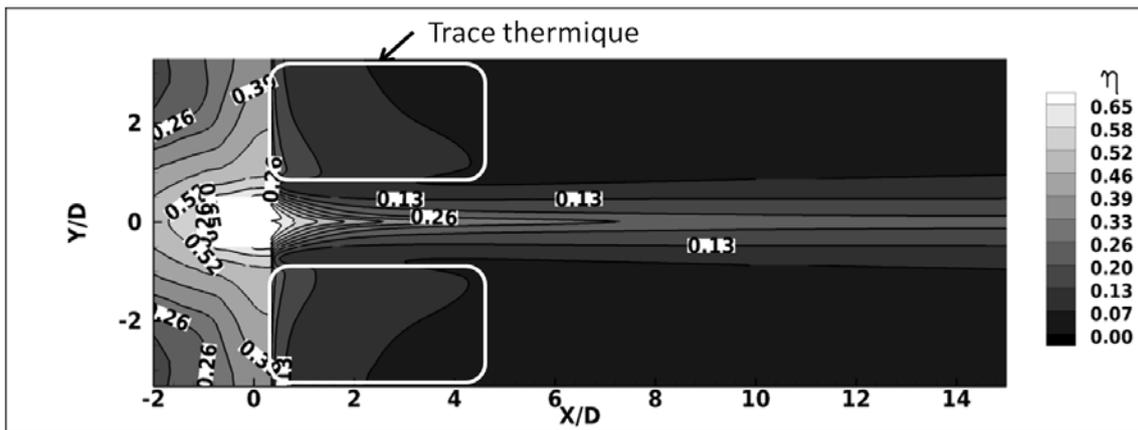
Une comparaison plus locale de la température pariétale moyenne est tracée sur la figure 9.20. Sur le plan de symétrie ( $Y = 0$ ), le calcul  $inj\_c$  présente un comportement physique réaliste malgré une surestimation par rapport à la courbe expérimentale à hauteur de 14% en  $X = D$  et de 12% en



*inj\_c*



*expe*



RANS

FIGURE 9.19 : Température pariétale moyenne sans dimension  $\eta = \frac{\langle T_p \rangle - T_\infty}{T_j - T_\infty}$ .

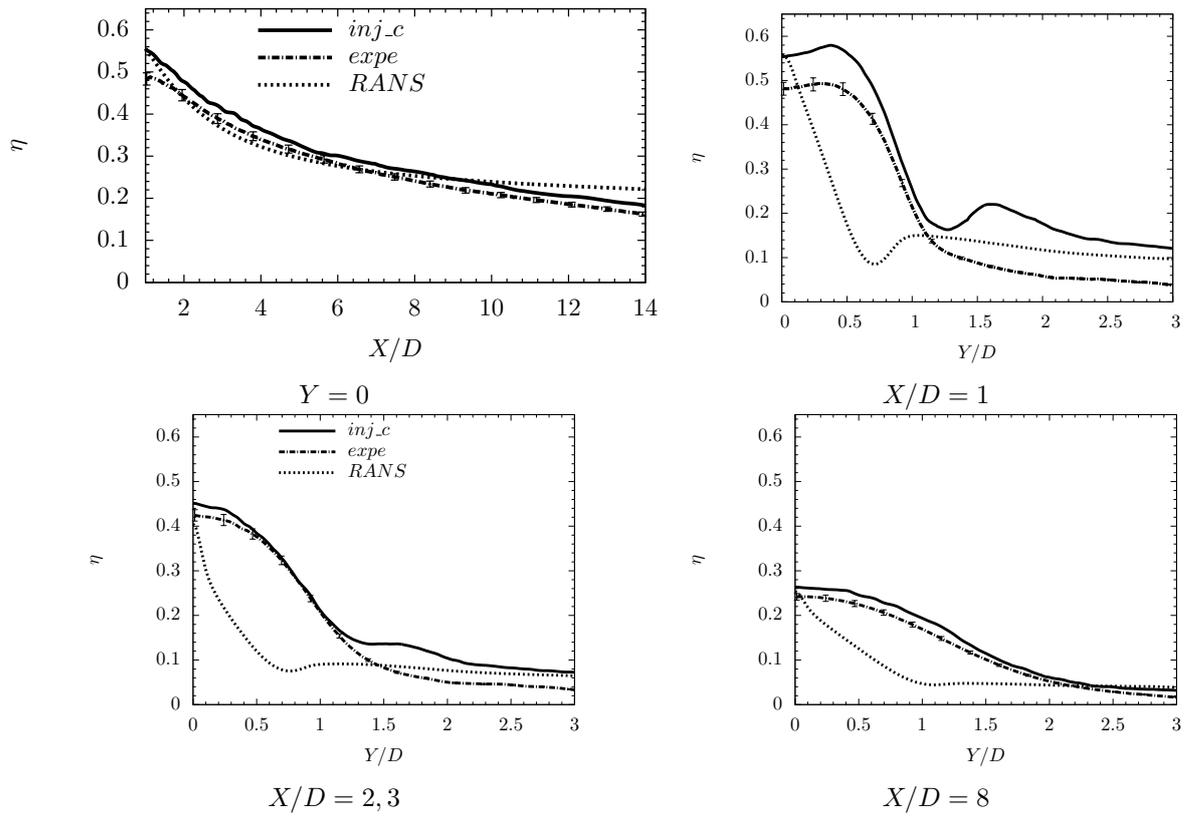


FIGURE 9.20 : Température pariétale moyenne sans dimension  $\eta$ . Les barres d'erreur correspondent à une incertitude relative de  $\pm 3\%$  (voir le paragraphe 9.6.2.1).

$X = 14D$ . L'erreur plus importante autour de  $X = D$  est attribuée à la fois à la trace thermique discutée ci-dessus et au raffinement insuffisant du maillage dans la zone de recirculation.

Le calcul RANS sous-estime quant à lui la température pariétale jusque  $X = 6D$  puis la surestime pour atteindre une erreur de 38% en  $X = 14D$ . Ce comportement non-physique du calcul RANS est à relier aux désaccords déjà notés sur la vitesse longitudinale dans le plan de symétrie (voir la figure 9.15).

Sur le plan  $X/D = 1$ , on se focalise tout d'abord sur la région  $|Y/D| < 1,3$ . Le calcul *inj\_c* estime correctement la largeur de la région chaude, qui se termine vers  $Y/D \approx 1$ . En  $Y = 0$ , on retrouve la surestimation relevée ci-dessus. Comme précédemment noté sur la figure 9.19, le calcul RANS montre une sévère sous-estimation de la largeur de la région chaude, qui se termine vers  $Y/D \approx 0,4$ .

On passe maintenant à la région  $|Y/D| > 1,3$ . La trace thermique non-physique est alors visible, conduisant à une importante surestimation de la température pariétale dans le calcul *inj\_c*, s'élevant à environ trois fois la température expérimentale. La trace thermique du calcul RANS conduit également à une surestimation, s'élevant quant à elle à environ deux fois la température expérimentale. Il est à noter que les conséquences de cette trace thermique sont limitées par le fait que la température expérimentale dans la région  $|Y/D| > 1,3$  est cinq fois plus faible que sur le plan de symétrie.

Sur les plans  $X/D = 2,3$  et  $X/D = 8$ , le calcul *inj\_c* estime de nouveau correctement la largeur de la région chaude, alors que le calcul RANS continue à sévèrement sous-estimer cette dernière.

Malgré la présence d'une trace thermique non physique au passage de la grille isotherme à la plaque de mesure adiabatique, l'approche WMLES confirme, dans la lignée des travaux de Jouhaud et al. [2007] et Hallez et al. [2010], sa capacité à correctement estimer la distribution de température pariétale dans le sillage du jet, contrairement à un calcul RANS avec un modèle de turbulence à une ou deux équations de transport.

### 9.6.2.5 Analyse spectrale dans le sillage du jet

Un niveau de validation supplémentaire du calcul *inj\_c* est donné ici en comparant les spectres de la vitesse aux données expérimentales.

TABLE 9.6 : Positions des sondes d'extraction du signal de vitesse. En accord avec les notations utilisées,  $y$  désigne la distance à la paroi.

	$X/D$	$Y/D$	$Z/D$	$y/D$
<b>Sonde 1</b>	1	0,8	0,5	0,438
<b>Sonde 2</b>	0,5	0	0,134	0,1

Pour permettre le post-traitement spectral, on rappelle que le calcul *inj\_c* est poursuivi jusqu'à

un temps physique  $T_f = 0,3s$ . Les trois composantes de la vitesse sont extraites à chaque itération par deux sondes placées dans la recirculation en aval du jet et dont les positions sont données dans le tableau 9.6.

Le transitoire initial, estimé à  $T_0 = 4,6 \times 10^{-2}s$ , est supprimé en enlevant les  $1,8 \times 10^5$  premières itérations. Selon la méthode de Welch [1967], le calcul de la densité spectrale de puissance (PSD)  $G$  consiste à découper le signal en blocs, qui peuvent se recouvrir et sur lesquels une fenêtre est généralement appliquée pour annuler le signal sur les bords du bloc. Un recouvrement de 50% et la fenêtre de Hanning sont ici utilisés. Le tableau 9.7 compare les caractéristiques liées à l'acquisition des signaux sur le calcul *inj\_c* et dans l'expérience.

TABLE 9.7 : Caractéristiques de l'acquisition et du calcul des spectres numériques et expérimentaux. Les fréquences sont exprimées sous forme adimensionnée par le nombre de Strouhal  $St = f \frac{D}{U_\infty}$ .

	Fréquence d'acquisition	Durée d'un bloc	Nombre de blocs	Résolution fréquentielle	Strouhal minimum	Strouhal maximum
	$\frac{1}{\Delta_t}$	$\Delta_{bloc}$		$\frac{1}{\Delta_{bloc}}$	$\frac{1}{\Delta_{bloc}} \frac{D}{U_\infty}$	$\frac{1}{2\Delta_t} \frac{D}{U_\infty}$
<i>inj_c</i>	3,9MHz	0,044s	12	23Hz	0,015	1240
<i>expe</i>	10kHz	0,2s	500	5Hz	$3,2 \times 10^{-3}$	3,2

On remarque que les contraintes d'acquisition sur le calcul et sur l'expérience sont très différentes. Ainsi, le calcul permet une fréquence d'acquisition nettement plus élevée que dans l'expérience. Cette fréquence d'acquisition élevée permet de tracer les spectres jusqu'à un nombre de Strouhal plus élevé que dans l'expérience. Par contre, la mesure expérimentale permet une durée d'acquisition beaucoup plus grande que dans le calcul. Le nombre et la durée des blocs sont donc nettement plus grands dans l'expérience. Ainsi, la résolution fréquentielle est meilleure dans l'expérience et les spectres peuvent être tracés jusqu'à une fréquence plus petite comparé au calcul.

Suivant ces remarques, on vérifie sur les spectres expérimentaux que la fréquence du phénomène à capturer, valant ici  $St = 0,14$ , est largement supérieure à la fréquence minimum  $St = 0,015$  que peut résoudre le calcul *inj\_c* et largement inférieure à la fréquence maximale  $St = 3,2$  mesurable expérimentalement. De plus, pour tenir compte de la différence de résolution fréquentielle, les spectres expérimentaux sont interpolés sur des points espacé de 23Hz, ce qui correspond à la résolution fréquentielle du calcul.

La résolution des structures turbulentes est ici limitée par le schéma spatial<sup>4</sup>, qui est d'ordre deux. Pour mettre en évidence le fait qu'un schéma spatial d'ordre deux nécessite un grand nombre de cellules par longueur d'onde pour correctement convecter une structure turbulente, une dernière manipulation est effectuée durant le tracé des spectres.

Avec un schéma spatial centré d'ordre deux, le tableau 3.1 indique que 25 cellules par lon-

4. La plus petite cellule de taille  $\Delta_{min}$  est située sur le plan d'entrée. Dans la recirculation en aval du jet, on a ainsi  $\Delta > \Delta_{min}$  et donc  $CFL < CFL_{min}$ . Le schéma temporel, qui est d'ordre supérieur à deux, n'est donc pas limitant dans cette région.

gueur d'onde sont nécessaires pour convecter une onde avec une erreur de phase de 1%. Ainsi, les structures de longueur d'onde  $\lambda < 25\Delta$  sont considérées comme mal résolues. La fréquence  $f_c$  correspondant à  $\lambda = 25\Delta$  est estimée à partir de la norme de la vitesse locale par  $f_c = \frac{\|\mathbf{U}(x,y,z)\|}{25\Delta}$ . Lors du tracé des spectres, nous supprimons donc les fréquences mal résolues  $f > f_c$  en appliquant un filtre passe bas du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$  sur le signal temporel de vitesse.

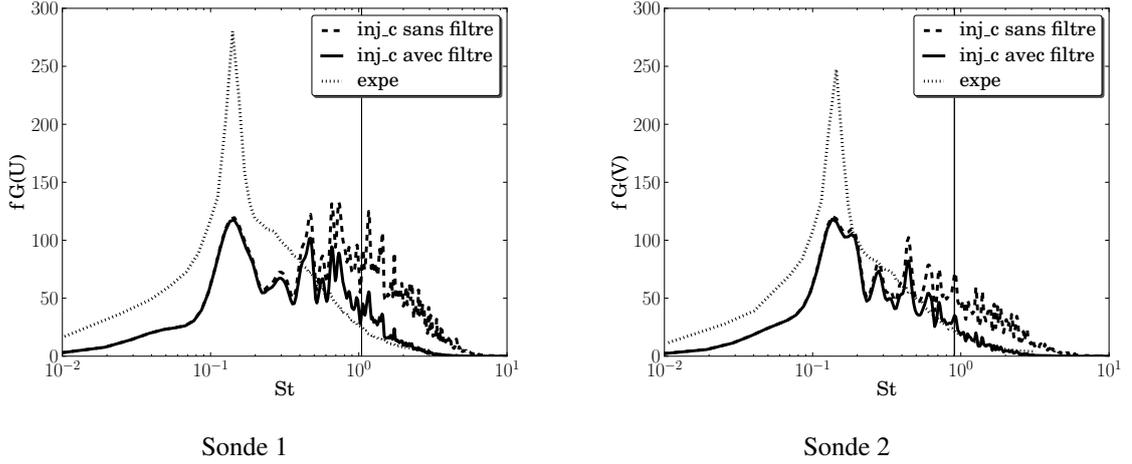


FIGURE 9.21 : PSD avec et sans application d'un filtre passe bas de fréquence de coupure  $f_c$  sur le signal temporel. Les lignes verticales représentent la fréquence de coupure  $f_c$  correspondant à une longueur d'onde de  $25\Delta$ .

La figure 9.21 (a) montre les PSD multipliées par la fréquence, avec et sans filtre. Indépendamment du filtrage, on observe tout d'abord que la fréquence du pic à  $St = 0,14$  est correctement estimée. Cette fréquence correspond aux méandres observés sur la température pariétale instantanée sur la figure 9.14 (b).

L'amplitude du pic est par contre nettement sous-estimée. Pour l'expliquer, on observe pour  $f > f_c$  que les spectres non filtrés montrent une surestimation de l'amplitude de la vitesse. Comme attendu, la méthode numérique semble donc mal estimer les structures de longueur d'onde  $\lambda < 25\Delta$ . Les spectres filtrés confirment cette dernière remarque en montrant un bien meilleur accord avec les données expérimentales dans la région  $f > f_c$ .

Bien que mal résolues, les fréquences  $f > f_c$  sont prises en compte durant le calcul et un biais sur les résultats est donc possible. Pour estimer si ce biais est significatif, on s'intéresse à l'énergie  $E_{f>f_c}$  contenue dans la région  $f > f_c$  par rapport à l'énergie du signal  $E$ . Pour la composante  $U$ , l'énergie du signal vaut  $E_{UU} = \int_{T_0}^{T_f} U(t)^2 dt$  et correspond à l'aire sous la PSD  $\int_0^\infty G_{UU}(f) df$ . L'énergie contenue dans la région  $f > f_c$  est donc l'aire sous la PSD à droite de la ligne verticale placée à  $f = f_c$  sur la figure 9.21, soit :  $E_{UUf>f_c} = \int_{f_c}^\infty G_{UU}(f) df$ . Le tableau 9.8 donne le rapport  $E_{f>f_c}/E$  pour les deux sondes.

Une part non négligeable d'énergie est donc mal résolue au niveau des deux sondes, expliquant

TABLE 9.8 : Part d'énergie mal résolue  $E_{f>f_c}/E$  aux deux sondes.

Sonde	$E_{f>f_c}/E$
1	24%
2	18%

la sous-estimation de l'amplitude du pic à  $St = 0,14$  et confirmant la résolution insuffisante du maillage dans la zone de recirculation en aval du jet. Malgré ce manque de résolution, il est surprenant de constater l'excellente estimation de la fréquence du pic à  $St = 0,14$ . Le fait que la fréquence de ce pic soit un ordre de grandeur plus petit que  $f_c$  explique en partie ce résultat. En plus du rapport  $E_{f>f_c}/E$ , la fréquence du phénomène d'intérêt par rapport à  $f_c$  est donc également un critère à prendre en compte pour juger de la fiabilité des résultats.

En supposant que l'on connaît la fréquence du phénomène d'intérêt, il est donc possible de prévoir la dimension des cellules du maillage en imposant que  $f_c$  soit nettement supérieure à la fréquence d'intérêt.



### Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons mis en place les ingrédients permettant la simulation des écoulements turbulents pariétaux en aérodynamique externe par l'approche WMLES.

Nous avons tout d'abord étudié les modèles de paroi QA et TBL sur un écoulement de canal quasi-incompressible, puis supersonique. L'influence du schéma numérique sur la qualité de la solution WMLES a également été investiguée.

L'approche WMLES est justifiée par le fait que la zone logarithmique peut être simulée indépendamment de la zone tampon et que l'interaction de la région externe sur la région interne de la turbulence pariétale est prépondérante à grand nombre de Reynolds.

Quatre sources d'erreur générées par la WMLES ont été identifiées sur des simulations WMLES de canal plan turbulent quasi-incompressible :

- la première erreur vient de la richesse physique du modèle de paroi, qui peut se montrer insuffisante pour l'écoulement simulé. Une validation hors LES du modèle de paroi permet de mettre en évidence cette erreur ;
- la seconde erreur vient du fait que des conditions limites de nature LES sont directement imposées sur un modèle de paroi RANS. Cette erreur restera modérée pour les modèles de paroi analytiques ainsi que pour les modèles basés sur les équations TBL n'incluant pas les termes convectifs. Par contre, lorsque les termes convectifs sont inclus, une correction est obligatoire. Une correction basée sur une modification de la viscosité de sous-maille a été proposée et validée ;
- la troisième erreur vient de la modélisation de sous-maille. Les modèles de sous-maille classiques ne sont en effet plus valides près de la paroi dans le cadre de la WMLES. Cette erreur

est mise en évidence par le tracé du bilan de quantité de mouvement longitudinal appliqué à l'écoulement moyen. Une correction applicable à n'importe quel modèle de sous-maille a été proposée et validée. Il apparaît qu'avec l'implémentation de la WMLES choisie ici, le modèle de Smagorinsky avec fonction sélective et le modèle WALE peuvent être utilisés sans correction ;

- la quatrième erreur vient de l'interaction entre la WMLES et la méthode numérique. Cette erreur est également mise en évidence par le tracé du bilan de quantité de mouvement, dans lequel les contributions d'origine numérique apparaissent. L'ajout de dissipation artificielle au schéma de discrétisation spatiale participe directement à ces contributions numériques. Par la grande dimension des cellules du maillage près de la paroi, une dissipation artificielle même modérée conduit à une contribution numérique élevée, qui dégrade les résultats et rend la WMLES particulièrement sensible à la dissipation artificielle.

Pour fixer les idées, l'erreur sur le frottement pariétal est restée inférieure à 13% lors de l'étude de ces quatre sources d'erreur sur un canal plan, ce qui est une valeur raisonnable comparée à la littérature sur les méthodes hybrides RANS-LES.

Puis, une validation hors LES d'un modèle de paroi basé sur les équations TBL combinées à un modèle de turbulence à longueur de mélange a été menée. Il apparaît que l'adimensionnement de la distance à la paroi utilisé dans la fonction d'amortissement de Van-Driest est cruciale. L'unité de paroi  $y_3^+$  basé sur la masse volumique et la viscosité locales permet systématiquement une meilleure estimation des flux pariétaux par rapport à l'utilisation du  $y^+$  classique, basé sur les valeurs à la paroi.

Contrairement au modèle QA, le modèle de paroi TBL permet d'utiliser  $y_3^+$  car il présente l'avantage de faire apparaître explicitement le modèle de turbulence. En utilisant le modèle de paroi TBL avec  $y_3^+$ , deux simulations WMLES de canal plan à  $M = 1,5$  et  $M = 3$  ont montré une estimation correcte du frottement et du flux de chaleur pariétal, avec des erreurs maximales respectivement inférieures à 4% et 9%.

Le second point essentiel pour la simulation finale de jet débouchant visée est la mise en place d'une injection de turbulence. L'étude menée dans cette thèse a permis de montrer qu'une méthode basée sur une injection synthétique combinée à un terme de contrôle permet de répondre efficacement à ce besoin.

Nous avons tout d'abord mis en oeuvre cette méthode d'injection sur des calculs WMLES d'une couche limite sans gradient de pression. En se basant uniquement sur l'évolution longitudinale du frottement pariétal, il est tout d'abord apparu difficile de déterminer la distance d'adaptation à partir de laquelle la turbulence injectée est pleinement développée. Pour une détermination plus fiable de la distance d'adaptation, nous avons montré qu'il faut également prendre en compte l'évolution longitudinale du maximum des variances de vitesse.

L'utilisation du terme de contrôle permet systématiquement d'améliorer le comportement de l'injection de turbulence, en réduisant les oscillations du frottement pariétal et du maximum des variances de vitesse autour des valeurs obtenues une fois la couche limite établie. Avec la méthode d'injection la plus efficace testée, une distance d'établissement entre  $6\delta_{in}$  et  $25\delta_{in}$  a été obtenue suivant que le critère repose respectivement sur le frottement pariétal ou les variances de vitesse.

Ces distances d'adaptation correspondent aux valeurs obtenues avec l'approche ZDES mode III.

Si l'on se base uniquement sur le frottement pariétal comme critère, il apparaît étonnamment qu'une méthode d'injection inadaptée peut conduire à une soudaine production de turbulence qui, bien que non physique, peut raccourcir la distance d'adaptation. Ce résultat confirme que les variances de vitesse doivent également être utilisées comme critère.

Enfin, nous avons choisi comme dernier cas d'étude un écoulement de jet chaud débouchant dans un écoulement transverse, précédemment étudié en soufflerie. La géométrie réelle de la maquette en soufflerie est simulée ici, ce qui conduit à une géométrie nettement plus complexe que les deux cas précédents. Ce cas, critique pour l'injection de turbulence à cause de la présence d'un gradient de pression adverse et de fortes contraintes sur le maillage en entrée du domaine, a montré la pertinence de la méthode d'injection sélectionnée.

Nous avons montré que le comportement de la couche limite injectée se montre nettement plus physique avec le terme de contrôle que sans. Sans le terme de contrôle, un décollement de la couche limite et une bulle de recirculation non physiques apparaissent en amont du jet. D'un point de vue aérothermique, le résultat le plus probant est l'obtention, grâce au terme de contrôle, d'une distribution de flux de chaleur pariétal proche de la solution de référence sur l'ensemble de la grille d'éjection en amont du jet. Ce résultat montre que nous sommes donc parvenu à injecter efficacement de la turbulence pariétale dans un calcul WMLES, sous un gradient de pression adverse et en considérant la géométrie réelle de la maquette en soufflerie.

Les résultats dans le sillage du jet sont très satisfaisants sur la vitesse et les variances de vitesse, malgré une dégradation des résultats visible dans la zone de recirculation en aval du jet. En accord avec la littérature, la WMLES estime nettement mieux le champ de température pariétale qu'un calcul RANS avec un modèle de turbulence classique à une ou deux équations de transport. Le tracé de spectres de vitesse montre, de plus, que la fréquence des tourbillons de sillage est précisément estimée.

Néanmoins, deux limites liées à l'approche WMLES et à la méthode numérique utilisée ont été identifiées sur ce cas. La première limite est qu'avec la WMLES, il n'est pas possible de correctement prendre en compte le passage brutal d'une condition isotherme chaude à une condition adiabatique. En effet l'approche WMLES suppose la couche limite à l'équilibre et ce changement de condition limite entraîne une trace thermique non physique.

La seconde limite concerne la méthode numérique d'ordre deux utilisée ici, qui ne permet pas de correctement résoudre des structures turbulentes de longueur d'onde inférieure à environ 25 fois la dimension des cellules. Dans la zone de recirculation, une part significative d'environ 20% de l'énergie du signal de vitesse se trouve contenue dans les longueurs d'onde mal résolues, ce qui explique la dégradation des résultats observée dans cette région.

Au final, le travail effectué ici montre que l'approche WMLES combinée à une injection synthétique avec un terme de contrôle est adaptée à la simulation aérothermique d'écoulements spatiaux à grand nombre de Reynolds en géométrie complexe, tant que le gradient de pression longitudinal ne conduit pas au décollement de la couche limite.

## Perspectives

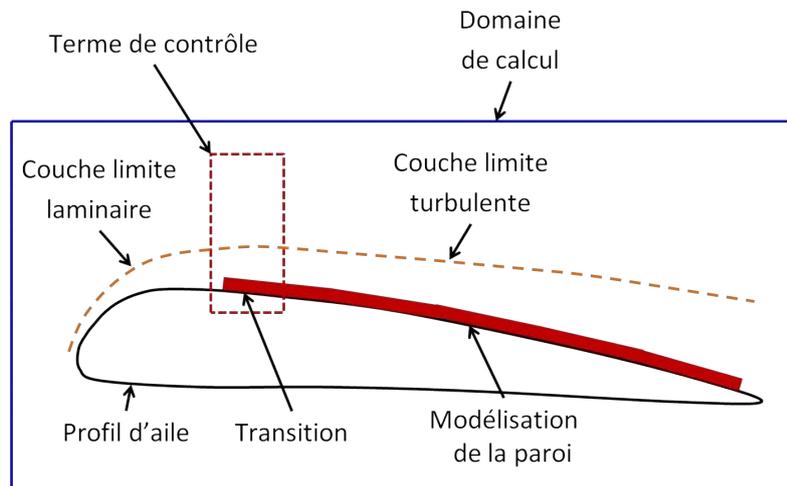


FIGURE 9.22 : Calcul WMLES d'un profil d'aile avec transition laminaire-turbulente. La transition serait déclenchée par un terme de contrôle similaire à Spille-Kohoff and Kaltenbach [2001].

Une poursuite de ce travail est envisageable selon les axes suivants :

Tout d'abord, une augmentation de l'ordre du schéma de discrétisation spatiale permettra a priori de réduire la contribution d'origine numérique au bilan de quantité de mouvement. Cette réduction de la contribution numérique pourra se vérifier avec le tracé du bilan de quantité de mouvement et devrait conduire à des résultats plus fiables.

Avec un schéma spatial d'ordre élevé, il sera alors possible de conduire des simulations WMLES aéroacoustiques, rendant accessible des configurations sur lesquelles une couche limite à grand nombre de Reynolds se développe et qui posent aujourd'hui problème à la LES du fait de leur coût de calcul. C'est par exemple le cas sur un jet moteur double flux installé sur son pylône sous une aile [Huber et al., 2009]. La thèse en cours de Sophie Le Bras vise justement à l'étude numérique de ce type de configuration par l'approche WMLES avec un schéma d'ordre élevé.

Il est également envisageable de simuler des écoulements impliquant une transition laminaire-turbulente dont la position est connue. Par essence, la WMLES n'est pas adaptée à la prévision de la transition laminaire-turbulente. Cependant, si la position de la transition est connue, l'utilisation du terme de contrôle autour de cette position permettrait de la déclencher. Comme montré sur la figure 9.22, l'intérêt serait par exemple de traiter l'ensemble d'un profil d'aile au sein d'un même calcul WMLES, facilitant la prise en compte des phénomènes environnant le profil.

Ensuite, l'extension de la WMLES à des configurations présentant un gradient de pression longitudinal intense permettrait d'augmenter le champ d'application de la WMLES. Deux stratégies sont envisageables : soit le développement d'un modèle de paroi basé sur les équations TBL

incluant les termes convectifs [Wang and Moin, 2002], soit l'utilisation d'équations TBL simplifiées, comme celles utilisées ici, mais combinées à un modèle de turbulence algébrique spécifique [Duprat et al., 2011].

Enfin, l'extension de la WMLES aux machines tournantes nécessiterait une validation hors LES d'un modèle de paroi sur une aube de compresseur ou de turbine. Il faudra vérifier en premier lieu dans quelles mesures la loi logarithmique reste valide sous l'effet des forces centrifuges et de Coriolis.



---

## Bibliographie

---

- F. Abéguilé, Y. Fraigneau, L. Lorang, and C. Tenaud. Générateur de conditions aux limites amont pour les simulations de type LES des écoulements de paroi. In *18e Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007*. Cité p. 165, 173
- L. Albugues. *Analyse expérimentale et numérique d'un jet débouchant dans un écoulement transverse*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 2005. Cité p. 211, 212, 213, 217, 232, 233
- J. Andreopoulos. On the structure of jets in a crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 157 : 163–197, 1985. Cité p. 212, 233
- B. Aupoix and S. Viala. Compressible turbulent boundary layer modelling. In L. D. Kral, E. F. Spina, and C. Arakawa, editors, *Transitional and Turbulent Compressible Flows FED Vol 224*, pages 139–146, Hilton Head Island, August 13-18 1995. ASME. Cité p. 79
- L. H. Back, R. F. Cuffel, and P. F. Massier. Laminarization of a turbulent boundary layer in nozzle flow. *AIAA Journal*, 7(4) :730–733, 1969. Cité p. 75
- E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli. Two-Layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations. *AIAA journal*, 34(6) :1111–1119, 1996. Cité p. 76, 82, 83
- P. Batten, U. Goldberg, and S. Chakravarthy. Interfacing Statistical Turbulence Closures with Large-Eddy Simulation. *AIAA Journal*, 42(3) :485–492, 2004. Cité p. 167, 168, 171
- H. Baya Toda, O. Cabrit, G. Balarac, S. Bose, J. Lee, H. Choi, and F. Nicoud. A subgrid-scale model based on singular values for LES in complex geometries. *Proceedings of the Summer Program (Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, Stanford, CA, 2010)*, pages 193–202, 2010. Cité p. 29, 30

- Y. Benarafa and O. Cioni. Temperature wall modelling for large-eddy simulation in a heated turbulent plane channel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 :4360–4370, 2007. Cité p. 88
- S. Bocquet, P. Sagaut, and J-C. Jouhaud. A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities. *Physics of Fluids*, 24 :065103, 2012. Cité p. 10
- P. Bradshaw, D.H. Ferriss, and N.P. Atwell. Calculations of Boundary-Layer Development Using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 28 :593–616, 1967. Cité p. 166
- M. Breuer, B. Kniazev, and M. Abel. Development of wall models for LES of separated flows using statistical evaluations. *Computers and Fluids*, 36 :817–837, 2007. Cité p. 80, 92
- W. Cabot and P. Moin. Approximate Wall Boundary Conditions in the Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63(1-4) :269–291, 2000. Cité p. 83, 88, 91
- O. Cabrit. *Modélisation des flux pariétaux sur les tuyères des moteurs à propergol solide*. PhD thesis, Université de Montpellier, 2009. Cité p. 75, 271
- O. Cabrit and F. Nicoud. Direct simulations for wall modeling of multicomponent reacting compressible turbulent flows. *Physics of Fluids*, 21 :055108, 2009. Cité p. 91
- L. Cambier and M. Gazaix. elsA : an efficient object-oriented solution to CFD complexity. In *40th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno*, pages 14–17. AIAA 2002-0108, January 2002. Cité p. 46
- T. Cebeci and A.M.O. Smith. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, volume 15 of *Applied Mathematics and Mechanics*. Academic Press, 1974. Cité p. 79, 80, 81
- D. R. Chapman. Computational Aerodynamics Development and Outlook. *AIAA journal*, 17(12) : 1293–1313, 1979. Cité p. 17, 62, 63, 64, 65
- A. Chatelain. *Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents avec transferts de chaleur*. PhD thesis, CEA Grenoble, 2004. Cité p. 31, 77, 88, 218
- H. Choi and P. Moin. Grid-point requirements for large eddy simulation : Chapman's estimates revisited. *Physics of Fluids*, 24 :011702, 2012. Cité p. 62, 63, 64, 65
- D. Chung and D. I. Pullin. Large-eddy simulation and wall modelling of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 631 :281–309, 2009. Cité p. 71
- G. N. Coleman, J. Kim, and R. D. Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 305 :159–183, 1995. Cité p. 74, 76, 96, 183
- D. E. Coles. The Law of the Wake in the Turbulent boundary Layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1 :191–226, 1956. Cité p. 38

- Y. Colin. *Simulation numérique de la distorsion générée par une entrée d'air de moteur civil par vent de travers*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2007. Cité p. 46, 49, 54, 55
- J. Cousteix. *Turbulence et Couche limite*. Cepadues, 1989. Cité p. 65, 168, 171, 192, 193
- J. Cousteix and R. Houdeville. Méthode intégrale de calcul d'une couche limite turbulente sur une paroi courbée longitudinalement. *La Recherche Aéronautique*, 1 :1–13, 1977. Cité p. 79
- F. Dabireau. *Etude des transferts de chaleur aux parois dans les moteurs fusées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002. Cité p. 76, 271
- J. Dandois, E. Garnier, and P. Sagaut. Unsteady simulation of a synthetic jet in a crossflow. *AIAA Journal*, 44 (2) :225–238, 2006. Cité p. 30
- J. Dandois, E. Garnier, and P. Sagaut. Numerical simulation of active separation control by synthetic jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 574(1) :25–58, 2007. Cité p. 30
- S. Deck. Zonal-detached-eddy simulation of the flow around a high-lift configuration. *AIAA Journal*, 43(11) :2372–2384, 2005. Cité p. 174
- S. Deck, P. E. Weiss, M. Pamiès, and E. Garnier. Zonal Detached Eddy Simulation of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer. *Computers & Fluids*, 48(1) :1–15, 2011. Cité p. 176, 177
- A. Devesa and F. Nicoud. Assessment of a Two-Layer Wall Model for Large Eddy Simulations of Highly Non-isothermal Turbulent Flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006. Cité p. 77, 91
- G. V. Diurno, E. Balaras, and U. Piomelli. Wall-layer models for LES of separated flows. *Modern Simulation Strategies for Turbulent Flows*. Philadelphia, RT Edwards, pages 207–222, 2001. Cité p. 80
- F. Ducros, V. Ferrand, F. Nicoud, C. Weber, D. Darracq, C. Gacherieu, and T. Poinso. Large-Eddy Simulation of the Shock/Turbulence Interaction. *Journal of Computational Physics*, 152 : 517–549, 1999. Cité p. 52, 53
- B. Duda. *Numerical Investigations on a Hot Jet in Cross Flow Using Scale-Resolving Simulations*. PhD thesis, 2012. Cité p. 25, 212, 213, 217, 233
- C. Duprat, G. Balarac, O. Métais, P. M. Congedo, and O. Brugière. A wall-layer model for large-eddy simulations of turbulent flows with/out pressure gradient. *Physics of Fluids*, 23 :015101, 2011. Cité p. 80, 91, 92, 251
- A. Fosso Pouange. *Schémas Volumes Finis précis : application à l'aéroacoustique numérique de jets subsoniques*. PhD thesis, Sciences mécaniques, acoustique et électronique de Paris, 2011. Cité p. 48, 54, 59

- J. Fröhlich and D. von Terzi. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 44 :349–377, 2008. Cité p. 65, 66
- K. Fukagata, K. Iwamoto, and N. Kasagi. Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 14 :L73, 2002. Cité p. 143
- F. Gand, S. Deck, V. Brunet, and P. Sagaut. Flow dynamics past a simplified wing-body junction. *Physics of Fluids*, 22 :115111, 2010. Cité p. 30
- E. Garnier, N. Adams, and P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer, 2009. Cité p. 20, 26, 27, 31, 42
- W. K. George. Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows? *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (1852) :789–806, 2007. Cité p. 75
- J. Georgiadis, Nicholas, Donald P. Rizzetta, and Christer Fureby. Large Eddy Simulation : Current Capabilities, Recommended Practises, and Future Research. *AIAA*, 2009. Cité p. 88
- M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model. *Physics of Fluids A*, 3(7) :1760–1765, 1991. Cité p. 30
- N. Gourdain. *Simulation numérique des phénomènes de décollement tournant dans les compresseurs axiaux*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005. Cité p. 23
- N. Gourdain. *High-performance computing of gas turbine flows : current and future trends*. Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique UMR CNRS 5509 ECL, UCB Lyon 1, INSA, 2012. Cité p. 53
- N. Gourdain, L. Gicquel, M. Montagnac, O. Vermorel, M. Gazaix, G. Staffelbach, M. Garcia, and T. Boussuge, J.-F. and Poinso. High Performance Parallel Computing of Flows in Complex Geometries - Part 1 : Methods. *Computational Science & Discovery*, 2(1) :015003, 2009. Cité p. 46
- G. Grotzbach. Direct Numerical and Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows. In *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. edited by N. P. Cheremisinoff (Gulf, West Orange, NJ, 1987), Chap. 34, pp. 1337-1391, 1987. Cité p. 83
- Y. Hallez, J.-C. Jouhaud, and T. Poinso. On the relative impact of subgrid-scale modelling and conjugate heat transfer in LES of hot jets in cross-flow over cold plates. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 00 :1–24, 2010. Cité p. 174, 213, 218, 242
- F. Hamba. Analysis of filtered Navier-Stokes equation for hybrid RANS/LES simulation. *Physics of Fluids*, 23 :015108, 2011. Cité p. 68
- S. Hoyas and J. Jiménez. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Physics of Fluids*, 18 :011702, 2006. Cité p. 6, 39, 96, 145, 147, 148, 150, 151, 152, 154, 188, 189, 273, 274

- P. G. Huang and G. N. Coleman. Van-Driest Transformation and Compressible Wall-Bounded Flows. *AIAA Journal*, 32(10) :2110–2113, 1994. Cité p. 43, 74
- P. G. Huang, G. N. Coleman, and P. Bradshaw. Compressible turbulent channel flows : DNS results and modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 305 :185–218, 1995. Cité p. 20
- J. Huber, M. Omais, A. Vuillemin, and R. Davy. Characterization of installation effects for hbpr engine part iv : Assessment of jet acoustics. *AIAA Paper*, 3371 :1–29, 2009. Cité p. 250
- N. Hutchins and I. Marusic. Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 579 :1–28, 2007. Cité p. 40
- A. Jameson, R. F. Schmidt, and E. Turkel. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping. Technical report, 1981. Cité p. 51
- Antony Jameson and Kui Ou. 50 years of transonic aircraft design. *Progress in Aerospace Sciences*, 47(5) :308–318, 2011. Cité p. 7
- N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence, and R. Prosser. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 :585–593, 2006. Cité p. 169, 171, 176, 177
- N. Jarrin, P. Prosser, J. Uribe, S. Benhamadouche, and D. Laurence. Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using Synthetic-Eddy Method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30 :435–442, 2009. Cité p. 167, 168
- J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285 :69–94, 1995. Cité p. 163
- J. Jiménez. Cascades in Wall-Bounded Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44 :27–45, 2011. Cité p. 39, 40, 41, 162, 166
- W. P. Jones and B. Launder. Some properties of sink-flow turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 56(02) :337–351, 1972. Cité p. 75
- J-C. Jouhaud, L. Y. M. Gicquel, and B. Enaux. Large-Eddy Simulation Modeling for Aerothermal Predictions Behind a Jet in Crossflow. *AIAA journal*, 45(10) :2438–2447, 2007. Cité p. 25, 213, 242
- B. A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24 :1541–1544, 1981. Cité p. 74, 76
- G. Kalitzin and G. Medic. Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics*, 204 :265–291, 2005. Cité p. 88, 90
- N. Kasagi, Y. Tomita, and A. Kuroda. DNS of passive scalar field in a turbulent channel flow. *Journal of Heat Transfer*, 114 :598–606, 1992. Cité p. 31

- S. Kawai and J. Larsson. Wall modeling in large-eddy simulation : predicting accurate skin friction at very high reynolds number. In *Proceeding of 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting. AIAA*, 2011. Cité p. 53, 84, 89, 90, 91, 92, 174
- W. Kays. Turbulent Prandtl number-Where are we ? *ASME Transactions Journal of Heat Transfer*, 116 :284–295, 1994. Cité p. 24, 81
- W. Kays, M. E. Crawford, and A. Weigand. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, 2004. Cité p. 76, 79, 80
- A. Keating and U. Piomelli. Synthetic generation of inflow velocities for large-eddy simulation. In *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibits, 28 Jun - 1 Jul, 2004*. Cité p. 171
- A. Keating and U. Piomelli. A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation. *Journal of Turbulence*, 7(12) :1–24, 2006. Cité p. 68, 191
- A. Keating, U. Piomelli, and E. Balaras. A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 16(12) :4696–4712, 2004. Cité p. 162, 165, 167, 168, 170
- A. Keating, G. De Prisco, and U. Piomelli. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 :777–788, 2006. Cité p. 171, 210, 231
- J. Kim and P. Moin. Transport of passive scalars in a turbulent channel flow. In *Turbulent Shear Flows 6*, pages 85–96. Springer, 1989. Cité p. 31
- J. Kleissl, V. Kumar, C. Meneveau, and M. B. Parlange. Numerical study of dynamic Smagorinsky models in large-eddy simulation of the atmospheric boundary layer : Validation in stable and unstable conditions. *Water Resources Research*, 42 :W06D10, 2006. Cité p. 30
- L. S. G. Kovaznay. Turbulence in supersonic flow. *Journal of Aeronautical Engineering*, 20 : 657–74, 1953. Cité p. 42
- A. G. Kravchenko and P. Moin. On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulent Flows. *Journal of Computational Physics*, 131 :310–322, 1997. Cité p. 30, 48
- O. Labbé, P. Sagaut, and E. Montreuil. Large-eddy simulation of heat transfer over a backward-facing step. *Numerical Heat Transfer : Part A : Applications*, 42(1-2) :73–90, 2002. Cité p. 30
- R. Laraufie. *Simulations avancées de turbulence pariétale à haut nombre de Reynolds sur des géométries curvilignes par une approche hybride RANS/LES*. PhD thesis, SMAE, 2012. Cité p. 165, 166
- R. Laraufie, S. Deck, and P. Sagaut. A dynamic forcing method for unsteady turbulent inflow conditions. *Journal of Computational Physics*, 230 :8647–8663, 2011. Cité p. 174, 176, 177, 179, 183, 190, 208

- 
- L. Larchevêque, P. Sagaut, I. Mary, O. Labbé, and P. Comte. Large-eddy simulation of a compressible flow past a deep cavity. *Physics of Fluids*, 15 (1) :193–210, 2003. Cité p. 30
- L. Larchevêque, P. Sagaut, T.H. Thiên-Hiêp Lê, and P. Comte. Large-Eddy Simulation of a compressible flow in three-dimensional open cavity at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 516 :265–301, 2004. Cité p. 30
- L. Larchevêque, P. Sagaut, and O. Labbé. Large-eddy simulation of a subsonic cavity flow including asymmetric three-dimensional effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 577 :105–126, 2007. Cité p. 30
- S. K. Lele. Compressibility effects on turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26 :211–54, 1994. Cité p. 42
- E. Lenormand, P. Sagaut, and L. Ta Phuoc. Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel at moderate Reynolds number. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32 :369–406, 2000. Cité p. 30
- V. Levasseur, P. Sagaut, and M. Mallet. Subgrid models for large-eddy simulation using unstructured grids in a stabilized finite element framework. *Journal of Turbulence*, 7 :N28, 2006. Cité p. 30
- D. K. Lilly. A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Model. *Physics of Fluids A*, 4(3) :633–635, 1992. Cité p. 30
- M.-S. Liou. A Sequel to AUSM : AUSM+. *Journal of Computational Physics*, 129 :364–382, 1996. Cité p. 178
- A. Lozano-Durán, O. Flores, and J. Jiménez. The three-dimensional structure of momentum transfer in turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 694 :100–130, 2012. Cité p. 41, 162
- T. S. Lund, X. Wu, and Squires K.D. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, 140 :233–258, 1998. Cité p. 164, 165
- S. Lyons, T. Hanratty, and J. McLaughlin. DNS of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *International journal of heat and mass transfer*, 34(4) :1149–1161, 1991. Cité p. 31
- M. Manhart, N. Peller, and C. Brun. Near-wall scaling for turbulent boundary layers with adverse pressure gradient. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22(3-4) :243–260, 2008. Cité p. 91
- I. Marusic and N. Hutchins. Study of the Log-Layer Structure in Wall Turbulence Over a Very Large Range of Reynolds Number. *Flow, Turbulence and Combustion*, 81 :115–130, 2008. Cité p. 40
- I. Marusic, G. J. Kunkel, and F. Porté-Agel. Experimental study of wall boundary conditions for large-eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 446 :309–320, 2001. Cité p. 83
-

- I. Marusic, R. Mathis, and N. Hutchins. Predictive Model for Wall-Bounded Turbulent Flow. *Science*, 329(5988) :193–196, 2010a. Cité p. 72
- I. Marusic, B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits, and K. R. Sreenivasan. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues. *Physics of Fluids*, 22 :065103, 2010b. Cité p. 38, 39, 41, 75, 166
- I. Mary and P. Sagaut. Large Eddy Simulation of Flow around an Airfoil Near Stall. *AIAA journal*, 40(6) :1139–1145, 2002. Cité p. 52
- P. J. Mason and D. J. Thomson. Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 242 :51–78, 1992. Cité p. 86, 191
- R. Mathis, N. Hutchins, and I. Marusic. Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 628 :311–337, 2009. Cité p. 41
- F. R. Menter and Y. Egorov. The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions, Part 1 : 'Theory and Model Description'. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85 : 113–128, 2010. Cité p. 213
- D. Monfort, S. Benhamadouche, and P. Sagaut. Meshless approach for wall treatment in Large-Eddy Simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13) :881–889, 2010. Cité p. 76, 82, 83
- E. Montreuil, O. Labbé, and P. Sagaut. Assessment of non-Fickian subgrid-scale models for passive scalar in a channel. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 49 (1) :75–98, 2005. Cité p. 30
- B. Morgan, J. Larsson, S. Kawai, and S. Lele. Improving low-frequency characteristics of recycling/rescaling inflow turbulence generation. *AIAA Journal*, 49(3) :582–597, 2011. Cité p. 165, 173
- Y. Na and P. Moin. Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 374 :379–405, 1998. Cité p. 172
- T. B. Nickels. Inner scaling for wall-bounded flows subject to large pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 521 :217–239, 2004. Cité p. 75
- F. Nicoud. Numerical study of a channel flow with variable properties. *Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs*, pages 289–309, 1998. Cité p. 31, 43, 267, 268
- F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62(3) :183–200, 1999. Cité p. 28, 29, 142
- F. Nicoud and T. Poinso. Dns of a channel flow with variable properties. In *Turbulence and Shear Flow Phenomena*, volume 1, page 697, 1999. Cité p. 91

- F. Nicoud, J. S. Baggett, P. Moin, and W. Cabot. Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation. *Physics of Fluids*, 13 :2968–2984, 2001. Cité p. 72
- M. Pamiès, P.-E. Weiss, E. Garnier, S. Deck, and P. Sagaut. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 21 :045103, 2009. Cité p. 165, 167, 168, 169, 173, 176, 177, 185
- C. Pantano, D. I. Pullin, P. E. Dimotakis, and G. Matheou. LES approach for high Reynolds number wall-bounded flows with application to turbulent channel flow. *Journal of Computational Physics*, 227 :9271–9291, 2008. Cité p. 71
- A. E. Perry, I. Marusic, and M. B. Jones. On the streamwise evolution of turbulent boundary layers in arbitrary pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 461 :61–91, 2002. Cité p. 166, 173
- U. Piomelli and E. Balaras. The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24 :538–550, 2003. Cité p. 68
- U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin, and J. Kim. New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall bounded flows. *Physics of Fluids*, 1 :1061–1068, 1989. Cité p. 82
- T. J. Poinso and S. K. Lele. Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows. *Journal of computational physics*, 101(1) :104–129, 1992. Cité p. 56, 58
- S. Pope. Ten questions concerning the large eddy-simulation of turbulent flows. *New Journal of Physics*, 6(1) :35, 2004. Cité p. 31
- P. Quéméré and P. Sagaut. Zonal multi-domain RANS/LES simulations of turbulent flows. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 40 (7) :903–925, 2002. Cité p. 30
- P. Quéméré, P. Sagaut, and V. Couailler. A new multi-domain/multi-resolution method for large-eddy simulation. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 36(4) :391–416, 2001. Cité p. 30
- S. Rajagopalan and R. A. Antonia. Some properties of the large structure in a fully developed turbulent duct flow. *Physics of Fluids*, 22 :614–622, 1979. Cité p. 82
- H. Reichardt. Complete representation of the turbulent velocity distribution in smooth pipes. *Z. Angew. Math. Mech*, 31 :208, 1951. Cité p. 74, 186
- S. K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 :601–639, 1991. Cité p. 41
- Benedikt Roidl, Matthias Meinke, and Wolfgang Schröder. Numerical investigation of shock wave boundary-layer interaction using a zonal rans-les ansatz. In *High Performance Computing in Science and Engineering'10*, pages 369–383. Springer, 2011. Cité p. 171

- P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows, third edition*. Springer, 2006. Cité p. 30
- P. Sagaut, E. Montreuil, O. Labbé, and C. Cambon. Analysis of the near-wall behaviour of some self-adaptive subgrid-scale models in finite-differenced simulations of channel flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40 (10) :1275–1302, 2002. Cité p. 30
- P. Sagaut, E. Garnier, E. Tromeur, L. Larchevêque, and E. Labourasse. Turbulent Inflow Conditions for Large-Eddy Simulation of Compressible Wall-Bounded Flows. *AIAA journal*, 42(3) : 469–477, 2004. Cité p. 164
- M. Samimy, K. S. Breuer, L. G. Leal, and P. H. Steen. *A Gallery of Fluid Motion*. Cambridge University Press, 2004. Cité p. 17
- N. D. Sandham, Y. F. Yao, and A. A. Lawal. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24 :584–595, 2003. Cité p. 167, 168, 185, 208
- U. Schumann. Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *Journal of computational physics*, 18(4) :376–404, 1975. Cité p. 65, 72, 83, 86
- M. Shur, P. R. Spalart, M. Strelets, and A. Travin. A Rapid and Accurate Switch from RANS to LES in Boundary Layers Using an Overlap Region. *Flow, Turbulence and Combustion*, 86 : 179–206, 2011. Cité p. 164, 173, 176, 177
- F. Simon, S. Deck, P. Guillen, and P. Sagaut. Reynolds-average Navier-Stokes/Large-eddy simulations of supersonic base flow. *AIAA Journal*, 44 (11) :2578–2590, 2006. Cité p. 30
- J. Smagorinsky. General Circulation Experiments With the Primitive Equations. I. The Basic Experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3) :99–164, 1963. Cité p. 28, 29
- B. R. Smith. A near wall model for the k- $\epsilon$  two equation turbulence model. In *AIAA, Fluid Dynamics Conference, 25 th, Colorado Springs, CO*, 1994. Cité p. 213
- A. J. Smits, B. J. McKeon, and I. Marusic. High Reynolds Number Wall Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43 :353–375, 2011. Cité p. 38, 39, 41, 75
- P. R. Spalart. Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to  $Re=1410$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 187 :61–98, 1988. Cité p. 169, 192, 195, 198, 202
- P. R. Spalart. Turbulence. are we getting smarter. In *Fluid Dynamics Award Lecture, 36th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, San Francisco, CA*, pages 5–8, 2006. Cité p. 75
- P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 30 th, Reno, NV*, page 1992, 1992. Cité p. 24

- 
- P. R. Spalart, W. H. Jou, M. Strelets, and S. R. Allmaras. *Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach*. Advances in DNS/LES. Greyden Press, Columbus, 1997. Cité p. 67, 174
- DB Spalding. A single formula for the “law of the wall”. *Journal of Applied Mechanics*, 28 :455, 1961. Cité p. 74
- A. Spille-Kohoff and H.-J Kaltenbach. Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile. In *Third AFSOR Conference on DNS and LES*, 2001. Cité p. 162, 169, 173, 179, 190, 191, 208, 226, 250
- G. R. Tabor and M. H. Baba-Ahmadi. Inlet conditions for large eddy simulation : A review. *Computers and Fluids*, 39 :553–567, 2010. Cité p. 167
- L. Temmerman and M. Leschziner. Investigation of wall function approximations and subgrid scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24 :157–180, 2003. Cité p. 72
- L. Temmerman, M. Hadziabdic, M. Leschziner, and K. Hanjalic. A hybrid two-layer URANS LES approach for large eddy simulation at high Reynolds numbers. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 26 :173–190, 2005. Cité p. 68, 82
- J. A. Templeton, M. Wang, and P. Moin. An efficient wall model for large-eddy simulation based on optimal control theory. *Physics of Fluids*, 18 :025101, 2006. Cité p. 72
- J. A. Templeton, M. Wang, and P. Moin. A predictive wall model for large-eddy simulation based on optimal control techniques. *Physics of Fluids*, 20 :065104, 2008. Cité p. 72
- K. W. Thompson. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. *Journal of Computational Physics*, 68 :1–24, 1987. Cité p. 58
- A. A. Townsend. Equilibrium layers and wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 11 :97–120, 1961. Cité p. 41
- A. A. Townsend. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., second edition, 1976. Cité p. 166
- E. Tromeur, E. Garnier, P. Sagaut, and C. Basdevant. Large-eddy simulation of aero-optical effects in a turbulent boundary layer. *Journal of Turbulence*, 5 (4), 2003. Cité p. 30
- P. G. Tucker. Computation of unsteady turbomachinery flows : Part 2-LES and hybrids. *Progress in Aerospace Sciences*, 47 :546–569, 2011. Cité p. 25
- E.R. VanDriest. Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids. *Journal of Aeronautical Science*, 18 :145–160, 1951. Cité p. 43, 74
- S. Viala. *Effets de la compressibilité et d’un gradient de pression négatif sur la couche limite turbulente*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 1995. Cité p. 79
-

- M. Wang and P. Moin. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of Fluids*, 14 :2043–2051, 2002. Cité p. 83, 84, 85, 91, 92, 251
- D. Warnack and H. H. Fernholz. The effects of a favourable pressure gradient and of Reynolds number on an incompressible axisymmetric turbulent boundary layer. Part. 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 359 :357–381, 1998. Cité p. 172
- P. D. Welch. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra : A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Au-15 :70–73, 1967. Cité p. 243
- C. Wilcox, D. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., La Cañada, CA, 2nd edition, 2006. Cité p. 166, 173, 177

# **Annexes**

---

---

---

## Compléments et synthèse sur la validation hors LES du modèle TBL sur une grande plage de régimes compressibles

---

Une validation hors LES (voir le paragraphe 4.3.2.6) du modèle TBL a été menée dans le chapitre 5 sur les DNS de Coleman et al. , c'est à dire un écoulement où l'écart de température est créé par le travail de forces visqueuses dû à un nombre de Mach élevé (régime compressible III). Or certains écoulements aérothermiques à faible nombre de Mach peuvent également présenter des écarts de température importants, par exemple à cause d'une arrivée d'air chaud ou à la présence d'une paroi maintenue à une température différente de celle de l'écoulement (régime compressible IV, voir le tableau 1.1).

Après une validation du modèle TBL sur un écoulement au régime compressible IV, une synthèse reprenant l'ensemble des résultats sur la validation du modèle TBL sera donnée.

### **A.1 Validation hors LES du modèle TBL à faible nombre de Mach et grand écart de température**

La validité du modèle TBL pour les écoulements à faible nombre de Mach et grand écart de température reste à démontrer. La DNS de canal plan bi-périodique à  $Re_\tau = 200$  de Nicoud [1998] est choisie comme donnée de référence pour une validation hors LES du modèle de paroi TBL. Cette simulation fait en effet l'hypothèse d'un nombre de Mach proche de zéro et un rapport de température égal à deux est imposé entre les parois haute et basse. Les principales caractéristiques de cet écoulement sont données dans le tableau A.1.

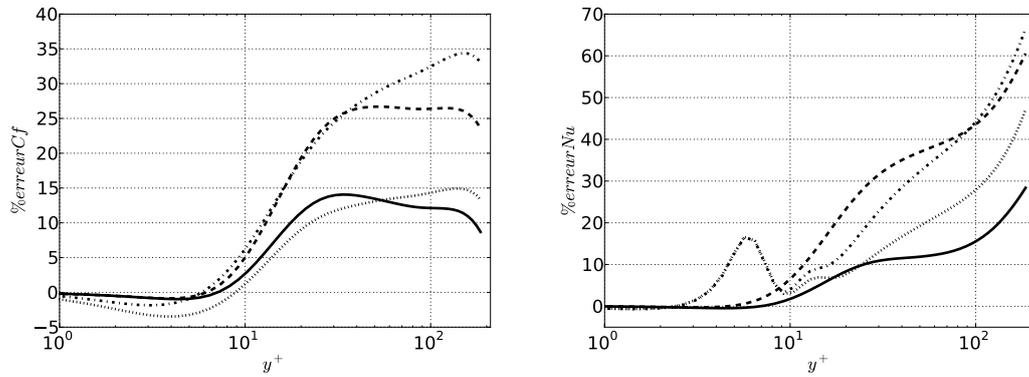


FIGURE A.1 : Evaluation de différentes modélisations de paroi sur la DNS de Nicoud. Erreur relative sur le frottement pariétal  $C_f$  (gauche) : (—) modèle TBL  $y_3^+$ , (- -) modèle TBL  $y^+$ , (- · -) modèle QA, (· ·) 'loi de Van-Driest 1951' (voir le paragraphe 5.2 V.B.). Erreur relative sur le flux de chaleur pariétal  $Nu$  (droite) : (—) modèle TBL  $y_3^+$ , (- -) modèle TBL  $y^+$ , (- · -) modèle QA, (· ·) loi de Kader avec  $u_\tau$  tiré de la DNS.

TABLE A.1 : Régime de l'écoulement au dessus de la paroi froide de la DNS de Nicoud [1998].

$Re_\tau$	202
$Cf_b$	$10^{-2}$
$Nu_b$	18,5
$Re_b = \frac{\rho_b u_b \delta}{\mu_b}$	1790
$M = \frac{u_b}{\sqrt{\gamma RT_b}}$	$10^{-2101}$
$T_b/ T_b - T_{pf} $	3,2
$Ec$	$1,3 \times 10^{-4}$
<b>Régime compressible</b>	<b>IV</b>

Seule la paroi basse, qui est à la température la plus froide  $T_{pf}$ , est considérée. Les équations TBL sont résolues en supposant un nombre de Mach égal à  $10^{-2}$  et 20 points de Gauss sont utilisés, ce qui est suffisant pour le nombre de Reynolds  $Re_\tau = 200$  de cet écoulement (voir le paragraphe 5.2 Appendix A.1.). Par cohérence avec les résultats du chapitre précédent, le modèle TBL avec l'adimensionnement classique  $y^+$  et le modèle QA sont également évalués.

La figure A.1 montre les erreurs commises sur les flux pariétaux par ces trois modèles de paroi. Concernant le frottement pariétal, c'est la zone de plateau délimitée approximativement par  $40 < y^+ < 100$  qui nous intéresse. Ce plateau correspond en effet à la zone logarithmique, c'est-à-dire la zone où le modèle de paroi serait utilisé en pratique. On observe que le modèle TBL  $y_3^+$  permet une estimation correcte du frottement pariétal avec une erreur maximale de 15% au début de la zone logarithmique. Comme déjà remarqué dans le paragraphe 5.2 V.B., la 'loi de Van-Driest 1951' présente un comportement très proche du modèle TBL  $y_3^+$ . A l'inverse, le modèle TBL  $y^+$  et le modèle QA montrent des erreurs nettement supérieures, avec des valeurs entre 25% et 35% dans la zone logarithmique.

Concernant le flux de chaleur pariétal, on observe pour tous les modèles de paroi une nette augmentation de l'erreur pour  $y^+ > 100$ , qui peut être attribuée à l'influence de la paroi supérieure sur laquelle une température chaude est imposée. Pour  $y^+ < 100$ , l'erreur pour le modèle TBL  $y_3^+$  reste inférieure à 15% alors qu'elle atteint 40% pour le modèle TBL  $y^+$  et le modèle QA. La loi de Kader calculée en utilisant le frottement pariétal de la DNS montre un comportement similaire au modèle TBL  $y_3^+$  mais affiche des erreurs supérieures qui atteignent 30%.

## A.2 Synthèse des validations hors LES du modèle de paroi TBL

Après une validation hors LES des modèles de paroi TBL et QA aux régimes compressibles III et IV, nous proposons maintenant de synthétiser les erreurs commises par ces différents modèles sur le frottement pariétal et le flux de chaleur pariétal. Pour les modèles TBL  $y_3^+$ ,  $y^+$  et QA, nous représentons ces erreurs dans un plan défini par le Mach et l'écart de température  $(M, \frac{T_b}{T_p})$ . La validation hors LES permet d'obtenir ces erreurs en fonction de la distance à la paroi  $y$ . On se fixe ici au début de la zone logarithmique en calculant ces erreurs à  $y^+ = 100$ , ce qui est représentatif d'une utilisation réelle de l'approche WMLES. Puisqu'un cadre général pour tous les régimes compressibles est nécessaire, ces erreurs sont exprimées suivant le jeu de variable  $(C_f, Nu)$ . Le jeu de variables  $(M_\tau, Bq)$  aurait également pu être choisi, ce qui donnerait des erreurs différentes mais amèneraient aux mêmes conclusions.

Les figures A.2 et A.3 montrent les erreurs commises respectivement sur le frottement et le flux de chaleur pariétal. Contrairement aux modèles TBL  $y^+$  et QA, le modèle TBL  $y_3^+$  estime les deux flux pariétaux avec une erreur inférieure à 17% pour tous les régimes compressibles considérés. Il est surprenant de voir sur la figure A.3 que le modèle QA retourne une faible erreur sur  $Nu$  pour la DNS de Coleman et al. à  $M = 3$ . Ceci est en réalité dû à une compensation d'erreur entre une mauvaise estimation du frottement pariétal par la loi logarithmique combinée à la loi de Kader qui n'est pas valide pour ce nombre de Mach élevé. Pour éviter de fausses conclusions à

---

101. Il s'agit du nombre de Mach imposé pour la validation hors LES du modèle de paroi et non celui de la DNS.

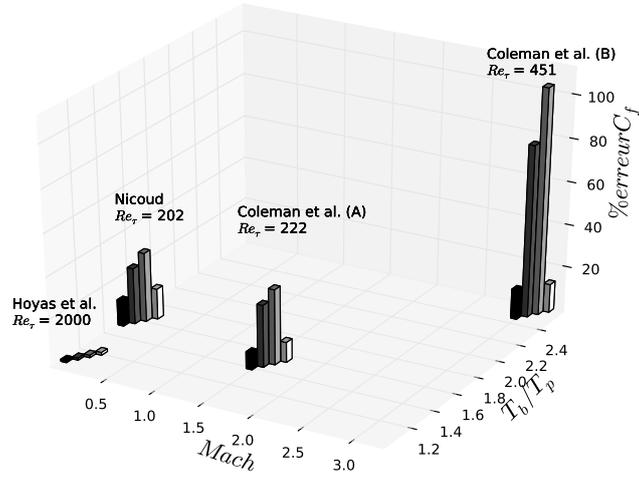


FIGURE A.2 : Erreur sur le frottement pariétal à  $y^+ = 100$ . De gauche à droite pour chaque régime d'écoulement : (■) : modèle TBL  $y_3^+$ , (■) : modèle TBL  $y^+$ , (■) : modèle QA, (□) : loi de Van-Driest 1951'. Pour les DNS de Coleman et al. , (A) désigne le cas à  $M = 1,5$  et (B) le cas à  $M = 3$ .

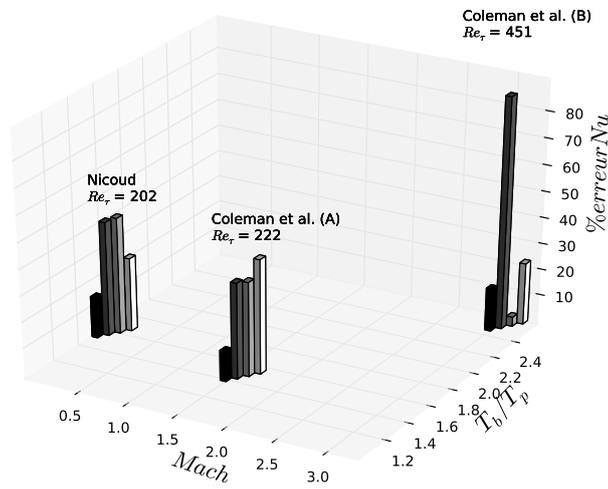


FIGURE A.3 : Erreur sur le flux de chaleur pariétal à  $y^+ = 100$ . De gauche à droite pour chaque régime d'écoulement : (■) : modèle TBL  $y_3^+$ , (■) : modèle TBL  $y^+$ , (■) : modèle QA, (□) : loi de Kader avec  $u_\tau$  tiré de la DNS.

---

cause d'une telle compensation d'erreur, il est donc important de valider un modèle de paroi sur plusieurs régimes compressibles.

Pour supprimer le surcoût de calcul induit par la résolution du modèle TBL (voir le paragraphe 5.2 Appendix A.2.), il serait intéressant de répéter cette validation hors LES sur un modèle de paroi analytique. Ce modèle analytique pourrait être inspiré des modèles de paroi analytiques développés par Dabireau [2002] et Cabrit [2009], respectivement validés hors LES à grand nombre de Mach et à faible nombre de Mach.

---

---

---

## Etude détaillée de la correction de $\mu_{sgs1}$

---

Dans le paragraphe 5.2 IV.C., une correction sur la viscosité de sous-maille dans les cellules adjacentes à la paroi a été proposée. Cette méthode s'est montrée efficace pour corriger la viscosité de sous-maille du modèle de Smagorinsky, permettant ainsi d'obtenir un profil de vitesse et un frottement pariétal en très bon accord avec la DNS de référence de Hoyas and Jiménez [2006]. Cependant elle n'a été appliquée que sur un seul modèle de sous-maille et sur un seul maillage. Puisque cette méthode de correction est de première importance pour s'assurer d'une estimation correcte des profils de vitesse, température et flux de paroi, il semble judicieux d'étudier plus en détails son comportement sur les cas 2000\_QA\_100 et 2000\_QA\_50 (voir le paragraphe 5.2 IV.B.). On donne tout d'abord une description plus précise de l'implémentation de cette correction dans le code de calcul.

1. la simulation s'établit sans correction ( $c_{\mu_{sgs1}} = 1$ ) durant un temps égal à  $8\delta/u_\tau$  ;
2. ensuite, l'équation 7.9 est utilisée pour évaluer tous les termes filtrés (entre  $\langle \cdot \rangle$ ) des équations 5.2 (35) et (37). Cependant, durant un temps égal à  $\delta/u_\tau$ , le coefficient correctif est maintenu à  $c_{\mu_{sgs1}} = 1$ , c'est à dire que la correction n'est toujours pas appliquée. Ceci laisse le temps aux quantités filtrées de s'établir suffisamment, évitant à  $c_{\mu_{sgs1}}$  de prendre des valeurs non physique au risque de déstabiliser la simulation ;
3. enfin, la correction est activée en utilisant  $c_{\mu_{sgs1}} = \frac{\langle \mu_{sgs1,target} \rangle}{\langle \mu_{sgs1} \rangle}$ .

La méthode numérique, conditions aux limites et initialisation de l'écoulement sont identiques à ce qui est indiqué dans le paragraphe 5.2 IV.B. Seul le modèle de sous-maille est différent. La taille du filtre exponentiel est fixée à  $\Delta_{filtre} = 16\delta/u_\tau$ .

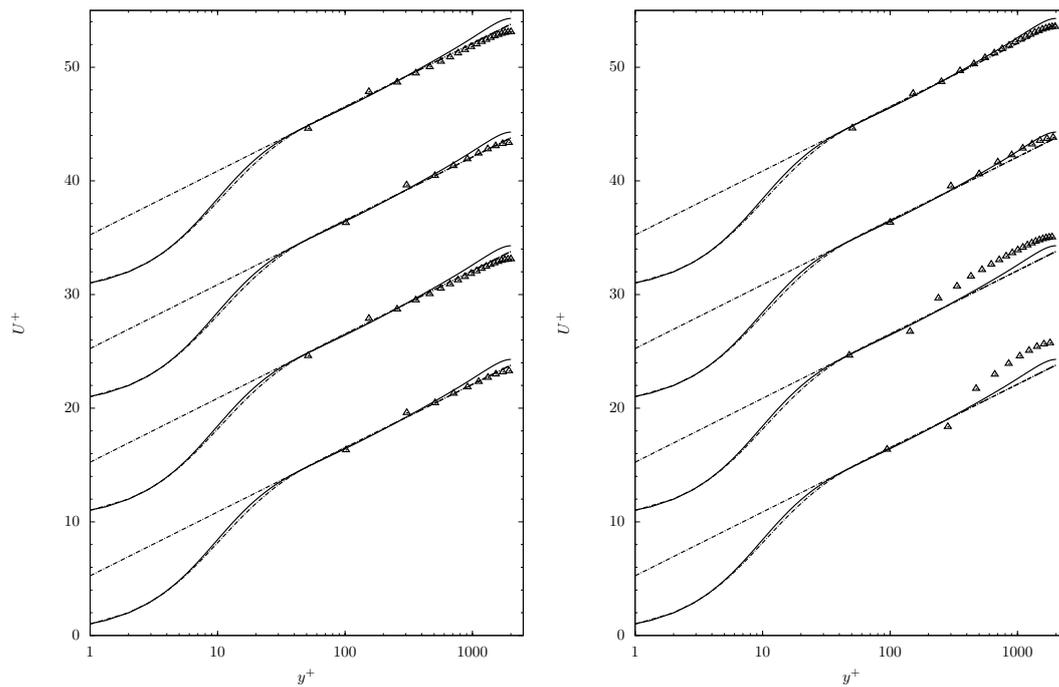


FIGURE B.1 : Profils de vitesse moyenne exprimés en unité de paroi : calcul WMLES au régime de Hoyas and Jiménez [2006] (2006) : (- · -) loi logarithmique  $U^+ = \frac{1}{0.41} \ln(y^+) + 5.25$  et loi de Reichardt donnée dans le tableau 4.3, (—) DNS de Hoyas et Jiménez, ( $\Delta$ ) WMLES avec modèle QA. Modèle de sous-maille WALE (gauche) et Smagorinsky (droite). De bas en haut : maillage 20 points sans correction, maillage 40 points sans correction, maillage 20 points avec correction, maillage 40 points avec correction. Les profils sont décalés de 10 unités de paroi par soucis de clarté.

La figure B.1 montre les profils de vitesse de calculs WMLES utilisant les modèles de sous-maille WALE et Smagorinsky ainsi que les maillages grossier à 20 points (cas 2000\_QA\_100) points et fin à 40 points (2000\_QA\_50). Comme déjà observé dans le paragraphe 5.2 IV.C., on observe que la correction a un effet significatif sur le modèle de Smagorinsky, avec une nette amélioration des profils de vitesse pour les deux maillages. Par contre, elle a peu d'effets sur le modèle WALE. L'influence de la correction sur l'estimation du frottement pariétal est donnée dans le tableau B.1.

TABLE B.1 : *Effet de la correction de la viscosité de sous-maille sur la prédiction du frottement pariétal.*

	$\Delta(C_{fb})$ en %	
	sans correction	avec correction
Smagorinsky, 20 points	-10.4	-0.12
Smagorinsky, 40 points	-8.5	2.1
WALE, 20 points	3.2	2.7
WALE, 40 points	5.1	5.3

On retrouve que la correction permet une nette amélioration du frottement pariétal lorsqu'elle est appliquée au modèle de Smagorinsky. Par contre, le frottement pariétal est semblable avec ou sans correction lorsque le modèle WALE est utilisé.

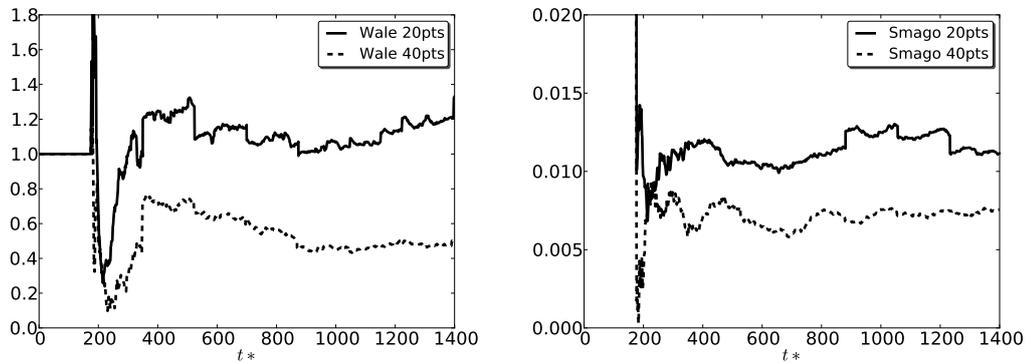


FIGURE B.2 : *Evolution de  $c_{\mu_{sgs1}}$  en fonction du temps, extrait en une cellule adjacente à la paroi pour les modèle WALE et Smagorinsky.*

Pour mieux comprendre le comportement de la correction, on donne en figure B.2 l'évolution en temps de la valeur de  $c_{\mu_{sgs1}}$ . On observe qu'après établissement du filtrage temporel c'est à dire pour  $t > 19\delta/u_\tau$  environ, la valeur du coefficient correctif pour le modèle de Smagorinsky est de l'ordre de  $10^{-2}$  alors qu'il reste autour de 0.8 pour le modèle WALE. On constate donc que le modèle WALE retourne une valeur à peu près correcte de la viscosité de sous-maille dans les cellules adjacentes à la paroi, alors que le modèle de Smagorinsky surestime de deux ordres de grandeur cette quantité. Il faut noter qu'il n'y a pas de justification physique au bon comportement

du modèle WALE dans ce cas, comme expliqué dans le paragraphe 4.3.3.1.

Pour preuve, on observe qu'en modifiant le maillage, et donc en changeant la hauteur des cellules adjacentes à la paroi  $\Delta_{y_1}^+$ , le coefficient correctif lié au modèle WALE est modifié par un facteur deux. Le bon comportement du modèle WALE n'est donc pas intrinséquement garanti pour tous les nombres de Reynolds et toutes les valeurs de  $\Delta_{y_1}^+$ .

La raison expliquant le bon comportement du modèle WALE n'est pas claire et nécessiterait plus d'investigations. Cependant, une évaluation spécifique du comportement de ce modèle en dehors d'un code de calcul semble délicate. En effet, le modèle WALE retourne une viscosité de sous-maile nulle pour un champ bi-dimensionnel, ce qui rend l'utilisation d'un champ moyen issu d'une DNS, LES résolu à la paroi ou d'une expérience impossible.

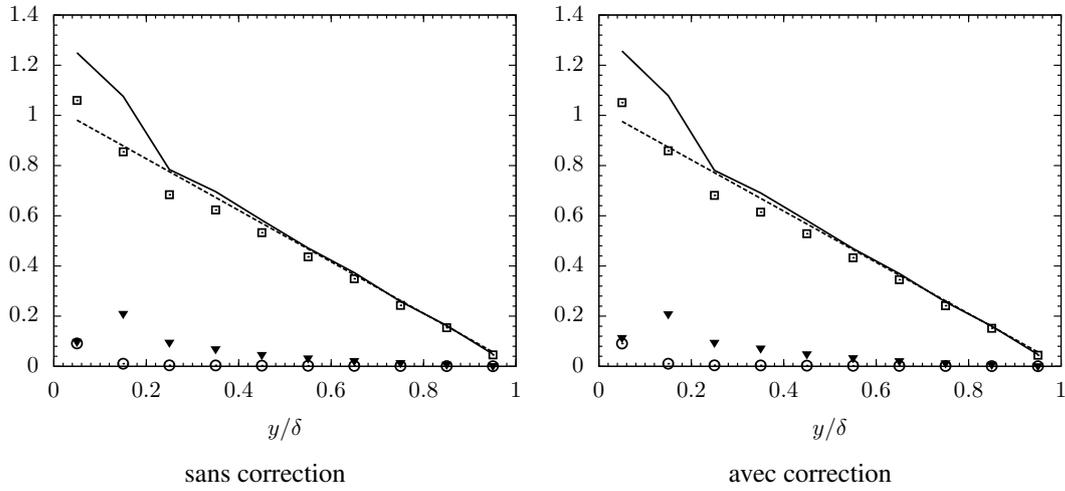


FIGURE B.3 : Bilans de quantité de mouvement pour le modèle WALE sur le maillage à 20 points. ( $\odot$ ) flux laminaire  $\langle \tilde{\mu}_j \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , ( $\blacktriangledown$ ) flux de sous-maile  $\langle \mu_{sgs j} \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial y}$ , ( $\square$ ) terme de turbulence résolue  $-\langle \tilde{\rho} \tilde{u}' \tilde{v}' \rangle_j$ , (—) membre de gauche, (- -) membre de droite. Tous les termes sont adimensionnés par le frottement pariétal de la DNS.

Les bilans de quantité de mouvement obtenus avec le modèle WALE sont donnés sur les figures B.3 et B.4 respectivement pour les maillages à 20 et 40 cellules. Sur les deux maillages, le flux de sous-maile est quasiment inchangé avec et sans correction, ce qui explique la très faible influence de la correction sur le modèle WALE. Pour ces valeurs de  $100 < \Delta_{y_1}^+ < 200$  et  $Re_\tau = 2000$ , le modèle WALE peut donc être utilisé sans correction.

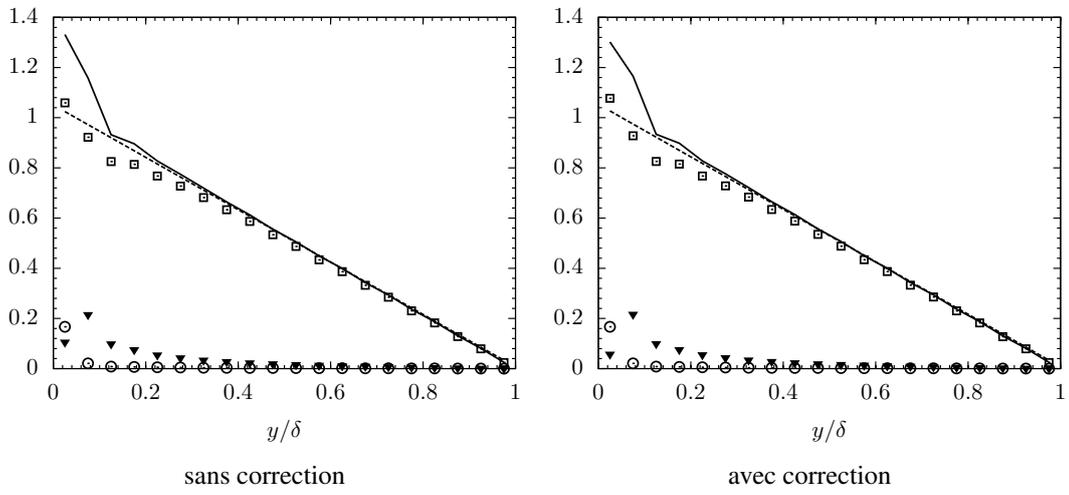


FIGURE B.4 : Bilans de quantité de mouvement pour le modèle WALE sur le maillage à 40 points.

---

## Résumé

Lors du développement d'un nouvel avion, l'estimation des échanges d'énergie entre l'air ambiant et les parois est une donnée cruciale pour la conception aérothermique. Cette conception repose de plus en plus sur des simulations numériques mais certains phénomènes d'aérothermique externe, comme le jet débouchant du système de dégivrage des nacelles moteur, montrent les limites des modèles RANS classiques. La simulation des grandes échelles (LES) se révèle bien adaptée à ce type de phénomène mais se heurte à un coût de calcul extrêmement élevé pour ces écoulements pariétaux à très grand nombre de Reynolds. Pour lever cette limitation, cette thèse propose l'étude de deux briques fondamentales : la LES avec loi de paroi (WMLES) conjuguée à l'injection d'une couche limite turbulente à l'entrée du domaine.

Pour une meilleure compréhension et une utilisation fiable de l'approche loi de paroi, on se concentre tout d'abord sur les sources d'erreur qui lui sont associées. Après les avoir identifiées, on propose une correction de l'erreur de sous-maille ainsi qu'une loi de paroi adaptée aux écoulements compressibles. Grâce à ces deux éléments, on obtient une estimation correcte du flux de chaleur pariétal sur des simulations WMLES de canal plan supersonique sur parois froides. Puis, pour préparer la transition vers des applications plus industrielles, on introduit un schéma numérique plus dissipatif ce qui nous permet d'étudier l'influence de la méthode numérique sur l'approche loi de paroi.

Dans une seconde partie dédiée à l'injection de couche limite pour la WMLES, on sélectionne une méthode basée sur l'injection de perturbations combinée à un terme de contrôle volumique. On montre que des simulations WMLES utilisant cette méthode d'injection permettent d'établir une couche limite turbulente réaliste à une courte distance en aval du plan d'entrée, à la fois sur une plaque plane mais également sur un écoulement de jet débouchant à la géométrie plus complexe, représentative d'un cas avion.

**Mots-clés :** Simulation des grandes échelles, modélisation de paroi, injection de couche limite turbulente, écoulement compressible, couche limite turbulente, jet débouchant.

---

## Abstract

*Wall modeling and turbulent inflow generation for the Large Eddy Simulation of aerothermal flows.*

During the design of a new aircraft, the prediction of energy exchanged between the ambient air and the aircraft walls is crucial regarding aerothermal design. Numerical simulations play a role of increasing importance in this design. However classical RANS models reach their limits on some external aerothermal flows, like the jet-in-cross-flow from the anti-icing system on the engine nacelles. The large eddy simulation (LES) is well suited to this kind of flow but faces an extremely large computational cost for such high Reynolds number wall-bounded flows. To remove this limitation, we propose two building blocks: the Wall Modeled LES (WMLES) combined with a turbulent inflow generation.

For a better understanding and a reliable use of the WMLES, we first focus on the sources of error related to this approach. We propose a correction to the subgrid-scale error as well as a wall model suitable for compressible and anisothermal flows. Thanks to these two elements, we correctly predict the wall heat flux in WMLES computations of a supersonic isothermal-wall channel flow. Then, to allow the computation of more industrial flows, we introduce some numerical dissipation and study its effect on the wall modeling approach.

The last part is dedicated to turbulent inflow generation for WMLES. We select a method based on synthetic perturbation combined with a dynamic control term. We validate this method on WMLES computations of a flat plate turbulent boundary layer and a hot jet-in-cross-flow representative of an industrial configuration. In both cases, we show that a realistic turbulent boundary layer is generated at a small distance downstream from the inlet plane.

**Keywords:** Large Eddy Simulation, Wall Modeling, Turbulent Inflow Generation, Compressible Flow, Turbulent Boundary Layer, Jet-In-Cross-Flow.

---

**Discipline :** Mécanique des fluides numérique.

**Laboratoire d'accueil :** CERFACS, 42 avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse, France.