

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ДИСК-ЦИЛИНДР В УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗГИБА ЦИЛИНДРА

Щербаков С.С.

*Field of stresses in the disk-cylinder active system is observed in the present paper. The field was obtained by superposing the field of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by bending of the cylinder. A significant change of the state of stress in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.*

### Постановка задачи

Для исследуемых в трибофатике силовых систем [1,2], характерно наличие как контактного взаимодействия между их элементами, так и объемного деформирования, вызванного действием неконтактных нагрузок.

Рассмотрим напряженное состояние системы ролик-вал (рис. 1), используемой при износоусталостных испытаниях [1,2].

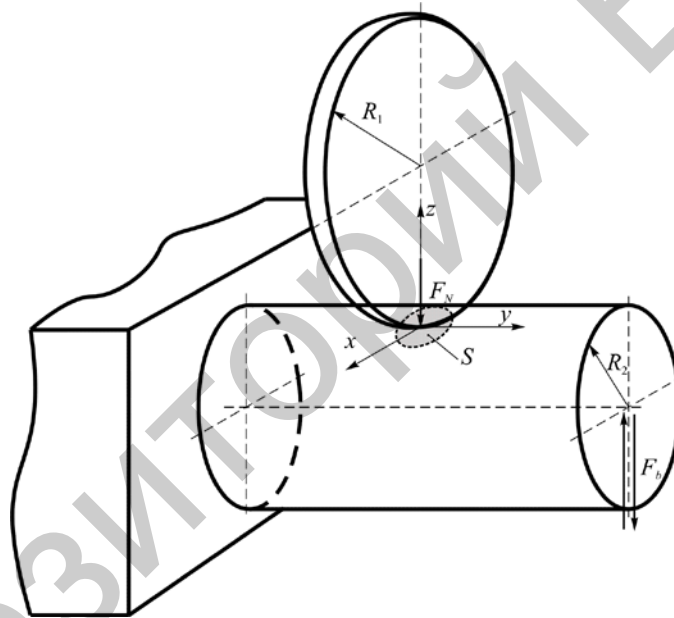


Рис. 1 – Схема системы диск-цилиндр

В данной силовой системе взаимодействующие тела в области контакта ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для описания контактного взаимодействия применима теория контакта Герца [3-5]. В соответствии с данной теорией принимается, что площадка контакта  $S(x, y)$  имеет форму эллипса с большой  $a$  и малой  $b$  полуосями, давление  $p(S)$  на площадке контакта распределено по эллиптическому закону [3-5]. Таким образом, трехмерное напряженно-деформированное состояние для случая эллиптического контакта с трением определяется для граничных условий следующего вида:

$$\sigma_{nn}^{(c)}|_S = p(F_c, S), \sigma_{n\tau}^{(c)}|_S = fp(F_c, S), \sigma_{ij}^{(c)}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \text{ и } i, j = x, y, z \quad (1)$$

где  $S(x, y)$  – площадка контакта,  $F_c$  – контактная сила,  $f$  – коэффициент трения,  $\rho$  – расстояние от центра контакта,  $\sigma_{ij}^{(c)}$  – напряженное состояние при контакте,  $n \perp S$ ,  $\tau \parallel S$ .

Кроме того консольно закрепленный вал изгибается неконтактной силой  $F_b$  (рисунк 1):

$$Q|_l = F_b \quad (2)$$

где  $Q$  – внутреннее поперечное усилие, а  $l$  – длина вала.

Особенностью напряженного состояния системы ролик-вал данной является то, что если напряженное состояние ролика является чисто контактным, то в вале, помимо контактных напряжений, также действуют напряжения, обусловленные изгибающей силой  $F_b$  (изгиб от действия контактной нагрузки  $F_c$  учитывать не будем).

### Напряженное состояние при контакте

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонентов напряжений в точках оси  $z$  и в некоторых точках поверхности контакта [3-5 и др.]. Определение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

В силовой системе с учетом трения соприкасающихся тел имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами. В общем случае по площадке контакта распределены нормальные  $p(x, y)$  и касательные  $q(x, y)$  к поверхности контакта усилия. Напряженное состояние в области контакта  $\sigma_{ij}$  представим как суперпозиция напряженных состояний  $\sigma_{ij}^{(n)}$  и  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , обусловленных соответственно нагрузками  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} \quad (3)$$

Расчет напряжений  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  в любой точке  $M(x, y, z)$  при  $z < 0$  полупространства при действии на поверхность нормальных усилий  $p(x, y)$  проводится численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(B)}$  из фундаментального решения задачи Буссинеска  $\sigma_{ij}^{(B)}$  о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [6,7]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \quad (4)$$

где  $p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$ ,  $\left\{ (\xi, \eta) / \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

Решение Бусинеска, в соответствии с [3,4] имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5}, \quad \sigma_{xy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\} \\ \sigma_{xz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Необходимо учесть, что на поверхности полупространства упругие напряжения  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  не определены. Это обусловлено тем, что для точек  $z = 0$  поверхности полупространства интегралы из (4). не сходятся в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки.

Расчет напряжений в любой точке  $M(x, y, 0)$  поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий  $p(x, y)$  проводится в соответствии со следующей общей формулой [66]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$  – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области  $S(x, y)$ .

В явном виде выражения (6) на основании [3-6] следующие:

$$\frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\frac{b+2va}{a+b} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\frac{a+2vb}{a+b} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[ \frac{y}{ae} \operatorname{arth} \left( \frac{ex}{a} \right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg} \left( \frac{ae y}{b^2} \right) \right] = H(x, y) & \text{при } H(x, y) < 0, \\ 0 & \text{при } H(x, y) > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{p_0} = 0, \quad \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{p_0} = 0.$$

Таким образом, напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$  в формуле (3) с учетом (4)-(7) можно представить в таком виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Расчет напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий  $q(x, y)$ , также выполняется численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(C)}$  из решения задачи Черрути  $\sigma_{ij}^{(C)}$  для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [6,7]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{s(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (9)$$

где  $q(\xi, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$ .

Решение задачи о действии сосредоточенной касательной силы  $Q_x$  (направленной вдоль оси  $x$ ) на поверхность полупространства имеет следующий явный вид [3,4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ \frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ \frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(C)} &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \\ \sigma_{xy}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[ -\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{xz}^{(C)} &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{x^2z}{\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(C)} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xyz}{\rho^5},\end{aligned}\tag{10}$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Формула (3) с учетом (8) примет вид

$$\sigma_{ij} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \vee \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)}\tag{11}$$

На рисунках 2 и 3 в соответствии с (11) представлены распределения нормальных и касательных напряжений, отнесенных к  $p_0$ , при действии эллиптически распределенных нормальных  $p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$  и касательных  $q(x, y) = fp_0(x, y)$  контактных усилий (коэффициент трения  $f = 0,5$ ,  $b/a = 0,5$ ). Из рисунков видно значительное отличие распределений  $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)}$  и  $\sigma_{xz}^{(n)} + \sigma_{xz}^{(\tau)}$  от распределений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  и  $\sigma_{xz}^{(n)}$  за счет действия силы трения, вызывающей появление знакопеременных напряжений  $\sigma_{xx}^{(\tau)}$  и  $\sigma_{xz}^{(\tau)}$ .

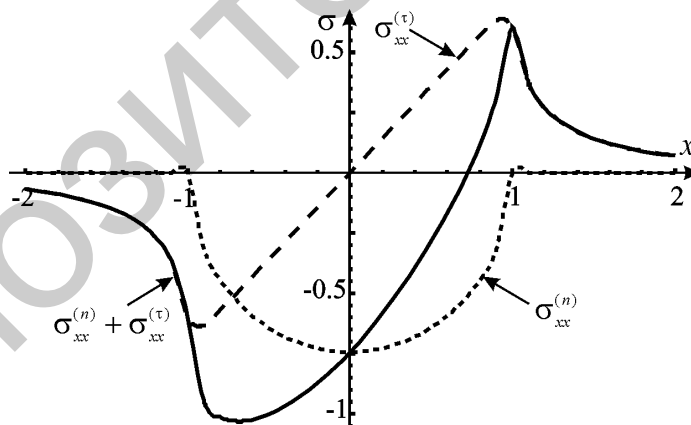


Рис. 2 – Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  на поверхности контакта при  $z=0, y=0$

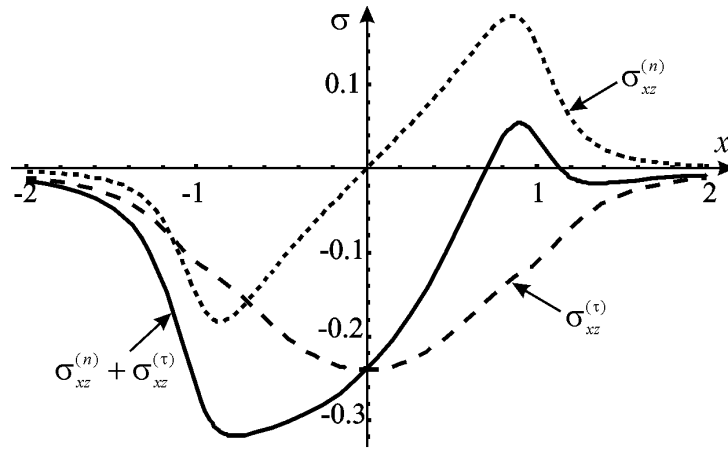


Рис. 3 – Распределение напряжений  $\sigma_{xz}$  под поверхностью контакта при  $z=-0,3, y=0$

### Объединенное напряженное состояние с учетом неконтактного изгиба

Напряженное состояние, вызванное действием силы  $F_b$  в плоскости  $y=0$  (рисунок 1) определяется в соответствии с известными соотношениями [8, 9]:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(12r-x)z}{4(1+\nu)J}, \quad \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}(r^2-z^2), \quad \sigma_{xx}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = 0 \quad (12)$$

где  $J = \frac{\pi R_2^4}{64}$ ,  $F_b = 0.4p_0 \frac{4(1+\nu)J}{12r^2}$ .

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением с учетом (8) и (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \sqrt{z} \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[ \iint_{S(\xi,\eta)} p(\xi,\eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi-x, \eta-y, z) d\xi d\eta \sqrt{z} \sigma_{ij}^{(S)}(x,y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi,\eta)} q(\xi,\eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi-x, \eta-y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x,y,z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x,y,z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x,y,z). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку (13) строится как суперпозиция компонент  $(\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)})$  напряжения, то имеется возможность анализа как общего, так и любого из частных случаев.

Рассмотрим, например, объединенное напряженное состояние вида

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(b)}. \quad (14)$$

Типичные примеры изменения поля локальных напряжений (деформаций), когда на него накладывается поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, представлены на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что хотя при  $F_b < 0$  на верхней поверхности вала напряжения  $\sigma_{xx}^{(b)} > 0$ , однако в результате действия контактных сжимающих напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  объединенные напряжения  $\sigma_{xx}^{(n)} < \sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)} < 0$ . Таким образом, с одной стороны опасные – приводящие к образованию магистральной трещины – растягивающие напряжения  $\sigma_{xx}^{(b)}$  компенсируются сжимающими  $\sigma_{xx}^{(n)}$ .

Из рис. 4 видно, что при  $F_b > 0$  суперпозиция напряжений  $\sigma_{xx}^{(b)} < 0$  и  $\sigma_{xx}^{(n)} < 0$  приводит к увеличению сжимающих напряжений.

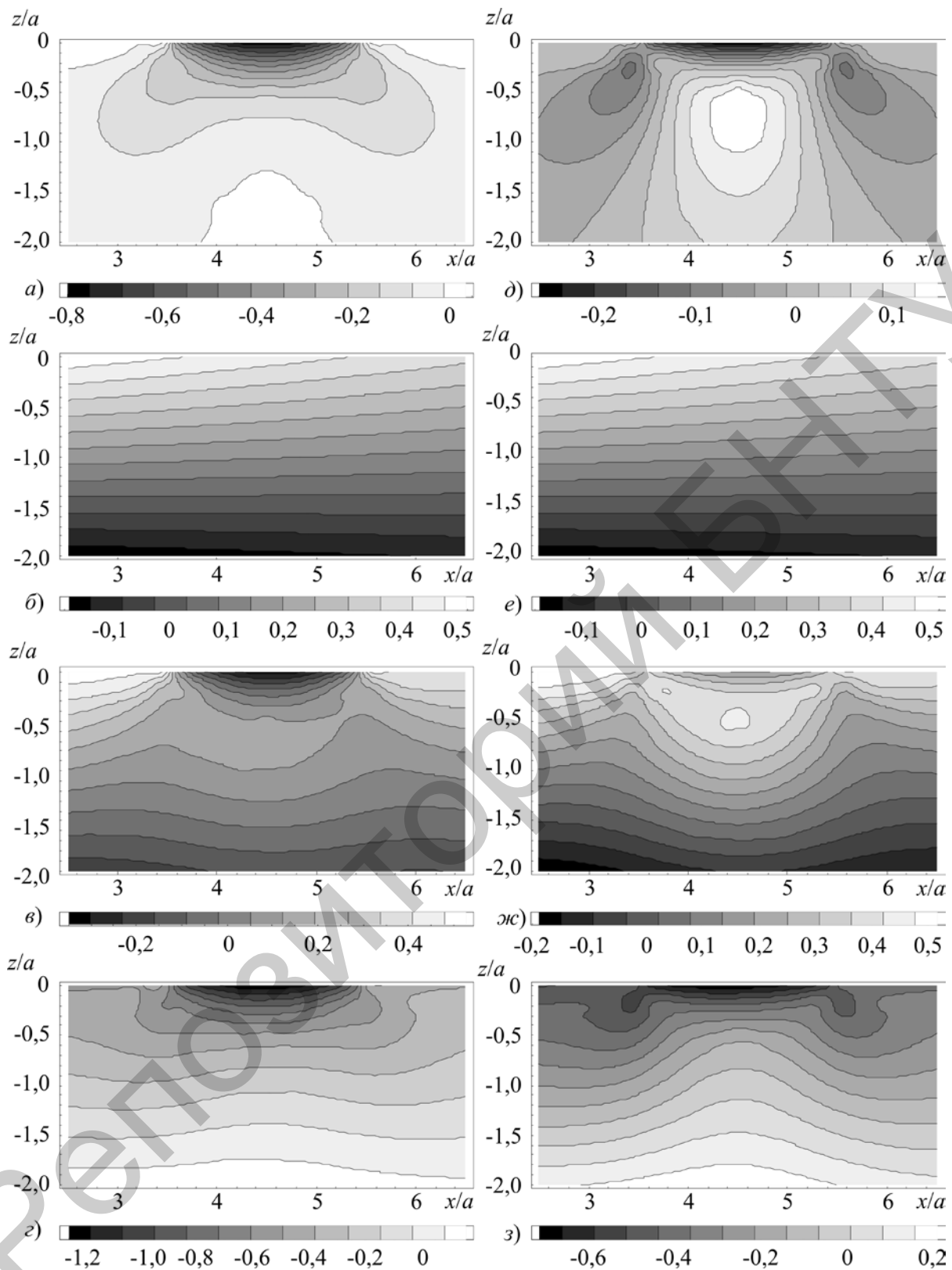


Рисунок 4 – Распределения напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  (а),  $\sigma_{xx}^{(b)}$  (б),  $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b > 0$ ) (в),  $\sigma_{xx}^{(n)} - \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b < 0$ ) (з), отнесенных к  $r_0$ , и деформаций  $\epsilon_{xx}^{(n)}$  (д),  $\epsilon_{xx}^{(b)}$  (е),  $\epsilon_{xx}^{(n)} + \epsilon_{xx}^{(b)}$  ( $F_b > 0$ ) (ж),  $\epsilon_{xx}^{(n)} - \epsilon_{xx}^{(b)}$  ( $F_b < 0$ ) (з), отнесенных к  $r_0 / E$  ( $E$  – модуль упругости), в окрестности контакта в плоскости  $y = 0$  при  $a / b = 0,5$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sosnovskiy, L.A. *Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics)*/ L.A. Sosnovskiy. – Springer, 2004. – P. 424.
2. Сосновский, Л.А. *Механика износоусталостного повреждения*. / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Johnson, K. L., “*Contact Mechanics*,” Cambridge University Press, 1985, 453 pp.
4. *Modern Tribology Handbook* / edited by Bharat Bhushan, CRC Press, 2000, – Vol. 1, – 765 pp.
5. Горячева, И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия* / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478с.
6. Журавков, М.А. *Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования* / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // *Вести НАНБ, сер. физ.-тех. н.*, 2008. – № 1. – С. 48–57.
7. Щербаков, С.С. *Трехмерное напряженно-деформированное состояние силовой системы диск-цилиндр в условиях контактного нагружения и объемного деформирования* / С.С. Щербаков // *X Белорусская математическая конференция: Тез. Докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3-7 ноября 2008 г. – Часть 2.* – Мн.: институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 152.
8. Тимошенко, С. П. *Теория упругости* / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Работнов, Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов* / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. – 712 с.