

Численный алгоритм идентификации параметров нелинейных моделей

Новиков А.А.

Белорусский национальный технический университет

Типичное решение задач идентификации параметров математической модели (в общем случае – определение параметров (a,b,\dots) функции многих переменных $H=H(t, x, \dots, a,b,\dots)$ по заданной избыточной информации $\{H(t_i, x_j, \dots)=H^*_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$) базируется на эвристическом требовании минимизации дисперсии аддитивной ошибки $\delta=H^*-H(a,b)$. неизбежно присутствующей в исходных данных $\{H^*_{ij}\}$, т.е. на МНК
$$\min_{a,b} \sum_{i,j} \delta_{ij}^2 \quad (1).$$

Нелинейная, по параметрам a,b , зависимость $H_{ij}(a,b)$ обычно линеаризуется по Ньютону $H_{ij}(a,b) \approx H_{ij}(a^*,b^*) + A_{ij}(a^*,b^*)(a-a^*) + B_{ij}(a^*,b^*)(b-b^*)$, (2) где $A(t,x)=H_a(t,x)$, $B(t,x)=H_b(t,x)$ частные производные $H(t, x, \dots, a,b,\dots)$ по параметрам, а a^*,b^* значения искоемых параметров a,b , полученные на предшествующей итерации. Известные сложности в решении (1) возникают в случаях, когда исходная математическая модель $H(t, x, \dots, a,b,\dots)$ задана не комбинацией элементарных функций, а громоздкими и медленно сходящимися рядами по специальным функциям.

Характерной особенностью моделей $H(t, x, \dots, a,b,\dots)$ имеющих прикладной (физический) смысл является то, что они описываются системами линейных уравнений математической физики, которые, опять же, линейно включают искоемые параметры (a,b,\dots) , т.е. весьма эффективно реализуются численно конечно-разностными методами. В качестве примера рассмотрим модель $H_t = aH_{xx}$, $H(0,x)=\varphi(x)$, $H(t,0)+bH_x(t,0)=1$, $H_x(t,1)=0$ (4)

Дифференцируя уравнения (1) по a,b получаем еще две линейные задачи математической физики для нахождения требуемых $H_a(t,x)$ и $B(t,x)$

$$A_t = aA_{xx} + H_{xx}, \quad A(0,x)=0, \quad A(t,0)+bA_x(t,0)=0, \quad A_x(t,1)=0 \quad (5)$$

$$B_t = aB_{xx}, \quad B(0,x)=0, \quad B(t,0)+bB(t,0) = -H_x(t,0), \quad B_x(t,1)=0 \quad (6),$$

которые решаются автономно после разрешения задачи (1). Используемые в эти задачах производные H_{xx} , $H_x(t,0)$ аппроксимировались тем же разностным шаблоном, которые применялись при численной реализации задачи (1).

Результат: идентификация на основе системы трех задач (4)-(6) позволяет получить удовлетворительный результат уже на сетках из 20-30 узлов. Если же оценивать производные $H_a(t,x)$ и $H_b(t,x)$ через конечные разности, решая только (4) при «небольших» вариациях параметров (a,b) , то такая же точность достигается при увеличении размеров сеток более чем на два порядка.