УДК 004.4

Раковец Д.В.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

БГПУ им. М.Танка, Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель: Глухарева С.Л.

В статье описаны подходы к программированию на языке Pascal построения линий на плоскости на примере циклоидальных кривых.

В некоторых задачах математики особое внимание обращается на кривые, определяемые каким-либо законом. Будем рассматривать кривые, как путь, пройденный движущейся точкой. Закон, определяющий кривую, выражается уравнением, связывающим координаты такой точки. На основе математических зависимостей можно запрограммировать рисование кривой с помощью компьютера. Цель нашей работы – проиллюстрировать процесс построения линий на плоскости на примере циклоидальных кривых.

Циклоида представляет собой траекторию фиксированной точки окружности, катящейся без скольжения по прямой. «Циклоида» означает «связанная с кругом», «напоминающая о круге». Это название придумал Галилей. Вскоре эту кривую переоткрыли во Франции и назвали «рулеттой» или «трохоидой». Ее изучением занимались Декарт, Ферма, Паскаль и другие математики.

Еще в 1696 году в июньском номере журнала «Акта Эрудиторум» – первого научного журнала была помещена заметка швейцарского ученого И. Бернулли: «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». В задаче рассматривались две точки в вертикальной плоскости. Требовалось определить путь, спускаясь по которому от одной точки к другой под действием собственной тяжести, тело достигнет второй точки в кратчайшее время. Оказалось, что брахистохроной – кривой соответствующей кратчайшему времени движения – является циклоида.

Циклоидальные кривые привлекли наше внимание, так как они отражают многие процессы в технике и живой природе. Так, например, циклоида обладает тем свойством, что тело, скользящее по ней без трения, совершает колебания периода, не зависящего от начального положения. Это свойство циклоиды открыл Гюйгенс.

Выяснилось, что траектории планет относительно Земли представляются в виде эпициклоиды. Так происходит, потому что траектория складывается из двух круговых вращений – суточного и годового вращения Земли вокруг Солнца.

В технике используется циклоидное зацепление. Оно образуется зубчатыми колесами, профили зубьев которых очерчены по эпициклоиде и гипоциклоиде. Такое зацепление создает более благоприятное распределение давления в месте контакта зубьев и обеспечивает меньший износ деталей.

Сегодня известен еще и такой факт: центр тяжести идущего или бегущего человека описывает циклоиду. Например, при длине ног в 1 метр центр тяжести при каждом шаге поднимается и опускается примерно на восемь сантиметров.

С циклоидой связаны другие кривые – циклоидальные.

Циклоидальные кривые – это кривые, которые могут быть получены в результате следующего процесса. Представим себе, что некоторая окружность (называемая «производящей») катится без проскальзывания по профилю другой (неподвижной) окружности. Если на производящей окружности зафиксировать некоторую точку, то кривая, вычерчиваемая этой точкой в процессе движения, и будет называться циклоидальной.

Получаемые таким образом кривые в зависимости от того, катится ли производящий круг с внешней или с внутренней стороны неподвижного круга, подразделяются на эпициклоиды (греческое ἐπί – «на, над») и гипоциклоиды (греческое ὑπό – «под, внизу»).

При построении кривых мы использовали их математическое описание. Обычно формулы таких линий задают в полярных координатах. Положение точки определяется полярным радиусом *R* и углом *theta*, образуемым полярным радиусом с полярной осью. Чтобы перейти от полярных координат к декартовой системе в общем случае используют формулы – параметрические уравнения:

$$X = R \cdot \mathrm{Cos}\ (\mathrm{theta}),$$
$$Y = R \cdot \mathrm{Sin}\ (\mathrm{theta}).$$

Названные циклоидальные кривые описываются следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = r(k \pm 1)\left(\cos(t) - p\dfrac{\cos\left((k \pm 1)t\right)}{k \pm 1}\right); \\ y = r(k \pm 1)\left(\sin(t) - \dfrac{\sin\left((k \pm 1)t\right)}{k \pm 1}\right), \end{cases}$$

где R – радиус неподвижной окружности, r – радиус катящейся окружности, а коэффициент $k = R/r$. В приведенных формулах для построения эпициклоиды принимают знак «+» и значение $p = 1$, гипоциклоиды – знак «–» и значение $p = -1$.

Модуль величины *k* определяет форму кривой. Некоторые из кривых в этом случае имеют собственные имена (рис. 1, 2).

Для программирования построения линий была использована система PascalABC. Опишем наиболее значимые этапы разработки программы.

Для отображения в графическом окне движения одной окружности относительно другой определим путь движения катящейся окружности, т.е. диапазон изменения угла *m* наклона полярного радиуса к полярной оси.

Далее определяем вид кривой в зависимости от коэффициента *k*. Вычисляем текущие координаты точки кривой, используя параметрические уравнения.

Эффект движения окружности создается благодаря последовательному выводу рисунка, его стиранию и выводу в другой точке. Для наблюдения за процессом построения кривой в программе необходимо организовать задержку.

В процессе разработки программы мы столкнулись с определенными сложностями. Так, необходимость стирания движущейся окружности приводила к затиранию самой кривой. Для корректной прорисовки траектории потребовалось все координаты точек, задающих положение движущейся окружности при разных значениях m, помещать в массив.

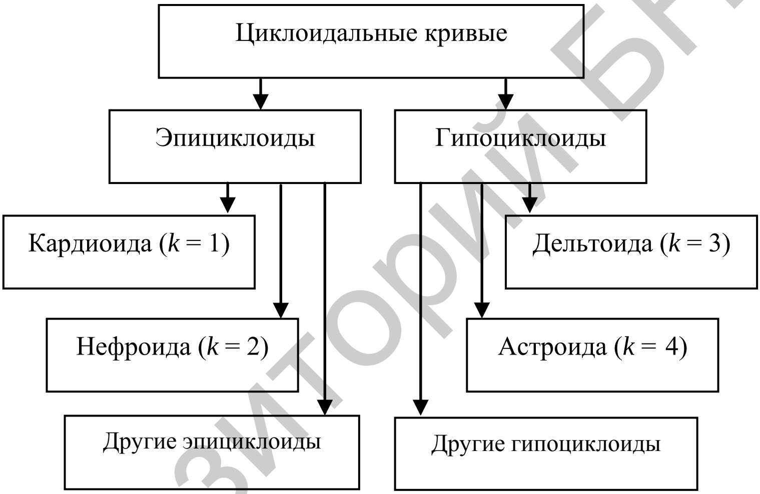

Рисунок 1 – Циклоидальные кривые, получившие собственные названия

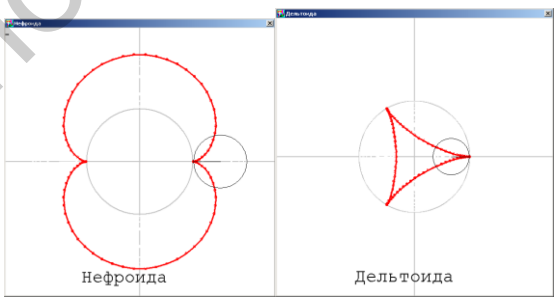

Рисунок 2 – Графические окна системы PascalABC с построенными кривыми