УДК 539.3:531.2.001:621.81

СООТНОШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК В ПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

к. ф.-м. н. [1]**Мартыненко Т.М.**, [2]**Пранкевич С.А.**, к. ф.-м. н. [2]**Скляр О.Н.**

[1]*ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск*
[2]*УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

Мягкими называют оболочки, которые вследствие весьма малой толщины стенки всегда испытывают только безмоментное напряженно-деформированное состояние и не могут воспринимать сжимающих напряжений.

Несмотря на наличие упрощающего основные уравнения свойства безмоментности, построение теории мягких оболочек проблема очень сложная. Все осложняется тем обстоятельством, что мягкая оболочка под нагрузкой существенно изменяет геометрию. Это, в свою очередь, оказывает влияние на распределение нагрузки. Основы теории для случая осевой симметрии (в предположении о малости деформации) предложены С.А. Алексеевым [1]. Одним из основных свойств мягких оболочек является их неспособность воспринимать сжимающие напряжения. Поэтому мягкая оболочка может находиться либо в двухосном напряженном состоянии, когда оба главных напряжения положительны, либо в одноосном, когда одно из главных напряжений пренебрежимо мало и его полагают равным нулю. В одноосной зоне оболочка не имеет определенной формы, поэтому нельзя произвольно задавать форму оболочки и действующие: на неё нагрузки.

Рассмотрим деформацию круглой диафрагмы из линейно-упругого материала, нагруженной давлением. Величины перемещений и деформацией не будим ограничивать. Предположим, что в центральной части диафрагмы имеется жесткий центр, нагруженный силой P. Под действием нагрузки диафрагма превращается в оболочку вращения в следствии этого, справедливы следующие геометрические соотношения:

$$\frac{dr}{ds}=\cos\theta,\ \frac{dz}{ds}=\sin\theta,\ \frac{1}{R_1}=\frac{d\theta}{ds},\ \frac{dz}{ds}=\sin\theta.$$

$$T_1=\frac{\mathrm{Pr}}{2\pi r\sin\theta}\left(1+\frac{1}{\pi r^2}\right)$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=P$$

Для вывода разрешающего уравнения задачи воспользуемся условием совместности деформаций, которое в рассматриваемом случае линейных деформаций и изотропных тел имеет вид:

$$\frac{d}{dr}\left(r\varepsilon_\theta\right)=\varepsilon_\varphi$$

Закон Гука запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{Eh}\left(T_\theta-\mu T_\varphi\right),\ \varepsilon_\varphi=\frac{1}{Eh}\left(T_\varphi-\mu T_\theta\right)$$

Рассмотрим оболочки вращения постоянной толщины, следующие гипотезам Кирхгофа–Лява, и деформируемые постоянным давлением $\rho=const$. Показана необходимость учета уравнений совместности деформаций при определении безизгибной формы меридиана.

Задача расчета безмоментного НДС оболочки по теории Кирхгофа–Лява является статически определимой [Новожилов, Бидерман с 133]. Интегрируя уравнения равновесия [2,3], получим:

$$T_1 = \frac{F(s)}{2\pi r \sin\theta},\ T_2 = q_n R_2 - T_1 \frac{R_2}{R_1} \tag{1}$$

где

$$F(s) = P_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta) 2\pi r ds. \tag{2}$$

$F(s)$ – суммарная осевая нагрузка, действующая на элементарный элемент срединной поверхности и состоящая из: P –осевой нагрузки, действующей на торец оболочки при проекцию на эту ось, q_n, q_1 –нормальных и касательных составляющие поверхностной нагрузки, θ –угол, составленный нормалью к меридиану с осью вращения, r – полярный радиус, T_1, T_2 –внутренние усилия, действующие по касательной к меридиану и к параллели, R_1, R_2 –радиусы кривизны меридиана и срединной поверхности.

Для поверхности вращения второго порядка радиусы кривизны R_1, R_2 связаны с углом θ формулами [1,2]:

$$R_1 = \frac{R_0}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}},\ R_2 = \frac{R_0}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3}$$

R_0, γ –постоянные.

Выведем теперь уравнения меридиана, для чего воспользуемся формулами [2,3]:

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta,\ \frac{dz}{ds} = \sin\theta,\ \frac{ds}{d\theta} = R_1. \tag{4}$$

Имеем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\theta} = R_1 \cos\theta = \frac{R_0 \cos\theta}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Откуда:

$$r = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_0 \cos\theta d\theta}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{\gamma}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\left(\sqrt{\gamma}\sin\theta\right)}{\left(1+\left(\sqrt{\gamma}\sin\theta\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0\sqrt{\gamma}\sin\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}} + r_0.$$

Совершенно аналогично:

$$z=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{dz}{d\theta}d\theta=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\theta}d\theta=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\frac{R_0 d\theta}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=-R_0\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d(\cos\theta)}{\left(1+\gamma-\gamma\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=$$
$$=-\frac{R_0}{1+\gamma}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}+z_0$$

Поэтому при $r_0=0$, $z_0=0$:

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

где

$$a=\frac{R_0}{\sqrt{1+\gamma}},\ b=\frac{R_0}{1+\gamma}. \qquad (6)$$

Предположим что $q_n=p=const$, $\theta_0=0$, тогда:

$$T_1=\frac{1}{2}pR_2=\frac{pR_0}{2\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}},\ T_2=pR_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{1}{2}pR_0\frac{1-\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}. \qquad (7)$$

Уравнение совместности деформаций для оболочек вращения в осесимметричном случае имеет при $h=const$, $E,\nu=const$ вид [4]:

$$\varepsilon_1=\frac{d}{dr}(r\varepsilon_2)$$

или в силу закона Гука для изотропных оболочек:

$$T_1-\nu T_2=\frac{d}{dr}\left(r\left(T_2-\nu T_1\right)\right). \qquad (8)$$

После дифференцирования из (8) получим:

$$(1+\nu)(T_1-T_2)=r\frac{d}{dr}(T_2-\nu T_1). \qquad (9)$$

Здесь ν –коэффициент Пуассона. Преобразуем (9) с помощью (7):

$$T_1-T_2=pR_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{1}{2}pR_0\frac{\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}. \qquad (10)$$

или

$$T_2-\nu T_1=\frac{pR_0\left(1-\nu-\gamma\sin^2\theta\right)}{2\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}. \qquad (11)$$

Поэтому (9) принимает такой вид:

$$(1+\nu)\frac{1}{2}pR_0\frac{\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}=r\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{2}pR_0\frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\right),$$

или

$$\frac{(1+\nu)\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}} = r\left(\frac{-\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}} - \frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{dr}\gamma\sin^2\theta\right) = \frac{r}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}$$

$$\left(\frac{-\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta\left(1+\frac{1}{2}\left(1-\nu-\gamma\sin^2\theta\right)\right)}{1+\gamma\sin^2\theta}\right) = -\frac{r\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\left(1+\frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{2\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)}\right)$$

или

$$(1+\nu)\gamma\sin^2\theta = -\gamma r2 + 2\gamma + 2\gamma\sin^2\theta + 1 - \nu - \gamma\sin^2\theta =$$
$$= -\frac{\gamma r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dr}}{2\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)}\left(3-\nu+\gamma\sin^2\theta\right) => \qquad (12)$$

т.к. $\gamma = const$ $1+\gamma\sin^2\theta \neq 0$ сократим на $\gamma \neq 0$ (исключим сферу) т.к. для сферы $\gamma = 0$ что приведет последнее равенство к $0=0$.

Но

$$r\frac{d}{dr}\sin^2\theta = r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dr} = r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dr} = \left.\frac{r2\sin\theta}{R_1}\right|_{r=R_2\sin\theta} =$$
$$= \frac{R_2}{R_1}2\sin^2\theta = 2\sin^2\theta\left(1+\gamma\sin^2\theta\right),$$

Поэтому из (12) имеем:

$$=> (1+\nu)\sin^2\theta = -\frac{1}{2}2\sin^2\theta\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)\frac{3-\nu+\gamma\sin^2\theta}{1+\gamma\sin^2\theta} =>$$
$$1+\nu = -3+\nu-\gamma\sin^2\theta => 4+\gamma\sin^2\theta = 0. \qquad (12)$$

сократим на $\sin^2\theta \geq 0$

Уравнение (12) в общем случае не разрешимо. Это означает что (7) не удовлетворяет условиям совместности деформации.

Если $\gamma = 0,$ то $R_1 = R_2 = R_0,$ $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}pR_0,$ $T_1 - T_2 = 0,$ $T_2 - \nu T_1 = \frac{(1-\nu)pR_0}{2} = const.$

Уравнение совместности деформаций:

$$(1+\nu)(T_1 - T_2) = r\frac{d}{dr}(T_2 - \nu T_1) => 0 = 0 \text{ удовлетворяется.}$$

Уравнения совместности деформаций, имеющие чисто геометрический характер, могут быть составлены с любой степенью точности, в тоже время уравнения равновесия, опирающиеся на общие для всех тел и хорошо известные давно установленные экспериментальные факты, не нуждаются в опытной проверке. Эта система определяющих уравнений - может быть составлена лишь на основании эксперимента, выясняющего характер сопротивления каждого тела внешним воздействиям. Поэтому мера достоверности теории полностью зависит от идейной полноценности и точности эксперимента, положенного в ее основу, и от адекватного отображения результатов этого эксперимента в математическом аппарате теории через определяющие уравнения. Отмеченным фактом обусловлено фундаментальное значение для всей механики твердого деформируемого тела.

РЕЗЮМЕ

В работе приведена математическая теория, которая отличается наиболее строгим подходом. Ее цель – определить напряженно-деформированное состояние оболочки с учетом нелинейных связей как между усилиями и деформациями (физическая нелинейность), так и между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С. А. К теории мягких оболочек вращения. В Кн.: Расчет пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1955, вып. 8., с. 309-322.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987.

SUMMARY

The mathematical theory is provided in work differs in the most strict approach. Its purpose – to define the intense deformed condition of a cover taking into account nonlinear communications as between efforts and deformations (physical nonlinearity), and between deformations and movements (geometrical nonlinearity).

E-mail: *Ps_minsk@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.11.2014