

Князев М.А.

Белорусский национальный технический университет

В отличие от линейных уравнений в частных производных, решения которых представляются в виде суперпозиции распространяющихся волн, для нелинейных уравнений решения имеют вид локализованных волн, наиболее известным из которых являются солитоны. Эти решения описывают несингулярные устойчивые конфигурации с определенной энергией, сохраняющиеся при взаимодействиях.

Интегрируемость нелинейного уравнения означает, что для него можно построить не только решение в виде одиночного солитона, но и решения в виде связанных состояний произвольного числа солитонов и/или антисолитонов. Для интегрируемого уравнения имеет место неограниченное количество законов сохранения, соответствующих каждому из решений.

В настоящее время строгий критерий интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных отсутствует. В практических вычислениях для определения интегрируемо уравнение или нет, используют различные эмпирические правила, наиболее распространенным среди которых является условие существования для нелинейного уравнения пары операторов Лакса. Однако все такие правила не носят общего характера и имеют ограниченные области применения.

В случае интегрируемого нелинейного уравнения в нем существует энергетический баланс между различными механизмами. В частности, дисперсия и нелинейность оказывают противоположное действие. Дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета, в то время как наличие нелинейности обуславливает его сжатие.

Для многих динамических систем возможно преобразовать неинтегрируемые нелинейные уравнения, описывающие их поведение, в интегрируемые. Причем сделать это можно без привлечения каких-либо искусственных построений математического характера, а путем учета реальных физических процессов. Одним из таких практически повсеместно распространенных процессов является процесс диссипации энергии, например, в результате трения, затухания или рассеяния. Математически это может быть осуществлено различными способами в зависимости от рассматриваемой системы. Простейшими из них являются учет в уравнении первой производной по времени от искомой функции или смешанной производной по времени и пространственной переменной.