

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ПРОНИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА РЕЛАКСАЦИЮ ПРИ СЖАТИИ

н.с. Гавриленко С.Л., к. т. н. Шилько С.В.

*ГНУ «Институт механики металлополимерных систем НАН Беларуси им. В.А. Белого», Гомель*

**Введение.** Полимерные материалы и композиты на их основе обладают выраженными реономными свойствами, что в процессе эксплуатации проявляется в постепенном накоплении деформаций ползучести и необратимом изменении геометрической формы элементов конструкций и деталей машин. Существующие аналитические решения, полученные в рамках теории вязкоупругости, пригодны для анализа деформирования элементов конструкций относительно простой конфигурации. С другой стороны, прикладные прочностные расчеты реальных конструкций методом конечных элементов, некритичным к геометрии деформируемой области, как правило, сводятся к упругому решению и не позволяют прогнозировать кинетику ползучести и релаксации.

Для получения корректного конечноэлементного решения вязкоупругих задач необходимо выполнить этап идентификации используемой реологической модели материала по имеющимся экспериментальным данным, полученным из испытаний стандартных образцов. В частности, в настоящей работе описана методика определения параметров вязкоупругой модели Прони на примере распространенного в технике полимерного материала Фторопласт-4.

**Методика определения вязкоупругих констант материала.** К настоящему времени для описания процессов ползучести и релаксации полимерных материалов отечественными и зарубежными исследователями предложен ряд вязкоупругих моделей [1-4]. Поскольку в распространенных программных продуктах конечноэлементного анализа, например, ANSYS, используется модель Прони, в целях определения реологических констант материала по результатам стандартных испытаний запишем определяющие соотношения указанной модели [5]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

$$\text{здесь } G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^G}}, \quad K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^K}},$$

$$G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i = \mu, \quad K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i = K.$$

Согласно [2] имеем зависимости для упругих констант:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Далее вводим упрощающее предположение о постоянстве коэффициента Пуассона материала  $\nu = \text{const}$ . В этом случае имеют место следующие зависимости:

$$\begin{aligned} ER_E(t-\tau) &= 2(1+\nu)G'_\tau(t-\tau); \\ K'_\tau(t-\tau) &= \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}G'_\tau(t-\tau). \end{aligned}$$

Тогда соотношение (1) запишется в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(t) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t) \right] - \frac{E}{1+\nu} \int_0^t R_E(t-\tau) \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(\tau) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(\tau) \right] d\tau.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени в опыте на релаксацию при сжатии цилиндрического образца:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left( 1 - \frac{2(1+\nu)}{E} \left( \sum_{i=1}^{n_G} G_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right).$$

**Апробация методики.** Для определения по вышеизложенной методике вязкоупругих параметров полимерного материала Фторопласт-4 на машине Instron 5567 были проведены механические испытания стандартных цилиндрических образцов на кратковременную релаксацию при сжатии. Полученные зависимости приведенного усилия от времени для различных уровней деформации при модуле Юнга  $E = 600$  МПа представлены на рисунке 1.

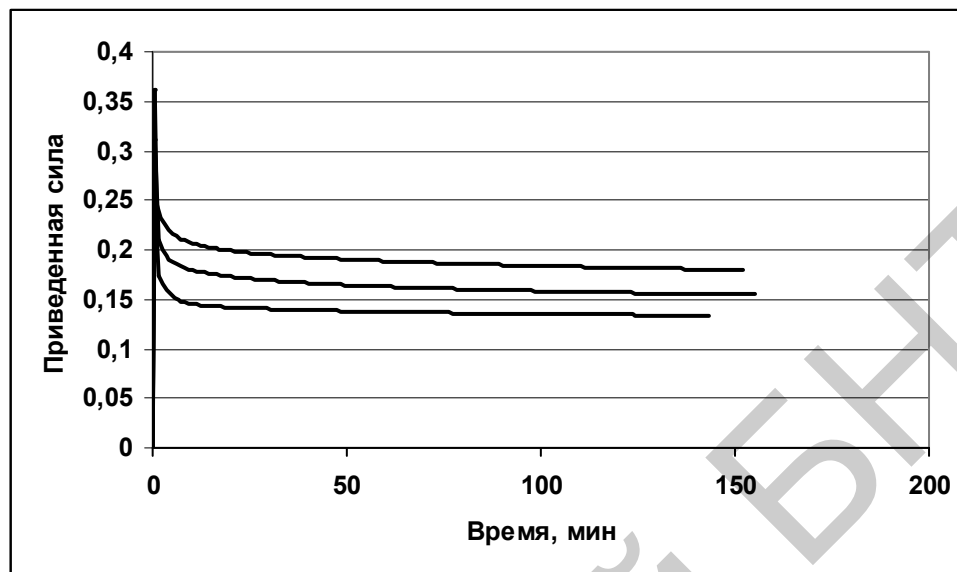


Рисунок 1. - Кривые приведенного усилия  $\left(\frac{P(t)}{E\varepsilon S_0}\right)$  для материала Фторопласт-4.

Нижняя кривая соответствует  $\varepsilon = -0,142$ , срединная кривая –  $\varepsilon = -0,111$ , верхняя кривая –  $\varepsilon = -0,079$ . Расхождение не превышает 20 %.

Для вычисления параметров модели использовалась силовая характеристика при  $\varepsilon = -0,111$  в виде 4-х пар значений времени и приведенной силы (таблица 1).

Таблица 1.

Значения приведенной силы для 4-х моментов времени

$t_i$ , мин	1,36	20,36	80,36	100,36
$\frac{P}{E\varepsilon_0 S_0}, E=600$ МПа	0,210	0,172	0,160	0,158

Для квадратичного отклонения (невязки)  $\Delta$  записывалось выражение:

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \left( P_{прив}^i - 1 + \frac{2(1+\nu)}{E} \left( \sum_{i=1}^{n_G} G_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right)^2.$$

Минимизируя невязку, находим константы  $G_\infty, G_1, \lambda_1$  в зависимости от модуля Юнга в предположении известного коэффициента Пуассона (далее принято  $\nu = 0,4$ ). Результаты для  $n_G = 1$  представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

Параметры функции сдвига в модели Прони ( $n_G = 1$ ) в зависимости от модуля Юнга

$E$ , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$G_\infty$ , МПа	35,1	35,2	35,1	34,9	34,8	35,2	34,6
$G_1$ , МПа	18,5	36,3	54,2	72,2	108,1	143,4	179,7
$\lambda_1$ , мин	2,2	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5

$\Delta_{\dot{\sigma}_i}$ , %	2,8	3,0	2,8	3,0	3,0	3,0	3,2
-------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Аналогично находим константы  $G_{\infty}, G_1, G_2, \lambda_1, \lambda_2$  в зависимости от величины модуля Юнга при  $n_G = 2$  (таблица 3).

Таблица 3.

Параметры функции сдвига в модели Прони ( $n_G = 2$ ) в зависимости от модуля Юнга

$E$ , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$G_{\infty}$ , МПа	34,5	34,5	34,5	34,4	34,4	34,6	34,4
$G_1$ , МПа	18,4	36,1	54,0	71,8	107,6	142,8	178,9
$G_2$ , МПа	0,641	0,851	0,830	0,947	0,894	1,22	1,01
$\lambda_1$ , мин	2,0	0,95	0,75	0,65	0,55	0,45	0,45
$\lambda_2$ , мин	40	40	40	50	50	30	50
$\Delta_{\dot{\sigma}_i}$ , %	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4

Для моделирования напряженно-деформированного состояния цилиндрического образца из ПТФЭ при сжатии были проведены испытания со скоростью движения траверсы машины 5 мм/мин, 100 мм/мин, 300 мм/мин. Экспериментальные зависимости представлены на рисунках 2,3.

Для моделирования сжатия цилиндрического образца с различными скоростями движения траверсы найдены параметры модели Прони ( $n_G = 1$ ), ( $n_G = 2$ ) в зависимости от модуля Юнга при постоянном коэффициенте Пуассона ( $\nu = 0,4$ ). По найденным значениям определены аналитические зависимости усилия от времени и вычислена средняя относительная погрешность при 3 различных скоростях нагружения. Результаты представлены в таблицах 4,5.

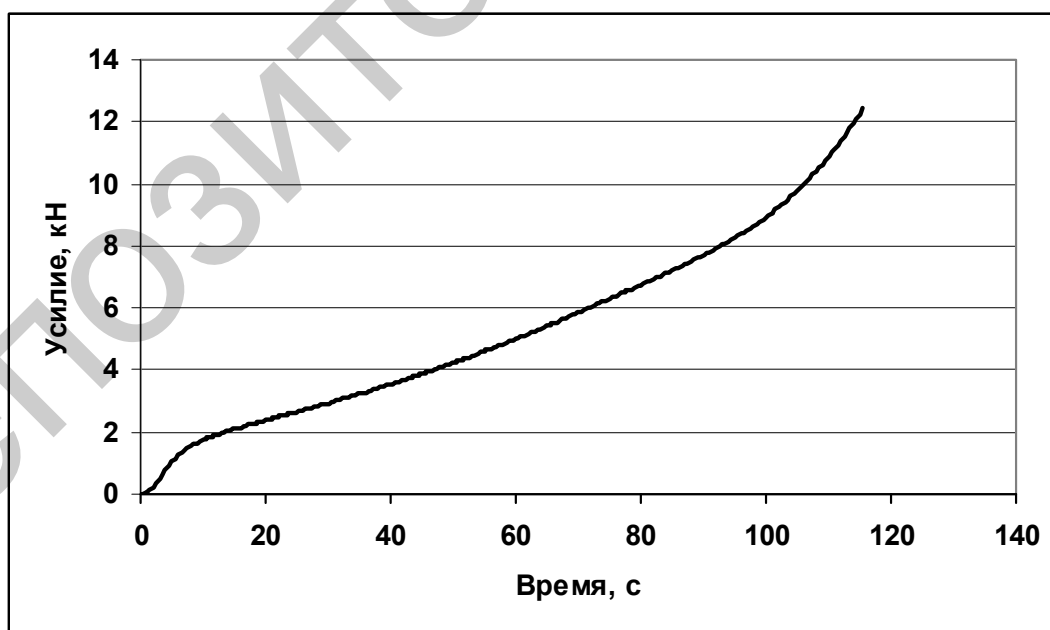


Рисунок 2. - Зависимости «Усилие (Н) – Время (мин)», полученные из испытаний на сжатие цилиндрического образца со скоростью 5 мм/мин.

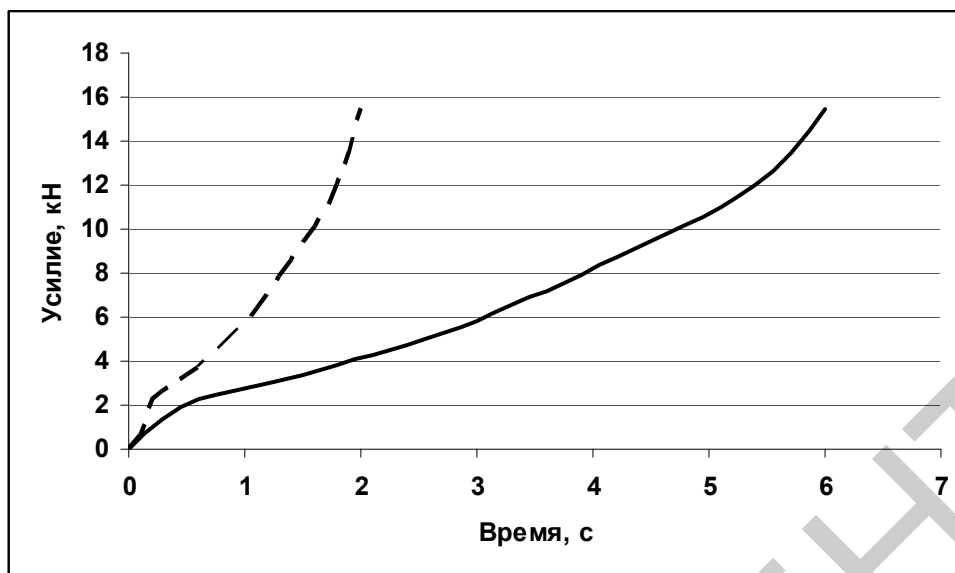


Рисунок 3. - Зависимость усилия от времени при сжатии со скоростью 100 мм/мин (сплошная линия) и 300 мм/мин (пунктирная линия).

Таблица 4.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ( $n_G = 1$ ) в зависимости от величины модуля Юнга.

$E$ , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{иди}}$ , %	25	47	74	101	158	213	272

Таблица 5.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ( $n_G = 2$ ) в зависимости от модуля Юнга.

$E$ , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{иди}}$ , %	26	48	73	100	164	210	268

Максимальное значение модуля Юнга при определении параметров вязкоупругой модели, взято априори достоверным (600 МПа), что было подтверждено значением средней относительной погрешности определения усилия, а его минимальное значение выбиралось из условия физической достоверности.

**Результаты идентификации.** При идентификации модели Прони ( $n_G = 1$ ) для материала Фторопласт-4 при  $E = 150$  МПа,  $\nu = 0,4$  были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно:

$$K(\xi) = 163,7 + 86,3 \times e^{-\frac{\xi}{2,2}},$$

$$G(\xi) = 35,1 + 18,5 \times e^{-\frac{\xi}{2,2}}.$$

Здесь  $K_\infty = 163,7$  МПа,  $\hat{E}_1 = 86,3$  МПа,  $\tau_1^K = 2,2$  мин,  $G_\infty = 35,1$  МПа,  $G_1 = 18,5$  МПа,  $\tau_1^G = 2,2$  мин. Согласно описанию программы ANSYS [5], вводятся дополнительные параметры:

$G_0 = G_\infty + G_1$ ,  $K_0 = K_\infty + K_1$ ,  $\alpha_1^G = \frac{G_1}{G_0}$ ,  $\alpha_1^K = \frac{K_1}{K_0}$ , которые для полученных данных равны

соответственно:  $G_0 = 53,6$  МПа,  $K_0 = 250$  МПа,  $\alpha_1^G = 0,345$ ,  $\alpha_1^K = 0,345$ . К ним следует добавить упругие параметры:  $E = 150$  МПа,  $\nu = 0,4$ .

При идентификации модели Прони ( $n_G = 2$ ) для материала Фторопласт-4 были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации ( $E = 150$  МПа,  $\nu = 0,4$ ):

$$K(\xi) = 161,3 + 85,7 \times e^{-\frac{\xi}{2,0}} + 2,98 \times e^{-\frac{\xi}{40,0}},$$
$$G(\xi) = 34,5 + 18,4 \times e^{-\frac{\xi}{2,0}} + 0,641 \times e^{-\frac{\xi}{40,0}}.$$

Здесь  $K_\infty = 161,3$  МПа,  $\hat{E}_1 = 85,7$  МПа,  $\hat{E}_2 = 2,98$  МПа,  $\tau_1^K = 2,0$  мин,  $\tau_2^K = 40,0$  мин,  $G_\infty = 34,5$  МПа,  $G_1 = 18,4$  МПа,  $G_2 = 0,641$  МПа,  $\tau_1^G = 2,0$  мин,  $\tau_2^G = 40,0$  мин. Согласно описанию программного продукта ANSYS, вводятся дополнительные параметры:  $G_0 = G_\infty + G_1 + G_2$ ,  $K_0 = K_\infty + K_1 + K_2$ ,  $\alpha_1^G = \frac{G_1}{G_0}$ ,  $\alpha_2^G = \frac{G_2}{G_0}$ ,  $\alpha_1^K = \frac{K_1}{K_0}$ ,  $\alpha_2^K = \frac{K_2}{K_0}$ , которые для полученных исходных данных принимают следующие значения:  $G_0 = 53,6$  МПа,  $K_0 = 250$  МПа,  $\alpha_1^G = 0,343$ ,  $\alpha_2^G = 0,012$ ,  $\alpha_1^K = 0,343$ ,  $\alpha_2^K = 0,012$ .

**Закключение.** Представленная методика идентификации может быть использована в инженерных расчетах для определения области применимости и значений параметров вязкоупругой модели Прони. Для полимерного материала Фторопласт-4 выполнено моделирование одноосного сжатия и определена область применимости модели Прони с погрешностью, не превышающей 25 %. Параметры упругой модели, полученные при идентификации модели Прони, соответствуют параметрам, полученным из одноосных испытаний и рассчитанным по известным методикам определения модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

## РЕЗЮМЕ

Представлена методика идентификации вязкоупругой модели Прони в предположении постоянства коэффициента Пуассона. По результатам испытаний полимерного материала Фторопласт-4 на релаксацию при сжатии получена оценка точности линейной модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации. Проведена верификация предложенной вязкоупругой модели на основании соотношений Прони с оценкой погрешности входных данных

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. Механика полимерных и композиционных материалов: учебное пособие / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев – М.: Наука, 1985. – 303 с.
2. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебное пособие / Э.И. Старовойтов – Гомель: Белгуд, 2001. – 344 с.
3. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация: учебное пособие / М.А. Колтунов – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости: учебное пособие / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1974. – 340 с.
5. ANSYS Revision 10-12.

## SUMMARY

*This papers considers the problem of identification technique of Prony's viscoelastic model for constant Poisson's on relaxation under compression for polymer material Ftoroplast-4.*

Поступила в редакцию 24.10.2013