УДК 539:374.002.62

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЕПРЕГОВ

д. ф.-м. н. [1] **Василевич Ю.В.,** к. т. н. [2] **Горелый К.А.,** [3] **Сахоненко В.М.,** [3] **Сахоненко С.В.**

[1] *УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*
[2] *ОАО «Авангард», Россия*
[3] *Московский государственный открытый университет, Россия*

Рассматриваем равновесное состояние препрегов, которые представляют собой ортотропную многослойную структуру на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон и пропитанных связующим в неотвержденном состоянии. Тканый материал состоит из комбинации двух семейств нитей, связанных между собой определенной зависимостью. Для стеклотканей гладкого переплетения (полотняное, саржевое и атласное) эта зависимость осуществляется посредством сил трения скольжения. Строение тканей гладкого переплетения позволяет нитям одного семейства создавать для любой нити второго семейства своеобразный канал, по которому они могут скользить, преодолевая силы трения в узлах переплетения. При этом перемещения нитей могут достигать конечных значений. В результате такие перемещения в отдельных случаях могут превращать область деформирования из односвязной в многосвязную, например, при проколе отверстия.

Предполагается, что нагрузки, приложенные к препрегу, возрастают очень медленно от нулевых до своих окончательных значений и остаются в этом конечном состоянии без изменений. Допускается, что тепло, выделяемое в процессе этого медленного деформирования, отводится так, что термодинамический процесс можно считать изотермическим. Исключается возникновение источников тепла и нагревание поверхности. Предполагается поэтому, что температура в каждой точке физической системы постоянна. В частности, тепло, вырабатываемое силами трения, выводится полностью в окружающую среду. Предполагаем далее, что в физической системе отсутствуют начальные деформации, вызванные усадкой или набуханием материала. Наконец, предполагаем, что во время деформации на поверхности не возникает дополнительных связей, опорных реакций. Предположение изотермичности процесса деформации приводит к тому, что энергия деформации не зависит от температуры, поэтому энергия равна работе сил, вызывающих деформацию. На этом основании предполагается отсутствие влияния сил трения на удельную потенциальную энергию деформации препрегов. Другими словами, работу сил трения на соответствующих перемещениях при выводе энергетических зависимостей для физической системы следует полагать равной нулю.

Проведенные исследования с препрегами, у которых наполнителями служат стеклоткани гладкого переплетения, показали, что для этого материала необходимо расширить закон Гука до введения в его линейные зависимости постоянных слагаемых [1]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}+\gamma_{11},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}+\gamma_{22},\\ \varepsilon_{12}=\frac{\sigma_{12}}{E_{12}}+\gamma_{12},\quad \varepsilon_{21}=\frac{\sigma_{21}}{E_{21}}+\gamma_{21}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь первые два уравнения представляют растяжение нитей в продольном направлении, а два вторых – сжатие нитей в поперечном направлении. Следует также отметить, что в установленном законе (1) постоянные коэффициенты при компонентах напряжений характеризуют упругость армирующего материала препрегов, а постоянные слагаемые в линейных формах – свойства неупругости. Останавливаясь на сжатии препрегов, необходимо отметить, что сжатие в обычном понимании приводит к потере устойчивости армирующего материала, так как нити в тканых материалах следует считать абсолютно гибкими. Сжатие без потери устойчивости может быть осуществлено только совместно с растяжением. Это эквивалентно случаю, когда одно семейство нитей растягивается, а второе - сжимается в поперечном направлении. Простейший случай такого сжатия получается при параллельном сдвиге одного семейства нитей вдоль второго. Такое сжатие с растяжением сопровождается большими перемещениями нитей семейств относительно друг друга и возникновением сил трения между ними. Превышение предельных сил трения приводит к сдвигу со смещением между нитями семейств в узлах переплетения. Силы трения каждого семейства нитей приложены в направлении касательных к нитям и составляют между собой тупой угол. Предельные силы трения выражаются зависимостями [2]

$$\begin{aligned} \tau_{12}^{\text{пр}} &= (k_{11}\sigma_{11} + k_{12}\sigma_{22} + \mu_1 p)\, sin\,\alpha, \\ \tau_{21}^{\text{пр}} &= (k_{21}\sigma_{11} + k_{22}\sigma_{22} + \mu_2 p)\, sin\,\alpha, \end{aligned} \qquad (2)$$

где α - угол между нитями семейств. При этом минимальные значения напряжений растяжения σ_{11}^{0} и σ_{22}^{0}, при которых возможен сдвиг, равны

$$\sigma_{11}^{0} = \sigma_{10} + \frac{\mu_1}{k_{11}} p, \quad \sigma_{22}^{0} = \sigma_{20} + \frac{\mu_2}{k_{22}} p. \qquad (3)$$

Здесь p - удельное давление внутри препрега; σ_{10}, σ_{20} - напряжения растяжения в нитях, возникшие в результате ткачества полотна ткани; k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}, μ_1, μ_2 - постоянные числа, отождествляемые с коэффициентами внутреннего трения.

Гипотезы об абсолютной гибкости нитей и достаточной малости коэффициентов внутреннего трения позволили получить уравнения равновесия [3]

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{R_1}{h_0}(k_{12}\sigma_{22} + \mu_1 p)\sin\alpha = 0\,, \\ &\frac{\sigma_{22}}{\partial\alpha_2} - \frac{R_2}{h_0}(k_{12}\sigma_{11} + \mu_2 p)\sin\alpha = 0\,, \\ &\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial R_1} = -\left(\frac{k_{21}}{h_0} - \frac{1}{R_1}\right)\sigma_{11} + \frac{k_{12}}{h_0}\sigma_{22}\, cos\,\alpha - \frac{\mu_2 - \mu_1\cos\alpha}{h_0}\, p\,, \\ &\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial R_2} = -\left(\frac{k_{12}}{h_0} - \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{22} + \frac{k_{21}}{h_0}\sigma_{11}\, cos\,\alpha - \frac{\mu_1 - \mu_2\cos\alpha}{h_0}\, p\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

где α_1, R_1 и α_2,R_2- полярные координаты, относящиеся к семействам нитей «1» и «2»; h_0- толщина слоя ткани.

Пусть в какой-то точке ткани в результате деформации угол между семействами нитей стал равным α. Вырежем небольшой ромбик из ткани с длиной стороны a и гранями перпендикулярными к главным осям напряжений сжатия семейств нитей σ_{12} и σ_{21}. Предположим, что величины главных напряжений σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22} и главных деформаций ε_{11}, ε_{12}, ε_{21}, ε_{22} достигнуты в результате непрерывного нарастания, и промежуточные значения напряжений и деформаций соответственно равны $k\sigma_{11}$, $k\sigma_{12}$, $k\sigma_{21}$, $k\sigma_{22}$, $k\varepsilon_{11}'$, $k\varepsilon_{12}'$, $k\varepsilon_{21}'$, $k\varepsilon_{22}'$, где k изменяется от 0 до 1, а $k\varepsilon_{ij}' = (\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij},)$ - относительная линейная деформация. Работа от неупругой относительной деформации γ_{ij} $(i,j = 1,2)$ равна нулю. Тогда в любой стадии сила, приложенная, например, к нитям семейства «1» и растягивающая их будет равна $kh_0 a\,\sigma_{11} sin\,\alpha$, а упругое перемещение этих нитей в направлении σ_{11} при увеличении k до $k + dk$ будет равно $a\varepsilon_{11}' dk$, так что полная работа, произведенная силами в направлении σ_{11}, в конечном итоге будет иметь вид

$$h_0 a^2\, \sigma_{11}\varepsilon_{11}' sin\,\alpha \int_0^1 k\, dk = \frac{1}{2}\, h_0 a^2\, \sigma_{11}\varepsilon_{11}' sin\,\alpha.$$

Работа при сжатии вырезанного тела в направлении напряжения σ_{12}, равна работе при сжатии параллелепипеда размером $h_0 \times a \times a\; sin\,\alpha$. В этом случае сжимающая сила $h_0 a\sigma_{12} k$ на упругом перемещении, равном $a\varepsilon_{12}' sin\,\alpha\; dk$, производит работу

$$\frac{1}{2}\, h_0 a^2\, \sigma_{12}\varepsilon_{12}' sin\,\alpha.$$

Аналогичные выражения можно получить и относительно других направлений. Сложим их вместе и разделим на объем вырезанного тела $h_0 a^2\, sin\,\alpha$. В результате получим

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11}' + \sigma_{22}\varepsilon_{22}' + \sigma_{12}\varepsilon_{12}' + \sigma_{21}\varepsilon_{21}'), \qquad (5)$$

где W является удельной потенциальной энергией деформации. Необходимо также отметить, что конечная величина накопленной энергии независима от характера нагружения и линейное выражение нагрузки в данном случае выбрано лишь для простоты расчета.

Выражение для удельной потенциальной энергии может быть представлено в другой форме. Используя выражения (1), можно получить

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}+\sigma_{22}\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}+\sigma_{12}\frac{\sigma_{12}}{E_{12}}+\sigma_{21}\frac{\sigma_{21}}{E_{21}}\right).$$

Таким образом, удельная потенциальная энергия деформации является положительно определенной величиной.

Докажем единственность решения краевых задач статики препрегов. Такое доказательство строится на решении, удовлетворяющем как дифференциальным уравнениям статики, так и граничным условиям задачи. Оно базируется на том, что предположение о неединственности приводит к противоречию. Предположим, имеются два решения: $u_i^{(1)}$, $v_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $v_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, которые удовлетворяют одним и тем же граничным условиям и основным уравнениям (1) - (5).

Введем обозначения: $\tilde{u}_i=u_i^{(1)}-u_i^{(2)}$, $\tilde{v}_i=v_i^{(1)}-v_i^{(2)}$, $\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(1)}-\varepsilon_{ij}^{(2)}$. Легко показать, что напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ и относительные деформации $\tilde{\varepsilon}_{ij}$должны удовлетворять и удовлетворяют обобщенному закону Гука (1) при равенстве нулю неупругих относительных деформаций γ_{ij} и уравнениям равновесия (4) при отсутствии в них давления p. Также компоненты перемещений и компоненты напряжений удовлетворяют нулевым граничным условиям. Кроме того, в силу изотермического процесса деформирования препрегов работу сил трения на соответствующих перемещениях считаем равной нулю. С учетом сделанных замечаний покажем, что внутри препрега исчезают деформации и напряжения. С этой целью рассмотрим работу деформации одного слоя ткани. На основании (5) имеем

$$\tilde{A}=h_0\int_F\tilde{W}\,dF=\frac{h_0}{2}\int_F(\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\varepsilon}_{11}+\tilde{\sigma}_{22}\tilde{\varepsilon}_{22}+\tilde{\sigma}_{12}\tilde{\varepsilon}_{12}+\tilde{\sigma}_{21}\tilde{\varepsilon}_{21})dF\,. \quad (6)$$

Преобразуем выражение (6), учитывая, что между деформациями и перемещениями существуют зависимости

$$\widetilde{\varepsilon_{11}'}=\frac{1}{R_1}\,\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\tilde{u}_1}{R_1}\,,\quad \widetilde{\varepsilon_{12}'}=\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial R_1}\,,$$

$$\widetilde{\varepsilon_{22}'}=\frac{1}{R_1}\,\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\tilde{u}_2}{R_2}\,,\quad \widetilde{\varepsilon_{21}'}=\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial R_2}\,.$$

Эти соотношения справедливы, если их правые части достаточно малы. Для тканей гладкого переплетения ε_{ij}' малы, следовательно, малы и $\widetilde{\varepsilon_{ij}'}$. На этом основании указанные зависимости между деформациями и перемещениями справедливы. Тогда, применяя предыдущие зависимости и закон (4), получим

$$\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\varepsilon}_{11}=\frac{1}{R_1}\,\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\tilde{\sigma}_{11}\tilde{v}_{11})+\frac{\tilde{\tau}_{12}^{\text{пр}}\tilde{v}_1}{h_0}+\frac{\tilde{\sigma}_{11}\tilde{u}_1}{R_1}\,,$$

$$\tilde{\sigma}_{12}\tilde{\varepsilon}_{12}=\frac{\partial}{\partial R_1}\,(\tilde{\sigma}_{12}\tilde{u}_1)-\frac{\tilde{\sigma}_{11}\tilde{u}_1}{R_1}+\frac{\tilde{\tau}_{21}\tilde{u}_1}{h_0}\sin\alpha\,,$$

$$\tilde{\sigma}_{22}\tilde{\varepsilon}_{22}=\frac{1}{R_2}\,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\tilde{\sigma}_{22}\tilde{v}_2)+\frac{\tilde{\tau}_{21}^{\text{пр}}\tilde{v}_2}{h_0}+\frac{\tilde{\sigma}_{22}\tilde{u}_2}{R_2}\,,$$

$$\tilde{\sigma}_{21}\tilde{\varepsilon}_{21}=\frac{\partial}{\partial R_2}\,(\tilde{\sigma}_{21}\tilde{u}_2)-\frac{\tilde{\sigma}_{22}\tilde{u}_2}{R_2}+\frac{\tilde{\tau}_{12}\tilde{u}_2}{h_0}\sin\alpha\,.$$

Воспользовавшись формулой Грина и представлениями выше, (6) преобразуем к виду

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\int_S (\tilde{\sigma}_{11}\tilde{v}_1 + \tilde{\sigma}_{12}\tilde{u}_1 + \tilde{\sigma}_{22}\tilde{v}_2 + \tilde{\sigma}_{21}\tilde{u}_2)dS +$$

$$+\frac{1}{2}\int_F \left(\tilde{\tau}_{12}^{\text{пр}}\tilde{v}_1 + \tilde{\tau}_{21}\tilde{u}_1 sin\,\alpha + \tilde{\tau}_{12}^{\text{пр}}\tilde{v}_2 + \tilde{\tau}_{12}\tilde{u}_2 \sin\alpha\right)dF \ .$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ удовлетворяют нулевым граничным условиям. Второй интеграл в полученном равенстве тоже равен нулю в силу того, что он представляет работу сил трения на перемещениях $\tilde{u}_{ij}$и $\tilde{v}_{ij}$. В таком случае равенство (6) принимает вид

$$\int_F \widetilde{W} dF = 0.$$

Поскольку величина удельной потенциальной энергии упругой деформации всегда положительна, то с учетом (1) это равенство может быть выполнено только для

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = 0$$

Отсюда следует

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)},$$

что и доказывает единственность решения краевой задачи.

РЕЗЮМЕ

Структура тканей гладкого переплетения способствует нитям одного семейства скользить по нитям второго семейства в процессе деформирования препрегов. Сопротивлением такому движению являются силы трения. Для изотермического процесса деформирования препрегов доказана единственность решения статических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колганов В.И., Колганов А.В, Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Метод исследования напряженно – деформированного состояния неотвержденных композиционно - волокнистых материалов. - Межвуз.сб. Вып.4 «Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий», СПб.:2001. С. 125-134.
2. Комков М.А., Колганов В.И., Колганов А.В, Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Сдвиговые перемещения нитей в неотвержденных тканых композитах под действием внешних нагрузок. Вопросы оборонной техники. Серия 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: НТЦ «Информтехника». – Вып. 1(134) – 2 (135), 2004 г. С.51-55.
3. Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Модель деформирования препрегов в условиях равновесия // Межведомственный научно-технический сборник «Машиностроение» - 2007. №22. С.134-142.

SUMMARY

Plain weave fabric structure facilitates the threads of a family slide over the threads of the second family in the process of deformation of prepregs. Resistance of such a movement is the friction force. For isothermal deformation process of the uniqueness of solutions prepregs static problems.

Поступила в редакцию 01.10.2013