

## ФАЗЗИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Докт. техн. наук, проф. **ЛОБАТЫЙ А. А.**, асп. **АЛЬ-МАШХАДАНИ М. А.**

Белорусский национальный технический университет

Все большее распространение получают системы нечеткой логики (СНЛ) в системах автоматического управления, системах принятия решения. Это обусловлено тем, что СНЛ дают возможность получать относительно простое решение задачи определения искомого сигнала при наличии большого числа неопределенностей в исходной информации, поступающей на вход системы. Кроме того, СНЛ в отличие от традиционных систем обработки информации способны учитывать при принятии решения «опыт эксперта» – априорно имеющуюся информацию, не поддающуюся формализации.

Типовая СНЛ включает в себя следующие основные блоки, приведенные на рис. 1.

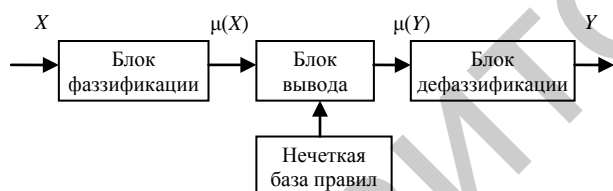


Рис. 1. Система нечеткой логики

Функциональное назначение блоков СНЛ подробно описано в соответствующих источниках [1, 2]. Отметим только, что в блоке вывода на основе нечеткой базы правил производится основная обработка информации, представленной в виде нечетких множеств. Блок дефаззификации преобразует «нечеткую» (неконкретную) информацию в «четкую» (конкретную).

Получение с помощью СНЛ необходимого результата в значительной степени зависит от работы блока фаззификации, задачей которого является преобразование измеренных реальных данных (например, температуры, скорости, электрического тока и т. д.) в подходящие для

этого значения лингвистических переменных, представляющих собой нечеткие подмножества, формализованные с помощью функций принадлежности, изменяющихся в интервале  $[0, 1]$ .

Задача фаззификации успешно решается тогда, когда значения входных переменных являются детерминированными (не зашумленными). В этом случае фаззификация сводится к тому, что функция принадлежности  $\mu(x, t)$  будет равна единице в точке измерения входного параметра  $x(t)$  и нулю – во всех остальных точках.

В случае, когда входной сигнал является случайным, блок фаззификации должен преобразовывать в нечеткие числа вероятностные данные. При этом должна быть определена процедура преобразования вероятностного значения (вероятностной характеристики) в возможностное (функцию принадлежности).

**Статистическая линейаризация системы.** Пусть на вход СНЛ поступает векторный сигнал  $X(t)$  с выхода нелинейной системы, на вход которой поступает векторный случайный сигнал  $\xi(t)$  (рис. 2).

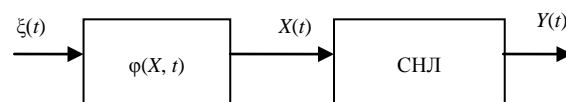


Рис. 2. Нелинейная стохастическая система

Динамическая стохастическая система описывается векторным нелинейным уравнением в виде [3]

$$\dot{X}(t) = \varphi(X, t) + \xi(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X(t)$  – в общем случае  $n$ -мерный случайный вектор (матрица-столбец);  $\varphi(X, t)$  – векторная детерминированная нелинейная функция с ком-

понентами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ;  $\xi(t)$  – вектор белого гауссова шума, имеющий математическое ожидание  $m_\xi(t)$  и матрицу интенсивностей  $G(t)$ .

Следует заметить, что практически любую математическую модель системы с небелыми шумами можно преобразовать в математическую модель с векторным аддитивным белым шумом путем расширения вектора состояния фазовых координат рассматриваемой системы.

Применив метод статистической линеаризации [3, 4] к векторной нелинейности  $\varphi(X, t)$ , получим линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \varphi_0(m_x, \theta_x, t) + K(m_x, \theta_x, t)X^0 + \xi(t), \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где статистическая характеристика  $\varphi_0$  и матрица  $K$  статистических коэффициентов усиления зависят от вектора  $m_x(t)$  и корреляционной матрицы  $\theta_x(t)$ .

Применяя операцию математического ожидания к уравнению (2), получим нелинейное уравнение для вектора математического ожидания  $m_x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{m}_x(t) &= \varphi_0(m_x, \theta_x, t) + m_{\xi}(t), \\ m_x(t_0) &= m_{x0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Почленным вычитанием уравнения (3) из (2) получается линейное векторное дифференциальное уравнение относительно централизованной составляющей вектора состояния  $X^0(t)$

$$\begin{aligned} \dot{X}^0(t) &= K(m_x, \theta_x, t)X^0 + \xi^0(t), \\ X^0(t_0) &= X_0^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение для матрицы корреляционных моментов  $\theta_x(t) = M[X^0(t)X^{0T}(t)]$  получается дифференцированием  $\theta_x(t)$  и подстановкой в выражение для  $\dot{\theta}_x(t)$  соответствующих компонент выражения (4). После несложных преобразований, которые приведены в популярной литературе, уравнение для матрицы  $\theta_x(t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x(t) &= K(m_x, \theta_x, t)\theta_x(t) + \theta_x K^T(m_x, \theta_x, t) + G(t), \\ \theta_x(t_0) &= \theta_{x0}. \end{aligned} \quad (5)$$

**Определение функции принадлежности выходных сигналов.** Решение уравнений (3) и (5) позволяет получить вектор  $m_x(t)$  и матрицу  $\theta_x(t)$ . Если считать, что плотность вероятности распределения процесса  $X(t)$  гауссова, то этого

вовне достаточно для определения  $n$ -мерной плотности вероятности  $f(x)$ , которая имеет вид [4]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n \Delta(t)}} \exp\left[-\frac{\Delta^*(t)}{2\Delta(t)}\right], \quad (6)$$

где  $\Delta(t)$  – определитель матрицы  $\theta_x(t)$ ;  $\Delta^*(t)$  – окаймленный определитель, получаемый из  $\Delta(t)$  путем приписывания одного  $(n + 1)$  столбца и  $(n + 1)$  строки, состоящих из членов  $x_1 - m_{x1}, x_2 - m_{x2}, \dots, x_n - m_{xn}, 0$ .

Переход от плотности вероятности  $f(x)$  к функции принадлежности  $\mu(x)$  предлагается производить путем нормирования  $f(x)$ . При этом предполагается, что

$$\mu(x) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{f(x_1 = m_{x1}, x_2 = m_{x2}, \dots, x_n = m_{xn}, t)}. \quad (7)$$

Так как для практического применения в СНЛ используются, как правило, одномерные функции  $\mu(x)$ , то получение их из многомерной плотности вероятности не составляет труда, учитывая, что распределение компонент  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  вектора  $X(t)$  также гауссово.

В скалярной форме статистически линеаризованные уравнения для математических ожиданий и корреляционных моментов компонент вектора  $X(t)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{xi}(t) &= \varphi_{i0}(m_x, \theta_x, t) + m_{\xi_i}(t), \\ m_{xi}(t_0) &= m_{xi0}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{xki}(t) &= \sum_{j=1}^n [K_{kj}(m_x, \theta_x, t)\theta_{xji}(t) + \\ &+ K_{ij}(m_x, \theta_x, t)\theta_{xkj}(t)] + G_{ki}(t), \\ \theta_{xki}(t_0) &= \theta_{xki0}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k, i = \overline{1, n}$ .

Заметим, что матрица  $\theta_x(t)$  симметричная, поэтому  $\theta_{xij}(t) = \theta_{xji}(t)$  и число независимых уравнений для корреляционных моментов равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ , где  $n$  – порядок исходной системы уравнений (1).

Для типовых нелинейностей коэффициенты статистической линеаризации вычислены и приведены в соответствующих источниках [4].

Для нелинейностей любого вида статистическая характеристика нелинейности  $\varphi_{i0}(m_x, D_x)$  определяется по формуле [3]

$$\varphi_{i0}(m_x, D_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) f_i(x, t) dx. \quad (10)$$

Статистические коэффициенты усиления  $K_i$  могут вычисляться двумя способами. По первому коэффициенты  $K_i = K_i^{(1)}$  определяются на основе выполнения условия равенства математических ожиданий и дисперсий истинной и аппроксимируемой зависимостей. По второму способу коэффициенты  $K_i = K_i^{(2)}$  определяются на основе выполнения условия минимума среднего квадрата ошибки статистической аппроксимации соответствующей нелинейности  $\varphi_i(x)$ :

$$K_i^{(1)}(m_x, D_x) = \pm \frac{1}{\sqrt{D_x}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^2(x) f_i(x, t) dx - \varphi_{i0}^2(m_x, D_x) \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (11)$$

$$K_i^{(2)}(m_x, D_x) = \pm \frac{1}{D_x} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x) \varphi_i(x) f_i(x, t) dx. \quad (12)$$

*Пример.* В качестве примера рассмотрим систему автоматической стабилизации летательного аппарата (ЛА) по крену. Система стабилизации должна обеспечить полет ЛА с нулевым заданным углом крена, несмотря на воздействие возмущающего момента  $M_B$ , стремящегося развернуть ЛА относительно продольной оси [5]. Не вдаваясь в детали функциональной схемы, будем считать, что система управления содержит гироскопические измерительные устройства, измеряющие угол крена  $\gamma$  и угловую скорость крена  $\dot{\gamma}$ . Показание гироскопических измерителей в виде суммарного напряжения  $u$

$$u = k_\gamma \gamma + k_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \quad (13)$$

подается на привод элеронов. Полагая его быстродействующим безынерционным, запишем выражение для угла  $\delta$  отклонения элеронов

$$\delta = \varphi(u) = \begin{cases} u, & |u| < \delta_m, \\ \delta_m, & |u| \geq \delta_m. \end{cases} \quad (14)$$

График функции  $\varphi(u)$  приведен на рис. 3. Формула (13) и график (рис. 3) показывают, что

угол отклонения элеронов  $\delta$  ограничен предельным значением  $\delta_m$ .

Уравнение движения ЛА относительно продольной оси имеет вид

$$J_{xx} \ddot{\gamma} = M + M_B, \quad (15)$$

где  $J_{xx}$  – момент инерции ЛА относительно продольной оси;  $M$  – аэродинамический момент;  $M_B$  – возмущающий момент, являющийся входной переменной. Из аэродинамики известно, что  $M$  зависит от движения ЛА по крену и от угла отклонения элеронов:

$$M = m_x^\gamma \dot{\gamma} + m_x^\delta \delta. \quad (16)$$

Коэффициенты  $m_x^\gamma$  и  $m_x^\delta$  зависят от конструкции ЛА, его скорости, высоты полета (плотности воздуха) и других характеристик.

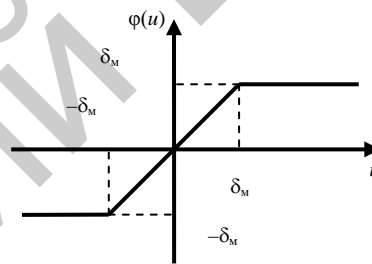


Рис. 3. График функции  $\varphi(u)$

Уравнения (13)–(16) определяют математическую информационную модель и оператор многомерной системы, имеющий выходные переменные  $\gamma$  и  $\delta$  при одной входной переменной  $M_B$ . Если исключить промежуточные переменные  $\gamma$ ,  $u$ ,  $\delta$ , то эти уравнения приводятся к одному для одной выходной переменной  $\gamma$ :

$$J_{xx} \ddot{\gamma} + m_x^\gamma \dot{\gamma} + m_x^\delta \varphi(k_\gamma \gamma + k_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = M_B. \quad (17)$$

Уравнение системы (17) перепишем в форме Коши:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \gamma_2(t); \quad \gamma_1(0) = \gamma_{10}; \quad (18)$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = -a_1 \gamma_2(t) - a_0 \varphi(u) + x(t); \quad \gamma_2(0) = \gamma_{20}, \quad (19)$$

где обозначено  $\gamma_1 = \gamma$ ;  $\gamma_2 = \dot{\gamma}$ ;  $a_0 = \frac{m_x^\delta}{J_{xx}}$ ;

$a_1 = \frac{m_x^\gamma}{J_{xx}}$ ;  $x(t)$  – возмущение со стороны атмосферы, вызывающее ошибку стабилизации по крену,  $x(t)$  имеет математическое ожидание  $m_x$  и случайную стационарную составляющую  $\xi_0^0(t)$  – белый шум интенсивности  $G$ .

В уравнениях (18), (19) следует учесть, что

$$u(t) = k[\gamma_1(t) + T_1\gamma_2(t)], \quad (20)$$

где  $k = k_\gamma$ ;  $T_1 = \frac{k_\gamma}{k_\gamma}$  – постоянная времени.

ЛА должен иметь заданный крен  $\gamma = \gamma_T$ . Для определения систематической ошибки крена (математического ожидания) и дисперсии составим уравнения для вероятностных моментов  $m_\gamma$  и  $\theta_\gamma$ . Предварительно статистически линеаризуем нелинейность  $\varphi(u)$ , записав ее в виде

$$\varphi(u) = \varphi_0(m_u, \theta_u) + k_1(m_u, \theta_u)(u - m_u), \quad (21)$$

где  $\varphi_0$  и  $k_1$  – статистические параметры линеаризации для данной нелинейности, зависящие пока от неизвестных  $m_u$  и  $\theta_u$ .

Подставляя (21) в уравнения (18)–(20) и применяя операцию математического ожидания в выписанных уравнениях, получаем:

$$\dot{m}_1(t) = m_2(t); \quad m_1(0) = m_{10}; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_2(t) &= -a_1 m_2(t) - a_0 \varphi_0(m_u, \theta_u) + m_x(t); \\ m_2(0) &= m_{20}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$m_u(t) = k[m_{\gamma_1}(t) + T m_{\gamma_2}(t)]. \quad (24)$$

Вычитая почленно из (18)–(20) уравнения (22)–(24), получаем уравнения для центрированных составляющих:

$$\dot{\gamma}_1^0(t) = \gamma_2^0(t); \quad \gamma_1^0(0) = \gamma_{10}^0; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2^0(t) &= -a_1 \gamma_2^0(t) - a_0 k_1(m_u, \theta_u) u^0(t) + \xi^0(t); \\ \gamma_2^0(0) &= \gamma_{20}^0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$u^0(t) = k[\gamma_1^0(t) + T \gamma_2^0(t)]. \quad (27)$$

Из выражений (25)–(27) в соответствии с (9) получаем систему дифференциальных уравнений для корреляционных моментов:

$$\dot{\theta}_{11}(t) = 2\theta_{12}(t); \quad \theta_{11}(0) = \theta_{110}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{12} &= \theta_{22} - a_1 \theta_{12} - a_0 k_1(m_u, \theta_u) K(\theta_{11} + T_1 \theta_{12}); \\ \theta_{12}(0) &= \theta_{120}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{22} &= 2a_1 \theta_{22} - 2a_0 k_1(m_u, \theta_u) K(\theta_{12} + T_1 \theta_{22}) + G; \\ \theta_{22}(0) &= \theta_{220}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\theta_u = K^2(\theta_{11} + T^2 \theta_{22} + 2T \theta_{12}); \quad (31)$$

$$\theta_{11}(0) = \theta_0, \quad \theta_{12}(0) = 0, \quad \theta_{22}(0) = 0.$$

Интегрируя уравнения (22), (23) и (28)–(30), получаем все математические ожидания и ковариации, необходимые для вычисления  $m_u$  и  $\theta_u$ , в том числе систематическую ошибку крена  $m_\gamma(t) = m_1(t)$  и дисперсию  $\theta_\gamma(t) = \theta_{11}(t)$ .

Выражения для коэффициентов статистической линеаризации нелинейности типа (14) имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \delta_m \left\{ (1+m_1) \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - (1-m_1) \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} - e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$k_1 = \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right), \quad (33)$$

где  $m_1 = \frac{m_u}{\delta_m}$ ;  $\sigma_1 = \frac{\sigma_u}{\delta_m}$ ;  $\sigma_u = \sqrt{D_u}$ ;  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Крампа.

Заметим, что коэффициент  $k_1 = k_1^{(2)}$  в данном случае вычисляется вторым способом (по критерию минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации нелинейности), так как это несколько проще, чем по первому способу.

Считая плотность вероятности распределения фазовых координат нелинейной динамической системы гауссовой, имеем соответственно выражения для плотности вероятности  $f(\gamma)$  и функции принадлежности  $\mu(\gamma)$ :

$$f(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_\gamma}} \exp\left(-\frac{(u - m_\gamma)^2}{2\theta_\gamma}\right); \quad (34)$$

$$\mu(\gamma) = \exp\left(-\frac{(u - m_\gamma)^2}{2\theta_\gamma}\right). \quad (35)$$

Моделированием в среде MathCad проведено исследование разработанной методики определения функции  $\mu(\gamma)$ . Интегрирование дифференциальных уравнений производили методом Эйлера при следующих условиях:  $J_{xx} = 0,9$ ;  $m_x^\delta = 0,17$ ;  $m_x^\gamma = 0,25$ ;  $m_x(t) = 0,09$ ;  $K = 3$ ;  $T_1 = 0,01$ ;  $m_1(0) = m_2(0) = 0$ ;  $G = 9$ .

Графики изменения математического ожидания и дисперсии угла крена ЛА  $m_\gamma = m1_k$  и  $\theta_\gamma = \theta11_k$  от времени  $t_k$  представлены на рис. 4. Графики изменения коэффициентов статистической линейизации  $\varphi0_k(m_u, \theta_u)$  и  $k1_k(m_u, \theta_u)$  в зависимости от  $t$  приведены на рис. 5.

Графики изменения плотности вероятности  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  и функции принадлежности  $\mu_1(u)$

0 0,2 0,4 0,6 0,8 t 1,0

Рис. 4. Математическое ожидание и дисперсия угла крена

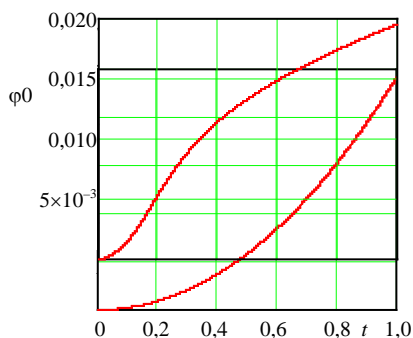


Рис. 5. Коэффициенты статистической линейизации

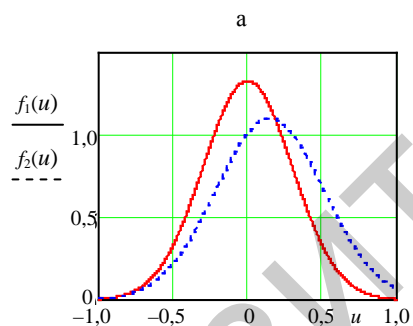


Рис. 6. Изменение плотности вероятности (а) и функции принадлежности (б)

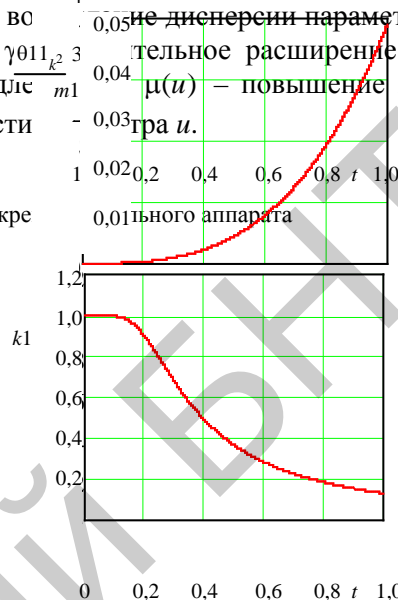
### ВЫВОДЫ

Результаты исследований показывают, что применение статистической линейизации нелинейностей и гауссовой аппроксимации плотности вероятности распределения фазовых координат нелинейной динамической системы, подверженной случайным воздействиям, позволяет вычислять функцию принадлежности выходных параметров данной системы. Такой подход может быть применен для решения широкого класса задач формирования сигналов управления в нечетких регуляторах.

### ЛИТЕРАТУРА

и  $\mu_2(u)$  в моменты времени  $t_1 = 0,01$  с и  $t_2 = 1,00$  с, соответственно представлены на рис. 6.

Из рис. 4 и 6 видно, что при значительных шумах, действующих на систему, происходит резкое увеличение дисперсии параметра управления  $\gamma011_k$  и  $k1_k$  – повышение неопределенности принадлежности  $\mu(u)$  гра и.



0,05  
0,04  
0,03  
0,02  
0,01

1,2  
1,0  
0,8  
0,6  
0,4  
0,2

0,2 0,4 0,6 0,8 t 1,0

0,01

0 0,2 0,4 0,6 0,8 t 1,0

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

0,01

1. Ярушкина, Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем / Н. Г. Ярушкина. – М.: Экономика и финансы, 2004. – 320 с.
2. Гостев, В. И. Проектирование нечетких регуляторов для систем автоматического управления / В. И. Гостев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 416 с.
3. Казаков, И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний / И. Е. Казаков. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
4. Пупков, К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления / К. А. Пупков, И. Д. Егупов. – М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2004. – Т. 2: Методы современной теории автоматического управления. – 640 с.
5. Дмитриевский, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский. – М.: Машиностроение, 2005. – 608 с.

Поступила 15.05.2012