

## О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Морозов Н.Ф.

*The stability of axisymmetric equilibrium states of an isotropic non-homogeneous plate under uniform pressure is considered. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinates. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties. The folds in the narrow zone at the periphery of the Lamina Cribrosa (LC) of the human eye could be explained by the buckling of the axisymmetric state of LC in the nonaxisymmetric state.*

**Введение.** Впервые вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично нагруженной круглой пластины был рассмотрен Пановым Д.Ю. и Феодосьевым В.И. в работе [1]. Методом Галеркина для больших прогибов пластины, нагруженной постоянным давлением, авторы получили некоторое решение, соответствующее несимметричным формам равновесия. Позже Морозов Н.Ф. строго доказал существование несимметричного решения в этом случае [2], а единственность такого решения была доказана Piechocki W.O. в [3]. В работе Cheo L.S., Reiss E.L. [4] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная Cheo и Reiss ([4]), почти в 3 раза больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым ([1]). Формы потери устойчивости также отличаются: по краю пластины образуется 14 ([4]) и 8 ([1]) волн, соответственно. Сравнивая свои решения с результатами работы [1], принимая во внимание результаты работ [2,3], авторы работы [4] пришли к выводу, что аппроксимация неосесимметричного решения, принятая в [1], в виде

$$w = \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \left( A + B \left( \frac{r}{R} \right)^4 \cos n\theta \right)$$

не достаточно точно описывает устойчивое закритическое состояние равновесия. (Здесь  $w(r, \theta)$  – нормальный прогиб,  $r, \theta$  – координаты срединной поверхности пластины  $0 < r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $A, B$  – неизвестные константы,  $n \geq 2$ ).

Ниже рассматривается задача о потере устойчивости неоднородной круглой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Такая пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека [5]. Показано влияние неоднородности пластины на величину критической нагрузки.

**Постановка задачи.** Рассматривается круглая пластина, заземленная по краю и нагруженная нормальным давлением. Полагая, что модуль упругости изотропной пластины меняется при удалении от центра пластины к ее краю, можно получить систему уравнений деформаций

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Delta w + D' L_1^+(w) + D'' L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ \Delta \Delta F / E + (1/E)' L_1^-(F) + (1/E)'' L_2^-(F) &= -hL(w, w) / 2, \\ ( \quad )' &= \frac{\partial}{\partial r}, \quad ( \quad )'' = \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w(r, \theta), F(r, \theta)$  – неизвестные нормальный прогиб и функция усилий;  $R, h, E(r)$  – радиус, толщина, модуль упругости пластины,  $D(r) = E(r)h^3/12(1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  – цилиндрическая жесткость и коэффициент Пуассона  $r, \theta$  – координаты срединной поверхности пластины  $0 < r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $L, L_i^\pm, (i = 1, 2)$  – дифференциальные операторы,  $p$  – нормальное давление.

$$L_1^\pm(y) = 2y''' + \frac{2+\nu}{r}y'' + \frac{2}{r^2}(y')' - \frac{y'}{r^2} - 3\frac{\ddot{y}}{r^3}, \quad L_2^\pm(y) = y'' \pm \nu\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right),$$

$$L(y, z) = y''\left(\frac{z'}{r} + \frac{\ddot{z}}{r^2}\right) + z''\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right) - 2\left(\frac{y'}{r} - \frac{\ddot{y}}{r^2}\right)\left(\frac{z'}{r} - \frac{\ddot{z}}{r^2}\right).$$

Полагаем, что край пластины  $r = R$  закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлениях. В этом случае растягивающее и сдвигающее усилия на контуре равны нулю

$$w = w' = \frac{F'}{r} + \frac{\ddot{F}}{r^2} = -\left(\frac{\dot{F}}{r}\right)' = 0. \quad (2)$$

Обозначим среднее значение модуля упругости за  $E_{av}$

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r) r dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r), \quad (3)$$

где  $f(r)$  – достаточно гладкая, положительная на отрезке  $[0, R]$  функция.

После введения безразмерных переменных

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad w^* = \beta \frac{w}{h}, \quad p^* = \beta^3 \frac{pR^4}{E_{av}h^4}, \quad F^* = \beta^2 \frac{F}{E_{av}h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2)$$

система уравнений (1) примет вид (4) (знак \* у безразмерных величин в дальнейшем опускаем)

$$g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) = p + L(w, F),$$

$$g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(w) + g_2''(r)L_2^-(w) = -L(w, w)/2, \quad (4)$$

здесь  $g_1(r) = E_0 f(r)/E_{av}$ ,  $g_2(r) = 1/g_1(r)$ . Граничные условия сохраняют вид (2).

**Решение.** При малых значениях  $p$  система (4) имеет симметричное решение. Необходимо найти критическое значение нагрузки  $p = p_{cr}$ , при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Следуя [4], будем искать решение в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r)\cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r)\cos n\theta, \quad (5)$$

где функции  $w_s, F_s$  определяют докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r)\cos n\theta, F_{ns}(r, \theta) = F_n(r)\cos n\theta$ , описывают закритическое состояние пластины ( $n$  – число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации). Функции  $w_{ns}, F_{ns}$  полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние.

Симметричное решение задачи определяется из решения уравнений (6), получающихся из системы (4) после подстановки в нее соотношений (5) и с учетом обозначений

$$\omega_0 = w'_s, \quad \phi_0 = F'_s$$

$$\begin{aligned}
g_1 \left( \omega_0'' + \frac{\omega_0'}{r} - \frac{\omega_0}{r^2} \right) + g_1' \left( \omega_0' + \frac{v}{r} \omega_0 \right) &= \frac{pr}{2} + \frac{\omega_0 \phi}{r}, \\
g_2 \left( \phi_0'' + \frac{\phi_0'}{r} - \frac{\phi_0}{r^2} \right) + g_2' \left( \phi_0' + \frac{v}{r} \phi_0 \right) &= \frac{\omega_0^2}{2r}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия имеют вид

$$\omega_0(1) = \phi_0(1) = 0. \tag{7}$$

Для несимметричного решения после разделения переменных получим линейную систему уравнений (8) относительно  $w_n(r)$ ,  $F_n(r)$  и граничные условия (9)

$$\begin{aligned}
&g_1 \Delta_n \Delta_n w_n + g_1' L_{1n}^+(w_n) + g_1'' L_{2n}^+(w_n) = \\
&= \omega_0' \left( \frac{F_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) + \phi_0' \left( \frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w_n''}{r} \phi_0 + \frac{F_n''}{r} \omega_0, \\
&g_2 \Delta_n \Delta_n F_n + g_2' L_{1n}^-(F_n) + g_2'' L_{2n}^-(F_n) = \omega_0' \left( \frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \frac{w_n''}{r} \omega_0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_n y &= y'' + \frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y, \\
L_{1n}^\pm(y) &= 2y''' + \frac{2 \pm v}{r} y'' - \frac{2n^2 + 1}{r^2} y' + \frac{3n^2}{r^3} y, \quad L_{2n}^\pm(y) = y'' \pm v \left( \frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y \right), \\
w_n(1) &= w_n'(1) = F_n(1) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для каждого числа волн в окружном направлении  $n$  будем искать такие значения нагрузки  $p_n$ , при которых существует отличное от нуля решение задачи (8)-(9) при условии (6)-(7). Критической нагрузкой выберем  $p_n = \min_n p_n$ .

Схема численного решения задачи аналогична методу, описанному в работе [4]. Сначала, для заданных  $p$  и  $n$ , методом пристрелки решается осесимметричная задача (6)-(7), далее методом прогонки проверяется существование несимметричного решения.

Шаг интегрирования выбирался так, чтобы искомые значения нагрузки отличались не более, чем на 1% при уменьшении шага сетки в два раза.

**Результаты.** Были проведены две серии расчетов: при изменении модуля упругости пластины по законам  $E = E_0^{(1)} e^{-q_1 r}$  и  $E = E_0^{(2)} e^{-q_2 r^2}$ . Параметры  $E_0^{(i)}$ ,  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости пластины  $E_{av}$  оставалось постоянным.

Возможность перехода симметрично нагруженной пластины в несимметричное состояние обусловлена появлением, при больших прогибах, сжимающих напряжений в окрестности контура пластины. На рисунке 1 для неоднородной пластины показано, что при возрастании внешней нагрузки увеличивается интенсивность сжимающих напряжений и, одновременно, сужается зона, в которой они появляются, создавая тем самым дополнительные предпосылки для перехода пластины в несимметричное состояние ([4]).

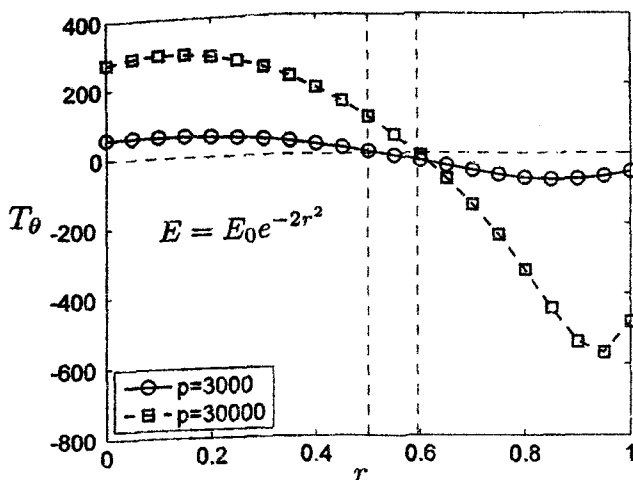


Рисунок 1 – Безразмерное окружное усилие для различных значений нагрузки

Для однородной пластины наименьшее значение нагрузки, найденное при численном интегрировании системы (8)-(9) совместно с (6)-(7), равно  $p_{cr} = 64522$ , а соответствующее этой нагрузке число волн потери устойчивости  $n = 14$ . Для неоднородных пластин результаты расчетов приведены в таблице 1 и на рисунке 2. Значения  $q = 0$  соответствуют пластине с постоянным модулем упругости.

Таблица 1

Критическая нагрузка для неоднородной пластины

		$q = 0$	$q = 0,5$	$q = 1$	$q = 3$	$q = 5$
$E = E_0^{(1)} e^{-qr}$	$p_{cr}$	64522	56841	49207	26324	12123
	$n$	14	14	14	15	17
$E = E_0^{(2)} e^{-qr^2}$	$p_{cr}$	64522	53287	44137	20843	9103
	$n$	14	14	14	16	20

Результаты расчетов показывают, что с ростом неоднородности потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит при более низких нагрузках и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины (таблица 1).

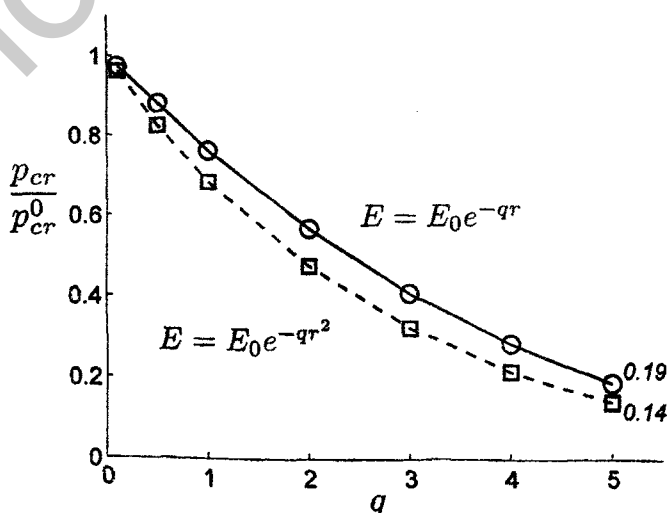


Рисунок 2 – Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины  $q$ .  $p_{cr}^0$  критическая нагрузка для однородной пластины

Рассмотренная выше пластина с модулем упругости, существенно уменьшающимся к краю, может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека (РП) ([5]).

**Выводы.** В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия изотропных пластин с переменным модулем упругости. Показано, что при уменьшении модуля упругости к краю пластины бифуркация в несимметричное состояние может происходить при существенно меньших нагрузках, чем для пластины с постоянными механическими свойствами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панов, Д.Ю. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах / Д.Ю. Панов, В.И. Феодосьев // ПММ. – Т. XII, 1948. – С. 389–406.
2. Морозов, Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой / Н.Ф. Морозов // Изв. высш. уч. заведений, Математика. – 1961. – № 2. – С. 126–129.
3. Piechocki, W. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells / W. Piechocki // Arch.Mech. Stos. – 1969. – № 21. – P. 81–101.
4. Cheo, L.S. Unsymmetric wrinkling of circular plates / L.S. Cheo, E.L. Reiss // Quart. Appl. Math. – 1971. – № 31. – P. 75–91.
5. Bauer, S.M. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure / S.M. Bauer, E.B. Voronkova // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5, N 1. – P. 73–82.

*Поступила 18.12.11*