

**Министерство народного образования Республики Беларусь**  
**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

**Кафедра «Высшая математика № 2»**

**СБОРНИК ЗАДАЧ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

**по темам «Кратные интегралы», «Криволинейные и поверхностные  
интегралы», «Векторный анализ», «Ряды Фурье»  
(для студентов инженерно-технических вузов всех форм обучения)**

**М и н с к 2 0 0 3**

УДК

В сборнике содержатся краткие теоретические сведения, примеры решения задач для самостоятельного решения по следующим разделам «Кратные интегралы», «Криволинейные и поверхностные интегралы», «Векторный анализ», «Ряды Фурье» для студентов инженерно-технических вузов всех форм обучения, а также для тех, кто самостоятельно изучает курс высшей математики.

Составители: доц. Емеличева Е.В., доц. Лошкарева С.Ю., ст.преп. Матюш Е.С.  
доц. Шавель Н.А.,

Рецензенты:

*(с) Белорусский национальный*

технический университет

## 1. Двойной интеграл в декартовых координатах и методы его вычисления.

Пусть  $D$  - плоская область. Назовем ее правильной в направлении  $OX$  ( $OY$ ), если любая прямая параллельная оси  $OX$  ( $OY$ ) пересекает границы области  $D$  не более двух раз.

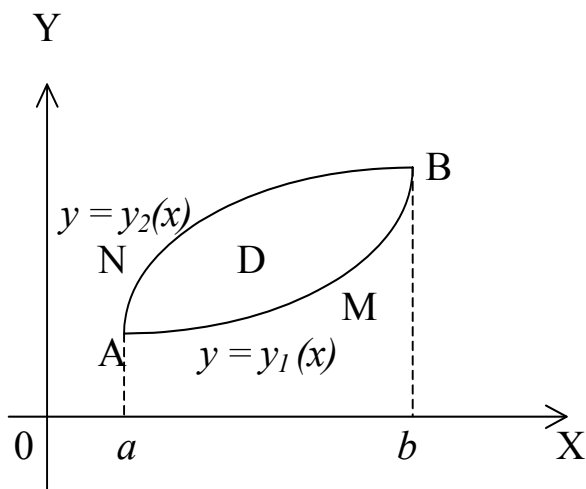


Рис.1

Пусть  $D$  – область правильная в направлении  $OY$  (см.рис.1),  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  – уравнения нижней (AMB) и верхней (ANB) линии границы области  $D$ ,  $x \in [a, b]$ . В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

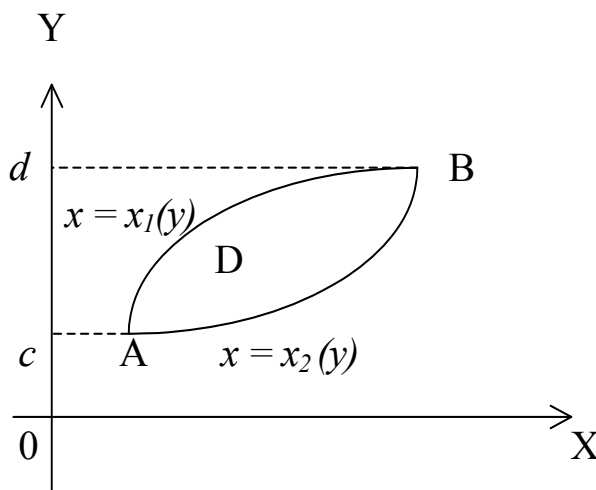


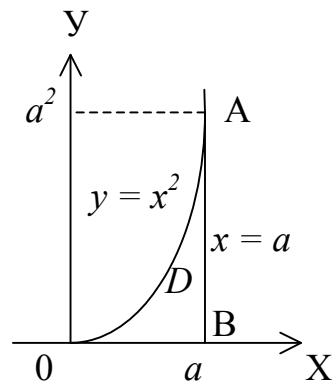
Рис.2

Аналогично, если область  $D$  – правильная в направлении оси  $OY$  (см.рис.2), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

*Пример 1.* Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2, x = a, y = 0 (a > 0)$ .

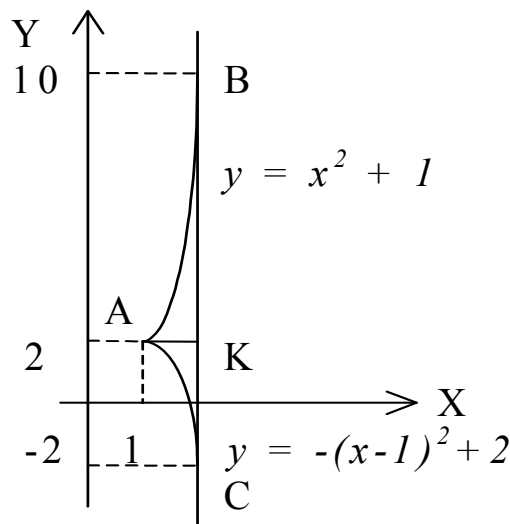
*Решение.* Построим область  $D$ .



Тогда 
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^{a^2} dy \int_{\sqrt{y}}^a f(x, y) dx.$$

*Пример 2.* Изменить пределы интегрирования в интеграле  $\int_1^3 dx \int_{-(x-1)^2+2}^{x^2+1} f(x, y) dy$ .

*Решение.* Проведем прямые  $x = 1, x = 3$  и кривые  $y_1 = -(x - 1)^2 + 2$  и  $y_2 = x^2 + 1$ , область  $D$  (см.рис.).



Граница области  $AB$ , заданная по условию как  $y_2 = x^2 + 1$  может также описываться уравнением  $x = \sqrt{y-1}$ . Граница области  $AC$ , заданная уравнением  $y_1 = -(x-1)^2 + 2$ , может также описываться уравнением  $x = 1 + \sqrt{2-y}$ . Заметим, что область  $D$  ограничена слева двумя кривыми, поэтому для изменения порядка

интегрирования следует её разбить прямой  $AK$ , параллельной оси  $OX$  на две области  $D_1$  и  $D_2$ . Тогда

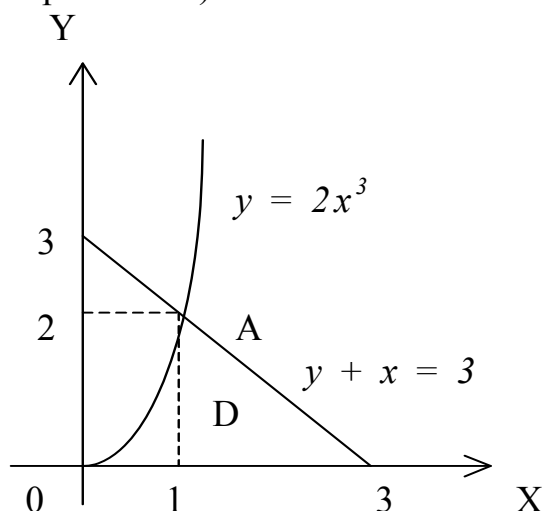
$$\int_1^3 dx \int_{-(x-1)^2+2}^{x^2+1} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-2}^2 dy \int_{1+\sqrt{2-y}}^3 f(x,y)dx + \int_2^{10} dy \int_{\sqrt{y-1}}^3 f(x,y)dx.$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл  $\iint_D x^2 y dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями

$$y = 0, y = 2x^3, x + y = 3.$$

**Решение.** Проведим указанные линии; определяем область  $D$  и пределы изменений переменных  $x$  и  $y$  (см.рис. ниже).



Область  $D$  правильная в направлении оси  $OX$ , поэтому вначале надо интегрировать по  $x$ , а потом по  $y$ . Тогда двойной интеграл по области  $D$  выражается одним двукратным интегралом

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} x^2 y dx = \int_0^2 y dy \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} x^2 dx = \int_0^2 y dy \left( \frac{x^3}{3} \Big|_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{3-y} \right) = \int_0^2 y \left( \frac{(3-y)^3}{3} - \frac{y}{6} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left( 9y - 9y^2 + 3y^3 - \frac{y^4}{3} - \frac{y^2}{6} \right) dy = \left( \frac{9y^2}{2} - \frac{9y^3}{3} + \frac{3y^4}{4} - \frac{y^5}{15} - \frac{y^3}{18} \right) \Big|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 - 6 расставьте пределы интегрирования в интеграле  $\iint_D f(x,y)dxdy$ ,

если :

**Задача 1.**  $D$  – прямоугольник  $ABCD$  с вершинами  $A(-2, -1)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(5, 3)$ ,  $D(5, -1)$ .

Задача 2.  $D$  – треугольник  $ABC$  с вершинами  $A(-3,1)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(3,1)$ .

Задача 3.  $D$  – треугольник, ограниченный прямыми  $2y - x = 0$ ;  $3y + 2x - 7 = 0$ ;  $5y + x - 14 = 0$ .

Задача 4.  $D$  – область, ограниченная линиями  $xy = 4$ ;  $x = 1$ ;  $y = 1/2$ .

Задача 5.  $D$  – область, ограниченная линиями  $y = \frac{27}{x^2 + 9}$ ;  $y = \frac{x^2}{2}$ ;  $x \geq 0$ .

Задача 6.  $D$  – область, ограниченная линиями  $x = y^2 + 2y$ ;  $x - y = 2$ .

Задача 7. Вычислить интеграл  $\iint_D \ln y \, dx \, dy$ , если область  $D$  ограничена линиями

$$y = e^x; y = e; x \geq 0. \text{ (Ответ: } e \text{).}$$

Задача 8. Вычислить интеграл  $\iint_D (2x - y^2) \, dx \, dy$ , если  $D$  – трапеция  $ABCD$  с

вершинами  $A(2; 0)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(0; 1)$ ,  $D(0; 0)$ . (Ответ:  $1 \frac{11}{12}$ ).

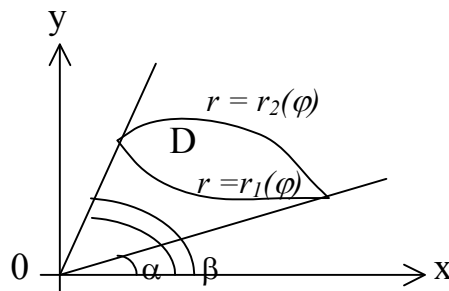
Задача 9. Вычислите интеграл  $\iint_D (x + 2y) \, dx \, dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $y = \frac{x^2}{2}$ ;  $y = \sqrt{x}$ . (Ответ:  $10\sqrt{2} - 1,6$ ).

## 2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Если область  $D$  ограничена лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривыми  $r = r_1(\varphi)$ ,  $r = r_2(\varphi)$

(см. рис. ниже), то  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr$

Полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  связаны с прямоугольными координатами соотношениями  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , очевидно, что  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



### Задачи для решения в аудитории.

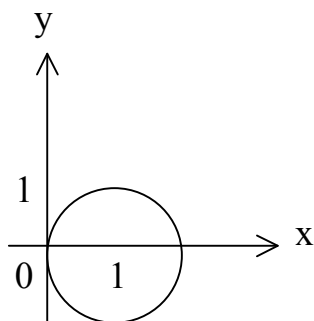
*Пример 1.* Вычислить, перейдя к полярным координатам интеграл  $\iint_D x dx dy$ , где

область  $D$  ограничена линией  $x^2 + y^2 = 2x$ .

*Решение.* Преобразуем к каноническому виду уравнение границы  $D$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0; (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Таким образом, область  $D$  – окружность с центром в точке  $(1,0)$  и радиусом 1.



Выразим уравнение границы  $D$  в полярных координатах

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi; r^2 = 2r \cos \varphi; \text{ т.к. } r \neq 0, \text{ то } r = 2 \cos \varphi.$$

Для области  $D$   $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r \cos \varphi r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi \left( \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^{2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{4}{3} \left( \frac{3}{2} \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

*Пример 2.* Вычислить  $\iint_D (x+y) dx dy$ , где область  $D$  – часть кольца, ограниченного

окружностями  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 9$  и лучами  $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* Так как уравнение границ области  $D$  в полярных координатах

$$r_1 = 1, r_2 = 3, \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, \text{ то } \iint_D (x + y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^3 (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_1^3 r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \left( \frac{r^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{26}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{26}{3} (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{26}{3} \sqrt{3}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1-5 требуется, перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы .

Задача 1.  $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{tg}(x^2 + y^2) dy$ . (Ответ:  $-\frac{\pi}{2} \ln|\cos \varphi|$ ).

Задача 2.  $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (1 + x^2 + y^2) dy$ . (Ответ:  $\frac{\pi}{8} (2a^2 + a^4)$ ).

Задача 3.  $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy$ . (Ответ:  $\pi(1 - e^{-3})$ ).

Задача 4.  $\int_{-5}^0 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos^2(\sqrt{x^2 + y^2})}$ . (Ответ:  $\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} 5$ ).

Задача 5.  $\int_{-R}^0 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{xy dy}{x^2 + y^2}$ . (Ответ:  $\frac{R^2}{2}$ ).

Задача 6. Вычислить интеграл  $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , где область  $D$  ограничена

линиями  $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$ ;  $x^2 + y^2 = \pi^2$ . (Ответ:  $-2\pi$ ).

Задача 7. Вычислить интеграл  $\iint_D (1 + xy) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линией  $x^2 + y^2 = 2x$ . (Ответ:  $\pi$ ).



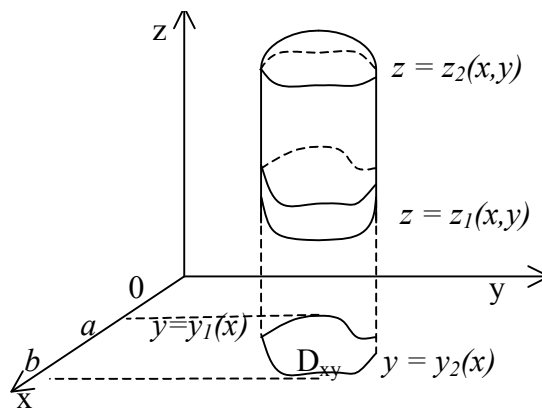
Задача 8. Вычислить интеграл  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ , где область  $D$  ограничена кривыми  $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9$ . (Ответ:  $2\pi \ln 3$ ).

Задача 9. Вычислить интеграл  $\iint_D (4 - x - y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена кривой  $x^2 + y^2 = 8; (x \geq 0; y \geq 0)$ . (Ответ:  $8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$ ).

Задача 10. Вычислить интеграл  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где область  $D$  ограничена кривыми  $x^2 + y^2 = 4x; x^2 + y^2 = 8x; x = y; y = \sqrt{3x}$ . (Ответ:  $\pi(\sqrt{3} - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}$ ).

### 3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пусть область интегрирования  $V$  ограничена снизу поверхностью  $z = z_1(x, y)$ , сверху поверхностью  $z = z_2(x, y)$ , а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси  $Oz$ .  $D_{xy}$  – проекция области  $V$  на плоскость  $Oxy$ . Область  $D_{xy}$  определена неравенствами  $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ .



Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

### Задачи для решения в аудитории

*Пример.* Вычислить интеграл  $\iiint_V (x+y)dv$ , где тело  $V$ , ограничено плоскостями  $x=1; y=0; z=0; y=x; x+y+z-4=0$ .

*Решение.* Для заданной области  $0 \leq z \leq 4-x-y; 0 \leq y \leq x; 0 \leq x \leq 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+y)dv &= \iiint_V (x+y)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{4-x-y} (x+y)dz = \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy \left( z \Big|_0^{4-x-y} \right) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)(4-x-y)dy = \int_0^1 dx \int_0^x (4x - x^2 - 2xy + 4y - y^2)dy = \\ &= \int_0^1 dx (4xy - x^2y - xy^2 + 2y^2 - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^x = \int_0^1 (4x^2 - x^3 - x^3 + 2x^2 - \frac{x^3}{3})dx = \\ &= \int_0^1 (-\frac{7}{3}x^3 + 6x^2)dx = (-\frac{7}{12}x^4 + 2x^3) \Big|_0^1 = 2 - \frac{7}{12} = \frac{17}{12}.\end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.* Вычислить интеграл  $\iiint_V (xz - y^2)dxdydz$ , где область  $V$  – параллелепипед:  $-1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1; 1 \leq z \leq 2$ . (*Ответ:*  $\frac{1}{4}$ ).

*Задача 2.* Вычислить интеграл  $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ , где область  $V$  ограничена плоскостью  $x+y+z=a, (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$ . (*Ответ:*  $\frac{a^4}{8}$ ).

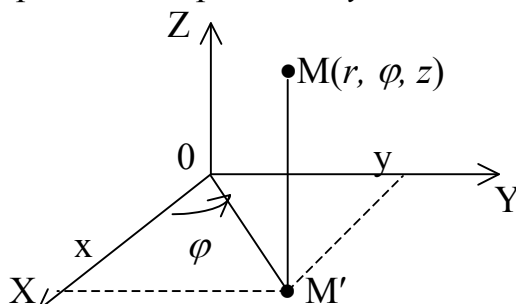
*Задача 3.* Вычислить интеграл  $\iiint_V \frac{dxdydz}{y+3}$ , где область  $V$  ограничена плоскостями  $y+z=3; x=2; (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$ . (*Ответ:*  $12\ln 2 - 6$ ).

*Задача 4.* Вычислить интеграл  $\iiint_V (2+z)dxdydz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $y=x^2$  и плоскостями  $y=1; z=0; z=2$ . (*Ответ:* 8).

*Задача 5.* Вычислить интеграл  $\iiint_V \frac{dxdydz}{4-x}$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $x^2=4-y$  и плоскостями  $x=0; z=0; 2z+x-4=0$ . (*Ответ:*  $\frac{16}{3}$ ).

#### 4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах

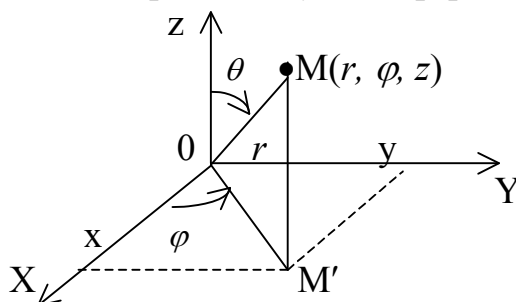
При переходе от декартовых координат  $x, y, z$  к цилиндрическим координатам



$r, \varphi, z$  (см.рис.), связанными с  $x, y, z$  соотношениями  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$  формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{z_1}^{z_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz$$

При переходе от декартовых координат  $x, y, z$  к сферическим координатам  $r, \varphi, \theta$



(см.рис.), связанными с  $x, y, z$  соотношениями  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$  формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид

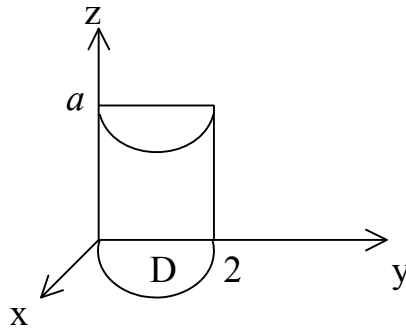
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr$$

#### Задачи для решения в аудитории.

*Пример 1.* Вычислить интеграл  $\iiint_V y dv$ , где тело  $V$  ограничено поверхностями

$$y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}, z = 0, z = a.$$

*Решение.* Тело  $V$  представляет собой половину кругового цилиндра



$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , ограниченного сверху плоскостью  $z = a$ , а снизу плоскостью  $z = 0$ ; его проекция  $D$  на плоскость  $OXY$  — это полуокружность с центром в точке  $(1; 0)$  и радиусом 1, имеющая в полярных координатах уравнение  $r = 2 \cos \varphi$ , причем  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, границы изменения переменных

для области  $V : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi; 0 \leq z \leq a$ . Тогда, переходя к цилиндрическим координатам,

$$\begin{aligned} \iiint_V y \, dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr \int_0^a dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr (z) \Big|_0^a = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr = \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} = \frac{8}{3} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{8a}{3} \left( -\frac{\cos^4 \varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

*Пример 2.* Вычислить интеграл  $\iiint_V (z + 2) \, dv$ , где тело  $V$  ограничено поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2; R_2 > R_1; z \geq 0$ .

*Решение.* Тело  $V$  ограничено двумя полусферами радиуса  $R_1$  и  $R_2$  и плоскостью  $z = 0$ . Проекция тела на плоскость  $OXY$  представляет собой окружность радиуса  $R_2$ . Таким образом пределы изменения переменных для тела  $V$  определяются неравенствами  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, R_1 \leq r \leq R_2$ . Тогда, переходя к сферическим координатам

$$\begin{aligned} \iiint_V (z + 2) \, dv &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{R_1}^{R_2} (r \cos \theta + 2) r^2 \, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \left( \frac{r^4 \cos \theta}{4} + \frac{2r^3}{3} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \cos \theta \sin \theta + \frac{2(R_2^3 - R_1^3)}{3} \sin \theta \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{(R_2^4 - R_1^4) \sin^2 \theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2(R_2^3 - R_1^3)}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \left( \frac{R_2^4 - R_1^4}{8} + \frac{2(R_2^3 - R_1^3)}{3} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \left( \frac{R_2^4 - R_1^4}{8} + \frac{2}{3}(R_2^3 - R_1^3) \right).
\end{aligned}$$

### **Задачи для самостоятельного решения**

В задачах 1 - 5 требуется вычислить тройные интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам.

**Задача 1.** Вычислить интеграл  $\iiint_V z^2 dv$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = 4, z = 2, z = 0$ . (Ответ:  $\frac{32\pi}{3}$ ).

**Задача 2.** Вычислите интеграл  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 1$ . (Ответ:  $\frac{3\pi}{3}$ ).

**Задача 3.** Вычислите интеграл  $\iiint_V z dv$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $4 - z = x^2 + y^2, z = 0$ . (Ответ:  $\frac{32\pi}{3}$ ).

**Задача 4.** Вычислите интеграл  $\iiint_V \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $z = 2(x^2 + y^2)$ , плоскостями  $z = 18, y = 0, y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  и отвечает условию  $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x$ . (Ответ: 81).

**Задача 5.** Вычислить интеграл  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 = 2x$ , плоскостями  $x + z = 2, z = 0$  и отвечает условию  $z > 0$ . (Ответ:  $\frac{128}{45}$ ).

В задачах 6 - 9 требуется вычислить тройной интеграл, перейдя к сферическим координатам.

Задача 6. Вычислить интеграл  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0$  и отвечает условиям  $x > 0, y > 0, z > 0$ . (Ответ:  $\frac{243\pi}{10}$ ).

Задача 7. Вычислить интеграл  $\iiint_V y dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $y^2 = x^2 + z^2$ , плоскостью  $y = 2$  и отвечает условию  $y > 0$ . (Ответ:  $4\pi$ ).

Задача 8. Вычислить интеграл  $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена сферическими поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и удовлетворяющая условию  $z > 0$ . (Ответ:  $\frac{31}{5}\pi$ ).

Задача 9. Вычислить интеграл  $\iiint_V x dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 = 2(y^2 + z^2)$ , плоскостями  $x = 0, x = 4$  и отвечает условию  $0 < x < 4$ . (Ответ:  $32\pi$ ).

## 5. Криволинейный интеграл I рода

1. Если плоская кривая  $L$  задана в декартовых координатах уравнением  $L: y = \varphi(x); x \in [a, b]$ , то  $dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$ , а  $f(P) = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$ , тогда

$$\int_L f(P) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

2. Если плоская кривая  $L$  задана уравнением  $L: x = \psi(y), y \in [c, d]$ , то

$$\int_L f(P) dl = \int_c^d f(\psi(y), y) \sqrt{1 + (\psi'(y))^2} dy$$

3. Если кривая  $L$  задана параметрически на плоскости, т.е.

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1], \text{ то } \int_L f(P) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

4. Если кривая  $L$  задана параметрически в пространстве, т.е.

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_0, t_1] \\ z = z(t) \end{cases}, \text{ то } \int_L f(P) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

5. Если кривая  $L$  задана в полярных координатах  $L: r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ , то

$$\int_L f(P) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

### Задачи для решения в аудитории

*Пример 1.* Вычислить интеграл  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ , где  $L$  – отрезок прямой,

соединяющей точки  $O(0, 0)$  и  $A(1, 2)$ .

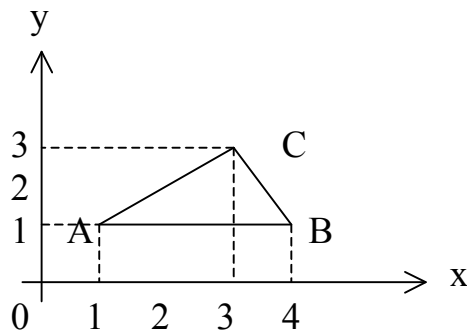
*Решение.* Нарисуем отрезок  $OA$  и найдем уравнение  $L: y = 2x, x \in [0, 1]$ .

Тогда  $y' = 2$  и  $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx, dl = \sqrt{1 + 2^2} dx; dl = \sqrt{5} dx$ .

*Ответ:*  $\ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$ .

*Пример 2.* Вычислить интеграл  $\int_L (x - y) dl$ , где  $L$  – контур треугольника  $ABC$

с вершинами в точках  $A(1, 1), B(4, 1), C(3, 3)$  (см.рис.)



*Решение.* Разобьем контур треугольника  $ABC$  на отрезки  $AB, BC$  и  $CA$ . Тогда

$$\int_L (x - y) dl = \int_{(AB)} (x - y) dl + \int_{(BC)} (x - y) dl + \int_{(CA)} (x - y) dl.$$

Вычислим интеграл по отрезку  $AB$ . Так как уравнение прямой  $AB$ :

$y = 1; x \in [1, 4]$ , то  $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = dx$ , тогда

$$\int_{(AB)} (x - y) dl = \int_1^4 (x - 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

Вычислим интеграл по отрезку  $BC$ . Подставив в уравнение прямой  $y = kx + b$  координаты точек  $B(4,1)$  и  $C(3,3)$ , получим, что уравнение прямой  $BC$ :  $y = -2x + 9$ , при этом  $x$  меняется от 4 до 3. Тогда  $dl = \sqrt{1 + (-2)^2} dx = \sqrt{5} dx$  и

$$\begin{aligned} \int_{(BC)} (x - y) dl &= \int_4^3 (x - (-2x + 9)) \sqrt{5} dl = \sqrt{5} \int_4^3 (3x - 9) dx = \sqrt{5} \left( \frac{3x^2}{2} - 9x \right) \Big|_4^3 = \\ &= \sqrt{5} \left( \frac{27}{2} - 27 - 24 + 36 \right) = \frac{-3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл по отрезку  $CA$ . Подставив в уравнение прямой  $y = kx + b$  координаты точек  $C(3,3)$  и  $A(1,1)$ , получим, что уравнение прямой  $CA$ :  $y = x$ ;  $x$  при этом меняется от 3 до 1. Тогда  $dl = \sqrt{2} dx$  и  $\int_{CA} (x - y) dx = \int_3^1 (x - x) \sqrt{2} dx = 0$ .

Суммируя интегралы по отрезкам  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  получим, что

$$\int_L (x - y) dl = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{9 - \sqrt{5}}{2}$ .

*Пример 3.* Вычислить интеграл  $\int_L xy dl$ , где  $L$  – часть винтовой линии

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t; \quad z = bt; \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right].$$

*Решение.* Имеем  $x'_t = -a \sin t$ ;  $y'_t = a \cos t$ ;  $z'_t = b$ . Тогда

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \cos t a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \left( -\frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{4} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$ .

*Пример 4.* Вычислить интеграл  $\int_L \frac{1}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} dl$ , где  $L$  – часть кривой

$$r = 1 + \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$



Решение. Имеем

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Тогда } \int_L \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \quad (\text{Ответ: } \pi.)$$

### Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.* Вычислить интеграл  $\int_L (x - y) dl$ , где  $L$  – отрезок прямой между точками  $O(0,0)$  и  $A(4,3)$ . (Ответ:  $\frac{5}{2}$ ).

*Задача 2.* Вычислить интеграл  $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2}$ , где  $L$  – отрезок прямой, заключенный между точками  $A(1, 2)$  и  $B(2, 4)$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ).

*Задача 3.* Вычислить интеграл  $\int_L xy dl$ , где  $L$  – контур прямоугольника  $ABCD$  с вершинами в точках  $A(0, 0)$ ;  $B(4, 0)$ ;  $C(4, 2)$ ;  $D(0, 2)$ . (Ответ: 24).

*Задача 4.* Вычислить интеграл  $\int_L \frac{x}{y} dl$ , где  $L$  – контур треугольника  $ABC$  с вершинами в точках  $A(0, 0)$ ;  $B(2, 3)$ ;  $C(3, 1)$ . (Ответ:  $\frac{2\sqrt{13}}{3} + 2 \ln 2 + 2\sqrt{5}$ ).

*Задача 5.* Вычислить интеграл  $\int_L y dl$ , где  $L$  – дуга  $x = \sin y$ ,  $y \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ . (Ответ:  $\pi + 4 - \frac{\pi}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ ).

*Задача 6.* Вычислить интеграл  $\int_L xy dl$ , где  $L$  – часть окружности  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . (Ответ:  $\frac{R^3}{2}$ ).

*Задача 7.* Вычислить интеграл  $\int_L y dl$ , где  $L$  – арка циклоиды  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ . (Ответ:  $10\frac{2}{3}$ )

*Задача 8.* Вычислить интеграл  $\int_L z^2 dl$ , где  $L$  – первый виток винтовой линии

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi. \text{ (Ответ: } \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \text{).} \\ z = t \end{cases}$$

*Задача 9.* Вычислить интеграл  $\int_L r dl$ , где  $L$  – кривая, заданная уравнением

$$r = 2 \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi. \text{ (Ответ: } 8 \text{).}$$

*Задача 10.* Вычислить интеграл  $\int_L \sqrt{\varphi^2 + 1} dl$ , где  $L$  – первый виток спирали

$$\text{Архимеда } r = 2\varphi. \text{ (Ответ: } \frac{16}{33} \pi^3 + 2\pi \text{).}$$

*Задача 11.* Вычислить интеграл  $\int_L e^{-\varphi} dl$ , где  $L$  – дуга логарифмической спирали

$$r = 2e^{3\varphi}, \varphi \in \left[ \frac{\pi}{3}; \pi \right]. \text{ (Ответ: } \sqrt{10}(e^{2\pi} - e^{\frac{2\pi}{3}}) \text{).}$$

## 6. Криволинейные интегралы II рода

1. Если плоская кривая  $L$  задана в декартовых координатах уравнением

$$y = \varphi(x), x \in [a, b], \text{ то } \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) dx$$

2. Если кривая  $L$  задана параметрическими уравнениями, т.е.  $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$t \in [t_1, t_2]$ , то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt$$

### Задачи для решения в аудитории

*Пример 1.* Вычислить  $\int_L y dx - x dy$ , где  $L$  – дуга линии  $y = x^2$  от  $A(0, 0)$  до

$B(1, 1)$ .

$$\text{Решение. } \int_L y dx - x dy = \int_0^1 (x^2 - x \cdot 2x) dx = - \int_0^1 x^2 dx = - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = - \frac{1}{3}.$$

*Пример2.* Вычислить  $\int_L ydx - xdy$ , где  $L$  – дуга циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

*Решение.*  $\int_L ydx - xdy = \int_0^{2\pi} (2(1 - \cos t) \cdot (2 - 2 \cos t) - 2(t - \sin t) \cdot 2 \sin t) dt =$   
 $= 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t - t \sin t + \sin^2 t) dt = 4(2 \int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt).$

Интегрируя третий интеграл по частям, получим

$$\int_L ydx - xdy = 8t \Big|_0^{2\pi} - 8 \sin t \Big|_0^{2\pi} + 4t \cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt = 24\pi.$$

### *Задачи для самостоятельного решения*

*Задача1.* Вычислить  $\int_L y(x - y)dx - xdy$  где:

а)  $L$  – отрезок прямой  $y = 2x$  от точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(1, 2)$ ,

б)  $L$  – дуга параболы  $y = 2\sqrt{x}$  от точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(1, 2)$ .

(*Ответ:* а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $-\frac{8}{15}$ ).

*Задача2.* Вычислить  $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$  где  $L$  – ломаная линия

$y = |x|$  от точки  $A(-1, 1)$  до точки  $B(2, 2)$ . (*Ответ:* 6).

*Задача3.* Вычислить  $\int_L zdx + xdy + ydz$ , где  $L$  – дуга кривой заданной пара-

метрически  $L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1. (Ответ: \frac{91}{60}).$

*Задача4.* Вычислить  $\int_L -yzdx + xzdy + xydz$ , где  $L$  – дуга кривой

$L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi. (Ответ: 2\pi^2 a^2 h).$

## 7. Вычисление поверхностного интеграла в декартовой системе координат

Если поверхность  $S$  задана уравнением  $z = \varphi(x, y)$ , то

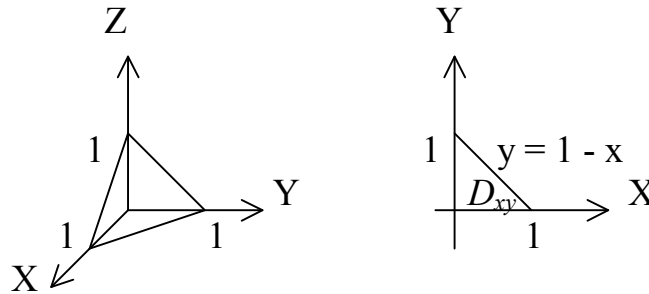
$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy, \text{ где } D_{xy} \text{ – проекция по-}$$

верхности  $Q$  на плоскость  $Oxy$ .

*Пример.* Вычислить  $\iint_S \frac{ds}{(1+x+z)^2}$ , где  $S$  – часть плоскости  $x+y+z=1$ ,

лежащая в первом октанте.

*Решение.* Проекцией  $S$  на плоскость  $Oxy$  является область  $D_{xy}$  (см.рис) ограниченная линиями  $x=0, y=0, y=1-x$ .



Сама поверхность задана уравнением  $z = 1 - x - y$ , поэтому  $\varphi'_x = -1, \varphi'_y = -1$ ;

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} &= \sqrt{3}. \text{ Тогда } \iint_S \frac{ds}{(1+x+z)^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3} dx dy}{(1+x+(1-x-y))^2} = \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3} dx dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{2-y} \right) \Big|_0^{1-x} = \sqrt{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \sqrt{3} \left( \ln|x+1| - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.* Вычислить интеграл  $\iint_S z ds$ , где  $S$  полусфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 9; (z \geq 0)$ .

(Ответ:  $27\pi$ ).

Задача 2. Вычислить интеграл  $\iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y) ds$ , где  $Q$  часть плоскости

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0). \text{ (Ответ: } 4\sqrt{61}\text{)}.$$

Задача 3. Вычислить интеграл  $\iint_S x ds$ , где  $S$  поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , заключенная в первом октанте. (Ответ:  $2\pi$ ).

Задача 4. Вычислить интеграл  $\iint_S (x^2 + y^2) ds$ , где  $S$  – часть конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , заключенная между плоскостями  $z = 0, z = 1$ . (Ответ:  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ).

Задача 5. Вычислить интеграл  $\iint_S ds$ , где  $S$  – параболоид, вырезанный цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$ . (Ответ:  $\frac{\pi}{6}((1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}} - 1)$ ).

## 8. Поверхностные интегралы II рода

Рассмотрим двухстороннюю поверхность и выберем на ней определенную сторону  $S$ . Если  $D_{xy}$  – проекция поверхности  $S$  заданной уравнением  $z = f(x, y)$  на плоскость  $O_{xy}$ , то

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy,$$

где знак "+" берется в том случае, когда на выбранной стороне поверхности  $\cos \gamma > 0$ , а знак "-" берется в случае, когда  $\cos \gamma < 0$ , где  $\gamma$  – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси  $Oz$ .

Аналогично, если  $D_{xy}$  – проекция поверхности  $S$ , заданной уравнением

$$y = \varphi(x, z), \text{ то } \iint_S Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, \varphi(x, z), z) dx dz,$$

где знак в формуле определяется по знаку  $\cos \beta$ , где  $\beta$  – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси  $Oy$ .

Если  $D_{xy}$  – проекция поверхности  $S$ , заданной уравнением  $x = \psi(y, z)$ , то

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(\psi(y, z), y, z) dy dz,$$

где знак определяется по знаку  $\cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между нормалью к поверхности и положительным направлением оси  $Ox$ .

Для вычисления поверхностного интеграла II рода более общего вида

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

используются те же формулы.

*Пример.* Вычислить  $\iint_S \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy$ ,

где  $S$  – нижняя сторона круга  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

*Решение.* Поверхность  $S$  совпадает со своей проекцией  $D_{xy}$  на плоскость  $O_{xy}$ . Поэтому

$$\iint_S \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy = - \iint_{D_{xy}} \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^{\frac{3}{2}} dr = -\frac{4}{5} \pi \sqrt{a^5}.$$

### **Задачи для самостоятельного решения**

*Задача 1.* Вычислить  $\iint_Q yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$ , где  $Q$  – верхняя сторона треугольника, образованного плоскостями  $x + y + z = 2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

(*Ответ:* 2).

*Задача 2.* Вычислить  $\iint_Q x^2 dy dz$ , где  $Q$  – внешняя часть поверхности параболоида  $z = \frac{5}{4}(x^2 + y^2)$ , ограниченного плоскостями  $x > 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 5$  и удовлетворяющего условиям  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z < 5$ . (*Ответ:*  $\frac{32}{3}$ ).

*Задача 3.* Вычислить интеграл  $\iint_Q x^2 dy dz$ , где  $Q$  – внешняя часть сферической поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ограниченной плоскостями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$  и удовлетворяющая условиям  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . (*Ответ:*  $\frac{\pi R^4}{8}$ ).

## Геометрические приложения двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов.

<p>Площадь <math>S</math> плоской области <math>D</math> :</p> <p style="padding-left: 40px;">в полярных координатах.</p>	$S = \iint_D dx dy$ $S = \iint_D r dr d\varphi$
<p>Объем <math>V</math>:</p> <p style="padding-left: 40px;">в сферических координатах</p> <p style="padding-left: 40px;">в цилиндрических координатах</p>	$V = \iiint_V dx dy dz$ $V = \iiint_V r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ $V = \iiint_V r dr d\varphi dz$
<p>Длина <math>l</math> дуги <math>L</math></p>	$l = \int_L dl$
<p>Площадь <math>Q</math> поверхности <math>S</math></p>	$Q = \iint_S ds$

### Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.* Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = 4 + x$ . (Ответ: 18).

*Задача 2.* Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $2x = y^2$ ,  $x - y = 0$ . (Ответ:  $\frac{2}{3}$ ).

*Задача 3.* Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $xy = 1$ ,  $x = y^2$ ,  $y = 5$ . (Ответ:  $\frac{124}{3} - \ln 5$ ).

*Задача 4.* Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $y^2 = ax$ ,  $x^2 = ay$ , ( $a > 0$ ) (Ответ:  $\frac{5a^2}{3}$ ).

*Задача 5.* Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $x = y^2 - 1$ ,  $x = 5 - \frac{y^2}{2}$ , ( $y \geq 0$ ). (Ответ: 8).

В задачах 6-9 требуется вычислить площадь фигуры  $D$ , перейдя к полярным координатам.

Задача 6. Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривой  $r = \cos 3\varphi$ . (Ответ:  $\pi/4$ ).

Задача 7. Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $r = a(1 - \cos \varphi)$ ,  $r = a$  (вне кардиоиды). (Ответ:  $a^2(2 - \pi/4)$ ).

Задача 8. Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ . (Ответ:  $\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}$ ).

Задача 9. Вычислить площадь фигуры  $D$ , ограниченной кривыми  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$ . (Ответ:  $\frac{\pi ab}{6}$ ).

Задача 10. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного параболоидом  $z = 2a^2 - x^2 - y^2$  и плоскостью  $z = 0$ . (Ответ:  $\pi a^4$ ).

Задача 11. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$  и плоскостями  $2x - z = 0$ ,  $4x - z = 0$ . (Ответ:  $2\pi$ ).

Задача 12. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + y^2 = z$ ,  $z = 0$ . (Ответ:  $\frac{\pi R^4}{2}$ ).

Задача 13. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = x$ ,  $y = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $x \geq 0$ , ( $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ). (Ответ:  $\frac{118}{3}$ ).

Задача 14. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x + y = 2$ ,  $z = x^2 + y^2$ , ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ). (Ответ:  $8/3$ ).

Задача 15. Вычислить объем тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x = y^2$ ,  $x = 2y^2 + 1$ ,  $z = 1 - y^2$ , ( $z \geq 0$ ). (Ответ:  $8/5$ ).

Задача 16. Вычислить длину дуги циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , если  $0 \leq t \leq \pi$ . (Ответ: 4).

Задача 17. Вычислить длину витка винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \sqrt{3}t$ , если  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (Ответ:  $8\pi$ ).

Задача 18. Вычислить длину дуги кривой  $x = \sin y$ , если  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . (Ответ: 2).

Задача 19. Найти площадь части конуса  $z^2 = 2xy$ , расположенного в первом октанте между плоскостями  $x = 2$ ,  $y = 4$ . (Ответ: 16).

Задача 20. Найти площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , расположенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = Rx$ . (Ответ:  $2R^2(\pi - 2)$ ).



## 9. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

### 9.1. Скалярные и векторные поля

Область  $W \subseteq R^n$  вместе с заданной в каждой ее точке  $M$  скалярной функцией  $U(M)$  называется скалярным полем (СП)  $U$ . Функцию  $U(M)$  называют *потенциалом* поля.

При  $n = 3$  СП задается функцией вида  $U = U(x, y, z)$ ; при  $n = 2$   $U = U(x, y)$  и поле  $U$  называется *плоским*.

Пространственные (плоские) поля графически изображаются поверхностями (линиями) уровня, уравнения которых имеют вид:

$$U(x, y, z) = C, C = const, (U(x, y) = C, C = const).$$

Пусть  $n = 3$ ,  $W \subseteq R^3$ , точка  $M(x_o, y_o, z_o) \in W$ ,  $\bar{l} = l_1 \bar{i} + l_2 \bar{j} + l_3 \bar{k}$  - некоторый вектор. Тогда единичный вектор по направлению  $\bar{l}$ :

$$\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

$$\text{где } |\bar{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}, \quad \cos \alpha = \frac{l_1}{|\bar{l}|}, \quad \cos \beta = \frac{l_2}{|\bar{l}|}, \quad \cos \gamma = \frac{l_3}{|\bar{l}|}.$$

Производная СП  $U$  в точке  $M$  по направлению  $\bar{l}$ , обозначаемая  $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$ , определяется соотношением:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = (U(x_o + \tau \cos \alpha, y_o + \tau \cos \beta, z_o + \tau \cos \gamma))'_{\tau=0}$$

и характеризует скорость изменения функции  $U$  в направлении  $\bar{l}$ .

Производная  $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$  вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Градиентом СП  $U$  в точке  $M$  называется вектор

$$\text{grad } U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \bar{k}.$$

Связь между производной по направлению и градиентом выражается формулой:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = (\text{grad } U(M), \bar{l}_o) = |\text{grad } U(M)| \cdot \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол между векторами  $\text{grad } U(M)$  и  $\bar{l}$ .

Из последней формулы следует, что  $\max \frac{\partial U(M)}{\partial l} = |\text{grad}U(M)|$  и достигается при  $\varphi = 0$ , т.е. градиент направлен в сторону наибольшего возрастания потенциала  $U$  (по нормали к поверхности уровня в точке  $M$ ), а модуль градиента равен максимальной скорости возрастания.

Область  $W \subseteq R^n$  вместе с заданной в каждой ее точке  $M$  вектор-функцией  $\bar{a}(M)$  называется векторным полем (ВП)  $\bar{a}$ .

При  $n = 3$  ВП задается функцией вида:

$$\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

При  $n = 2$ :  $\bar{a}(M) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$  и ВП называется *плоским*.

Векторной линией поля  $\bar{a}$  называется ориентированная линия, в каждой точке  $M$  которой вектор касательной  $\bar{l}(M)$  сонаправлен вектору поля  $\bar{a}(M)$ .

Уравнения семейства векторных линий пространственного поля  $\bar{a}$  есть общее решение системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Уравнения векторных линий плоского поля  $\bar{a}$  определяются общим решением дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

### **Задачи для решения в аудитории.**

*Пример 1.* Найти поверхности уровня СП  $U = 2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z$  и записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку  $M(-1; 1; -1)$ .

*Решение.* Уравнения поверхностей уровня имеют вид

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z = C, \quad C = \text{const}$$

или  $2(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = C + 15$ .

Последнее уравнение при различных  $C > -15$  определяет семейство эллипсоидов с центром в точке  $(-1; 2; -3)$  и полуосями  $a = \sqrt{\frac{C+15}{2}}, b = c = \sqrt{C+15}$ .

Поверхность уровня, проходящая через точку  $M(-1; 1; -1)$ , имеет уравнение

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0), \text{ т.е. } 2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 6z = 2 + 1 + 1 - 4 - 4 - 6 = -10$$

или

$$2(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 5.$$

*Пример 2.* Для СП  $U = x^2y + xz^2 - 2z$  в точке  $M(1; 1; -1)$  определить: а) производную по направлению вектора  $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ; б) производную по направлению, идущему от точки  $M$  к точке  $N(2; -1; 2)$ ; в) производную по направлению, образующему с осями координат острые углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , причем  $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$ ; г) производную по направлению вектора  $\bar{l}_1$ , образующего с градиентом угол  $\varphi = 120^\circ$ ; д) скорость и направление наибольшего возрастания.

*Решение.* Поле  $U$  определено и дифференцируемо в любой точке пространства  $R^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2xy + z^2 & \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M &= 3 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= x^2 & \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M &= 1 \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 2xz - 2 & \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M &= -4 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\text{grad } U(M) = (3; 1; -4)$ .

а) Имеем  $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ,  $|\bar{l}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ ,  $\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = (\text{grad } U(M), \bar{l}_o) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

б)  $\bar{l} = \overline{MN} = (2-1; -1-1; 2+1) = (1; -2; 3)$ ,  $|\bar{l}| = |\overline{MN}| = \sqrt{14}$ ,

$$\bar{l}_o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), \quad \frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = (\text{grad } U(M), \bar{l}_o) = \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{12}{\sqrt{14}} = -\frac{11}{\sqrt{14}}.$$

в) По условию  $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \gamma > 0$ . Отсюда

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - 1/4 - 1/2} = 1/2.$$

$$\frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma = 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

г)  $\frac{\partial U}{\partial l_1} \Big|_M = |\text{grad } U(M)| \cos \varphi = \sqrt{9+1+16} \cdot \cos 120^\circ = \sqrt{26} \cdot (-1/2) = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}.$

д)  $\max \frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = |\text{grad } U(M)| = \sqrt{26}.$

Направление наибольшего возрастания поля  $U$  совпадает с направлением градиента, т.е.

$$\bar{l}_0 = \frac{\text{grad}U(M)}{|\text{grad}U(M)|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3; 1; -4) = \left( \frac{3}{\sqrt{26}}; \frac{1}{\sqrt{26}}; -\frac{4}{\sqrt{26}} \right).$$

*Пример 3.* Найти векторную линию ВП  $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + 3\bar{k}$ , проходящую через точку  $M(1; 0; 0)$ .

*Решение.* Уравнения семейства векторных линий определяются системой дифференциальных уравнений:  $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{3}$ . Интегрируем:  $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$ ,  $x dx + y dy = 0$ ,

$x^2 + y^2 = C_1^2$ ; в параметрическом виде:  $x = C_1 \cos t$ ,  $y = C_1 \sin t$ . С учетом этого уравнение  $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{3}$  примет вид:  $\frac{C_1 \cos t dt}{C_1 \cos t} = \frac{dz}{3} \Rightarrow dz = 3 dt \Rightarrow z = 3t + C_2$ .

Таким образом,  $x = C_1 \cos t$ ,  $y = C_1 \sin t$ ,  $z = 3t + C_2$  – параметрические уравнения векторных линий поля  $\bar{a}$  (винтовые линии). Подставляем координаты точки  $M$ :  $1 = C_1 \cos t$ ,  $0 = C_1 \sin t$ ,  $0 = 3t + C_2 \Rightarrow C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0 \Rightarrow x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 3t$  – уравнения искомой линии.

### Задачи для самостоятельного решения.

*Задача 1.* Найти поверхности уровня СП  $U$  и уравнение поверхности уровня, проходящей через точку  $M$ , если: а)  $U = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $M(1; 0; -1/2)$ ;

б)  $U = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $M(1; 1; 1)$ ; в)  $U = \frac{z}{x^2 + y^2}$ ,  $M(1; 2; 3)$ . (*Ответ:* а) кону-

сы  $z = \sin C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $|C| \leq \pi/2$ ;  $z = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ ; б) сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = e^c$ ,

$c \in R$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ; в) параболоиды вращения  $z = c(x^2 + y^2)$ ;  $z = \frac{3}{5}(x^2 + y^2)$ ).

*Задача 2.* Пусть заданы СП  $U$ , точки  $M$  и  $N$ , направление  $\bar{l}$ , угол  $\varphi$ . Определить в точке  $M$ : производную поля  $U$  по направлению  $\bar{l}$ ; производную поля  $U$  по направлению  $\overline{MN}$ ; производную по направлению вектора  $\bar{l}_1$ , образующего с  $\text{grad}U(M)$  угол  $\varphi$ ; скорость и направление наибольшего возрастания поля  $U$  в точке  $M$ , если:

а)  $U = xy^2z + yz^2 - 3z$ ,  $M(0; 1; 2)$ ,  $N(-2; 3; -1)$ ,  $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ;

б)  $U = \frac{y}{xz} + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy}$ ,  $M(1; 2; 3)$ ,  $N(-2; 1; -1)$ ,  $\bar{l} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$ ,  $\varphi = 225^\circ$ ;

в)  $U = x^y - 3xyz$ ,  $M(1; 2; 0)$ ,  $N(1; 0; -3)$ ,  $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .

(Ответ: а)  $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{17}}$  при  $\bar{l} = \overline{MN}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l_1} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$ ;  $\max \frac{\partial U}{\partial l} = \sqrt{21}$  ;

б)  $\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{4}{3\sqrt{29}}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{101}{18\sqrt{26}}$  при  $\bar{l} = \overline{MN}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l_1} = -\frac{\sqrt{2786}}{36}$ ;  $\max \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\sqrt{1393}}{18}$  ;

в)  $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{16}{3}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{18}{\sqrt{13}}$  при  $\bar{l} = \overline{MN}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial l_1} = \frac{\sqrt{38}}{2}$ ;  $\max \frac{\partial U}{\partial l} = \sqrt{38}$  ).

**Задача 3.** Найти производную СП  $U = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + z^2}$  в точке  $M(-3; 0; 4)$  в направлении нормали к поверхности  $2x^2 + 12x + 5y^2 + z^2 - 3z - 58 = 0$ , образующей острый угол с осью  $Oz$ . (Ответ:  $-4/5$ )

**Задача 4.** Вычислить координаты единичного вектора  $\overline{n}_o$ , перпендикулярного к поверхностям уровня СП  $U = 2x - 3y + 6z - 5$  и образующего с осью  $Oz$  тупой угол. (Ответ.  $\overline{n}_o = \left(-\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{6}{7}\right)$ )

**Задача 5.** Найти угол  $\varphi$  между градиентами полей  $U_1 = x + yz + 2\sqrt{xz}$ ,  $U_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  в точке  $M(2; 3; 2)$ . (Ответ.  $\cos \varphi = \frac{9}{\sqrt{102}}$ ).

**Задача 6.** В каких точках плоскости  $xOy$  градиент поля  $U = x^2 + y^2 - xy$  : а) перпендикулярен к оси  $Oy$ ; б) параллелен прямой  $y = -x-1$ ; в) перпендикулярен к прямой  $y = 2x + 3$ . (Ответ: а) в точках прямой  $y = x/2$ ; б) в точках прямой  $y = -x$ ; в) в точках оси  $Ox$ ).

**Задача 7.** Найти уравнения векторных линий ВП:

а)  $\bar{a} = (x + y)\bar{i} - x\bar{j} - x\bar{k}$ ; б)  $\bar{a} = \text{grad}U$ , если  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ .

(Ответ. а)  $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$ ,  $y - z = C_1$ ; б)  $y = C_1x$ ,  $z = C_2x$ ).

**Задача 8.** Дано плоское ВП  $\bar{a}$  и точка  $M$ . Найти уравнения семейства векторных линий и векторной линии, проходящей через точку  $M$ , если

а)  $\bar{a} = (3x - y^2)\bar{i} + y\bar{j}$ ;  $M(1;1)$ ; б)  $\bar{a} = x \ln x\bar{i} + (2y + \ln x)\bar{j}$ ;  $M(e; 2)$ .

(Ответ: а)  $x = Cy^3 + y^2$ ,  $x = y^2$ ; б)  $y = C \ln^2 x - \ln x$ ,  $y = 3 \ln^2 x - \ln x$ ).

## 9.2. Поток ВП. Дивергенция ВП. Теорема Остроградского. Вычисление потока.

Пусть в области  $W \subseteq R^3$  заданы ВП  $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$  с непрерывно-дифференцируемыми функциями  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и некоторая ориентированная поверхность  $\sigma$  с единичным вектором нормали

$$\overline{n}_o = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}.$$

Потоком ВП  $\bar{a}$  через ориентированную поверхность  $\sigma$  называется поверхностный интеграл 2-го рода от вектор-функции  $\bar{a}$  по поверхности  $\sigma$ .

$$P_{\sigma}(\bar{a}) = \iint_{\sigma} (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma.$$

Если  $\sigma$  – замкнутая поверхность, то ее считают положительно ориентированной при выборе внешней стороны этой поверхности, а поток записывают в виде:

$$P_{\sigma}(\bar{a}) = \oiint_{\sigma} (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma.$$

Поток ВП является его суммарной характеристикой, описывающей поле  $\bar{a}$  посредством помещенной в него поверхности. Например, для поля скоростей текущей жидкости поток равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность  $\sigma$ .

*Дивергенцией ВП  $\bar{a}$  в точке  $M \in W$ , обозначаемой через  $div\bar{a}(M)$ , называется объемная плотность потока ВП  $\bar{a}$  в этой точке:*

$$div\bar{a}(M) = \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ (Q \rightarrow M)}} \frac{P_{\sigma}(\bar{a})}{v},$$

где  $v$  – объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $\sigma$ , стягивающейся в пределе в точку  $M$ .

В декартовой системе координат дивергенция вычисляется по формуле:

$$div\bar{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Если  $div\bar{a}(M) > 0$ , то говорят, что в точке  $M$  находится источник; если  $div\bar{a}(M) < 0$ , то в точке  $M$  находится сток. В случае  $div\bar{a}(M) = 0$  в точке  $M$  нет ни источника, ни стока. Величина  $|div\bar{a}(M)|$  характеризует мощность источника или стока.

**Теорема Остроградского.** Поток ВП  $\bar{a}$  через внешнюю сторону замкнутой поверхности  $\sigma$  равен тройному интегралу по области  $V$ , ограниченной поверхностью  $\sigma$ , от дивергенции ВП:

$$\oiint_{\sigma} (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma = \iiint_V div\bar{a} dv.$$

Теорема Остроградского позволяет свести задачу вычисления потока ВП через замкнутую поверхность  $\sigma$  к вычислению тройного интеграла по области  $V$ , заключенной внутри  $\sigma$ .

В случае незамкнутой поверхности  $\sigma$  способы вычисления потока сводятся к известным способам вычисления поверхностных интегралов (см. соответствующий раздел). В ряде случаев удобно использовать переход к поверхностному интегралу первого рода с последующим его вычислением.

Пусть, например, поверхность  $\sigma$  однозначно проектируется на плоскость  $xOy$ , и ее уравнение имеет вид:  $z = z(x, y)$ . Тогда

$$dq = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}, \quad \text{где } \gamma = (\bar{n}_0, \hat{Oz}), \quad \bar{n}_0 = \pm \frac{-z'_x \bar{i} - z'_y \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \quad |\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

причем «+» соответствует выбору верхней стороны поверхности  $\sigma$  ( $\cos \gamma > 0$ ); «-» соответствует выбору нижней стороны  $\sigma$  ( $\cos \gamma < 0$ ). Отсюда

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \iint_\sigma (\bar{a}, \bar{n}_0) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{(\bar{a}, \bar{n}_0)}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy,$$

где  $D_{xy}$  – проекция поверхности  $\sigma$  на плоскость  $xOy$ . Окончательно получаем формулу, сводящую подсчет потока к вычислению двойного интеграла:

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \pm \iint_{D_{xy}} (\bar{a}, \bar{n}) \Big|_{z=z(x,y)} dx dy,$$

где  $\bar{n} = (-z'_x; -z'_y; 1) = \text{grad}(z - z(x, y))$ , а выбор знака соответствует знаку

$$\cos \gamma = \cos(\bar{n}_0, \hat{Oz}).$$

Если поверхность  $\sigma$  однозначно проектируется на плоскость  $yOz$  ( $xOz$ ) и задана уравнением  $x = x(y, z)$  ( $y = y(x, z)$ ), то справедлива аналогичная формула:

$$\Pi_Q(\bar{a}) = \pm \iint_{D_{yz}} (\bar{a}, \bar{n}) \Big|_{x=x(y,z)} dy dz$$

где  $D_{yz} = \text{Pr}_{yOz} \sigma$ ,  $\bar{n} = \text{grad}(x - x(y, z)) = (1; -x'_y; -x'_z)$ , выбор знака определяется знаком  $\cos \alpha = \cos(\bar{n}_0, \hat{Ox})$ ;

$$(\Pi_\sigma(\bar{a}) = \pm \iint_{D_{xz}} (\bar{a}, \bar{n}) \Big|_{y=y(x,z)} dx dz,$$

где  $D_{xz} = \text{Pr}_{xOz} \sigma$ ,  $\bar{n} = \text{grad}(y - y(x, z)) = (-y'_x; 1; -y'_z)$ ;  $\cos \beta = \cos(\bar{n}_0, \hat{Oy})$ ).

*Замечание.* В случае более сложной поверхности  $\sigma$  разбиваем ее на части  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  и вычисляем  $\Pi_\sigma(\bar{a}) = \Pi_{\sigma_1}(\bar{a}) + \Pi_{\sigma_2}(\bar{a}) + \dots + \Pi_{\sigma_n}(\bar{a})$ .

### **Задачи для решения в аудитории.**

*Пример 1.* Вычислить дивергенцию ВП

$$\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k} \quad \text{в точке } M(1; -1; 2).$$

$$\text{Решение. } \text{div} \bar{a} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 + y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + z^2)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

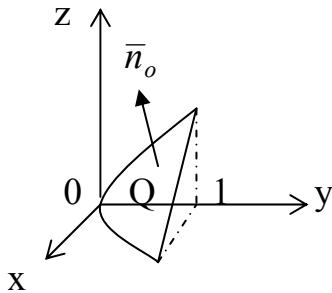
$\text{div} \bar{a}(M) = 2 - 2 + 4 = 4 > 0$ , т.е. точка  $M$  является источником поля.

*Пример 2.* Найти дивергенцию напряженности магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному линейному проводу.

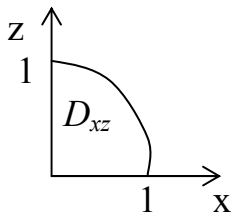
*Решение.* Примем за провод ось  $Oz$ . Тогда магнитное поле определится формулой:  $\vec{H}(M) = 2I \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ , где  $I$  – сила тока в проводнике.

$$\operatorname{div} \vec{H}(M) = 2I \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0.$$

*Пример 3.* Найти поток ВП  $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$  через часть  $\sigma$  внешней поверхности параболоида  $y = x^2 + z^2$ , лежащую в первом октанте и ограниченную плоскостью  $y=1$ .



*Решение.* Поверхность задана уравнением вида  $y = y(x, z) = x^2 + z^2$ ,  $y'_x = 2x$ ,  $y'_z = 2z$ ,  $\vec{n} = (-y'_x; 1; -y'_z) = (-2x; 1; -2z)$ ,  $\cos \beta = \cos(\vec{n}_o, \hat{Oy}) < 0$ .



Согласно приведенной выше формуле:

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma}(\vec{a}) &= - \iint_{D_{xz}} (\vec{a}, \vec{n}) \Big|_{y=y(x,z)} dx dz = - \iint_{D_{xz}} (-2x^3 + x - 2xz^2) \Big|_{y=x^2+z^2} dx dz = \\ &= \iint_{D_{xz}} x [2(x^2 + z^2) - 1] dx dz \end{aligned}$$

Так как  $D_{xz} = \Pi_{p_{xOz}} \sigma$  представляет собой четверть круга, удобно перейти к полярным координатам на плоскости  $xOz$ :  $x = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ .

$$\Pi_{\sigma}(\vec{a}) = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 (2r^2 - 1) dr = \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left( 2 \frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{15}.$$



*Пример 4.* Найти поток электростатического поля точечного заряда  $q$ , помещенного в начале координат, через внешнюю сторону сферы  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

*Решение.* Поле точечного заряда задается вектором напряженности

$$\vec{E}(M) = \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{q \cdot \vec{r}_o}{r^2},$$

где  $r$  – расстояние от точки  $M$  до начала координат,  $\vec{r}_o$  – единичный вектор, направленный по радиус-вектору  $\vec{r}$  точки  $M$ .

$$\Pi_{\sigma}(\vec{E}) = \iint_{\sigma} (\vec{E}, \vec{n}_o) d\sigma = q \iint_{\sigma} \frac{1}{r^2} (\vec{r}_o, \vec{n}_o) d\sigma.$$

Так как всюду на  $\sigma r = R = const$ ,  $(\vec{r}_o, \vec{n}_o) = |\vec{r}_o| \cdot |\vec{n}_o| \cdot \cos 0 = 1$ , то

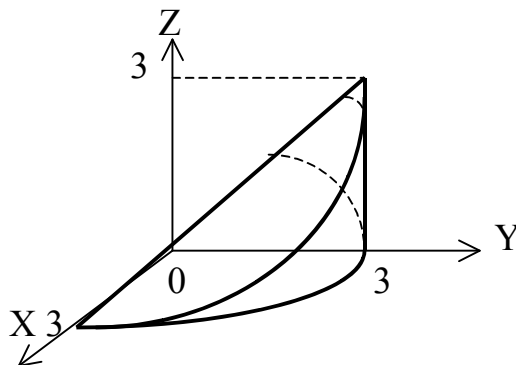
$$\Pi = \frac{q}{R^2} \iint_Q dq = \frac{q}{R^2} S_{\text{сферы}} = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

*Пример 5.* Найти поток ВП  $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k}$  через внешнюю сторону замкнутой поверхности  $\sigma: \{x^2 + y^2 = 9, z=0, z=y (z \geq 0)\}$ .

*Решение.* Воспользуемся теоремой Остроградского:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial(z+y)}{\partial z} = 2, \quad \Pi_{\sigma}(\vec{a}) = 2 \iiint_V dv,$$

где  $V$  – тело, ограниченное поверхностью  $Q$ .



Переходим к цилиндрической системе координат:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ .

$$\Pi_{\sigma}(\vec{a}) = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 r dr \int_0^{r \sin \varphi} dz = 2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^3 r^2 dr = -2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 = 4 \cdot \frac{27}{3} = 36.$$

### Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Вычислить дивергенцию ВП  $\bar{a} = (xy + z^2)\bar{i} + (yz + x^2)\bar{j} + (zx + y^2)\bar{k}$  в точках  $M_1(1; 3; -5)$ ,  $M_2(-3; 4; -1)$ ,  $M_3(1; 4; 0)$  и определить, являются ли они источником либо стоком. (Ответ.  $\text{div}\bar{a}(M_1) = -1$  – сток;  $\text{div}\bar{a}(M_2) = 0$  – ни источник, ни сток;  $\text{div}\bar{a}(M_3) = 5$  – источник).

Задача 2. Вычислить дивергенцию градиента СП  $U = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ . (Ответ.  $\text{div}(\text{grad}U) = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$ ).

Задача 3. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} + z\bar{k}$  через нижнюю сторону части плоскости  $x + 2y + 3z - 6 = 0$ , расположенной в первом октанте. (Ответ.  $\Pi = -36$ ).

Задача 4. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$  через верхнюю сторону части поверхности  $z = 2 - x^2 - y^2$ , отсеченной плоскостью  $z = 0$ . (Ответ.  $\Pi = 2\pi$ ).

Задача 5. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}$  через верхнюю сторону части поверхности эллипсоида  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ , лежащей в первом октанте. (Ответ.  $\Pi = 24\pi$ ).

Задача 6. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = 2x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$  через нижнюю сторону части боковой поверхности конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , ограниченной плоскостями  $z = 0$ ,  $z = 1$ . (Ответ:  $\Pi = -\pi/10$ ).

В следующих заданиях вычислить поток ВП с помощью теоремы Остроградского:

Задача 7. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$  через поверхность шара  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  в направлении внешней нормали. (Ответ:  $\Pi = \frac{12}{5}\pi R^5$ ).

Задача 8. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$  через внешнюю сторону поверхности  $\sigma: \{x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0\}$ . (Ответ:  $\Pi = -\pi$ ).

Задача 9. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xz\bar{k}$  через внешнюю сторону пирамиды с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$ . (Ответ:  $\Pi = 1/3$ ).

Задача 10. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + (1 - z)\bar{k}$  через внешнюю сторону замкнутой поверхности  $Q: \{x^2 + y^2 = z^2, z = H (z \geq 0)\}$ . (Ответ:  $\Pi = \frac{1}{3}\pi H^3$ ).

Задача 11. Вычислить поток ВП  $\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j} + z^2\bar{k}$  через внешнюю сторону поверхности  $Q: \{x^2 + y^2 = 3z, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ . (Ответ:  $\Pi = 6,5\pi$ ).

### 9.3. Циркуляция и ротор ВП. Теорема Стокса.

Пусть в области  $W \in R^3$  заданы ВП  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  с непрерывно-дифференцируемыми функциями  $P, Q, R$  и некоторая ориентированная гладкая линия  $L$  с единичным вектором касательной  $\vec{l}_o$ .

Линейным интегралом ВП  $\vec{a}$  вдоль ориентированной линии  $L$  называется криволинейный интеграл 2-го рода от вектор-функции  $\vec{a}$ :

$$\int_L (\vec{a}, \vec{l}_o) dl = \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

Если  $\vec{a}$  - силовое поле, то линейный интеграл равен работе, которую совершает поле по перемещению материальной точки вдоль линии  $L$ .

Вычисление линейного интеграла сводится к известным способам вычисления криволинейного интеграла 2-го рода (см. соответствующий раздел).

Линейный интеграл ВП  $\vec{a}$  вдоль замкнутого ориентированного контура  $L$  называется циркуляцией ВП  $\vec{a}$  вдоль этого контура и обозначается

$$C_L(\vec{a}) = \oint_L (\vec{a}, \vec{l}_o) dl.$$

Циркуляция характеризует вращательную способность ВП  $\vec{a}$  вдоль контура  $L$ .

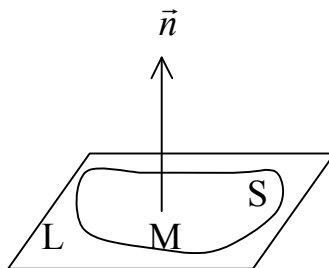
Если  $C_L(\vec{a}) > 0$  ( $C_L(\vec{a}) < 0$ ), то контур  $L$ , расположенный в силовом поле  $\vec{a}$  и свободно закрепленный в своем центре тяжести, будет вращаться в положительном (отрицательном) направлении относительно своей ориентации.

Если  $C_L(\vec{a}) = 0$ , то контур  $L$  не вращается.

Плотность циркуляции ВП  $\vec{a}$  в точке  $M$  по направлению  $\vec{n}$  есть число, определяемое соотношением

$$ПЦ_{\vec{n}}(M) = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ (L \rightarrow M)}} \frac{C_L(\vec{a})}{S},$$

где  $S$  - площадь, ограниченная замкнутым контуром  $L$  лежащим в плоскости с нормалью  $\vec{n}$ , содержащей точку  $M$ , и стягивающимся в пределе к этой точке.



Плотность циркуляции характеризует вращательную мощность ВП по выбранному направлению в каждой его точке.

Вектор, направленный в сторону максимальной плотности циркуляции ВП  $\bar{a}$  в точке М и равный ей по модулю, называется *ротором* ВП  $\bar{a}$  и обозначается  $\text{rot} \bar{a} (M)$ . Связь между плотностью циркуляции и ротором выражается формулой:

$$\text{ПЦ}_{\bar{n}}(M) = (\text{rot} \bar{a} (M), \bar{n}_o),$$

где  $\bar{n}_o$  – единичный вектор направления  $\bar{n}$ .

В декартовой системе координат  $\text{rot} \bar{a} (M)$  вычисляется по формуле:

$$\text{rot} \bar{a} (M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(M) & Q(M) & R(M) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

**Теорема Стокса.** Циркуляция ВП  $\bar{a}$  вдоль замкнутого ориентированного контура  $L$  равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность  $Q$ , натянутую на этот контур и положительно ориентированную относительно его:

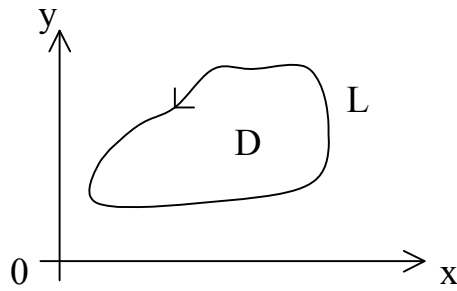
$$\text{Ц}_L(\bar{a}) = \oint_L (\bar{a}, \bar{l}_o) dl = \iint_{\sigma} (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}_o) d\sigma = \Pi_{\sigma}(\text{rot} \bar{a}).$$

Отметим, что поверхность  $\sigma$  считается положительно ориентированной относительно контура  $L$ , если на  $\sigma$  выбрана сторона, в точках которой вектор нормали  $\bar{n}$  направлен так, чтобы видимый с его конца обход контура  $L$  совершался против часовой стрелки (см. рисунок).

Для плоского ВП  $\bar{a} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$  выражение для ротора принимает вид  $\text{rot} \bar{a} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$ , и из формулы Стокса следует *формула Грина*

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Формула Стокса позволяет свести вычисление циркуляции ВП  $\bar{a}$  по замкнутому контуру  $L$  к вычислению потока поля  $\text{rot} \bar{a}$  через любую незамкнутую поверхность  $\sigma$ , натянутую на контур  $L$ . На практике следует выбирать  $\sigma$  наиболее простой формы (например, плоскость).



### Задачи для решения в аудитории.

*Пример 1.* Для ВП  $\bar{a} = (1 + 2xy)\bar{i} - zy^2\bar{j} + (yz^2 - 2yz + 1)\bar{k}$  найти: а) ротор; б) плотность циркуляции в точке  $M(2; -1; 2)$  по направлению  $\bar{n} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ ; в) наибольшую плотность циркуляции в точке  $M$ .

*Решение.* ВП  $\bar{a}$  определено и дифференцируемо всюду в  $R^3$ :

$$\text{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 + 2xy & -zy^2 & yz^2 - 2yz + 1 \end{vmatrix} = (z^2 - 2z + y^2)\bar{i} - 2x\bar{k};$$

$$\text{rot}\bar{a}(M) = \bar{i} - 4\bar{k}.$$

Для вычисления  $\text{ПЦ}_{\bar{n}}(M)$  находим  $\bar{n}_o = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{1}{3}(1; -2; -2) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$  и далее

$$\text{по формуле } \text{ПЦ}_{\bar{n}}(M) = (\text{rot}\bar{a}(M), \bar{n}_o) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 3.$$

Наибольшая плотность циркуляции поля в точке  $M$  равна длине ротора в этой точке, т.е.  $\max_{\bar{n}} \text{ПЦ}_{\bar{n}}(M) = |\text{rot}\bar{a}(M)| = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17}$ .

*Пример 2.* Найти ротор поля линейных скоростей точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси проходящей через начало координат.

*Решение.* Поле линейных скоростей точек тела определится вектором  $\bar{v}(M) = \bar{\omega} \times \bar{r}(M)$ , где  $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  - вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения,  $\bar{r}(M) = (x, y, z)$  - радиус-вектор точки  $M$ . Отсюда следует, что

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\bar{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\bar{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\bar{k}.$$

Далее,

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x \bar{i} + 2\omega_y \bar{j} + 2\omega_z \bar{k} = 2\bar{\omega}.$$

**Пример 3.** Вычислить работу силового поля  $\bar{F} = -(a \cos t \bar{i} + b \sin t \bar{j})$  вдоль дуги  $L$  эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  от точки  $A(a; 0)$  до точки  $B(0; b)$ .

**Решение.** Параметрические уравнения эллипса имеют вид  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , причем точкам  $A$  и  $B$  соответствуют значения параметра  $t_A = 0$ ,  $t_B = \pi/2$ .

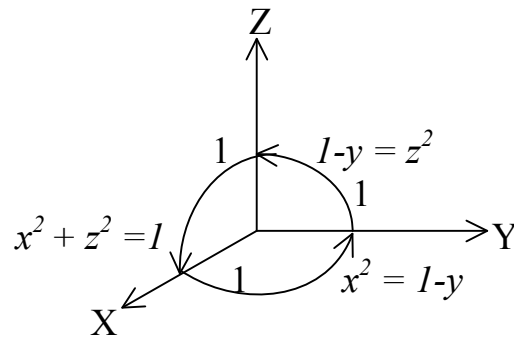
Работа есть линейный интеграл ВП  $\bar{F}$  вдоль дуги  $L$ :

$$A = \int_L P dx + Q dy = \left| \begin{array}{l} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t \end{array} \right| = - \int_0^{\pi/2} (a \cos t (-a \sin t) + b \sin t \cdot b \cos t) dt = -(b^2 - a^2).$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = (a^2 - b^2) \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

**Пример 4.** Найти циркуляцию ВП  $\bar{a} = y^2 \bar{i} - x^2 \bar{j} + z^2 \bar{k}$  по контуру  $L$ , получаемому при пересечении параболоида  $x^2 + z^2 = 1 - y$  с координатными плоскостями: а) непосредственно; б) с помощью теоремы Стокса.

**Решение.** а)  $\oint_{ABCA} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl = \int_{AB} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl + \int_{BC} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl + \int_{CA} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl.$



На  $AB$ :  $z = 0$ ,  $x^2 = 1 - y$ .

$$\int_{AB} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \left| \begin{array}{l} \bar{a} = y^2 \bar{i} - x^2 \bar{j} \\ y = 1 - x^2 \\ dy = -2x dx \end{array} \right| = \int_1^0 [(1 - x^2)^2 - x^2 (-2x)] dx =$$

$$= \int_1^0 (x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_1^0 = -\frac{31}{30}.$$

На BC:  $x = 0, z^2 = 1 - y$ .

$$\int_{BC} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl = \int_{BC} P dx + Q dy + R dz = \left. \begin{array}{l} \bar{a} = y^2 \bar{i} + z^2 \bar{k} \\ dx = 0 \\ y = 1 - z^2 \\ dy = -2z dz \end{array} \right| = \int_0^1 (0 \cdot (-2z) + z^2) dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

На CA:  $y = 0, x^2 + z^2 = 1$ .

$$\int_{CA} (\bar{a}, \bar{l}_o) dl = \int_{CA} P dx + Q dy + R dz = \left. \begin{array}{l} \bar{a} = -x^2 \bar{j} + z^2 \bar{k} \\ dy = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 z^2 dz = -\frac{1}{3}.$$

$$\Pi = -\frac{31}{30} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{31}{30}.$$

б) Используем теорему Стокса. В качестве поверхности  $\sigma$ , натянутой на контур  $L$ , возьмем поверхность параболоида в виде  $y = y(x, z) = 1 - x^2 - z^2$ . Ее проекция  $D_{xz}$  на плоскость  $xOz$  есть четверть круга  $x^2 + z^2 = 1$ . Вектор нормали  $\bar{n}_o$  к верхней стороне этой поверхности обеспечивает требуемое теоремой Стокса направление обхода контура  $L$ .

$$\text{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x + y) \bar{k}.$$

Применяя теорему Стокса и полагая далее  $\bar{n} = (-y'_x; 1; -y'_z) = (2x, 1, 2z)$  имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_L(\bar{a}) &= \Pi_Q(\text{rot} \bar{a}) = \iint_Q (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}_o) dq = |\cos(\bar{n}_o, Oy) > 0| = \iint_{D_{xz}} (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}) \Big|_{y=1-z^2-x^2} dxdz = \\ &= \iint_{D_{xz}} -2(x + y) \cdot 2z \Big|_{y=1-z^2-x^2} dxdz = -4 \iint_{D_{xz}} z(x + 1 - z^2 - x^2) dxdz = \left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \\ &= -4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 (r \cos \varphi + 1 - r^2) dr = -4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 + \\ &+ 4 \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^1 (r^2 - r^4) dr = -4 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{8}{15} = -\frac{31}{30}. \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Для ВП  $\vec{a} = (2y - 3xz^2)\vec{i} - (2xz - 3y^2)\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$  найти: а) ротор; б) плотность циркуляции в точке  $M(1; -2; -3)$  по направлению  $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ; в) наибольшую плотность циркуляции в точке  $M$ . (Ответ. а)  $\text{rot}\vec{a} = (2x + 2y, 6x - 6xz, -2z - 2)$ ; б)  $\text{ПЦ}_{\vec{n}}(M) = 20/\sqrt{5}$ ; в)  $\max \text{ПЦ}_{\vec{n}}(M) = 2\sqrt{149}$ ).

**Задача 2.** Найти ротор напряженности магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному линейному проводу. (Ответ.  $\text{rot}\vec{H}(M) = 0$ ).

**Задача 3.** Вычислить линейный интеграл ВП  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y - 1)\vec{k}$  вдоль отрезка прямой  $AB$ , где  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 4)$ . (Ответ. 13).

**Задача 4.** Найти работу силового поля  $\vec{F} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + \cos z\vec{k}$  по дуге винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2t$  при  $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ . (Ответ.  $A = 1/6$ ).

**Задача 5.** Показать, что работа поля магнитной напряженности бесконечного линейного проводника  $\vec{H} = \frac{2I(-y\vec{i} + x\vec{j})}{x^2 + y^2}$  вдоль окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = H_0$  не зависит от радиуса окружности.

**Задача 6.** Вычислить линейный интеграл ВП  $\vec{a} = y^2\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j} + z\vec{k}$  вдоль кривой  $L=AB$ , соединяющей точки  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; -1)$  по линии пересечения цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$  и плоскости  $x^2 + 2y + z = 1$ . (Ответ.  $3/2$ ).

**Задача 7.** Найти циркуляцию ВП  $\vec{a} = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$  по контуру  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ . (Ответ.  $\text{Ц} = -5$ ).

**Задача 8.** Найти циркуляцию ВП  $\vec{a} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$  вдоль окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$  (в положительном направлении относительно орта  $\vec{k}$ ). (Ответ.  $\text{Ц} = -\frac{\pi R^6}{8}$ ).

**Задача 9.** Найти циркуляцию ВП  $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$  вдоль контура  $L$ , вырезанного из цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$  плоскостью  $x + y + z = 1$  (в положительном направлении относительно орта  $\vec{k}$ ). (Ответ.  $\text{Ц} = -\pi$ ).

**Задача 10.** Найти циркуляцию ВП  $\vec{a} = (z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - z^2)\vec{k}$  вдоль контура  $L$ , вырезанного конусом  $x^2 + y^2 = z^2$  в полусфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  (в положительном направлении относительно орта  $\vec{k}$ ). (Ответ.  $\text{Ц} = 0$ ).

**Задача 11.** Найти циркуляцию ВП  $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$  по контуру  $L$ , вырезанному в первом октанте из параболоида  $x^2 + y^2 = z$  плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$  (в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида). (Ответ.  $\text{Ц} = 1/3$ ).



*Задача 12.* Найти циркуляцию ВП  $\bar{a} = y\bar{i} - 2z\bar{j} + x\bar{k}$  вдоль эллипса, образованного сечением однополостного гиперболоида  $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$  плоскостью  $y = x$  (в положительном направлении относительно орта  $\bar{i}$ ). (Ответ.  $\Pi = 3\pi R^2$ ).

#### 9.4. Специальные виды векторных полей

Векторное поле  $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$  заданное в области  $V$ , называется *потенциальным*, если в области  $V$  существует непрерывно-дифференцируемая скалярная функция  $U$ , что вектор  $\bar{a}$  можно представить в виде градиента этой функции

$$\bar{a} = \text{grad}u \quad (1)$$

Функция  $u$  называется потенциальной функцией или потенциалом векторного поля. (Для силовых полей функция  $U$  называется *силовой функцией*, а функция  $u$  – *потенциалом*).

Если векторное поле  $\bar{a}$  потенциально в области  $V$ , то для его задания достаточно одной скалярной функции – потенциала этого поля, так как из формулы (1) следует, что в этом случае  $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ , откуда  $Pdx + Qdy + Rdz = du$ .

Если векторное поле  $\bar{a}$  потенциально, выражение  $Pdx + Qdy + Rdz = du$  есть полный дифференциал потенциала этого поля.

**Теорема 1.** Для того, чтобы дифференцируемое векторное поле  $\bar{a}$ , заданное в области  $V$ , было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\text{rot}\bar{a} = 0 \quad (2)$$

Для того, чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Выполнение условия (2) в области  $V$  приводит не только к потенциальности векторного поля, но и к следующим результатам.

1. В области  $V$  существует потенциал  $U = u(x, y, z)$ , который может быть определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого по формуле:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) \Big|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z) \Big|_{z=z_0} dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C, \quad (3)$$

где  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  – любая фиксированная точка;  $(x, y, z)$  – переменная точка в области  $V$ ,  $C$  – произвольная постоянная. Во втором интеграле формулы (3) постоянно  $x$ , а в третьем  $x$  и  $y$ .

2. Циркуляция векторного поля  $\bar{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $L \in V$  равно нулю:  $\oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = 0$ .

Если же хотя бы в одной точке, внутренней по отношению к контуру  $L$ , поле  $\bar{a}$  не определено, циркуляция по этому контуру может и не обращаться в нуль, хотя поле потенциально.

3. Для любых двух точек  $A$  и  $B$  в области  $V$  значение линейного интеграла векторного поля  $\bar{a}$ , т.е.  $W = \int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r})$ , не зависит от вида контура интегрирования  $AB$ , соединяющего точки  $A$  и  $B$  и расположенного в области  $V$ , а зависит только от положения этих точек в области.

4. Если  $U(x, y, z)$  – потенциал векторного поля  $\bar{a}$ , то линейный интеграл этого поля вдоль любого контура  $AB \subset V$ , соединяющего точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $B(x_1, y_1, z_1)$  равен разности значений потенциала в конечной и начальной точек контура интегрирования:

$$W = \int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) \quad (4)$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что если  $\bar{a}$  – силовое поле, то разность потенциалов между точками  $B$  и  $A$  равна работе, которую поле совершает по перемещению материальной точки из  $A$  в  $B$ .

Векторное поле  $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ , заданное в области  $V$ , называется *соленоидальным (трубчатым)*, если

$$\operatorname{div} \bar{a} = 0. \quad (5)$$

Соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков.

Векторное поле  $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ , заданное в области  $V$ , называется *гармоническим (лапласовым)*, если оно является как потенциальным, так и соленоидальным, т.е.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{a} = 0 \\ \operatorname{div} \bar{a} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

### **Задачи для решения в аудитории.**

*Пример 1.* Установить потенциальность поля

$$\bar{a} = (3x^2 y^2 z^{-1} - 2x^3)\bar{i} + (2x^3 yz^{-1})\bar{j} + (z^3 - x^3 y^2)\bar{k},$$

найти его потенциал и вычислить линейный интеграл  $W$  поля вдоль контура  $L = AB$ , где  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(1, 3, 1)$ .

*Решение.* Данное векторное поле определено и дифференцируемо во всех точках пространства, за исключением точек плоскости  $z = 0$ , так как в этих точках координаты вектора  $\bar{a}$  не определены. Исключив эти точки, получим неодно-

связную область, в которой проекции вектора  $\bar{a}$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Найдем

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 y^2 z^{-1} - 2x^3 & 2x^3 y z^{-1} + 3y^3 & z^3 - x^3 y^2 z^{-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-2yx^3 z^{-2} + 2yx^3 z^{-2})\bar{i} - (-3x^2 y^2 z^{-2} + 3x^2 y^2 z^{-2})\bar{j} + (6x^2 yz^{-1} - 6x^2 yz^{-1})\bar{k} = 0.$$

Данное поле является потенциальным там, где  $z \neq 0$ .

Найдем потенциал поля  $\bar{a}$ , выбрав в качестве точки  $(x_0, y_0, z_0)$  точку  $(0, 0, 1)$  (начало координат брать нельзя, т.к. при  $z = 0$  поле не является потенциальным).

$$U(x, y, z) = \int_0^x (3x^2 y^2 z^{-1} - 2x^3) \Big|_{z=1}^{y=0} dx + \int_0^y (2x^3 yz^{-1} + 3y^3) \Big|_{z=1} dy +$$

$$+ \int_1^z (x^3 - x^3 y^2 z^{-2}) dz + C = -2 \int_0^x x^3 dx + \int_0^y (2x^3 y + 3y^3) dy +$$

$$+ \int_1^z (z^3 - x^3 y^2 z^{-2}) dz + C = -\frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{4} y^4 + \frac{1}{4} z^4 + x^3 y^2 z^{-1} + C_1,$$

где  $C_1 = C - \frac{1}{4}$  — произвольная постоянная.

Вычислим линейный интеграл  $W$  поля  $\bar{a}$  вдоль линии АВ.

$$W = \int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = \left( -\frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{4} y^4 + \frac{1}{4} z^4 + x^3 y^2 z^{-1} + C_1 \right) \Big|_{A(1,2,2)}^{B(1,3,1)} = 52.$$

*Пример 2.* Установить, является ли соленоидальным векторное поле  $\bar{a} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$ .

*Решение.*  $\operatorname{div} \bar{a} = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 = 0$  — поле соленоидально.

### Задачи для самостоятельного решения.

*Задача 1.* Доказать, что плоское векторное поле  $\bar{a} = x \ln(1 + y^2)\bar{i} + yx^2(1 + y^2)^{-1}\bar{j}$  является потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл

$W$  поля  $\bar{a}$  от точки  $A(2, 3)$  до точки  $B(-4, 7)$ . (Ответ.  $U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + y^2) + C$ ,  $W = 2(4 \ln 50 - \ln 10)$ ).

**Задача 2.** Убедившись в том, что заданное векторное поле  $\bar{a}$  является потенциальным, найти потенциал поля и вычислить для точек  $A$  и  $B$  линейный интеграл  $\int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r})$ , если: а)  $\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2xz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$ ,  $A(1; 1; 1)$ ,

$B(-1; 2; -2)$ ; б)  $\bar{a} = (2xz + y^{-1})\bar{i} - (x + z)y^{-2}\bar{j} + (x^2 + y^{-1})\bar{k}$ ,  $A(-1; 3; -2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ .

(Ответ. а)  $U(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - 2xyz + C$ ,  $W = -\frac{22}{3}$ ; б)  $U(x, y) = x^2z + (x + z)y^{-1} + C$ ,  $W = 8$ .)

### 9.5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа

Основные характеристики векторного анализа – градиент, дивергенция, ротор (называемые дифференциальными операциями первого порядка) – и операции над ними удобно представить с помощью оператора Гамильтона (*оператора «набла»*):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$$

Имеют место следующие *правила действий с помощью набла*:

1. произведение оператора  $\nabla$  на скалярную функцию  $u(x, y, z)$  дает градиент этой функции:  $\nabla u = \text{grad } u$ ;
2. скалярное произведение оператора  $\nabla$  на векторную функцию  $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  дает дивергенцию этой функции:  $(\nabla, \bar{a}) = \text{div } \bar{a}$ ;
3. векторное произведение оператора  $\nabla$  на векторную функцию  $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$  дает ротор этой функции:  $[\nabla, \bar{a}] = \text{rot } \bar{a}$ .

Если в области  $V$  заданы скалярное поле и векторное поле  $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ , причем функции  $P, Q, R$  дважды дифференцируемы в области  $V$ , то в этой области  $\text{grad } u$  и  $\text{rot } \bar{a}$  представляют собой дифференцируемые векторные поля, а  $\text{div } \bar{a}$  – дифференцируемое скалярное поле. В этом случае возможны следующие операции второго порядка в векторном анализе:  $\text{grad } \text{div } \bar{a}$ ;  $\text{div } \text{grad } u$ ;  $\text{div } \text{rot } \bar{a}$ ,  $\text{rot } \text{grad } u$ ;  $\text{rot } \text{rot } \bar{a}$ . С помощью оператора  $\nabla$  можно показать, что  $\text{div } \text{rot } \bar{a} = 0$ ,  $\text{rot } \text{grad } u = 0$ . Одной из основных операций второго порядка является  $\text{div } \text{grad } u$ .

Кратко эту операцию обозначают  $\Delta u$ , причем символ  $\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

называют *оператором Лапласа*.

$$\text{div } \text{grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Уравнение  $\Delta u = 0$  или  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$  называется *уравнением Лапласа*, а

его решение – *гармоническими функциями*.

Скалярное поле  $u = u(x, y, z)$ , удовлетворяющее уравнению Лапласа, называется *гармоническим полем*.

Операции  $grad\ div \bar{a}$  и  $rot\ rot \bar{a}$  связаны между собой соотношением:

$rot\ rot \bar{a} = grad\ div \bar{a} = \Delta a$ , где  $\Delta a = \Delta P\bar{i} + \Delta Q\bar{j} + \Delta R\bar{k}$  представляет собой вектор, проекции которого равны  $\Delta P, \Delta Q, \Delta R$  ( $P, Q, R$  – проекции векторной функции  $\bar{a}$ ).

### Задачи для решения в аудитории.

*Пример 1.* Для поля вектора  $\bar{a} = x(y^2 + z^2)\bar{i} + y(x^2 + z^2)\bar{j} + z(x^2 + y^2)\bar{k}$  вычислить: а)  $\nabla \bar{a}$ ; б)  $[\nabla, \bar{a}]$ ; в)  $\nabla(\nabla \bar{a})$ .

*Решение.* а)  $\nabla \bar{a} = div \bar{a} = y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$ ;

б)

$$[\nabla, \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(y^2 + z^2) & y(x^2 + z^2) & z(x^2 + y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (2zy - 2yz)\bar{i} - (2xz - 2xz)\bar{j} + (2xy - 2xy)\bar{k} = 0.$$

в)  $\nabla(\nabla \bar{a}) = grad\ div \bar{a} = grad(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = 4x\bar{i} + 4y\bar{j} + 4z\bar{k} = 4\bar{r}$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

*Задача 1.* Пусть  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ,  $r = |\bar{r}|$ ,  $C$  – постоянный вектор,  $u$  – дифференцируемая скалярная функция. С помощью оператора набла определить: а)  $div(r^2 C)$ , б)  $rot((C, r)r)$ , в)  $div\ gradu(r)$ . (Ответ. а)  $2r(r; C)$ , б)  $[C, r]$ ; в)  $u''(r) + (2u'(r))/r$ ).

*Задача 2.* Вычислить  $\Delta u$  в точке  $M$ , если а)  $u = 3x^2 z^2 - (x + y - 2z^2)^2 + 2z^2$ ,  $M(2; 1; -1)$ ; б)  $u = \sin^2(2x - 3y + z) - 2x^2 + y^2 + z^2$ ,  $M(-1; -1; -1)$ .

## 9.6. Ряды Фурье

1. *Рядом Фурье* для периодической функции  $f(x)$  с периодом  $2\pi$ , определенной в интервале  $(-\pi, \pi)$ , называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad , \quad (7)$$

если его коэффициенты вычислены по формулам Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$
(8)

Если ряд (7) сходится, то его сумма  $S(x)$  есть периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье сформулированы в следующей

**Теореме Дирихле:** Если на интервале  $(-\pi, \pi)$  функция  $f(x)$  имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке интервала  $(-\pi, \pi)$ , и сумма  $S(x)$  этого ряда:

- 1)  $S(x) = f(x)$  во всех точках непрерывности функции  $f(x)$ , лежащих внутри  $[-\pi, \pi]$ ;
- 2)  $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ , где  $x_0$  – точка разрыва I рода;
- 3)  $S(x) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(+\pi - 0)]$  на концах отрезка.

Для четной функции (т.е. если  $f(x) = f(-x)$ ) ряд Фурье (7) принимает вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (8)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Для нечетной функции (т.е. если  $f(x) = -f(-x)$ ) ряд Фурье (7) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (10)$$

где

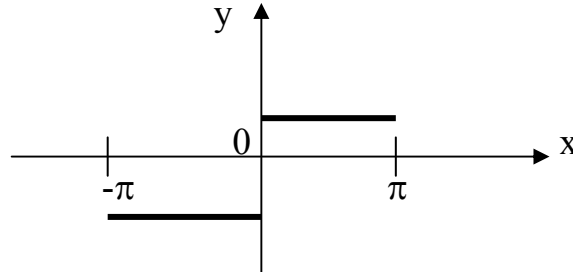
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Рассмотрим примеры разложения функций в ряд Фурье.

### Задачи для решения в аудитории

Пример 1.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, ее график приведен на рисунке.



$f(-x) = -f(x)$ , т.е.  $f(x)$  – нечетная,

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n),$$

Итак,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n - \text{четном}, \\ \frac{4}{\pi n} & \text{при } n - \text{нечетном}. \end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

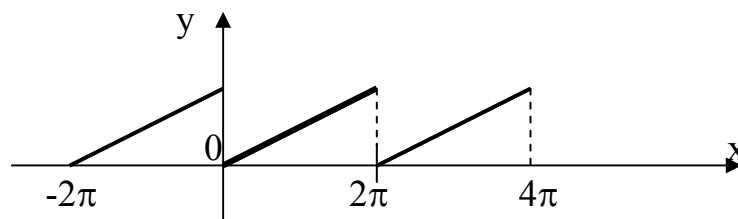
Обозначим сумму ряда  $S(x)$ , тогда очевидно  $S(0) = 0$ ,  $S(\pi) = 0$ ,  $S(-\pi) = 0$  ( $f(0) = 1$ ;  $f(\pi)$  неопределена,  $f(-\pi) = -1$ ).

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на интервале  $(0, 2\pi)$  формулой  $f(x) = x$ .

Решение. На рисунке показан график заданной функции с ее периодическим продолжением:



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}, \quad f(x) = \pi - 2 \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right), \quad x \in (0, 2\pi).$$

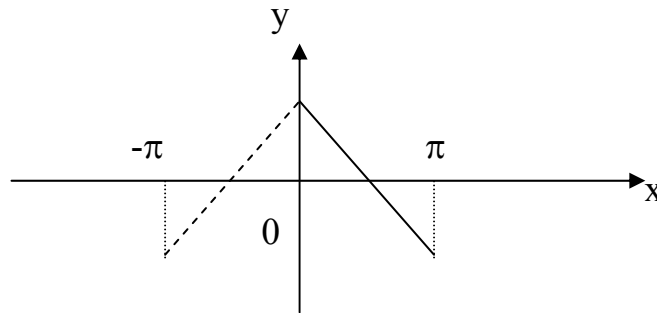
Так как в интервале  $(0, 2\pi)$  функция  $f(x) = x$  непрерывна, то полученный ряд сходится к  $x$  во всех точках этого интервала. В точках  $x = 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), которые являются точками разрыва функции, ряд сходится и имеет своей суммой

$$\frac{f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)}{2} = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi.$$

*Замечание.* Если  $f(x)$  задана в интервале  $(0, +\pi)$ , то в соседний интервал  $(-\pi, 0)$  можно осуществить как ее четное, так и ее нечетное продолжение.

*Пример 3.* Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на интервале  $0 < x < \pi$  формулой  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ .

*Решение.* Продолжим эту функцию на  $(-\pi, 0)$ , например, четным образом.



$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) dx = 0; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n - \text{четном,} \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{при } n - \text{нечетном.} \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{\pi}{4}.$$



### Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 1.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $(-\pi, \pi)$  формулой  $f(x) = |x|$ , имеющую период  $2\pi$ .

(Ответ.  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots \right)$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .)

**Задача 2.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $(0 < x < 2\pi)$  формулой  $f(x) = x^2$ .

(Ответ.

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left( \cos x - \pi \sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi \sin 2x}{2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} + \dots \right),$$

$$x \in (-\pi, \pi).$$

в компактном виде:  $x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ .

**Задача 3.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[-\pi; \pi]$  формулой  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(Ответ.

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \left( \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{2}{\pi \cdot 3^2} \cos 3x + \frac{2}{\pi \cdot 5^2} \cos 5x + \dots \right) + \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right).$$

**Задача 4.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[-\pi; \pi]$  формулой  $f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ .

(Ответ.  $f(x) = \frac{2 \sin x}{1} + \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{2 \sin 3x}{3} + \frac{2 \sin 4x}{4} + \dots$ ).

**2.** Если период функции равен не  $2\pi$ , а  $2l$ , т.е. функция задана на интервале  $(-l, l)$ , то ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (12)$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Если функция  $f(x)$  на интервале  $(-l, l)$  четная, то все коэффициенты  $b_n = 0$  и ряд Фурье (12) имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}. \tag{14}$$

Здесь

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = (1, 2, \dots). \tag{15}$$

Для нечетной на интервале  $(-l, l)$  функции  $f(x)$  ряд (12) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \tag{16}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{17}$$

**3.** Любую непериодическую функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $(0, l)$  можно разложить в ряд Фурье, построив вспомогательную функцию  $\varphi(x)$  такую, что :

- 1)  $\varphi(x)$  периодическая с периодом  $2l$ ;
- 2)  $\varphi(x)$  на отрезке  $(0, l)$  совпадает с функцией  $f(x)$ .

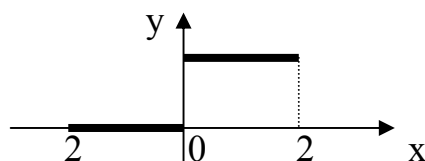
Если  $\varphi(x)$  дополнить так, что на отрезке  $(-l, l)$  она будет нечетной, то в разложение этой функции в ряд Фурье  $a_0 = a_1 = \dots = 0$ . Такое разложение называется *разложением по синусам*.

Если  $\varphi(x)$  дополнить так, что на отрезке  $(-l, l)$  она будет четной, то в разложение этой функции в ряд Фурье  $b_0 = b_1 = \dots = 0$ . Такое разложение называется *разложением по косинусам*.

### **Задачи для решения в аудитории.**

*Пример 1.* Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $(-2, 2)$  формулой  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 < x < 2. \end{cases}$

*Решение.*



$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \int_0^2 2 dx = 2, \\
 a_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^2 \cos \frac{\pi n x}{2} = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n} \cdot 0 = 0, \\
 b_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^2 \sin \frac{\pi n x}{2} = \frac{2}{\pi n} \left( -\cos \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n} \cdot ( -(-1)^n + 1 ) = \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1; \\ 0, & n = 2k \end{cases}; \\
 f(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

*Пример 2.* Разложить функцию, заданную на отрезке  $[0, 1]$  формулой  $f(x) = 2 - x$ : а) по синусам; б) по косинусам; в) по синусам и косинусам.

*Решение.* а) Дополним функцию  $f^*(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  как нечетную. Период функции равен  $2l = 2 \Rightarrow l = 1$ . В этом случае  $a_0 = a_1 = \dots = 0$ .

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{1} dx = 2 \left( 2 \int_0^1 \sin \pi n x dx - \int_0^1 x \sin \pi n x dx \right) = \\
 &= \frac{4}{n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right) + \frac{1}{n\pi} \left( (-1)^n - 0 \right) - 0 = \frac{5}{n\pi} (-1)^n - \frac{4}{n\pi}; \\
 b_1 &= -\frac{9}{\pi}; \quad b_2 = \frac{1}{2\pi}; \quad b_3 = -\frac{9}{3\pi}; \quad b_4 = \frac{1}{4\pi}. \\
 f(x) &= -\frac{9}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{9}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi x - \dots
 \end{aligned}$$

б) Дополним функцию  $f^*(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  как четную. В этом случае период функции равен  $2l = 2 \Rightarrow l = 1$ . В этом случае  $b_0 = b_1 = \dots = 0$ .

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{1} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 (2-x) \cos \frac{\pi n x}{1} dx = 2 \left( 2 \int_0^1 \cos \pi n x dx - \int_0^1 x \cos \pi n x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{(n\pi)^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{1}{(n\pi)^2} \left( (-1)^n - 1 \right); \\
 a_0 &= \int_0^1 (2-x) dx = \frac{3}{2}; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}. \\
 f(x) &= -\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{2}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x - \frac{2}{\pi^2 5^2} \cos 5\pi x - \dots
 \end{aligned}$$

в) В данном случае отрезок  $[0,1]$  представляет собой период функции, следовательно  $l = 1/2$ . Дополним функцию  $f(x)$  на отрезке как не четную и не нечетную. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (2-x) dx = 3; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2-x) \cos \frac{\pi n x}{\frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^1 (2-x) \cos 2\pi n x dx = 0.$$

$$b_n = 2 \int_0^1 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{\frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^1 (2-x) \sin 2\pi n x dx = \frac{1}{\pi n};$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{2\pi} \sin 4\pi x + \frac{1}{3\pi} \sin 6\pi x + \dots$$

### Задачи для самостоятельного решения

*Задача 1.* Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке  $[-1, 1]$  формулой  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

(Ответ.  $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos \pi(2n-1)x + \sin \pi n x \right)$ .)

*Задача 2.* Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале  $[-2,2]$  формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(Ответ.  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi n x}{2}}{n}$ .)

*Задача 3.* Функцию, заданную на интервале  $(0, l)$  формулой  $f(x) = x(l-x)$ , разложить в ряд по синусам.

(Ответ.  $f(x) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}$ .)

Задача 4. Разложить функцию  $f(x)$  заданную на отрезке  $(0;1)$  формулой  $f(x) = 2x$  в ряд Фурье: а) по синусам; б) по косинусам; в) по синусам и косинусам.  
(Ответ.

$$а) f(x) = \frac{4}{\pi} \sin \pi x - \frac{4}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi x - \dots;$$

$$б) f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{8}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{8}{25\pi^2} \cos 5\pi x - \dots)$$

$$в) f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\pi x - \frac{2}{2\pi} \sin 4\pi x - \frac{2}{3\pi} \sin 6\pi x - \dots$$

### *Рекомендуемая литература*

1. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. /Под ред. А.В.Ефимова, В.П.Демидовича. – М. , Наука, 1986 г.
2. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч.2. /Под ред. Е.И.Гурского. - Мн., Высшэйшая школа, 1990 г.

## Содержание

Стр.

1. Двойной интеграл в декартовых координатах и методы его вычисления.....	3
2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах .....	6
3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.....	9
4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах .....	11
5. Криволинейный интеграл I рода .....	14
6. Криволинейные интегралы II рода .....	18
7. Вычисление поверхностного интеграла в декартовой системе координат .....	20
8. Поверхностные интегралы II рода .....	21
9. Векторный анализ .....	25
9.1. Скалярные и векторные поля .....	25
9.2. Поток ВП. Дивергенция ВП. Теорема Остроградского. Вычисление потока .....	29
9.3. Циркуляция и ротор ВП. Теорема Стокса .....	35
9.4. Специальные виды векторных полей.....	41
9.5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.....	44
9.6. Ряды Фурье .....	45