RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B32 (2012), 61–79

On the p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes

By

Shinichi KOBAYASHI*

Abstract

In this paper, we explain the result and the outline of the proof of the p-adic Gross-Zagier formula in [12] for the p-adic L-function of an elliptic curve with good supersingular redution at p. We explain the meaning and some applications of the p-adic Gross-Zagier formula. We also explain what kind of difficulties arise in the supersingular case, and how we overcome them in [12]. This is an expository article of [12].

§ 1. Introduction

古典的な Gross-Zagier 公式とは, 適当な条件下のもとで, weight 2 の楕円型保型形式の L-関数の微分値を Heegner 点の Néron-Tate 高さで記述する公式である. 現在では S. W. Zhang らによって総実体上や higher weight の楕円型保型形式に対してなど, 様々な形で一般化されている. 一方で Gross-Zagier 公式の p-進類似に関しても多くの研究がなされている. p-進版は楕円曲線や保型形式の p-進 L-関数の微分値を Heegner 点の p-進高さで記述するものである. p-進 L-関数は, 考えているモチーフだけでなく, $\mathbb{Z}_p$-拡大の取り方や素数 p の条件にも強く依存し, また p-進高さ関数に関しても同様なことがいえる. よって複素数体上の場合とは異なり, 考えているモチーフが同じでも異なるタイプの p-進 Gross-Zagier 公式が存在する. 代表的なものは Perrin-Riou (weight 2 の楕円型保型形式) や Nékovář (higher weight の楕円型保型形式), 反円分拡大や肥田方向の deformation に関しては Bertolini-Darmon らの一連の仕事がある. (Perrin-Riou や Nékovář は虚二次体の任意の $\mathbb{Z}_p$-拡大に対して証明しているが, 反円分拡大方向は退化して $0 = 0$ という式になっていることに注意する.) これらの仕事はいずれも (good or bad) ordinary と呼ばれる素数 p に関するもので, non-ordinary な素数においては p-進 Gross-Zagier 公式はどの

Received April 7, 2011. Revised January 27, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 11G05 · 11G40 ·11G50 ·14L05 · 11E95
本研究は科研費（21740009）の助成を受けたものである.
*Tohoku University, 6-3, Aoba, Aramaki, Aoba-ku, SENDAI 980-8578 .
e-mail: shinichi@math.tohoku.ac.jp

ような設定でも得られていなかった．今回紹介するのは円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する楕円曲線の超特異 (supersingular) な素数 p における p-進 Gross-Zagier 公式である．これは ordinary のときの Perrin-Riou による公式の supersingular 版である．

設定や公式を正確に述べることは次節にまわし，ここでは non-ordinary な素点において p-進 Gross-Zagier 公式を証明する動機を 2 つ述べたい．一つは (複素数体上の) 強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想への応用であり，もう一つは純粋に p-進的な動機である．

まずは Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想と略す) について簡単に思い出しておく．E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし，$L(E/\mathbb{Q}, s)$ を $E/\mathbb{Q}$ の Hasse-Weil L-関数とする．

Birch and Swinnerton-Dyer 予想

(i) $\mathrm{ord}_{s=1} L(E/\mathbb{Q}, s) = \mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$.

(ii) Tate-Shafarevich 群 $\text{Ш}(E/\mathbb{Q})$ は有限で，$r = \mathrm{ord}_{s=1} L(E/\mathbb{Q}, s)$ とおくとき，

$$\mathrm{Reg}_\infty(E/\mathbb{Q})^{-1} (\Omega_E^+)^{-1} r!^{-1} \frac{d^r}{ds^r} L(E/\mathbb{Q}, s)|_{s=1} = \frac{\sharp \text{Ш}(E/\mathbb{Q}) \prod_\ell \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q}_\ell)}{\sharp E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}^2}.$$

ここで $\mathrm{Reg}_\infty(E/\mathbb{Q})$ は Néron-Tate height pairing から定まる regulator，$\Omega_E^+ = \int_{E(\mathbb{R})} |\omega_E|$ は minimal model に付随する Néron 実周期，ℓ は $E/\mathbb{Q}$ の悪い素点をわたり $\mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q}_\ell)$ は ℓ での玉河数である．

上の (i) だけを BSD 予想と呼ぶことも多いが，ここでは (i) を弱い BSD 予想，(i), (ii) を含めたものを強い BSD 予想 (The full Birch and Swinnerton-Dyer conjecture) と呼ぶことにする．また $\mathrm{ord}_{s=1} L(E/\mathbb{Q}, s)$ を analytic rank と呼ぶ．

弱い予想と Tate-Shafarevich 群の有限性に関しては，analytic rank が 1 以下のときは，古典的な Gross-Zagier 公式や Kolyvagin の仕事などによって証明されている．しかし強い予想に関しては analytic rank が 1 以下であったとしても未解決である．analytic rank が 0 のときは，強い予想は**全ての**素数において岩澤主予想が証明されれば符号を除き解決される．analytic rank が 1 のときは，**全ての**素数において，岩澤主予想，p-進高さの非自明性および p-進 Gross-Zagier 公式が証明されれば符号を除き解決される．実際 analytic rank が 1 のときは，古典的な Gross-Zagier 公式により予想の (ii) の左辺が有理数であることが示される．一方 p-進 Gross-Zagier 公式と Schneider と Perrin-Riou の結果 ([25], [20]) を使うことにより，この有理数の p-進付値が (ii) の右辺のそれと一致することが示される．(より正確には p-進 Gross-Zagier 公式により Hasse-Weil L-関数の微分値と p-進 L-関数の微分値を比較することが可能になる．(cf. Corollary 2.3.) そして p-進 L-関数の微分値に関する Schneider と Perrin-Riou の結果を利用する．微分は位相が絡む問題なので，複素と p-進の微分値の間には a priori には全く関係がないことに注意しておく．) このよ

うな意味で, 古典的な Gross-Zagier 公式と p-進 Gross-Zagier 公式の関係は Beilinson 予想と Bloch-Kato の玉河数予想の関係に似ているかもしれない. 今回, 超特異素点の p-進 Gross-Zagier 公式を解決できたので, これまで知られていた様々な深い結果と合わせて次の定理を得ることができた.

Theorem 1.1. $E/\mathbb{Q}$ は虚数乗法を持ち, analytic rank は 1 と仮定する. このとき強い BSD 予想は 2 と悪い素因子と符号を除き正しい. つまり予想の (ii) において, 左辺と右辺の商に現れる素因子は 2 と $E/\mathbb{Q}$ の悪い素数のみである.

上の定理において虚数乗法 (CM) を持つ事が仮定されているのは, この場合は岩澤主予想と p-進高さの非自明性が知られているからである. 主予想と p-進高さの非自明性を仮定するなら虚数乗法を持たなくてもよい. また仮定しなかったとしても岩澤主予想に関する加藤の結果 [10] を使えば, analytic rank が 1 以下のとき (ii) の左辺と右辺の可除性を評価することもできる. この評価は一般に Heegner 点の Euler system の議論から得られるものより精密である. analytic rank が 0 の $\mathbb{Q}$ 上定義された CM 楕円曲線に対しては, Rubin による同様の結果 [23] があることに注意しておく.

今回の結果は強い p-進 BSD 予想に関しても上と同様の応用がある. Schneider と Perrin-Riou の結果は p-進 L-関数の微分値の付値を決めていたが, unit の曖昧さは岩澤主予想から来ており, 純粋に p-進的な方法でこの曖昧さを取り除くことは難しいように思われる. p-進 Gross-Zagier 公式は, Heegner 点というゼータ元を通じて, p とは異なる素数 q に対して, p-進 L-関数と q-進 L-関数の微分値を結びつける. これより岩澤主予想からくる unit の曖昧さも符号を除いて除去できる.

このように応用上, ordinary, supersingular などの区別をすることなく, **全ての素数**において p-進 Gross-Zagier 公式を証明することが重要であり, 悪い素数における公式も証明されることが望まれる. 今回とは異なる設定の Bertollini-Darmon らの p-進 Gross-Zagier 公式 (例えば [2]) は, (bad) split multiplicative reduction をもつ素数を扱っているが, 強い BSD 予想へ応用できるのかは不明である.

次に p-進的な動機について述べる. まず一般的な注意だが, non-ordinary な素点で岩澤理論を行うことは, その名前からくる印象とは異なり, ordinary の場合を特殊ケースとして含む, より一般的な設定のもとで議論を行うことを意味する. 使われる手法も, ordinary のときのような特殊議論ではなく, p-進 Hodge 理論などの一般論を正面から使う, より普遍性の高いものになる. このような意味で, 楕円曲線の場合は, supersingular な素点は数こそ少ないが, より普遍的な岩澤理論へのテストケースとしての価値が高い. 今回の結果も ordinary の場合を含む, より一般的な手法を使うことで解決されており, 将来的には (φ,Γ)-理論などを使って higher weight な保型形式など, より広い対象に拡張できると思われる.

non-ordinary の場合に生じる注意すべき現象として, 様々な重要な量が p-進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting (filtration の補空間) の取り方に依存するというものがある. 楕円曲線の場合で言えば, de Rham cohomology の中で, 不変微分形式が張る部分空間に対する補空間を指定する必要がある. p-進 L-関数や p-進高さ関数などもこの splitting の取り方に依存する. ordinary のときは unit root space や Galois 表現の自然な filtration からくる canonical な splitting が存在するので, 暗黙のうちにそれを選んでいることになっており, この現象はあまり意識されなかったことである. しかし non-ordinary の場合は人為的に splitting をひとつ選ぶ必要がある. (p-進 L-関数などを splitting の選び方に依存しないように定義することもできるが, それは表面的にそうできるだけであって, この問題が本質的になくなるわけではない.) この splitting の選択の問題は, Perrin-Riou の p-進 Beilinson 予想の定式化などにも現れ, 様々な理論的な根拠から決して不自然なものではない. しかし実際には, この splitting の取り方が本質的に絡む問題や予想に関して, 確定されている non-trivial な事実はほとんどなく, 今回の結果は重要な例を与えると思われる.

§2. 主結果

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, $\mathbb{Z}$ 上の minimal Weierstrass model をひとつ固定する. また ω_E をこのモデルから定まる Néron differeintial とする. 次の条件を満たす虚二次体 K を考える.

(Heegner 条件)　$E/\mathbb{Q}$ の導手 N を割る素数 l は K で split する.

この条件を課すと E を K まで base change した E/K の Hasse-Weil L-関数 $L(E/K,s)$ の関数等式の符号は常に -1 になる. BSD 予想を認めると関数等式の符号は Mordell-Weil rank の偶奇と一致するので, これは $E(K)$ の階数が常に奇数であることを意味する.[1] 特にこれから $E(K)$ に常に無限位数の元が存在することが期待されるわけである. 実際, Heegner 点という E の K-有理点を構成する方法が知られている. それを簡単に思い出しておく.

Heegner 条件より, K の整数環 $\mathcal{O}_K$ でのイデアル分解 $(N)=\mathcal{N}\mathcal{N}^*$ で $\mathcal{O}_K/\mathcal{N}\cong\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ となるものが取れる. このとき次数 N の cyclic isogeny

$$z_H=(\mathbb{C}/\mathcal{O}_K\to\mathbb{C}/\mathcal{N}^{-1})$$

を考える. K の Hilbert 類体を H とおくと, CM 理論により z_H は modular curve $X_0(N)$ の H-有理点を定める. (ここでは具体的に cyclic isogeny を 1 つ選んだが, ぴったり $\mathcal{O}_K$ で CM をもつ楕円曲線間の N 次 cyclic isogeny なら何でもよい.) 次に Heegner 点 $z_{K,E}\in E(K)\otimes\mathbb{Q}$ を

$$z_{K,E}=\mathrm{Tr}_{H/K}\,\pi(z_H)\otimes c_\pi^{-1}\ \in\ E(K)\otimes\mathbb{Q}$$

[1]近年 Nékovář [16] や Dokchitser 兄弟 [8] らにより, p-Selmer 群の階数の偶奇と関数等式の符号 (root number) が一致することは, かなり一般的な代数体上の楕円曲線に対して証明されている.

で定義する．ここで $\pi : X_0(N) \to E$ は $\mathbb{Q}$ 上の勝手な modular parametrization で c_π は π の Manin 定数である．[2] トレース $\mathrm{Tr}_{H/K}$ は $\mathrm{Gal}(H/K)$ の作用から定まる $E(H)$ から $E(K)$ へのものである．$z_{K,E}$ は π の取り方によらず，その高さは z_H を構成するのに使った isogeny の取り方によらない．このとき古典的な Gross-Zagier 公式は次で与えられる．

Theorem 2.1 (Gross-Zagier [9]). *Heegner* 条件を仮定する．このとき

$$\frac{d}{ds}L(E/K,s)|_{s=1} = u^{-2}\,\Omega_{E/K}\,\langle z_{K,E}, z_{K,E}\rangle_{\infty,K}.$$

ここで $u = \sharp\mathcal{O}_K^\times/2$ であり，$\langle\ ,\ \rangle_{\infty,K}$ は E/K の *Néron-Tate height pairing.* また

$$\Omega_{E/K} = \frac{1}{\sqrt{|d_K|}}\int_{E(\mathbb{C})}\omega_E \wedge i\,\overline{\omega_E} = \frac{2}{\sqrt{|d_K|}} \times (E(\mathbb{C})\text{ の格子の基本領域の面積}).$$

特に *Heegner* 点が無限位数であることと *analytic rank* が 1 であることは同値である．

[9] では d_K は偶数と仮定されているが，現在では [7] などによって d_K が奇数の場合にも示されていることに注意しておく．

次に p-進 Gross-Zagier 公式について説明する．$\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定しておく．p を $E/\mathbb{Q}$ のよい素数とする．α を $E/\mathbb{Q}$ の p-Euler 因子 $X^2 - a_pX + p$ の許容根とする．つまり a_p が p-進単数なら α は p-Euler 因子の unit root とし，$p|a_p$ なら α は 2 つの根のどちらでもよい．a_p が p-進単数であることと $E/\mathbb{Q}_p$ が ordinary reduction を持つ事は同値であることに注意しておく．

$\mathscr{L}_p(E/\mathbb{Q},\alpha,s)$ を E の $\mathbb{Q}$ 上の円分 p-進 L-関数とする．これは適当な "大きさ"[3]をもつ変数 s の p-進解析関数で，p-冪導手をもつ even な Dirichlet 指標 χ に対し，代数的数 $L(E/\mathbb{Q},\chi,1)/\Omega_E^+$ を p-進的に補間することで構成されるものである．一般に虚二次体 K 上の楕円曲線あるいは保型形式の p-進 L-関数は知られていないが，今考えているのは $\mathbb{Q}$ 上定義されたものの base change なので，E/K の p-進 L-関数を次のように定義するのは自然であろう．[4]

$$\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s) := \mathscr{L}_p(E/\mathbb{Q},\alpha,s)\mathscr{L}_p(E^\varepsilon/\mathbb{Q},\varepsilon(p)\alpha,s)\frac{\Omega_E^+\Omega_{E^\varepsilon}^+}{\Omega_{E/K}}.$$

ここで ε は $K/\mathbb{Q}$ に伴う 2 次指標で，E^ε は E の ε による quadratic twist である．Hasse-Weil L-関数は K 上に base change すると $\mathbb{Q}$ 上のものの積になるが，周期の方はそうなるとは限らないので，右辺で K 上の周期への取り替えを行っている．[5] このとき p-進 Gross-

[2] E を isogeny で取り替え，π をうまく選べば $c_\pi = 1$ であることが予想されている．
[3] 岩澤関数として定まる冪級数の大きさ (係数の分母の増大度)，または対応する p-進 distribution の大きさ．
[4] 実はこのように定義するのは便宜上以上に本質的な理由がある．これについては §3 を参照．
[5] p-進 L-関数を周期を使わないで定義する方法もある．cf. [13].

Zagier 公式は次で与えられる．

Theorem 2.2 (ordinary: [18], supersingular: [12])**.** *Heegner* 条件および d_K は *even* を仮定する．また p は K で *split* すると仮定する．このとき

$$\frac{d}{ds}\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s)|_{s=1} = u^{-2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(1-\frac{1}{\varepsilon(p)\alpha}\right)^2 \langle z_{K,E}, z_{K,E}\rangle_{p,K,\alpha}.$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle_{p,K,\alpha}$ は E/K の円分 p-進 *height pairing* で E の *Dieudonné* 加群のフロベニウスの α-固有空間に対応するものである．

Remark. 1. §1 で述べたように, non-ordinary のときは p-進 L-関数も p-進 height pairing も p-進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting の選び方に依存する．このことは上では p-進 L-関数と p-進 height pairing がともに α に依存するという形で現れている．supersingular のときは α の選び方が２通りあり, それらに対する上の公式を使うことで, 他の splitting に関する公式も導くことができる．例えば主予想を仮定すれば [1] の Conjecture が符号と悪い因子を除いて証明できる．

2. p が supersingular なときや, CM 楕円曲線の場合は, 定理において p は K で inert していてもよい．d_K は奇数でもよい．ただし証明においては p が K で split する場合が本質的である．inert な場合は $\mathbb{Q}$ 上の full p-進 BSD 予想などを経由することにより, split な場合に帰着できる．その際, p-進高さの非自明性が必要になる．(以下の Remark を参照.) しかし p が inert な場合を直接示すことは p-進的に非常に興味深い問題のように思える．

Corollary 2.3. $E/\mathbb{Q}$ の *analytic rank* は 1 とする．$\mathrm{Reg}_{p,\alpha}(E/\mathbb{Q})$ を p-進 *height pairing* $\langle\ ,\ \rangle_{p,K,\alpha}$ から定まる p-進 *regulator* とする．このとき $E/\mathbb{Q}$ が虚数乗法をもつか, p で *good supersingular reduction* をもつならば, $\mathrm{Reg}_{p,\alpha}(E/\mathbb{Q}) \neq 0$ で,

$$\frac{L'(E/\mathbb{Q},1)}{\mathrm{Reg}_\infty(E/\mathbb{Q})\Omega_E^+} = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-2}\frac{\mathscr{L}_p'(E/\mathbb{Q},\alpha,1)}{\mathrm{Reg}_{p,\alpha}(E/\mathbb{Q})}.$$

特に (上の条件をみたす) 素数 p,q に対して, 強い (複素)BSD 予想, 強い p-進 BSD 予想, 強い q-進 BSD 予想は全て同値である．

この系の証明は, $\mathrm{Reg}_{p,\alpha}(E/\mathbb{Q}) \neq 0$ 以外は, Waldspruger の結果を使って $L(E^\varepsilon/\mathbb{Q},1) \neq 0$ となる虚２次体 K で p-進 Gross-Zagier 公式の仮定を満たすものを取り, K 上の Hasse-Weil L-関数と p-進 L 関数をともに $\mathbb{Q}$ 上のものの積として書いて比較することで直ちに示される．$\mathrm{Reg}_{p,\alpha}(E/\mathbb{Q}) \neq 0$ については次の Remark を参照.

Remark. Néron-Tate height pairing は非退化であることが知られているが, p-進 height pairing の非退化性に関しては知られていることは少ない. p-進 height pairing は $\mathbb{Z}_p$-拡大の取り方にも依存するが, 反円分拡大の楕円曲線の p-進 height pairing は退化することもあり, Néron-Tate height のときの素直な類似が成り立つと考えてよいわけでもない. 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に関しては, 楕円曲線の p-進 height pairing はどんな Hodge filtration の splitting に対しても非退化と予想されているが, この問題は Leopoldt 予想と同じかそれ以上の難しさを持っていると推測されている. 非退化性を問う以前に, そもそも Mordell-Weil rank が 1 以上のとき, p-進 height pairing が恒等的に 0 ではないという非自明性の問題も解決されているわけではない. (もちろん今回関心のある階数 1 の場合に限定すれば, 非退化性と非自明性は同じことである.) 非自明性は p が good supersingular な素数なら, 楕円曲線の形式 log が non-torsion な点で 0 でないことに帰着できるので, 比較的容易に示すことができる.[6] (supersingular なら $\alpha \notin \mathbb{Q}_p$ という事実が効く.) また CM 楕円曲線の ordinary な素点に対しては, Bertrand [3] により Brumer-Baker に端を発する p-進超越数論を使うことで非自明性は示されている. 悪い素点や CM でない楕円曲線の ordinary な p については未解決である.

この節の終わりに, 主結果を証明するために必要な height 2 の formal group に対する新しい型の Coleman 冪級数論についても述べておく. 古典的な Coleman 冪級数論は, Lubin-Tate 拡大の単数群の norm compatible system を整係数冪級数で補間する理論である. (cf. [5]) 現在では Coleman 冪級数論の様々な一般化が知られているが, 代表的なものは, Perrin-Riou による局所 p-進表現の p-冪円分拡大に関する Galois cohomology の中の norm compatible system を補間する形での一般化であり, 岩澤主予想の定式化において重要な役割を果たしている. (cf. [21], [22].) これまでの一般化で特徴的なのは, ゼータ元からなる norm compatible system を p-進 L-関数に変換する役割をもっていることである.

様々なモチーフに対し, 大域的な norm system あるいは Euler system を構成することは未解決の大問題で, 一旦存在が示されれば著しい応用があることが知られている. これに対し Perrin-Riou によって, 局所体上ではある種の Euler system とも言うべきものが一般的に構成できることが知られている. 正確には局所体の crystalline 表現の Bloch-Kato の H^1_f の p-冪円分族の中に, corestriction に関して p-Euler 因子的関係をもつシステムを構成できる. $\mathbb{Q}_p$ 上の超特異還元をもつ楕円曲線 E でいえば, $E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ の点 c_n で

$$\mathrm{Tr}_{n+1/n} c_{n+1} - a_p c_n + c_{n-1} = 0 \tag{2.1}$$

という関係式を満たす局所点の族 $(c_n)_n$ を構成できる. ここで $\mathrm{Tr}_{n+1/n}$ は $E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}}))$ から $E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ への楕円曲線の和に関するトレースである. このような局所点の族は Perrin-Riou map の構成や [19], [11] で本質的な役割を果たしている. また p-進 L-関数

[6] p-進高さの定義や構成には様々な流儀があり, [1] の流儀ならこの帰着は明らかである. しかし p-進 Gross-Zagier 公式の証明に必要な構成はまた別のものである. 異なる流儀の p-進高さの比較は自明ではない. 特に supersingular の場合は Néron 流の局所高さの特徴付けがないので, 一意性を利用した比較はできない. 実際 splitting の取り方で無限の可能性がある. この比較に関しては [12] を参照.

はこのような局所的な Euler system とゼータ元からなる大域的な Euler system のずれを測る関数としても解釈できる. (cf. [11].) 円分方向ではないが, higher order に関する Heegner 点のシステム (Heegner 点の Euler system) もこのような関係式を満たすことが知られており, 様々な仕事において重要な役割を果たしている. (最近では [4] など.) 今回の仕事においても, p-進高さの p-local term の計算において, Heegner 点からなる (2.1) を満たすシステムが重要な役割を果たす.

今回定式化した新しい Coleman 冪級数論は, (2.1) を満たすシステムを整級数冪級数で補間する理論である. ただし古典的な場合とは異なり, (2.1) を満たす全てのシステムが補間できるわけではない. 補間可能なシステムを admissible と呼ぶことにすると, この理論の主結果は, (2.1) を満たすシステムが admissible になるための必要十分条件を与えるものである. これを使うと Heegner 点のシステムは admissible になることが示され, p-進高さの p-local term の計算に用いることが可能となる. admissible norm system のなす集合は岩沢代数上自由で階数 1 であることが p-進高さの計算上重要である. 以下でこの Coleman 冪級数論の主結果を述べる.

E を good supersingular reduction をもつ $\mathbb{Q}_p$ 上の楕円曲線, $\hat{\mathscr{E}}$ を E の $\mathbb{Z}_p$ 上の smooth model に付随する形式群, $\log_{\hat{\mathscr{E}}}$ を $\hat{\mathscr{E}}$ の形式 log とする. ϖ を $\mathbb{Z}_p$ の uniformizer とし, $\mathscr{F}_\varpi$ を ϖ に付随する高さ 1 の Lubin-Tate 形式群とする. また

$$[\varpi](\varpi_n) = \varpi_{n-1}, \qquad \varpi_0 = 0, \qquad \varpi_1 \neq 0$$

となる $\mathscr{F}_\varpi$ の ϖ-分点のシステム $(\varpi_n)_n$ をひとつ固定する. ここで $[\varpi]$ は $\mathscr{F}_\varpi$ の ϖ 倍写像である. W を標数 p の perfect field の Witt 環, K_0 を W の商体とし, σ を W のフロベニウスとする. $K_\infty = \cup_n K_0(\varpi_n)$ とおき, $\Lambda = W[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)]]$ とする. $\mathfrak{m}_n$ を $W[\varpi_n]$ の極大イデアルとし,

$$\mathrm{Tr}_{n+1/n} : \hat{\mathscr{E}}(\mathfrak{m}_{n+1}) \longrightarrow \hat{\mathscr{E}}(\mathfrak{m}_n)$$

を $\hat{\mathscr{E}}$ の和に関するトレースとする. また

$$\mathscr{P}_X = \{f(X) \in K_0[[X]] \mid f'(x) \in W[[X]],\ f(0) \in pW\}$$

とおき, φ を $\mathscr{P}_X$ に

$$\varphi(\sum a_n X^n) := \sum a_n^\sigma([\varpi]X)^n$$

で作用させる. また ψ を φ に関するトレース作用素とする. つまり $\mathscr{P}_X$ の σ^{-1}-linear map で

$$\psi \circ \varphi = p, \qquad \varphi \circ \psi(f) = \sum_{[\varpi]\rho = 0} f(X \oplus_{\mathscr{F}_\varpi} \rho)$$

を満たすものとして特徴づけられる写像である. (和は $\mathscr{F}_\varpi$ のすべての ϖ-分点 ρ をわたり, $\oplus_{\mathscr{F}_\varpi}$ は $\mathscr{F}_\varpi$ の足し算である.)

Theorem 2.4 ([12])**.** 次の関係式を満たすシステム $(c_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} \hat{\mathscr{E}}(\mathfrak{m}_n)$ を考える.

$$\mathrm{Tr}_{n+1/n} c_{n+1} - a_p c_n + c_{n-1} = 0. \tag{2.2}$$

このとき, このシステムが *admissible,* すなわち, ある $f(X) \in W[[X]]$ で

$$f^{\sigma^{-n}}(\varpi_n) = c_n$$

を満たすものが存在するための必要十分条件は, *(*十分大きな*)* 全ての n に対し

$$c_{n+1}^p \equiv c_n \mod pW[\varpi_{n+1}]$$

が成り立つことである. ただし集合として $\hat{E}(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_n$ より c_n を $W[\varpi_n]$ の元とみなしている. 上の f は

$$(\psi - a_p + \varphi)\log_{\hat{\mathscr{E}}}(f) = 0, \qquad f(0) \in pW$$

を満たし, 逆に任意の *admissible norm system* は, このような f から ϖ_n での値として得られる. また *admissible norm system* のなす集合は Λ*-module* として自由で階数 1 である.

最近, 上の結果は太田和惟氏によって, 不分岐な base 上の有限高さの n-次元形式群に対して一般化されたことに注意しておく. (cf. [17].)

§3. 証明の概略

この節では主結果である p-進 Gross-Zagier 公式の証明の概略を述べる. 話の見通しをよくするため, ここでは ordinary と supersingular に共通の部分を中心に解説し, supersingular の場合に特有な現象は次節に詳しく解説することにする.

Gross-Zagier 公式は p-進を含め様々な一般化がなされているが, 知られている証明の方針は本質的に唯一つである. その方針は, まず L-関数の微分値を知っている保型形式と Heegner 点の高さを知っている保型形式を構成する. 次にそれぞれのフーリエ展開を独立に (長く大変な) 計算をしてみると, 理由はわからないが, 一致することがわかる. そしてこの保型形式の楕円曲線 E に対応する newform f の部分 (実質的に f との Petersson 内積) をみると, 微分値と高さの関係が導かれるというものである. 普通の公式ならば, 仮に左辺と右辺を独立に計算することで証明したとしても, 計算過程で両者の間のなんらかの赤い糸を感じることができるものである. しかし Gross-Zagier 公式の証明に関してはそのような事は全くない. これがこの公式の深さを物語っているとも言えるが, 大きな不満点でもある. この不満点を解消すべく様々な努力がなされているが, 未だに十分な成果はないようである.

Perrin-Riou による ordinary な素点 p における p-進 Gross-Zagier 公式の証明では, 次の２つの p-進保型形式を構成し, フーリエ展開をそれぞれ計算し比較する.

(i) Heegner 点の p-進高さを知っている p-進保型形式 F

(ii) p-進 L-関数の微分値を知っている p-進保型形式 G

その結果, Hecke 作用素を使って p-Euler 因子を抜くような操作で変形すると, F と G の $f_\alpha(\tau) = f(\tau) - p\alpha^{-1} f(p\tau)$ に対応する部分 (雑にいえば f_α との Petersson 内積) が一致することがわかる. ($U_p f_\alpha = \alpha f_\alpha$ に注意.) これから p-進 Gross-Zagier 公式が得られる.

supersingular のときも F, G の構成も含めて基本的にはこれと同じ方針であるが, F のフーリエ展開の計算に関してはより本格的な p-進の理論が必要になり, G に関しては ordinary のときには現れなかった本質的に新しい現象を克服する必要がある.

F の構成

F の構成は複素数体上の Gross-Zagier によるものの素直な p-進類似である. F はまず形式冪級数

$$F := \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(H/K)} \sum_{m=1}^{\infty} \langle z_H, T_m z_H^\sigma \rangle_{p,\alpha}\, q^m$$

として定義される. T_m は m 次 Hecke 作用素. ここに現れる p-進 height pairing $\langle\ ,\ \rangle_{p,\alpha}$ は $X_0(N)/H$ のもので, p-進 de Rham cohomology (crystalline cohomology) の filtration の splitting としては, E に対応する部分がフロベニウスの α-固有空間から来るものと一致するように取っておく. (大域的)p-進 height pairing はヤコビアンへの埋め込み $X_0(N) \to J_0(N)$, $x \mapsto (x) - (\infty)$ により $J_0(N)$ 上のものともみなせ, 上式の Hecke 作用素 T_m は $\mathrm{End}\, J_0(N)$ の元としての作用とも見なせる. F は上で形式的な冪級数として定義されたが, このことから Hecke algebra 上の p-進数に値をもつ $\mathbb{Q}$-線形写像から自然に得られる級数となり, 実際にある p-進保型形式の ∞-cusp での q-展開になっていることがわかる. これは形式的な議論で, 古典的な Gross-Zagier 公式の証明におけるものと同じである. (cf. [9], Chapter V, §1.)

この F の定義は少し唐突な気もする. しかし古典的な Gross-Zagier 公式の証明と同様に, $S_2(\Gamma_0(N))$ の正規化された newform $g = \sum a_m(g) q^m$ に対し, 因子類 $(z_H) - (\infty) \in J_0(N)(H) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ の g-part を $z_{H,g}$ とかくと,

$$F = \sum_{g:\,\mathrm{new}} \langle z_{K,g}, z_{K,g} \rangle_{p,\alpha}\, g + \text{ old form}$$

という形に書ける. (これは height pairing の Galois 不変性および $z_{K,g} := \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(H/K)} z_{H,g}^\sigma$ と $T_m z_{H,g} = a_m(g) z_{H,g}$ からただちにわかる.) よって E に対応する newform を f とする

と, 上の分解において F の f-part の係数が知りたい height である. (この係数は F と f の Petersson 内積として取り出せる.) 逆にいうと, F は各 newform ごとに知りたい高さを係数において構成される母関数である. 各 newform ごとに調べるのではなく, 母関数化することで, Heegner 点や Hecke 作用素の幾何学的あるいは moduli 解釈的な考察を可能にしていることが Gross-Zagier の証明の大事なアイデアのひとつである.

F のフーリエ展開の計算

F のフーリエ展開の計算は Heegner 点の p-進高さの計算に他ならない. これは古典的な Gross-Zagier 公式の証明と同じく, 局所高さへの分解

$$\langle\ ,\ \rangle_{p,\alpha} = \sum_{v:\text{有限素点}} \langle\ ,\ \rangle_{p,\alpha,v}$$

を使って, 各局所項を計算することで求められる. ここで $\langle\ ,\ \rangle_{p,\alpha,v}$ は有限素点 v における局所 p-進高さである. 局所項の計算は v が p を割るかどうかでまったく異なる.

$v \nmid p$ のときは, 古典的な Gross-Zagier の計算に帰着.

$v \nmid p$ のときは幾何学的な状況で, 本質的に v での局所高さは Néron-Tate 高さでも p-進高さでも大差ない. α にも依存しない. つまり両者とも本質的に arithmetic surface $X_0(N)/\mathcal{O}_{H_v}$ 上の交点数 $(\ ,\ )_{X_0(N)/\mathcal{O}_{H_v}}$ である:

$$\frac{\langle\ ,\ \rangle_{\infty,v}}{\log \mathbf{N}v} = \frac{\langle\ ,\ \rangle_{p,\alpha,v}}{\log_p \mathbf{N}v} = -(\ ,\ )_{X_0(N)/\mathcal{O}_{H_v}}.$$

(最初の pairing は v での局所 Néron-Tate 高さ. $\mathbf{N}v$ は $\mathcal{O}_{H_v}$ の剰余体の位数.) とくに $v \nmid p$ のときは Gross-Zagier のオリジナルの計算をそのまま借用できる. $v|p$ のときは状況がまったく異なり, p-進局所高さと Néron-Tate 局所高さの間に直接の関係はない.

$v|p$ のときの局所 p-進 height pairing $\langle z_H, T_m z_H^\sigma\rangle_{p,\alpha,v}$ は本質的に 0.

もう少し正確に言うと, $\langle z_H, T_m z_H^\sigma\rangle_{p,\alpha,v}$ の $f_\alpha(\tau) = f(\tau) - p\alpha^{-1} f(p\tau)$ に対応する部分が 0 になることが示される.[7] ここで supersingular なときは Hodge filtration の splitting として α-eigen space を取っていることが決定的な役割を果たす. ordinary のときは, あ

[7] ただし局所高さを考えている場合は, height pairing は因子類ではなく因子そのものに依存するので, f_α-部分という概念自体にある種の正当化が必要である.

る種の有界性が重要な役割を果たす．ordinary のときの height pairing がもつこの有界性は Hodge filtration の splitting として unit root space を選ぶことと関連している．

主結果の中で p が K で split することを仮定していたが, それがここで重要になる．証明の中で技術的に使われるだけでなく, 0 という結論自体に効いているように思われる．実際古典的な場合とのアナロジーを考えると, v での Néron-Tate 局所 height pairing $\langle z_H, T_m z_H^\sigma \rangle_{\infty,v}$ は, v が K で split していると実質的に 0 であり, inert な v と無限素点における寄与のみが本質的であった.[8]

$v|p$ のときの Heegner 点の p-進局所高さの計算は技術的に最も困難な部分である．disjoint support をもつときの Néron-Tate 局所 height pairing $\langle z_H, T_m z_H^\sigma \rangle_{\infty,v}$ が, split な v では Deuring の lift の理論からただちに 0 であることが示されたこととは対照的に思われる．しかし p-進高さの p-局所項の計算は, Green 関数を使った無限素点での Néron-Tate 局所高さの計算の類似という見方もできるので, 計算が複雑なのはそれほど不思議なことではない．実際 $v|p$ での局所 p-進高さ関数は p-進テータ関数と p-進 log の合成としても書けるので, Green 関数の p-進類似とも思える．しかし今回の計算は無限素点での Gross-Zagier の計算の類似を辿るわけではなく, 非常に p-進的なものである．

p-局所項の vanishing を示す基本原理は以下のものである．

Lemma 3.1. $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して

$$a \in N_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})^\times \quad \Longrightarrow \quad \log_p a \equiv 0 \mod p^n.$$

この補題は局所類体論と p が p 冪円分拡大の universal norm で $\log_p p = 0$ という log の枝を取っていることからただちにわかる．

この補題より, $v|p$ での局所 p-進高さを $\log_p N_{H_v/\mathbb{Q}_p}(z_0)$ ($z_0 \in H_v^\times$) という形に書いたとき, z_0 が任意の n に対し $H_v(\zeta_{p^n})^\times$ からのノルムになっていることを示せばよい.[9] これを示す鍵は, p-進高さの norm system を使った構成法である．

ordinary のときは, universal norm ($\mathbb{Z}_p$-拡大の全ての n-th layer からのノルムになっている元) という岩澤理論においては古くからよく知られた研究対象があり, それを用いた p-進高さの構成法も知られていた．(cf. [24].) ordinary のときの特徴は, 様々な対象がある種の有界性を持つことである．(例えば p-進 L 関数は ordinary のときは整係数冪級数と思うことができるに対し, non-ordinary のときは分母を許す log のような関数になっている.) p-進高さも ordinary のときは $\mathbb{Z}_p$-拡大の方向に関して有界性をもつ．もう少し具体的に言うと, H_v 上の局所高さと n-th layer $H_{n,v}$ 上の局所高さの関係をつけるために

[8] p が K で inert なときに $v|p$ における Heegner 点の p-進局所高さを計算することは, p-進的に非常に興味深い問題のように思われる．これは ordinary のときにも計算されておらず, split する場合と計算の質が本質的に異なる可能性がある．

[9] 円分 p-進局所高さは, その定義から $\log_p N_{H_v/\mathbb{Q}_p}(z_0)$ という形である．円分拡大に付随する p-進高さということと $\log_p p = 0$ という log の枝を選ぶことが対応している．

基本的に分母が不要である．これよりノルム構成法と (高次) Heegner 点からなる norm compatible system を使って計算すると，分母を許すことなく，z_0 を $H_v(\zeta_{p^n})^\times \otimes \mathbb{Q}$ ではなく，$H_v(\zeta_{p^n})^\times$ からのノルムと思えるので，上の補題を利用できる．

supersingular のときは universal norm は存在しないので，(2.2) をみたす admissible な norm system を使う．p-進高さの構成は，Nekovář などによって non-ordinary なときにも知られているが，norm system を使った p-進高さの構成は，楕円曲線の場合の Perrin-Riou による構成 [19] 以外は知られていなかった．またその Perrin-Riou による構成も整備が十分とは言えず，今回の計算にそのままの形で利用できるものではなかった．そこで §2 で述べた Coleman 冪級数論を使って Perrin-Riou の構成を整備し直し，今回の計算に利用できる形にした．この refine された構成法と (2.2) をみたす Heegner 点の admissible norm system の存在により，上の補題を利用できる形にして vanishing を示すことができる．[10] ただし supersingular のときは分母は有界にはならないので，よりシビアな評価をする必要がある．たとえば Hodge filtration の splitting を正しく選ばないと，n-th layer からのノルムであることを示すのに，分母に α^n が必要となり，さらに後述の肥田の projection を使って f_α-部分を取り出すときにまた分母に α^n が必要になるので，結局 p^n 程度の分母が必要になり，上の補題は役に立たなくなる．正しい splitting を選べば，n-th layer からのノルムであることを示すのに分母が不要となり，f_α 部分を取り出すと最終的には α^n 程度の分母ですむので，補題から vanishing がでる．

G の構成とフーリエ展開の計算

G の構成は，まず p-進 modular form の空間に値をもつ $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の p-進 Eisenstein measure $d\Phi$ を構成する．これには古典的な Gross-Zagier 公式の証明と同様に，Eisenstein 級数とテータ関数の convolution を使う．(テータ関数は K に付随してできるもので，Eisenstein 級数は Rankin-Selberg 法の unfolding と関連するものを使う.) [11] そしてこの $d\Phi$ を使って G は

$$G = \frac{d}{ds}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^{s-1} d\Phi|_{s=1} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log_p\langle x\rangle d\Phi$$

で定義される．ここで

$$\langle\ \rangle:\ \mathbb{Z}_p^\times = (\mathbb{Z}_p^\times)_{\mathrm{tor}} \times (1+2p\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 1+2p\mathbb{Z}_p$$

は自然な射影である．G のフーリエ展開の計算は，本質的に古典的な Eisenstein 級数のフーリエ展開やある種の Trace operator の明示的計算に帰着される．従って計算は特に

[10] ここは実は技術的に間違いやすい所である．Heegner 点のシステムは p が K で split するときは $\mathbb{Q}_p$ のある ramified extension の中に住んでおり，p 冪円分拡大方向に住んでいるわけではない．補題において，単数部分に関するノルムの像は $\mathbb{Q}_p$ のどの deeply ramified extension を選んでも本質的に同じだが，uniformizer 部分は，p 冪円分拡大では p が universal norm であるという事実と $\log_p p = 0$ という枝を取っていることが効いている．よって Heegner 点のシステムを利用して補題を使うときは，uniformizer 部分の処理に関して注意が必要である．[15] の II (5.6) の Proposition の証明はこの点に誤りがある．修正には uniformizer 部分の処理に関して，[18] の Lemme 5.5 に相当する議論が必要である．

[11] より正確には p-冪方向にレベルを動かした様々な Eisenstein 級数とテータ関数を使う．

p-進的なものでもなく, 長いが標準的である．実際にはすべてのフーリエ展開を計算する必要はなく, p-Euler 因子的なものを除去することにより p-進的に複雑なものを取り除き, 標準的な議論ですむ部分だけを計算する．結果としては, G の古典的な Gross-Zagier 公式の証明における対応物である G_∞ のフーリエ展開において, 無限素点からの寄与に対応する部分[12]を取り除き, 実数の log を p-進 log にしたものが出てくる．

このようにして作られた G と p-進 L-関数の微分値を結びつけるためには, Rankin-Selberg 法を p-進的に行う．しかしこの過程で ordinary か supersingular かで状況の複雑さがまったく異なってくる．ordinary のときは U_p-作用素の極限である肥田の ordinary projection

$$e := \lim_{n\to\infty} U_p^{n!}$$

を用いると G と E の p-進 L-関数の微分値が素直に結びつく．これを説明するために, 古典的な Gross-Zagier 公式の証明における L-関数の微分値を知っている modular form G_∞^{hol} の構成について少し思い出しておく．

最初の step は, Eisenstein 級数と Theta 関数の convolution を使って, L-関数の微分値を知っている実解析的な modular form G_∞ を作る．上の p-進的 modular form G は, G_∞^{hol} ではなく, この G_∞ の p-進類似物である．G_∞^{hol} は G_∞ に, Strum の holomorphic projection を行うことで G_∞ の正則化として構成される．

p-進世界において, この Strum の holomorphic projection に相当するのが肥田の ordinary projection e である．この e の最も大切な性質は, レベルが $p^\infty N$ の p-進 modular form を, その基本性質をあまり変えることなく, レベルを pN まで自然に落とすところにある．Eisenstein measure $d\Phi$ の定義は, step function の積分値として, 古典的な Eisenstein 級数とテータ関数の convolution を指定することで得られていた．しかし $d\Phi$ による関数 $\log_p\langle x\rangle$ の積分である G は, $\log_p\langle x\rangle$ を step function で p-進近似することで, 古典的な form の p-進的極限として, レベルが $p^\infty N$ の p-進 modular form として構成される．Rankin-Selberg 法を使うためには, G と楕円曲線 E に対応する newform f との Petersson 内積を取らなければならないわけだが, Petersson 内積は複素解析的な操作であるから, レベルが $p^\infty N$ の form G に対して Petersson 内積を取ることはできない．しかしながら ordinary projection e を使って, eG を考えると, eG はレベル pN の form であり, 古典的な $\mathbb{Q}$-係数 modular form の空間を代数的に $\mathbb{Q}_p$ まで係数拡大した空間に入っている．従って p-進的な極限操作が絡まないので, Petersson 内積を自然に拡張することができ, eG と f との内積を考えられるようになる．そして実際にこの内積が Rankin-Selberg 法により計算され, E の p-進 L-関数の微分値になることが示される．

superingular のときは ordinary projection e は non-ordinary 部分を消してしまうので単純にはいかない．e は U_p-operator の極限であったが, U_p は f_α には α 倍で作用するので, U_p を一回施すごとに α で割る必要がでてくる．ただし分母をつけてしまうと congruence が悪くなり p-進的な張り合わせがうまくいかなくなる．特に G に関しては分

[12]正確にはフーリエ展開の項のうち, Heegner 点の無限素点における局所高さと対応する項

母の出方が激しく, いわゆる admissible という状況にならないので, G の微分と p-進 L-関数の微分が単純には結びつかない. これについては次節で説明する.

§4. 超特異素点の場合

前節の説明をまとめると超特異素点の場合の問題点は次にようになる.

(i) non-ordinary な素点における p-進高さ関数の norm 構成法の整備.

(ii) p-進保型形式 G と楕円曲線 E の p-進 L-関数の微分値を結びつけること.

(i) は新しい Coleman 理論と関連し, Heegner 点のシステムを利用できる形に整備する必要があった. この部分と実際に Heegner 点のシステムを使って p-進高さの p-局所項を計算する部分は, 今回の証明の中で最も複雑でかなり巧妙な計算も含んでいるところではあるが, 基本的には技術的な問題であるので, 詳細は前節での説明程度にとどめることにする. non-ordinary な素点でも p-進高さの定義は (複数) 知られていたが, 主に予想の定式化に使われるだけで, p-進高さを本当にシビアに計算しなければならない状況は生まれていなかった. 深い計算のためには non-ordinary な素点においても, p-進高さの norm 構成法が不可欠である. 今回は Fontaine の p-divisible 群の理論, 本田理論, Perrin-Riou の理論などを使って, 楕円曲線の場合を中心に必要最低限の整備を行った. しかし non-ordinary な素点に関して higher weight の楕円型保型形式の p-進 Gross-Zagier 公式を証明しようとすれば, 一般のガロア表現に対して, p-進高さの norm 構成を (φ, Γ)-理論などを使って整備していくことが必要不可欠なように思われる. これは今後の課題である.

(ii) に関しては前節で説明したように, ordinary のときは, G に肥田の ordinary projection e を施した後, E に対応する newform f との Petersson 内積をとれば, それが E の p-進 L-関数の微分値を与えていた.

supersingular のときは, U_p-operator の極限 e を素直に取るわけにはいかないが, 次のように考えるのが自然である. G は Eisenstein measure $d\Phi$ を使って,

$$G = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \log_p \langle x \rangle d\Phi$$

と表されていた. ここで Riemann 和

$$G_n = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \log_p \langle a \rangle \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} d\Phi$$

を考えると G は mod p^n で G_n と合同で, G_n は本質的に p-進極限操作を含まない, 古典的な Eisenstein series と theta 関数の convolution である. よって G_n に U_p を有限回施し

た後, E に対応する newform f との Petersson 内積を取ることで, E の p-進 L-関数の微分値を近似できるのではないだろうか？残念なことに答えは No である. G_n はレベルが $p^{2n}N$ の modular form になるので, U_p を $2n$ 回施す必要があり, よって α^{2n} の分母, つまり p^n の分母が必要になる. したがって G_n は Eisenstein measure のレベルでは G を近似するが, G の "f_α-部分"[13] は G_n の f_α-部分では近似されない. このように肥田の ordinary projection e を修正したとしても, non-ordinary 部分には p-進的に連続に作用しないことが大きな問題である. 今まで supersingular な素点で p-進 Gross-Zagier 公式が証明されなかった一つの要因がここにあるように思われる.

実をいうと, そもそも G と結びつけたい E の p-進 L-関数自体が, supersingular なときは, 虚二次体 K 上では性質のよいものではない. そしてこの問題と肥田の projection の問題は密接な関係があるので, まずはこれについて説明する.

通常 p-進 L-関数は critical な点における補間公式で特徴づけることにより定義される. 補間する冪級数の大きさと補間される critical な点の数やそこにおける特殊値の間の合同関係の強さには密接な関係がある. 一般に ordinary なモチーフのときは特殊値の間に強い p-進合同関係が存在すると考えられ, 特殊値は p-進整数係数の冪級数で補間されることを期待する. non-ordinary のときは合同関係が弱く, 整数係数ではなく対数関数のような非有界な分母をもつ級数で補間されることを期待する. しかし非有界な分母をもつ級数には様々な種類があるので, 分母の出方が激しすぎる ("大きい") 冪級数を使うと, なんでも補間できてしまうかわりに一意性がなくなり, 興味深い関数ではなくなる. 逆に分母の出方が緩すぎればそもそも補間できなくなってしまう. したがって p-進 L-関数を定義するためには, 補間する冪級数の適切な大きさを指定することが重要である.[14] 例えば $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の supersingular な素点での p-進 L-関数に対しては, 分母の出方が対数関数より真に小さい冪級数の中で補間することになっており, 実際には log の半分程度の大きさの冪級数で補間されることが知られている. 重さ k の楕円型保型形式の場合は log の $k-1$ 乗より真に小さい冪級数の中で補間することになっており, 楕円曲線のときよりは大きいわけだが, その分より多くの補間式を要求する.[15]

さて K 上の楕円曲線の (円分)p-進 L-関数に話を戻すと, それは定義より (あるいは仮にどのような定義をしたとしても結果として) 2つの $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の p-進 L-関数の積なので, K 上で supersingular なときは log と同程度の大きさの冪級数で補間されることになる. 実はこの大きさは critical な Dirichlet character による twist の値たちだけでは特徴づけられない大きさである. これより $\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s)$ の定義は ad-hoc にできたものの, 補間式で特徴づけられない関数となってしまっている. p-進 Gross-Zagier 公式の証

[13] G は p-進極限を取った後にできるものなので, そもそも一般に f_α-部分という概念が定義されない. しかしながら G は F と本質的に一致し, F は level が N なので, G の f_α-部分は, F の f_α-部分とすることで意味を持つ.

[14] Perrin-Riou による一般のモチーフに対する p-進 L-関数の枠組み (p-進 Beilinson 予想, cf. [22], [6]) では, non-critical な点を含めた大量の補間式を要求することで, $\mathcal{H}_\infty$ という単位開円盤上の収束冪級数環の中で (岩澤関数として)p-進 L-関数をさがすことになっている.

[15] 重さ k のときは, $s=1$ における Dirichlet twist の値だけでなく, 全ての critical な点 $s=1,2,\ldots,k-1$ における Dirichlet twist の値を補間することを要求する. ordinary なときは $s=1$ における twist の値のみでも特徴づけ可能になり, 他の $s=2,\ldots,k-1$ における補間式は自動的に満たされる.

明においては, Eisenstein measure $d\Phi$ から Rankin-Selberg 法で p-進 L-関数を構成することが crucial だったわけだが, 特徴づけを持たないという事実は, このような構成の困難さと困難さを克服したとしても我々の $\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s)$ と一致するのかわからないことをほのめかしている. そもそも微分値は補間式の外にある量なので, p-進 L-関数の一意性の問題と切っても切り離せない関係にある.

今回考案したこの問題を解決する方法は, 次のような単純な 2 変数関数を考えることである.

$$\mathscr{L}_p(E,\alpha,s,t) := \mathscr{L}_p(E/\mathbb{Q},\alpha,s)\mathscr{L}_p(E^\varepsilon/\mathbb{Q},\varepsilon(p)\alpha,t)\frac{\Omega_E^+\Omega_{E^\varepsilon}^+}{\Omega_{E/K}}.$$

この関数は s か t のどちらかを固定すると, $\mathbb{Q}$ 上の p-進 L-関数となっているので, 対数関数の半分程度の分母の出方となり, critical な点での特徴づけが可能になる. 2 変数に広げることで, 縦方向や横方向への変形の具合から, 知りたい対角方向の関数を特徴づけるわけである. これ以外の方法でも特徴づけられるかもしれないが, この方法のひとつの利点は我々の $\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s)$ との関係が明らかなことである. 我々の $\mathscr{L}_p(E/K,\alpha,s)$ の定義は ad-hoc ではあったが, 強い BSD 予想への応用においては, この定義における積表示は crucial である.

さて G と p-進 L-関数の微分値を結びつける話に戻す. 今述べた p-進 L-関数の 2 変数化からアイデアを得て, 全てを 2 変数化して考える. G は 1 変数 Eisenstein measure $d\Phi$ から作られていたが, supersingular のときを扱えるように 2 変数 Eisenstein measure $d\Psi$ を構成し, その対角方向が $d\Phi$ になるようにする. $d\Phi$ は Rankin-Selberg 法の unfolding と結びつく Eisenstein 級数とテータ関数の convolution から構成されていたが, 2 変数の $d\Psi$ の構成には, Beilinson-Kato 元の de Rham 実現である modular form のゼータ元からなるシステムを使う. この元は具体的には 2 つの Eisenstein 級数の積として表される. 一つはフーリエ展開が Dirichlet L-関数の積と結びつく Eisenstein 級数で, もう一つは unfolding と結びつく Eisenstein 級数である. より正確には p-冪導手の Dirichlet 指標に対応するもの全てを考えるので, Eisenstein 級数の積のシステムである. このとき G は $d\Psi$ を使って

$$G = \int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\log_p\langle xy\rangle d\Psi(x,y) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\log_p\langle x\rangle d\Psi(x,y) + \int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\log_p\langle y\rangle d\Psi(x,y)$$

と表わされる. ここで右辺が x または y の 1 変数関数の積分になっていることが重要である. これにより収束の悪い対角方向の積分が, 収束が比較的おだやかな縦方向, 横方向の積分に分解される. そして G_n として今度は

$$G_n = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}\log_p\langle a\rangle\int_{(a+p^n\mathbb{Z}_p)\times\mathbb{Z}_p^\times}d\Psi(x,y) + \sum_{b\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}\log_p\langle b\rangle\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times(b+p^n\mathbb{Z}_p)}d\Psi(x,y)$$

を考えれば, 本質的に level が p^nN の古典的保型形式になっており, 今回は分母の出方が緩やかなので, G の f_α-部分[16]は G_n の f_α-部分で近似される. そして G_n の f_α-部分は

[16]脚中 12 を参照.

Rankin-Selberg 法により p-進 L-関数の微分値を近似していることが示される.

謝辞: この集会での講演を推薦してくださりました栗原将人氏, organizer の一人でもある著者に快く講演の機会を与えてくださりました木田雅成氏, 諏訪紀幸氏, 適切な助言をくださりました査読者に心より感謝いたします.

References

[1] D. Bernardi, B. Perrin-Riou, Variante p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (le cas supersingulier). C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 3, 227–232.
[2] M. Bertolini, H. Darmon, Hida families and rational points on elliptic curves. Invent. Math. 168 (2007), no. 2, 371–431.
[3] D. Bertrand, Propriétés arithmétiques de fonctions thêta à plusieurs variables. Number theory, Noordwijkerhout 1983, 17–22, Lecture Notes in Math., 1068, Springer, Berlin, 1984.
[4] M. Çiperiani, A. Wiles, Solvable points on genus one curves. Duke Math. J. 142 (2008), no. 3, 381–464.
[5] R. Coleman, Division values in local fields. Invent. Math. 53 (1979), no. 2, 91–116.
[6] P. Colmez, Fonctions L p-adiques. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99. Astérisque No. 266 (2000), Exp. No. 851, 3, 21–58.
[7] B. Conrad, Gross-Zagier revisited. With an appendix by W. R. Mann. Math. Sci. Res. Inst. Publ., 49, Heegner points and Rankin L-series, 67–163, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
[8] T. Dokchitser, V. Dokchitser, On the Birch-Swinnerton-Dyer quotients modulo squares. Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 1, 567–596.
[9] B. Gross, D. Zagier, Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225–320.
[10] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque No. 295 (2004), ix, 117–290.
[11] S. Kobayashi, Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. Invent. Math. 152 (2003), no. 1, 1–36.
[12] S. Kobayashi, The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, To appear in Invent. Math.
[13] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. Invent. Math. 84 (1986), no. 1, 1–48.
[14] J. Nekovář, On p-adic height pairings, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
[15] J. Nekovář, On the p-adic height of Heegner cycles. Math. Ann. 302 (1995), no. 4, 609–686.
[16] J. Nekovář, On the parity of ranks of Selmer groups. IV. With an appendix by Jean-Pierre Wintenberger. Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1351 –1359.
[17] K. Ota, A generalization of the theory of Coleman power series, preprint.
[18] B. Perrin-Riou, Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques. Invent. Math. 89 (1987), no. 3, 455–510.
[19] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa p-adique locale et globale. Invent. Math. 99 (1990), no. 2, 247–292.

[20] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 4, 945–995.
[21] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), 81–149.
[22] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques. Astérisque No. 229 (1995), 198 pp.
[23] K. Rubin, The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields. Invent. Math.103 (1991), no.1, 25–68.
[24] P. Schneider, p-adic height pairings. I. Invent. Math. 69 (1982), no. 3, 401–409.
[25] P. Schneider, p-adic height pairings. II. Invent. Math. 79 (1985), no. 2, 329–374.