Title	p進多重ガンマ関数とp進周期の関係について (Algebraic Number Theory and Related Topics 2009)
Author(s)	加塩, 朋和
Citation	数理解析研究所講究録別冊 = RIMS Kokyuroku Bessatsu (2011), B25: 31-51
Issue Date	2011-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/187876
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B25 (2011), 31–51

p 進多重ガンマ関数と p 進周期の関係について (On a relation between p-adic multiple gamma functions and p-adic periods)

By

京都大学大学院理学研究科　加塩朋和 (Tomokazu Kashio)
Department of Mathematics, Kyoto University *

Abstract

In terms of the special values of the Beta function, we can write the periods of the Fermat curve, which are the integral values of differentials of the second kind. Coleman gave a p-adic analogue of this formula, which relates the Frobenius endomorphisms on the Fermat curve to the special values of p-adic Beta (Gamma) function. In this paper, we generalize the definition of Morita's p-adic Gamma function and simplify Coleman's formula. Moreover we get a formula involving our p-adic Gamma function and p-adic periods of the Fermat curve.

導入

次式で定義される特殊関数の事を**ベータ関数**と呼ぶ.

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad 0<\alpha,\beta\in\mathbf{R}. \tag{0.1}$$

なお次のようにベータ関数はガンマ関数の商としても書ける.

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \\ \Gamma(\alpha) &:= \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad 0<\alpha\in\mathbf{R}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

ベータ関数やガンマ関数の正の有理数での特殊値は **CM 周期**と呼ばれる幾何的不変量と関係することが古くから知られていた. 例えば虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ で虚数乗法を持ち有理数体上定義される次の楕円曲線を考えよう.

$$E : y^2 = 1 - x^4. \tag{0.3}$$

Received March 31, 2010. Revised June 04, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 11G15, 11G99, 11M35, 11R27, 11S80, 14F30.
本研究は科研費 (若手研究 (S) 課題番号:21674001 研究代表者:坂内健一) の助成を受けたものである.
筆者は日本学術振興会特別研究員の助成を受けている.
*2010 年 2 月 1 日から慶應義塾大学理工学部, 更に 2010 年 4 月 1 日から東京理科大学理工学部 (Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science) へ異動予定.

注意. 楕円曲線 E が虚二次体 K で虚数乗法を持つ, とは (E の定義体を適当に上げれば) $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong K$ となることであった. 実際に上の楕円曲線 E は

$$\mathrm{End}(E \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}) \ni f : (x, y) \mapsto (\sqrt{-1}x, y), \quad f^2 = -1 \tag{0.4}$$

となることより虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ で虚数乗法を持つことが分かる.

楕円曲線 E の正則 1 次微分形式 (で $\mathbf{Q}$ 上定義されたもの) の全体は $\mathbf{Q}dx/y$ で与えられる. この生成元を $\omega := dx/y$ と書くことにする. また楕円曲線 E の $\mathbf{R}$-有理点全体 $E(\mathbf{R})$ は xy 平面の中で "楕円形" であり, $E(\mathbf{C})$ の非自明なループを与えている. このループ (向きは時計回りだとする) に沿って正則 1 次微分形式 ω の積分を計算すると

$$\int_{E(\mathbf{R})} \omega = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \tag{0.5}$$

で与えられる. (xy 平面の中で第一象限, 第二象限, 第三象限, 第四象限での積分に分けるとそれぞれでの積分値は一致することを使った.) この値のことを虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ に付随する CM 周期と呼ぶ. この積分値をベータ関数やガンマ関数と関連付けるには変数変換 $t = x^4$ を考えればよい. すなわち

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(1 - t)^{\frac{1}{2}}} = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \tag{0.6}$$

を得る. (最後の等式に $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ を使った.)

注意. 同様に一般の虚二次体 K に付随する CM 周期 p_K が次のように定義できる. 楕円曲線 E は代数体 F 上定義され K による虚数乗法を持つとする. 正則 1 次微分形式の全体は F 上一次元のベクトル空間, 第一ホモロジー群 $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ は K 上一次元のベクトル空間になっているのでそれぞれの基底を一つ取り ω, γ とおく. このとき積分値

$$p_K := \int_\gamma \omega \in \mathbf{C}^\times \tag{0.7}$$

は代数的数倍を除いて F, E, ω, γ の取り方によらないことが示せる. またこの値は次のように数論的に重要な性質をもつ. 重さ k の楕円保型形式 f はそのフーリエ係数がすべて代数的数であると仮定する. このとき上半平面の点 τ が虚二次体 K に含まれれば

$$\frac{f(\tau)\pi^k}{p_K^k} \in \overline{\mathbf{Q}} \tag{0.8}$$

を満たす. なお一般の CM 体に対する CM 周期は志村氏によって定義され [Shim], その性質に関しては吉田氏の本 [Yo, Chap. III, §1] にまとまっている.

虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ の CM 周期とベータ関数の特殊値の関係式 (0.6) の一般化を考えるために, 次で定義されるフェルマー曲線 F_m $(m \geq 3)$ とその上の第二種微分形式 $\eta_{r,s}$ $(0 < r, s < m,\ r + s \neq m)$ を導入する.

$$F_m : x^m + y^m = 1, \quad \eta_{r,s} := x^r y^s dx/xy^m. \tag{0.9}$$

なお F_m の種数は $(m-1)(m-2)/2$ であり $\{\eta_{r,s}\}_{r,s}$ は第一 de Rham コホモロジー群 $H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q})$ の基底を与えている. このとき Rohrlich [Gr, Appendix] は次を示した; 任意のループ $\gamma \in H_1(F_m(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ での積分に関して

$$\frac{\int_\gamma \eta_{r,s}}{B(\frac{r}{m}, \frac{s}{m})} \in \mathbf{Q}(\zeta_m) \tag{0.10}$$

を満たす. なおフェルマー曲線 F_m のヤコビ多様体の適当な既約因子は体 $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ (ζ_m は 1 の原始 m 乗根) による虚数乗法を持つアーベル多様体となり, この周期積分 $\int_\gamma \eta_{r,s}$ はそれらのアーベル多様体の周期積分, すなわち円分体 $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ の CM 周期と一致する. この意味でこの公式 (0.10) は虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ の CM 周期の公式 (0.6) の一般化を与えていることになる.

注意. 志村氏の CM 周期記号の理論を使えばより一般に **$\mathbf{Q}$ 上アーベルな CM 体**の CM 周期は (フェルマー曲線 F_m の添え字 m を十分に大きくとれば) すべてこの周期積分の適当な単項式

$$\prod_{r,s} \left(\int_\gamma \eta_{r,s} \right)^{R_{r,s}}, \quad R_{r,s} \in \mathbf{Q} \tag{0.11}$$

の形で (代数的数倍を除いて) 書けることが分かる. よって Rohrlich の公式によりベータ関数や**ガンマ関数の特殊値の単項式**としても書ける. 吉田氏の予想 (予想 5.7, 詳しくは [Yo, Chap. III, CONJECTURE 3.9]) によれば, これは**一般の CM 体の CM 周期**と Barnes の**多重ガンマ関数**の間の関係式に拡張される.

この文章の目的は公式 (0.10) の p 進類似, すなわち p 進ベータ関数や p 進ガンマ関数とフェルマー曲線の p 進周期との関係を考察することである. 良く知られているように森田氏 [Mo] の p 進ガンマ関数とフェルマー曲線上の絶対フロベニウス作用の間には明確な関係式があり, この式が Rohrlich の公式の p 進類似であるとも言える. この関係式が次の節で紹介する Coleman [Co] の公式である. ここでは彼の結果のうちフェルマー曲線 F_m が p で良い還元を持たない場合, 即ち $p|m$ の場合に注目する. 主結果は森田氏の p 進ガンマ関数 ($\mathbf{Z}_p$ 上定義されている) を自然に $\mathbf{Q}_p$ 上に拡張することによって Coleman の公式が一部単純化できることである. 更に Rohrlich の公式 (0.10) の左辺の p 進類似となる "値"

$$\frac{\int_{p,\gamma} \eta_{r,s}}{B_p(\frac{r}{m}, \frac{s}{m})} \tag{0.12}$$

への “フロベニウス作用” を書き表す式へ変形できることに注目したい．ここで $\int_{p,\gamma}\eta_{r,s}$ は p 進 Hodge 理論から定まる p 進周期であり p 進周期環と呼ばれる巨大な環に値をとる．また $B_p(\alpha,\beta)$ を p 進ベータ関数と置いた．

以下簡単に次節以降の内容を紹介しておく．第一節では森田氏の p 進ガンマ関数の定義を復習し, フェルマー曲線 F_m 上の絶対フロベニウス作用がどのように書き表されるかを, 特に $p\nmid m$ の場合に限って見ていく．これはフェルマー曲線が $\mathrm{mod}\,p$ で良い還元を持つ場合で Coleman が得た結果 (1.16) も比較的簡単な形である．第二節では p 進整数上で定義されていた森田氏の p 進ガンマ関数を自然に p 進数全体上へ拡張する方法を考察する．なおこの手法により Barnes の多重ガンマ関数の p 進類似も自然に定義される．続く第三節ではこの拡張された p 進ガンマ関数を用いてフェルマー曲線が良い還元を持たない場合の絶対フロベニウス作用を書き下す．得られた式は Coleman の表示式と比べると非常にシンプルであり, 我々の p 進ガンマ関数の拡張が自然であったことを裏付けている．また第四節では p 進周期を導入し, p 進ベータ関数とどのような関係にあるかを見ていく．第五節は本筋から多少離れるが, 補足として吉田氏および筆者の多重ガンマ関数に関する研究を紹介したい．さらに第四節の主結果を p 進ガンマ関数から p 進多重ガンマ関数へ拡張するためのアイデアを紹介する．

§1. Coleman の結果 ($\mathbf{p}\nmid\mathbf{m}$ の場合)

簡単のため p は奇素数とする．森田氏はガンマ関数の p 進類似として $z\in\mathbf{Z}_p$ 上の連続関数 $\Gamma_p(z)$ を次のように定義した．

$$\Gamma_p(z)=\lim_{n\to z}(-1)^n\prod_{i=1,\ p\nmid i}^{n-1} i. \tag{1.1}$$

ただし極限において n は正の整数を走り p 進的に z へ近づくものとする．結果として関数等式

$$\Gamma_p(z+1)=\begin{cases}-z\Gamma_p(z) & z\in\mathbf{Z}_p^\times \text{ のとき},\\ -\Gamma_p(z) & z\in p\mathbf{Z}_p \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.2}$$

を満たす．Coleman はフェルマー曲線への絶対フロベニウス作用を次の Katz の補題 [Kat] の拡張を用いて計算している．

補題 1.1. *体 K は $\mathbf{Q}_p$ 上不分岐な有限次拡大であるとし, K のフロベニウス自己同型を σ_p で書く．射影的滑らかで連結な K 上の代数曲線 X が良い還元を持つとする．このとき第一 de Rham コホモロジー $H^1_{dR}(X/K)$ には σ_p-線形な絶対フロベニウス作用があり (定義は [BO] 参照), これを Φ_p で書くことにする．第二種微分形式 ω_i $(i=0,1)$ は X のある近傍上で適当なパラメーター T によって*

$$\omega_i=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(i)}T^n\frac{dT}{T},\quad a_n^{(i)}\in K,\ i=0,1 \tag{1.3}$$

と書け, 更に $H^1_{dR}(X/K)$ の元としてみたとき

$$\Phi_p\omega_0 = \alpha\omega_1, \quad \alpha \in K \tag{1.4}$$

となると仮定する. このとき部分列 $\{n_k\}_k \subset \{0,1,2,\ldots\}$ が $\lim_{k\to\infty} n_k/a^{(0)}_{n_k} = 0$ を満たせば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma_p(a^{(0)}_{n_k})p}{a^{(1)}_{pn_k}} = \alpha \tag{1.5}$$

となる.

例 1.2. Katz の補題を使った絶対フロベニウス作用の簡単な計算例を見てみよう. 楕円曲線 E, 正則 1 次微分形式 ω は導入で定義したものとする. すなわち

$$E : y^2 = 1 - x^4, \quad \omega = dx/y \tag{1.6}$$

である. これをパラメーター x で展開すれば

$$\begin{aligned} \omega &= (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \frac{dx}{x}, \\ a_n &= (-1)^{\frac{n-1}{4}} \binom{-\frac{1}{2}}{\frac{n-1}{4}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

とかける. ただし

$$\binom{s}{n} = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ のとき}, \\ \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!} & 0 < n \in \mathbf{Z} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{1.8}$$

と置いた. 簡単のため $p \equiv 1 \bmod 4$ とする. このとき元 $\Phi_p\omega \in H^1_{dR}(E/\mathbf{Q}_p)$ への虚数乗法 $z \in \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ の作用 z^* が $z^*(\Phi_p\omega) = z\Phi_p\omega$ となる (虚二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ で p が分解し, 虚数乗法は絶対フロベニウス作用と可換であることから従う) ことから

$$\Phi_p\omega = \alpha\omega, \quad \alpha \in \mathbf{Q}_p \tag{1.9}$$

が分かる. よって部分列 $\{n_k = p^k\}_k \subset \{0,1,2,\ldots\}$ を考えれば補題の条件を満たすので

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{pa_{p^k}}{a_{p^{k+1}}} \tag{1.10}$$

を得る. 更に公式

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}, \quad 0 < n \in \mathbf{Z}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{[\frac{n}{p}]}}{\binom{-\frac{1}{2}}{n}} = \frac{\Gamma_p(1+n)\Gamma_p(\frac{1}{2})(-1)^{[\frac{n}{p}]+n+1}p^{\langle\frac{n}{p}\rangle+\langle\frac{p-1}{2p}\rangle-\langle\frac{2n+p-1}{2p}\rangle}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}+n)}, \quad 0 < n \in \mathbf{Z}, \tag{1.12}$$

(正の実数 α に対し $[\alpha]$ でその整数部分, $\langle\alpha\rangle = \alpha - [\alpha]$ でその小数部分を表す)

$$\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = -(-1)^{(-z \bmod p)}, \quad z \in \mathbf{Z}_p, \tag{1.13}$$

($(-z \bmod p)$ は代表元 $\in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ を表す) を使って変形すれば

$$\alpha = \frac{\Gamma_p(\frac{3}{4})}{\Gamma_p(\frac{1}{4})\Gamma_p(\frac{1}{2})} \times p \tag{1.14}$$

を得る. 結果として古典的な周期積分の公式 (0.6) の強烈な類似となっている.

補題 1.1 (の一般化) を使って Coleman はフェルマー曲線上の絶対フロベニウス作用を計算している. フェルマー曲線 F_m が p で良い還元を持つ場合 (i.e., $p \nmid m$) は次のように書ける. 論文 [Co] では正確な値を記述してあるが, ここでは簡単のため $\mathrm{mod}\,\mathbf{Q}^\times$ で書き下すことにする.

定理 1.3. *素数 p と 3 以上の整数 m は $p \nmid m$ を満たしているとする. フェルマー曲線 $F_m : x^m + y^m = 1$ 上の第二種微分形式 $\eta_{r,s} := x^r y^s dx/xy^m$ $(0 < r, s < m$, $r+s \neq m)$ を $H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q}_p)$ の元と見たとき, その上の絶対フロベニウス作用 Φ_p は次のようにかける.*

$$\Phi_p(\eta_{p^{-1}\cdot r, p^{-1}\cdot s}) = \beta(r,s)\eta_{r,s}, \quad \beta(r,s) \in \mathbf{Q}_p^\times. \tag{1.15}$$

ここで $0 < a < m$ に対して $p^{-1} \cdot a$ は $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ のうち p 倍して a と $\mathrm{mod}\,m$ で等しくなる数と置いた. さらに $\beta(r,s)$ は具体的に記述でき

$$\beta(r,s) \equiv B_p(\frac{r}{m}, \frac{s}{m})^{-1} \bmod \mathbf{Q}^\times \tag{1.16}$$

となる. ただしここでは p 進ベータ関数 $B_p(\alpha,\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p)$ を森田氏の p 進ガンマ関数 Γ_p を用いて $B_p(\alpha,\beta) := \Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)/\Gamma_p(\alpha+\beta)$ で定義しておく.

Coleman の結果 (1.16) と古典的な周期積分の公式 (0.10) との類似は大変興味深い.

注意. 吉田氏と筆者は共同研究を行い, 不分岐の場合 $(p \nmid m)$ の Coleman の結果や, Gross-Koblitz 公式 (ガウス和と p 進ガンマ関数の特殊値との関係式) の拡張を試みた. 特に p 進多重ガンマ関数の特殊値によって, ガウス和の一般化とも見れる代数的数を表す予想式を論文 [KY1] で定式化した. また虚数乗法をもつ高次のアーベル多様体へのフロベニウス作用を p 進多重ガンマ関数の特殊値で表す予想関係式を論文 [KY2] で定式化した.

なおフェルマー曲線 F_m が p で良い還元を持たない場合にも係数体の拡大を行えば, 第一 de Rham コホモロジーには (複数の) フロベニウス作用があることが知られている. 同論文において Coleman はこのフロベニウス作用も計算しているが, 多少記述が複雑となっている. 次の節から森田氏の p 進ガンマ関数の自然な拡張を考え, Coleman の結果の単純化を目指す.

§ 2. p 進 (多重) ガンマ関数の定義

Coleman は次のようなルールで森田氏の p 進ガンマ関数 Γ_p の定義域を $\mathbf{Q}_p$ へ広げた.

$$\Gamma_p(z+1) = \langle z/p^{\mathrm{ord}_p z}\rangle \Gamma_p(z), \quad z \in \mathbf{Q}_p - \mathbf{Z}_p, \tag{2.1}$$

$$\Gamma_p(z) = 1, \quad z \in \mathbf{Z}[\tfrac{1}{p}] \cap [0,1). \tag{2.2}$$

ただし ω を Teichmüller 指標 $\omega(z) := \lim_{l\to\infty} z^{p^l}$ $(z \in \mathbf{Z}_p)$ とし, 記号 $\langle\ \rangle$ を $\langle z\rangle := z/\omega(z)$ $(z \in \mathbf{Z}_p^\times)$ と定義した. ここで定義式 (1.1), (2.1) は古典的なガンマ関数の性質

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.3}$$

の自然な類似であるが, 定義式 (2.2) には明確な意味づけができないことに注意したい.

そこで新たに森田氏の p 進ガンマ関数の拡張を以下のように定める. そのために次の Lerch の公式を思い出しておく.

$$\begin{gathered} \exp\left(\frac{d}{ds}\zeta(s,m,a)\Big|_{s=0}\right) = \Gamma(\frac{a}{m})(2\pi)^{-\frac{1}{2}} m^{-\zeta(0,m,a)}, \\ \zeta(s,m,a) := \sum_{n=0}^{\infty}(a+mn)^{-s}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

ただし a, m は正の整数とし, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,m,a)$ は $Re(s)$ が十分に大きいところで絶対収束し複素数全体に有理型に解析接続される. (特に $\zeta(0,m,a) = 1/2 - a/m$ である.) Ferrero-Greenberg [FG] によるこの公式の p 進類似は以下のように定式化できる. まず正整数 a, m に対して Hurwitz ゼータ関数の特殊値の p 進補間関数 $\zeta_p(s,m,a)$ は次で特徴づけられる $\mathbf{Z}_p - \{1\}$ 上の p 進的連続関数であった.

$$\zeta_p(-k,m,a) = \zeta_{(p)}(-k,m,a), \quad 0 \le k \in \mathbf{Z},\ k \equiv 0 \bmod (p-1). \tag{2.5}$$

ただし Hurwitz ゼータ関数の値に p 進連続性を持たせるために少し修正して

$$\zeta_{(p)}(s,m,a) := \sum_{n=0,\ p\nmid(a+mn)}^{\infty} (a+mn)^{-s} \tag{2.6}$$

と定義した．なお $a/m \notin \mathbf{Z}_p$ の場合には修正した Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_{(p)}(s,m,a)$ は修正前のもの $\zeta(s,m,a)$ と一致していることに注意．p 進 Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_p(s,m,a)$ は $s=0$ で p 進解析的であることが示せ, Ferrero-Greenberg の公式から次を得る．正整数 m が $p \nmid m$ を満たすとき

$$\frac{d}{ds}\zeta_p(s,m,a)\Big|_{s=0} = \log_p\left(\Gamma_p(\frac{a}{m})\right) - \zeta_{(p)}(0,m,a)\log_p m. \tag{2.7}$$

ここで $\log_p$ は $\log_p p = 0$ で分枝を定めた岩澤氏の p 進対数関数とした．今 $p \nmid m$ を仮定しているので $a/m \in \mathbf{Z}_p$ は森田氏の p 進ガンマ関数の定義域に入っていることを注意しておく．よってこの公式の逆輸入の形で, 次式で p 進ガンマ関数を定義する．正整数 a, m は, どちらかは p と互いに素であるとする．このとき

$$\Gamma_p(\frac{a}{m}) := \exp_p\left(\frac{d}{ds}\zeta_p(s,m,a)\Big|_{s=0} + \zeta_{(p)}(0,m,a)\log_p m\right) \in \mathbf{C}_p^\times/\mu_{p^\infty} \tag{2.8}$$

と置く．ただし p 進指数関数 $\exp_p(z)$ は $z \in \mathbf{Q}_p$ 全体では収束しないので, この文章では十分大きな $e \in \mathbf{Z}$ を取り $\exp_p(z) := \exp_p(p^e z)^{1/p^e} \bmod \mu_{p^\infty}$, μ_{p^∞} は 1 の p 冪乗根全体のなす群, と定義しておく．

$a/m \in \mathbf{Z}_p$ の場合には定義式 (2.8) の $\Gamma_p(a/m)$ は森田氏の p 進ガンマ関数と mod μ_{p^∞} で一致している．更に Coleman の定義した p 進ガンマ関数との比較を見てみる．以下, 我々の定義したものを $\Gamma_p(z)$, Coleman の定義したものを $\Gamma_{\mathrm{col}}(z)$ で表す．$z \in \mathbf{Z}_p$ に対してはともに森田氏の p 進ガンマ関数と (modμ_{p^∞} で) 一致している．$z \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}_p$ とすれば $\Gamma_*(z)$ $(* = p, \mathrm{col})$ はともに次の関数等式を満たす連続関数である．

$$\begin{gathered}\Gamma_*(z+1) = z^{(*)}\Gamma_*(z), \\ z^{(*)} = \begin{cases}\exp_p\log_p z & (* = p), \\ \langle z/p^{\mathrm{ord}_p z}\rangle & (* = \mathrm{col}).\end{cases}\end{gathered} \tag{2.9}$$

$z \in \mathbf{Q}_p$ に対しその p 進小数部分, p 進整数部分をそれぞれ z_p, z_0 と置く．即ち $z = z_p + z_0$, $z_p \in \mathbf{Z}[1/p] \cap (0,1]$, $z_0 \in \mathbf{Z}_p$ を満たす元である．すると $z \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}_p$ なら

$$\Gamma_*(z) = \Gamma_*(z_p + z_0) = \lim_{\mathbf{N}\ni n \to z_0}\Gamma_*(z_p + n) = \Gamma_*(z_p)\lim_{\mathbf{N}\ni n\to z_0}\prod_{l=0}^{n-1}(z_p + l)^{(*)} \tag{2.10}$$

を満たす．よって $\Gamma_{\mathrm{col}}(z_p) = 1$, $z^{(p)} \equiv z^{(\mathrm{col})} \bmod \mu_{p^\infty}$ に注意すれば

$$\Gamma_p(z) \equiv \Gamma_{\mathrm{col}}(z)\Gamma_p(z_p) \bmod \mu_{p^\infty} \tag{2.11}$$

を得る．なお最後の式は任意の $z \in \mathbf{Q}$ に対して成り立つ．

古典的なガンマ関数は幾つかの関数等式を満たす．例えば次の乗法公式がある．

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}). \tag{2.12}$$

森田氏の p 進ガンマ関数やその拡張もまた類似の式を満たしている．簡単のため $z=\frac{a}{m}\in\mathbf{Q}-\mathbf{Z}_p$ としよう．定義より

$$\begin{aligned}\Gamma_p(\frac{a}{m})\Gamma_p(\frac{a}{m}+\frac{1}{2}) &= \exp_p\Big(\frac{d}{ds}\zeta_p(s,2m,2a)\Big|_{s=0}+\zeta_{(p)}(0,2m,2a)\log_p 2m \\ &\qquad +\frac{d}{ds}\zeta_p(s,2m,2a+m)\Big|_{s=0}+\zeta_{(p)}(0,2m,2a+m)\log_p 2m\Big), \\ \Gamma_p(\frac{2a}{m}) &= \exp_p\Big(\frac{d}{ds}\zeta_p(s,m,2a)\Big|_{s=0}+\zeta_{(p)}(0,m,2a)\log_p m\Big)\end{aligned} \tag{2.13}$$

と書け，また $\zeta_p(s,2m,2a)+\zeta_p(s,2m,2a+m)=\zeta_p(s,m,2a)$, $\zeta_{(p)}(0,2m,2a)+\zeta_{(p)}(0,2m,2a+m)=\zeta_{(p)}(0,m,2a)=\frac{1}{2}-\frac{2a}{m}$ が成り立つので

$$\Gamma_p(2z)\equiv 2^{2z-\frac{1}{2}}\Gamma_p(z)\Gamma_p(z+\frac{1}{2}) \bmod \mu_{p^\infty} \quad (z\in\mathbf{Q}-\mathbf{Z}_p) \tag{2.14}$$

が成り立つ．ただしここでは $z\in\mathbf{Q}_p$ に対し $2^z:=\exp_p(z\log_p 2)$ と定義しておく．なお Coleman の p 進ガンマ関数 $\Gamma_{\mathrm{col}}(z)$ の乗法公式には補正項がつき

$$\Gamma_{\mathrm{col}}(2z)=\frac{\langle 2\rangle^{(2z)_0}\Gamma_{\mathrm{col}}(z)\Gamma_{\mathrm{col}}(z+\frac{1}{2})}{\Gamma_{\mathrm{col}}(z_p+\frac{(-1)^{(2z)_p}}{2})} \quad (z\in\mathbf{Q}_p-\mathbf{Z}_p) \tag{2.15}$$

となる [Co, (2,10)]．ただし $z\in\mathbf{Z}[1/p]$ に対し写像 $\mathbf{Z}[1/p]\hookrightarrow\mathbf{Z}_2\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の像とみて $(-1)^z$ を定義した．

注意．　より一般に Barnes の多重ゼータ関数の特殊値の p 進補間関数および Barnes の多重ガンマ関数の p 進類似は次のように定義される．Barnes は $0<z,v_1,\ldots,v_r\in\mathbf{R}$ に対して多重ゼータ関数 $\zeta_r(s,(v_1,\ldots,v_r),z)$ および多重ガンマ関数 $\Gamma_r(z,(v_1,\ldots,v_r))$ を次式で定義した．

$$\begin{aligned}\zeta_r(s,(v_1,\ldots,v_r),z) &:= \sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty}(z+n_1v_1+\cdots+n_rv_r)^{-s}, \\ \Gamma_r(z,(v_1,\ldots,v_r)) &:= \exp\Big(\frac{d}{ds}\zeta_r(s,(v_1,\ldots,v_r),z)\Big|_{s=0}\Big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

多重ゼータ関数も解析接続され $s=0$ で解析的な関数であることが示される．また多重ガンマ関数の Barnes によるオリジナルの定義はこれに適当な補正項が付いている．新谷氏 [Shin] は多重ゼータ関数の非正の整数点での特殊値をベルヌーイ多項式を用いて書き表した．彼の結果を用いると

$$\zeta_r(-k,(v_1,\ldots,v_r),z)=\left[\frac{(-1)^r(z+X_1v_1+\cdots+X_rv_r)^{r+k}}{v_1\ldots v_r(1+k)\ldots(r+k)}\right]_{X_i^m=B_m,\ i=1,\ldots,r} \tag{2.17}$$

と書ける．ただし $[\ldots]_{X_i^m=B_m}$ の意味はカッコの中身が X_i に関する多項式として $F(X)=\sum_{m_1,\ldots,m_r\geq 0}a_{m_1,\ldots,m_r}X_1^{m_1}\ldots X_r^{m_r}$ となるとき $[F(X)]_{X_i^m=B_m}:=\sum a_{m_1,\ldots,m_r}B_{m_1}\ldots B_{m_r}$,

B_m は m 番目のベルヌーイ数, と定義した. 彼の結果とベルヌーイ数の p 進的解釈

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{p^l}\sum_{X=0}^{p^l-1}X^m = B_m \tag{2.18}$$

を使うと多重ゼータ関数の特殊値の p 進補間が得られる [CN]. 即ち埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ を固定し, 代数的数 z, v_i が $0 < z, v_i \in \mathbf{R}$, $|z|_p = 1$, $|v_i|_p < 1$ を満たすならば p 進多重ゼータ関数を

$$\begin{aligned}\zeta_{p,r}(s, v_1, \ldots, v_r, z) := \lim_{l_1,\ldots,l_r\to\infty}\frac{1}{p^{l_1+\cdots+l_r}}\sum_{X_1=0}^{p^{l_1}-1}\cdots\sum_{X_r=0}^{p^{l_r}-1}\\ \frac{(-1)^r(z+X_1v_1+\cdots+X_rv_r)^r\langle z+X_1v_1+\cdots+X_rv_r\rangle^{-s}}{v_1\ldots v_r(1-s)\ldots(r-s)}\end{aligned} \tag{2.19}$$

で定義できる. これは $s \in \mathbf{Z}_p - \{1, 2, \ldots, r\}$ 上の連続関数であり更に p 進補間性

$$\zeta_{p,r}(-k, v_1, \ldots, v_r, z) = \omega(z)^{-k}\zeta_r(-k, v_1, \ldots, v_r, z) \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad 0 \le k \in \mathbf{Z} \tag{2.20}$$

を満たす. また $s = 0$ で p 進解析的関数となっている. 筆者の論文 [Kas1] では対数的 p 進多重ガンマ関数を

$$L\Gamma_{p,r}(z, v_1, \ldots, v_r) := \frac{d}{ds}\zeta_{p,r}(s, v_1, \ldots, v_r, z)\Big|_{s=0} \tag{2.21}$$

で定めその性質を調べている. やはりこの場合も

$$\Gamma_{p,r}(z, v_1, \ldots, v_r) := \exp_p(L\Gamma_{p,r}(z, v_1, \ldots, v_r)) \in \mathbf{C}_p^\times/\mu_{p^\infty} \tag{2.22}$$

と定義し p 進多重ガンマ関数と呼ぶ.

§3. Coleman の結果 (p | m の場合) の単純化

前節では $\mathbf{Z}_p$ 上定義されていた森田氏の p 進ガンマ関数の定義を自然に, しかしながら $\mathrm{mod}\mu_{p^\infty}$ でしか定まらないという曖昧さで, 正の有理数全体上へ拡張した. この拡張された p 進ガンマ関数を用いて p 進ベータ関数を

$$B_p(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}) := \frac{\Gamma_p(\frac{r}{m})\Gamma_p(\frac{s}{m})}{\Gamma_p(\frac{r+s}{m})} \in \mathbf{C}_p^\times/\mu_{p^\infty}, \quad 0 < r, s, m \in \mathbf{Z} \tag{3.1}$$

で定義しよう. また p 進数体の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ の集合 $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ への作用を 1 の原始 m 乗根 ζ_m を使って $\sigma(\zeta_m^a) = \zeta_m^{\sigma(a)}$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, $a, \sigma(a) \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ で定める.

フェルマー曲線 F_m が p で良い還元を持たないときでもそのヤコビ多様体 J_m は虚数乗法を持ち, したがって潜在的に良い還元を持つ. 即ち $\mathbf{Q}_p$ 上有限次 (分岐) 拡大 K とその整数環上の滑らかなモデルが存在する. このとき自然な同型

$$H^1_{dR}(F_m/K) \cong H^1_{cris}(\overline{J_m}/W) \otimes_W K \tag{3.2}$$

が得られる. ただし $\overline{J_m}$ は $J_m \times_{\mathbf{Q}} K$ の還元, W は K の剰余体上の Witt 環とした. K は必要なら十分大きな体に取り換えて $\mathbf{Q}_p$ 上正規拡大であるとして良い. 元 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ の $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ への制限がフロベニウス自己同型となるとき, 付随する $H^1_{dR}(F_m/K)$ 上のフロベニウス作用 Φ_σ とはこの同型を通じて $\Phi_p \otimes \sigma$ (Φ_p は 絶対フロベニウス作用) と対応するものであった. このフロベニウス作用 Φ_σ に関する Coleman の結果が次のように単純な形に書き直せることがこの節の主結果である.

定理 3.1. フェルマー曲線 F_m 上の第二種微分形式 $\eta_{r,s}$ のコホモロジー類 ($\in H^1_{dR}(F_m/K)$) へのフロベニウス作用は

$$\Phi_\sigma(\eta_{\sigma^{-1}(r),\sigma^{-1}(s)}) = \beta(\sigma, r, s)\eta_{r,s}, \quad \beta(\sigma, r, s) \in \mathbf{Q}_p^\times \tag{3.3}$$

と書ける. 簡単のため $p > 3$, $p \mid m$, $p \nmid r, s, r+s$ を仮定する. このとき

$$\beta(\sigma, r, s) \equiv \frac{B_p(\frac{\sigma^{-1}(r)}{m}, \frac{\sigma^{-1}(s)}{m})}{B_p(\frac{r}{m}, \frac{s}{m})} \bmod \mathbf{Q}^\times \mu_\infty \tag{3.4}$$

が成り立つ. ただし μ_∞ は 1 の冪根全体のなす群である.

Coleman は [Co] において $p \mid m$ の場合も Katz の補題 (補題 1.1) の拡張を定式化し, フロベニウス作用 Φ_σ を直接計算している. (ただしフェルマー曲線の代わりに [CM] で得られた “stable model” を用いている.) Coleman が得た表示は非常に複雑であるが, 前節で我々が定義した p 進ガンマ関数で書き直すことにより定理中の式 (3.4) の形に単純化できる.

証明. Coleman の結果 [Co, Proposition 3.12, Theorem 3.13] を使うと定理の条件下で

$$\beta(\sigma, r, s) \equiv \frac{D_\sigma(r/m)D_\sigma(s/m)\Gamma_\sigma(r/m)\Gamma_\sigma(s/m)}{D_\sigma(r/m + s/m)\Gamma_\sigma(r/m + s/m)} \bmod \mu_\infty \tag{3.5}$$

となるので $z \in \mathbf{Q} \cap (0,1] - \mathbf{Z}_p$ に対し

$$\frac{\Gamma_p(\sigma^{-1}(z))}{\Gamma_p(z)} \equiv D_\sigma(z)\Gamma_\sigma(z) \bmod \mathbf{Q}^\times \mu_\infty \tag{3.6}$$

を示せばいい. ただし $z \in m^{-1}\mathbf{Z} \cap (0,1]$ に対し $\sigma^{-1}(z) \in m^{-1}\mathbf{Z} \cap (0,1]$ は $\zeta_m^{m\sigma^{-1}(z)} =$

$\sigma^{-1}(\zeta_m^{mz})$ で定義される. 更に D_σ, Γ_σ は Coleman が定義した関数で次を満たす.

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} D_\sigma(z) &:= \prod_{i=1}^{f} (A_\sigma((z/2^i)_p)^{\frac{2^{i-1}}{2^f-1}} \bmod \mu_\infty, \\ A_\sigma(z) &:= \frac{\langle 2^{(2z)_p}\rangle \Gamma_{\mathrm{col}}(z_p + \frac{(-1)^{(2z)_p}}{2})}{\langle \sigma(2^{(\sigma^{-1}(2z))_p})\rangle \Gamma_{\mathrm{col}}(\sigma^{-1}(z_p) + \frac{(-1)^{\sigma^{-1}((2z)_p)}}{2})}, \\ \Gamma_\sigma(z) &\equiv \frac{\Gamma_{\mathrm{col}}(\sigma^{-1}(z))}{\Gamma_{\mathrm{col}}(z)} \bmod \mathbf{Q}^\times \mu_\infty. \end{aligned}$$

ただし f は $(\mathbf{Z}_p/z^{-1}\mathbf{Z}_p)^\times$ の中での 2 の位数とした. 求めている式の形より A_σ, D_σ を分解して

$$(3.8)\qquad D(z) := \prod_{i=1}^{f} A((z/2^i)_p)^{\frac{2^{i-1}}{2^f-1}} \bmod \mu_\infty, \quad A(z) := 2^{(2z)_p}\Gamma_{\mathrm{col}}(z_p + \frac{(-1)^{(2z)_p}}{2})$$

と置き

$$(3.9)\qquad \Gamma_p(z) \equiv \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma_{\mathrm{col}}(z)}{D(z)} \bmod \mathbf{Q}^\times \mu_\infty$$

を示せば十分であることが分かる. 更に式 (2.11) および $D(z) = D(z_p)$ より

$$(3.10)\qquad \Gamma_p(z_p) D(z_p) \equiv 2^{\frac{1}{2}}$$

を示せば十分である. さて公式 (2.11) を使うと

$$(3.11)\qquad A(z) \equiv 2^{(2z)_p} \frac{\Gamma_p(z_p + \frac{(-1)^{(2z)_p}}{2})}{\Gamma_p(z_p)} \bmod \mu_{p^\infty}$$

と変形できる. 更に公式 (2.14) より $\Gamma_p(2(z_p)) \equiv 2^{2(z_p)-\frac{1}{2}}\Gamma_p(z_p)\Gamma_p(z_p+\frac{1}{2})$ だから

$$(3.12)\qquad \equiv 2^{\frac{1}{2}+(2z)_p-2(z_p)} \frac{\Gamma_p(z_p + \frac{(-1)^{(2z)_p}}{2})\Gamma_p(2(z_p))}{\Gamma_p(z_p)^2\Gamma_p(z_p+\frac{1}{2})} \bmod \mu_{p^\infty}$$

が従う. $(-1)^{(2z)_p} = 1$ のとき $2(z_p) = (2z)_p$ だから

$$(3.13)\qquad A(z) \equiv 2^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma_p((2z)_p)}{\Gamma_p(z_p)^2} \bmod \mu_{p^\infty}$$

となる. もし $(-1)^{(2z)_p} = -1$ なら $2(z_p) = (2z)_p + 1$ なので

$$(3.14)\qquad A(z) \equiv 2^{\frac{1}{2}-1} \frac{\Gamma_p(z_p - \frac{1}{2})\Gamma_p(2(z_p))}{\Gamma_p(z_p)^2\Gamma_p(z_p+\frac{1}{2})} \bmod \mu_{p^\infty}$$

となるが $\Gamma_p(2(z_p)) \equiv (2(z_p)-1)\Gamma_p(2(z_p)-1) \equiv (2(z_p)-1)\Gamma_p((2z)_p)$, $\Gamma_p(z_p+\frac{1}{2}) \equiv (z_p-\frac{1}{2})\Gamma_p(z_p-\frac{1}{2})$ を用いてこの場合も

$$\equiv 2^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_p((2z)_p)}{\Gamma_p(z_p)^2} \bmod \mu_{p^\infty} \tag{3.15}$$

を得る. $(z/2^f)_p = z_p$ に注意すれば

(3.16)

$$\begin{aligned} D(z_p) &\equiv \left(2^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_p((z)_p)}{\Gamma_p((z/2)_p)^2}\right)^{\frac{1}{2^f-1}}\left(2^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_p((z/2)_p)}{\Gamma_p((z/2^2)_p)^2}\right)^{\frac{2}{2^f-1}}\cdots\left(2^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_p((z/2^{f-1})_p)}{\Gamma_p((z/2^f)_p)^2}\right)^{\frac{2^{f-1}}{2^f-1}} \\ &\equiv \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\Gamma_p(r_p)} \bmod \mu_\infty \end{aligned}$$

が従うので求める式 (3.10) を得た. □

§4. フェルマー曲線の p 進周期

簡単のためこの節では埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ を固定する. 導入で紹介したフェルマー曲線の周期積分 $\int_\gamma \eta_{r,s}$ はホモロジー群とベッチコホモロジーの双対性

$$H^1_B(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \times H_1(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q} \tag{4.1}$$

および de Rham 同型

$$H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \cong H^1_B(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \tag{4.2}$$

から定まる次の pairng の値だと思える.

$$H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q}) \times H_1(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \to \mathbf{C}, \quad (\eta_{r,s},\gamma) \mapsto \int_\gamma \eta_{r,s}. \tag{4.3}$$

この pairng の p 進類似として Fontaine の p 進周期環 B_{dR} に値をとる **p 進周期** $\int_{p,\gamma}\eta_{r,s}$ が定義できる. (Fontaine の p 進周期環や以下の比較同型に関しては [Il] を参照.) 即ちベッチコホモロジーとエタールコホモロジーの比較同型

$$H^1_B(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \cong H^1_{et}(F_m \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}_p) \tag{4.4}$$

およびエタールコホモロジーと de Rham コホモロジーの比較同型

$$H^1_{et}(F_m \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{dR} \cong H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} B_{dR} \tag{4.5}$$

があるので, 先のホモロジー群とベッチコホモロジーの双対性と組み合わせることにより pairing

$$H^1_{dR}(F_m/\mathbf{Q}) \times H_1(F_m(\mathbf{C})/\mathbf{Q}) \to B_{dR}, \quad (\eta_{r,s},\gamma) \mapsto \int_{p,\gamma} \eta_{r,s}. \tag{4.6}$$

を得る. 比較同型 (4.5) はフィルトレーションと可換であることから, この pairing は部分環 B_{dR}^{+} に値をとることが分かる. 更に比較同型

$$H^1_{et}(F_m \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{cris} \cong H^1_{cris}(\overline{J_m}/W) \otimes_W B_{cris} \tag{4.7}$$

と比較同型 (3.2), (4.5) の互換性より B_{dR} の中での B_{cris} と K の合成環 $B_{cris}K$ に値をとることも分かる. 前節のフロベニウス作用 Φ_σ は自然に $B_{cris}K \cap B_{dR}^{+}$ にも作用し, 前節の定理 (3.4) より次を得る.

定理 4.1. 記号は 定理 *3.1* 中と同じとする. このとき

$$\Phi_\sigma \left(\frac{\int_{p,\gamma} \eta_{\sigma^{-1}(r),\sigma^{-1}(s)}}{B_p(\frac{\sigma^{-1}(r)}{m}, \frac{\sigma^{-1}(s)}{m})} \right) \equiv \frac{\int_{p,\gamma} \eta_{r,s}}{B_p(\frac{r}{m}, \frac{s}{m})} \bmod \mathbf{Q}^\times \mu_\infty \tag{4.8}$$

を満たす.

上記の比較同型 (4.7) はフロベニウス同変だから, 得られた $B_{cris}K \cap B_{dR}^{+}$ 値の pairing も Φ_σ 同変になる. ただしエタールコホモロジー上には絶対フロベニウスは自明に作用することから

$$\Phi_\sigma(\int_{p,\gamma} \eta_{\sigma^{-1}(r),\sigma^{-1}(s)}) = \int_{p,\gamma} \Phi_\sigma(\eta_{\sigma^{-1}(r),\sigma^{-1}(s)}) = \beta(\sigma, r, s) \int_{p,\gamma} \eta_{r,s} \tag{4.9}$$

となることより定理の主張を得る.

§5. (p 進) 多重ガンマ関数と Stark の単数

導入の注意で触れた吉田氏の予想 (任意の CM 周期を多重ガンマ関数の特殊値で書いた予想式) は, ある意味 "解析的類数公式" や "Stark 予想" の一般化だと思える. 彼の理論および筆者との共同研究の結果が, 今回の話や今後の研究のモチベーションにもなっているのでこの節で簡単に紹介することにする. まずは Stark 予想を思い出しておこう. 代数体のアーベル拡大 K/F および F の素点の有限集合 S で, 全ての無限素点と K/F で分岐している全ての素点を含んでいるものをとる. 更に次を満たすと仮定する.

$$\exists v \in S \text{ s.t. } v \text{ は } K/F \text{ で完全分解している.} \tag{5.1}$$

素点 v は無限素点でもよいことに注意. 体 K の素点 w で v の上にあるものを一つ固定するとき Stark 予想は次のように書ける.

予想 5.1. 簡単のため $|S| > 2$ とする. このとき v-単元 $u = u(K/F, S, w) \in K^\times$ が存在し, 任意の $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$\log(\| u^\tau \|_w) = -W_K \zeta_S'(0, \tau) \tag{5.2}$$

を満たす. ここで W_K は K に含まれる 1 の冪根の数とし, 部分ゼータ関数 $\zeta_S(s,\tau)$ は

$$\zeta_S(s,\tau) := \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F,\ (\mathfrak{a},S)=1,\ (\frac{K/F}{\mathfrak{a}})=\tau} N\mathfrak{a}^{-s} \tag{5.3}$$

で定義する. また素点 w での局所絶対値を $\|\ \|_w$ (w が実素点なら $\| z \|_w := |z|$, 複素素点なら $\| z \|_w := |z|^2$, 有限素点なら $\| z \|_w := (Nw)^{-\mathrm{ord}_w z}$) で表した.

この予想的単数 u の事を Stark 単数と呼ぶ.

例 5.2. Stark 予想の解決例として $F=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(\zeta_m+\zeta_m^{-1})$, $S=\{p \mid m\}\cup\{\infty\}$, $|S|>2$, $v=\infty$ の場合を考えてみよう. このとき $G=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_m+\zeta_m^{-1})/\mathbf{Q})=(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times/\{\pm1\}$ と同一視でき, 部分ゼータ関数は

$$\zeta(s,(a \bmod m) \bmod \{\pm1\})=\zeta(s,m,a)+\zeta(s,m,m-a), \quad 0<a<m,\ (a,m)=1 \tag{5.4}$$

となり Hurwitz ゼータ関数の和で表せる. よって Lerch の公式 (2.4) や Euler の公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \tag{5.5}$$

より Stark 予想は次を言っていることになる.

$$u_{a \bmod m} := \left(\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{a}{m})\Gamma(\frac{m-a}{m})}\right)^2 = 4\sin^2(\frac{a}{m}\pi)\in\mathcal{O}^\times_{\mathbf{Q}(\zeta_m+\zeta_m^{-1})}, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{Frob}_l(u_{a \bmod m}) = u_{al \bmod m}, \quad l\nmid m. \tag{5.7}$$

例 5.2 で見たように, Stark 予想の特別な場合は $\sin^2$ 関数 (の有理数点での特殊値) への Galois 作用の記述となる.

$$\mathrm{Frob}_l\left(\sin^2(a\pi/m)\right)=\sin^2(al\pi/m), \quad a,m\in\mathbf{Z},\ l\nmid m. \tag{5.8}$$

ここで非常に曖昧ではあるが, この sin 関数の特殊値上への Galois 作用をガンマ関数の特殊値上に “分解” できるかという問題を提起したい. (sin 関数 はガンマ関数の積として表せる (5.5) ことに注意.) 言い換えるとガンマ関数の特殊値のなす集合 $\{\Gamma(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{Q}}$ 上への Frob_l の “作用” $\mathrm{Frob}_l:\Gamma(\langle a/m\rangle)\mapsto\Gamma(\langle al/m\rangle)$ ($\langle\alpha\rangle$ は $\alpha\in\mathbf{R}$ の小数部分 $\in(0,1]$ を表すこととした) を意味づけできるか? ということである. 導入で見たようにこの集合は円分体の CM 周期全体と言い換えてもよく, また代数的数全体のなす集合に含まれていないことを注意しておく. よって普通の意味ではフロベニウス作用は定義できないので, 何らかの意味で値を “正規化” する必要がある.

以下 F を総実体として話を進める. この場合の Stark 単数を “分解” したものが, 次に定義する Barnes-新谷-吉田氏の多重ガンマ関数である. 詳しくは [Yo] を参照.

定義 5.3. (新谷.) 任意の総実体 F に対して次を満たすコーンの有限集合 $\{C(v_j)\}_{j\in J}$ $(v_j=(v_{j,1},\ldots,v_{j,r(j)}),\ v_{j,i}\in\mathcal{O}_F)$ が取れる.

$$(F\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R})_+=\sqcup_{\epsilon\in\mathcal{O}_{F+}^\times}\epsilon\left(\sqcup_{j\in J}C(v_j)\right). \tag{5.9}$$

ただし添え字の $+$ は集合の総正部分を表し, ベクトル $v=(v_1,\ldots,v_r)\in F_+^r$ に対しコーン $C(v)$ は自然な埋め込み $F\hookrightarrow F\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}$ を使って

$$C(v):=\{t_1v_1+\cdots+t_rv_r\mid 0<t_k\in\mathbf{R}\}\subset(F\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R})_+ \tag{5.10}$$

で定義されるものとする. この条件を満たす $\{C(v_j)\}_{j\in J}$ を新谷のコーン分解と呼ぶ.

新谷のコーン分解 $\{C(v_j)\}_{j\in J}$ を一つ固定し $\mathcal{D}:=\sqcup_{j\in J}C(v_j)$ と置けば, $\mathcal{D}\cap F$ が $F_+/\mathcal{O}_{F+}^\times$ の "良い" 完全代表系を与えている.

定義 5.4. (吉田.) 次数 n の総実体 F の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対し $\mathfrak{C}_\mathfrak{f}$ で $\bmod\ \mathfrak{f}\infty_1\ldots\infty_n$ の狭義イデアル類群を表すこととする. また F の $\mathbf{R}$ への埋め込み全体を J_F で表すこととし, 新谷のコーン分解 $\{C(v_j)\}_{j\in J}$ を一つ取り $\mathcal{D}:=\sqcup_{j\in J}C(v_j)$ と置く. このときイデアル類 $c\in\mathfrak{C}_\mathfrak{f}$ に対して代表元 $\mathfrak{a}_c\in c$ を一つ取り

$$\begin{aligned}
Z(c)&:=\{z\in\mathcal{D}\cap\mathfrak{a}_c^{-1}\mid z\mathfrak{a}_c\in c\},\\
\zeta(s;c,\iota)&:=\sum_{z\in Z(c)}\iota(z)^{-s},\quad \iota\in J_F,\\
\zeta(s;c,\iota,\iota')&:=\sum_{z\in Z(c)}\{(\iota(z)\iota'(z))^{-s}-\iota(z)^{-s}-\iota'(z)^{-s}\},\quad \iota,\iota'\in J_F,\\
G(c,\iota)&:=\zeta'(0;c,\iota)\\
V(c,\iota)&:=\frac{2}{n}\sum_{\iota'\in J_F,\ \iota'\neq\iota}\zeta'(0;c,\iota,\iota')-\frac{1}{n^2}\sum_{\iota',\iota''\in J_F,\ \iota'\neq\iota''}\zeta'(0;c,\iota',\iota''),\\
W(c,\iota)&:=-\frac{1}{n}\zeta(0;c,\iota)\log N\mathfrak{a}_c,\\
X(c,\iota)&=X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c):=G(c,\iota)+V(c,\iota)+W(c,\iota).
\end{aligned}\tag{5.11}$$

と定義する.

定義中に現れた関数 $\zeta(s;c,\iota)$, $\zeta(s;c,\iota,\iota')$ は $Re(s)$ が十分大きいところで絶対収束し, それぞれ Barnes の多重ゼータ関数, 新谷の多重ゼータ関数の有限和で書けることが知られている. 特に $s=0$ で解析的であり, $G(c)$ は Barnes の多重ガンマ関数の特殊値の有限積の対数として書ける. また吉田氏は $V+W$ の部分が

$$V(c,\iota)+W(c,\iota)=\sum_{i=1}^k\alpha_i\log\beta_i,\quad \exists\alpha_i\in\iota(F),\ \exists\beta_i\in\iota(F_+) \tag{5.12}$$

の形で表せることを示している. この不変量 $X(c,\iota)$ は次の意味でイデアル類 c に付随する部分ゼータ関数の微分値の "細分" となっている.

定理 5.5. *(新谷公式の吉田氏による言い換え.)* イデアル類 $c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$ に対して上記のように $\mathcal{D}, \mathfrak{a}_c$ をとるとき

$$\zeta'(0,c) = \sum_{\iota \in J_F} X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c) \tag{5.13}$$

が成り立つ. ただし部分ゼータ関数 $\zeta(s,c)$ は

$$\zeta(s,c) := \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F,\ \mathfrak{a} \in c} N\mathfrak{a}^{-s} \tag{5.14}$$

で定義される.

記号 $X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c)$ の値は主にイデアル類 c と F の埋め込み ι に依存する不変量である. 残りの $\mathcal{D}$, $\mathfrak{a}_c$ の取り方への依存は次の定理により初等的な値で抑えられている.

定理 5.6. *([Yo, chap. III, §3.6, §3.7])* 新谷のコーン分解を二つ $\{C(v_j)\}$, $\{C(v'_j)\}$ とり, $\mathcal{D} := \sqcup C(v_j)$, $\mathcal{D}' := \sqcup C(v'_j)$ と置く. またイデアル類 $c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$ の代表元も二つ $\mathfrak{a}_c, \mathfrak{a}'_c \in c$ とる. このとき

$$X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c) - X(c,\iota;\mathcal{D}',\mathfrak{a}'_c) = \alpha \log \beta, \quad \exists \alpha \in \mathbf{Q},\ \exists \beta \in \iota(F_+) \tag{5.15}$$

と書ける.

なお吉田氏は定理中の α, β をベルヌーイ数や, コーンの細分およびその生成元などを使って具体的に書き下している. さて総実体 F のアーベル拡大 K および F の整イデアル $\mathfrak{f}$ で K/F の導手で割り切れるものに対してアルチン写像を $\mathrm{Art}_{\mathfrak{f}} : \mathfrak{C}_{\mathfrak{f}} \to \mathrm{Gal}(K/F)$ で表すこととする. 更にガロア群の元 $\tau \in \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota) := \Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota;\mathcal{D},\{\mathfrak{a}_c\}) := \prod_{c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{f}},\ \mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}(c)=\tau} \exp(X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c)) \tag{5.16}$$

と置く. 定理 5.6 より値 $\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ は $\mathrm{mod}(F^\times)^{\mathbf{Q}}$ で考えれば τ, ι のみによる. 導入およびこの節のはじめに紹介した吉田予想は次のように定式化できる.

予想 5.7. ([Yo, chap. III, CONJECTURE 3.9] の言い換え.) 簡単のため K を CM 体と仮定する. このときガロア群 $G := \mathrm{Gal}(K/F)$ の中にはただ一つの複素共役があるので ρ で表す. このとき体 F の整イデアル $\mathfrak{f}$ で K/F の導手で割りきれるもの, 体 K の埋め込み $\iota : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ および $\tau \in G$ に対して

$$\left(\frac{\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota|_F)}{\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau\rho,\iota|_F)}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \pi^{\zeta_S(0,\tau)} p_K(\iota \circ \tau, \sum_{\sigma \in G} W_K \zeta_S(0,\sigma) \iota \circ \sigma)^{\frac{1}{W_K}} \bmod \overline{\mathbf{Q}}^\times \tag{5.17}$$

が成り立つ. ただし集合 S は $\mathfrak{f}\infty$ を割る素点全体とし志村氏の CM 周期記号を p_K で表した. (I_K で K の $\mathbf{C}$ への埋め込み全体を生成元とする形式的自由アーベル群を表すとき, p_K はある性質を持つ双線形写像 : $I_K \times I_K \to \mathbf{C}^\times/\overline{\mathbf{Q}}^\times$ として定義される.)

なお K を F の任意のアーベル拡大とした場合, 埋め込み $\iota\colon F \hookrightarrow \mathbf{R}$ に付随する複素共役 ρ_ι が, ι の K への拡張 $\tilde{\iota}\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ による $\mathbf{C}$ の複素共役の引き戻しで定義される. このとき

$$\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota')\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau\rho_\iota,\iota') \in (F^\times)^{\mathbf{Q}}, \quad \iota \neq \iota' \tag{5.18}$$

が示せる ($[F:\mathbf{Q}]=2$ の場合 [Yo, Chap. III, Theorems 5.8, 5.12], 一般の場合 [Kas2]). 体 K が CM 体の場合は全ての複素共役が一致するので, 予想式の左辺は $\equiv \Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota|_F) \bmod (F^\times)^{\mathbf{Q}}$ となる.

注意. 志村氏の CM 周期記号 p_K の定義は [Shim] を参照. また survey が [Yo] にある. 記号 p_K の値は現在では代数的 Hecke 指標 χ に付随する (Absolute Hodge cycle の) モチーフ $M(\chi)$ と, その Deligne の周期 $\Omega^+(M(\chi))$ の言葉に直せる (e.g., [Sc], [dS]). すなわち上記予想は次のように言い換えられる. 上記の $\mathfrak{f},\tau,\iota$ に対し, 有限個の K の代数的 Hecke 指標 $\{\chi_i\}_{i\in I}$ および有理数 r_i があって

$$\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota) \equiv \prod_{i\in I}\Omega^+(M(\chi_i))^{r_i} \tag{5.19}$$

とかける. なお志村氏の虚数乗法論および吉田氏の予想式から $\{\chi_i\}_{i\in I}$ (の infinity type) や $\{r_i\}_{i\in I}$ を具体的に書き下せる.

一方で吉田氏 [Yo] と筆者 [Kas2] は Stark 単数と不変量 $\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ の間の関係について次のようなことを示している. 総実体 F のアーベル拡大 K で F の無限素点 ∞_F が分解していると仮定する. 即ち埋め込み $\iota\colon K \hookrightarrow \mathbf{R}$ で $\iota|_F =: \iota_F$ が ∞_F を導くものが存在する. 整イデアル $\mathfrak{f}$ は K/F の導手で割りきられるものとし, 有限集合 S として $\mathfrak{f}\infty$ を割る F の素点全体をとる. とくに $S \ni \infty_F$ が分解していることに注意. このとき Stark 予想は任意の $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$\exp(\zeta_S'(0,\tau)) \tag{5.20}$$

が代数的数であると言っていた. (実際はより詳しい性質を予想している.) この元は新谷公式より

$$\equiv \prod_{\iota\in J_F}\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota) \bmod (F^\times)^{\mathbf{Q}} \tag{5.21}$$

となっているが更に (5.18) より

$$\equiv \Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota_F) \bmod (F^\times)^{\mathbf{Q}} \tag{5.22}$$

となる.

これまで見たように $\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ は Stark 単数および CM 周期 (または代数的 Hecke 指標に付随するモチーフの周期) を統一的に, しかしながら $\bmod (F^\times)^{\mathbf{Q}}$ の曖昧さで, 表して

いる興味深い不変量である. そして古典的なガンマ関数の正の有理数での特殊値の一般化でもある. 実際 $F=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(\zeta_m)$, $\mathfrak{f}=(m)$, $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_m)/\mathbf{Q})\ni\tau:\zeta_m\mapsto\zeta_m^a$ の場合は

$$\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)\equiv\Gamma(a/m)(2\pi)^{-1/2} \bmod (F^\times)^{\mathbf{Q}} \tag{5.23}$$

となる. ゆえに前節の主結果の拡張として $\frac{\text{CM 周期の } p \text{ 進類似}}{\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota) \text{ の } p \text{ 進類似}}$ への絶対フロベニウス作用の記述を考えるのが自然であろう. これまで吉田氏との共同研究 [KY1] において $\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ の p 進類似 $\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ を本質的に定義している. 即ち

定義 5.8. 記号は 定義 5.4 および定義式 (5.16) 中と同じとし, 簡単のため体としての同型 $\mathbf{C}\cong\mathbf{C}_p$ を一つ取り同一視しておく. 埋め込み $\iota:F\hookrightarrow\mathbf{C}\cong\mathbf{C}_p$ が導く F の素イデアルを $p_{F,\iota}$ と書く. このとき $p_{F,\iota}\mid\mathfrak{f}$ なら関数 $\zeta(s;c,\iota)$ の特殊値の p 進補間関数 $\zeta_p(s;c,\iota)$ が存在し特に $s=0$ で p 進解析的である. 更に式 (5.12) 中の α_i,β_i を用いて

$$X_p(c,\iota)=X_p(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c):=\zeta_p'(0;c,\iota)+\sum_{i=1}^k\alpha_i\log_p\beta_i \tag{5.24}$$

と定義する. 更にガロア群の元 $\tau\in\mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota):=\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota;\mathcal{D},\{\mathfrak{a}_c\}):=\prod_{c\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{f}},\ \mathrm{Art}_{\mathfrak{f}}(c)=\tau}\exp_p(X_p(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c))\in\mathbf{C}_p^\times/\mu_{p^\infty} \tag{5.25}$$

と置く.

関数 $\zeta_p(s;c,\iota)$ は第二節で紹介した p 進多重ゼータ関数の有限和として具体的に書ける. よって $\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ も p 進多重ガンマ関数の有限積と初等的関数の積として書ける. 次に示すように 定理 5.6 の p 進類似 (単に類似というより強力) がある.

補題 5.9. *([KY1, Proposition 5.6])* 引き続き $p_{F,\iota}\mid\mathfrak{f}$, $c\in\mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$ を仮定する. 二つの新谷のコーン分解 $\mathcal{D}:=\sqcup C(v_j)$, $\mathcal{D}':=\sqcup C(v_j')$ および二つの代表元 $\mathfrak{a}_c,\mathfrak{a}_c'\in c$ に対し

$$X(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c)-X(c,\iota;\mathcal{D}',\mathfrak{a}_c')=\alpha\log\beta \tag{5.26}$$

を満たす $\alpha\in\mathbf{Q}$, $\beta\in\iota(F_+)$ をとると

$$X_p(c,\iota;\mathcal{D},\mathfrak{a}_c)-X_p(c,\iota;\mathcal{D}',\mathfrak{a}_c')=\alpha\log_p\beta \tag{5.27}$$

を満たす.

この結果より $\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota),\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota)$ の定義に共通の新谷のコーン分解, イデアル類の代表元を用いると約束することによって, τ,ι のみに依存する不変量

$$(\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota),\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota))\in(\mathbf{C}^\times\times\mathbf{C}_p^\times/\mu_{p^\infty})/(\iota(F)^\times)^{\mathbf{Q}} \tag{5.28}$$

が定義できた.

一方で CM 周期の p 進類似は Deligne の周期 Ω^+ の p 進類似 Ω_p^+ を用いて構成できる. (Deligne の周期の p 進類似 Ω_p^+ は第四節と同様に de Rham の同型を p 進 Hodge の比較同型に置き換えることで定義される. e.g., [Oc], [dS].) こちらも代数体上定義された critical なモチーフ M に対して

$$(\Omega^+(M), \Omega_p^+(M)) \in (\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}_p^\times)/\overline{\mathbf{Q}}^\times \tag{5.29}$$

となるように定義される. 吉田予想の言い換え (5.19) は有限個の代数的 Hecke 指標のモチーフ $\{M_i\}_{i\in I}$ があって

$$\frac{\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)}{\prod_{i\in I}\Omega^+(M_i)^{r_i}} \in \overline{\mathbf{Q}}^\times \tag{5.30}$$

を言っていた. この式を仮定すると, 考えるべき "値" は

$$\frac{\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota)\prod_{i\in I}\Omega_p^+(M_i)^{r_i}}{\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota)\prod_{i\in I}\Omega^+(M_i)^{r_i}} \in B_{dR}^\times/\mu_\infty \tag{5.31}$$

のはずである. 実際 $F=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(\zeta_m)$, $\mathfrak{f}=(m)$, $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_m)/\mathbf{Q}) \ni \tau : \zeta_m \mapsto \zeta_m^a$, $p \mid m$ の場合は

$$(\Gamma_{\mathfrak{f}}(\tau,\iota), \Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\tau,\iota)) \equiv (\Gamma(a/m), \Gamma_p(a/m)) \tag{5.32}$$

となり "値" (5.31) のいくつかの積は

$$\frac{B(\frac{r}{m},\frac{s}{m})\int_{p,\gamma}\eta_{r,s}}{B_p(\frac{r}{m},\frac{s}{m})\int_\gamma \eta_{r,s}}, \quad 0 \neq \gamma \in H_1(F_m(\mathbf{C}),\mathbf{Q}) \tag{5.33}$$

を与える. この値は γ の取り方にはよらないことに注意. 大坪氏の結果 [Ot] を使うとうまく γ_0 を選んで $B(\frac{r}{m},\frac{s}{m}) = \int_{\gamma_0}\eta_{r,s}$ とできる. よって結局

$$= \frac{\int_{p,\gamma_0}\eta_{r,s}}{B_p(\frac{r}{m},\frac{s}{m})} \tag{5.34}$$

と書ける. 第四節の主結果は "値" (5.31) の特別な場合への絶対フロベニウス作用の記述を与えていたことになる. 一般の場合にもこの "値" への絶対フロベニウス作用について同様の定式化, 結果が得られるかは大変興味深い.

参考文献

[BO] Berthelot, P., and Ogus, A., F-isocrystals and de Rham cohomology. I, *Inv. Math.,* **72** (1983), 159-199.

[CN] Cassou-Noguès, P., Analogues p-adiques de quelques fonctions arithmétiques, *Publ. Math. Bordeaux,* 1974-1975, 1-43.

[Co] Coleman, R., On the Frobenius matrices of Fermat curves, p-adic analysis, *Springer Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1454, 1990, 173-193.

[CM] Coleman, R. and McCallum W., Stable Reduction of Fermat Curves and Local Components of Jacobi Sum Hecke Characters, *J. reine angew. Math.* **385** (1988), 41-101

[dS] de Shalit, E., On monomial relations between p-adic periods, *J. Reine Angew. Math.,* **374** (1987), 193-207.

[FG] Ferrero, B. and Greenberg, R., On the Behavior of p-adic L-Functions at $s = 0$, *Inv. Math.,* **50** (1978), 91-102.

[Gr] Gross, B., On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg, *Inv. Math.,* **45** (1978), 193-211.

[Il] Illusie, L., Crystalline cohomology, *Motives,* Proc. Symp. Pure Math. **55** (1994), Part 1, 43-70.

[Kas1] Kashio, T., On a p-adic analogue of Shintani's formula, *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005), no. 1, 99-128.

[Kas2] Kashio, T., Stark units, CM-periods and multiple gamma functions, 数理解析研究所講究録 *"Automorphic representations, automorphic L-functions and arithmetic"*, 投稿中.

[KY1] Kashio, T. and Yoshida, H., On p-adic absolute CM-Periods, I, *American Journal of Mathematics,* vol. 130, no. 6 (2008), 1629-1685.

[KY2] Kashio, T. and Yoshida, H., On p-adic absolute CM-Periods, II, *Arithmetic Algebraic Geometry, Publ. Res. Inst. Math. Sci.,* Volume 45, Number 1 (2009), 187-225.

[Kat] Katz, N., Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India, 1979, 165-245.

[Mo] Morita, Y., A p-adic analogue of the Γ function, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **22** (1975) no. 2, 255-266.

[Oc] Ochiai, T., p-adic L-functions for Galois deformations and related problems on periods, *Proceeding for the 8th Autumn workshop on Number theory "Periods and Automorphic Forms",* 2006, 29-46.

[Og] Ogus, A., A p-adic Analogue of the Chowla-Selberg Formula, p-adic analysis, *Springer Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1454, 1990, 319-341.

[Ot] Otsubo, N., On the Abel-Jacobi maps of Fermat Jacobians, preprint.

[Sc] Schappacher, N., Periods of Hecke characters, *Springer Lecture Notes in Mathematics,* Vol. 1301 (1980).

[Shim] Shimura, G., Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, *Princeton Mathematical Series* **46** (1998), Princeton University Press.

[Shin] Shintani, T., On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, *Algebraic Number Theory, Proc. International Sympos., Kyoto, 1976,* Kinokuniya, Tokyo, 1977, 201-212.

[Yo] Yoshida, H., Absolute CM-Periods, *Mathematical Surveys and Monographs,* vol. 106, 2003, AMS.