Title	力学系のカオス(基研短期研究会『天体現象と非線形・非平衡物理』,研究会報告)
Author(s)	相沢, 洋二
Citation	物性研究 (1988), 50(2): 205-220
Issue Date	1988-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/93060
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

力学系のカオス

早大　　相沢　洋二

（　内容　）

1．力学系とカオス

力学系

微分方程式のように、初期値$\mathbb{X}(0)$が与えられると運動$\mathbb{X}(t)$（$t \geq 0$）が一意的に決まる系を力学系といい、

$$d\mathbb{X}/dt = \mathbb{F}(\mathbb{X};\mu) \qquad (\mu はパラメター)$$

ベクトル$\mathbb{X}$の全体を相空間、$\mathbb{F}$を速度ベクトルという。

離散時間の力学系も写像で考える。

$$\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{F}(\mathbb{X}_n;\mu) \qquad (n は自然数)$$

相空間の或る領域m_oを時間発展したものをm_tとし、$m_t = m_o$のときm_oを不変集合という。m_o近傍の軌道が$t\to\infty$で全てm_oに引き込まれる時、m_oをアトラクターといい、m_oから離れてゆくときをリペラという。アトラクターを持つ系を散逸力学系という。アトラクターでもリペラでもない不変集合は、ハミルトン系のエネルギー面のような運動の恒量を決める。その様な系を保存力学系といい、相空間の体積を不変にする系を特に体積保存系という。

力学系には無数の軌道がある。$\mathbb{X}(t)=\mathbb{X}(t+T)$のときを、T周期軌道といい、$\mathbb{X}(t)=\mathbb{X}_1(t)+\mathbb{X}_2(t)$と分解され$\mathbb{X}_i(t+T\ )=\mathbb{X}_i(t)$（$T_1/T_2$

＝無理数 ）のときを、概周期軌道という。この様に周期成分に分解できないときを非周期軌道（カオス）という。再帰性（ ポアンカレーホップの定理 ）の異なる多様な軌道を含む相空間の全体の構造を解明するのが、力学系の研究である。

一つの軌道は不変集合上で一定の分布に従う。その分布を軌道の漸近測度という。個別エルゴード定理は、その様なエルゴード的測度が殆ど常に存在する事を示すものである。力学系には無数の測度がある。しかし、ほとんど全ての軌道が同一の測度に従うならば、その力学系は確率的法則に従うことになる。力学系の測度論的構造を研究するのがエルゴード理論である。

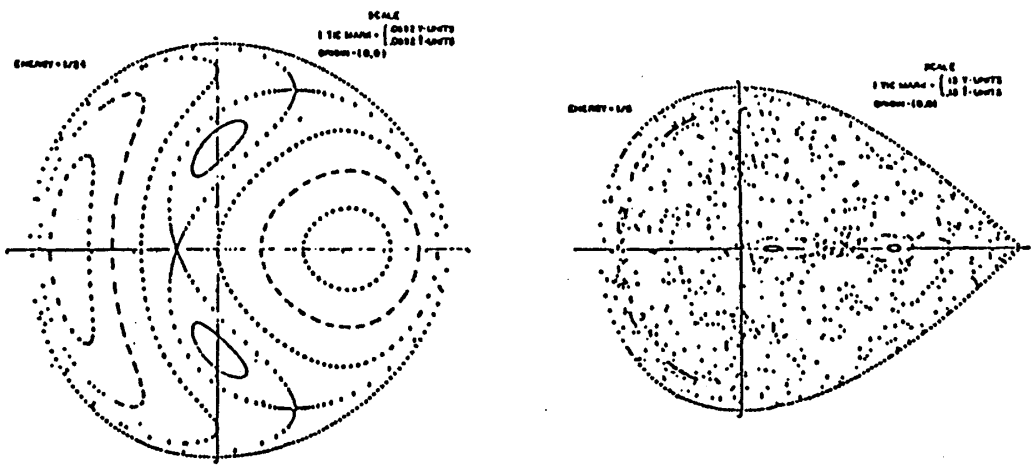


図 1. ヘノンハイレス系の ポアンカレ写像

カオスの発見

力学法則に従いつつも、確率論的に変化する複雑な現象をカオスと呼ぶ。力学法則と確率法則の最初の出会いは統計力学にみられる。エルゴード仮定の検証は、理論の一貫性を求める立場から深く研究されてきた。それらは主に保存系の研究である。一方、流体や化学反応の乱流化のように、エルゴード論的見方を抜きにしては理解できない巨視的なカオス現象も広く観測されてきており、これらは、散逸系のエルゴード問題として、近年急速に進歩している。

１９６０年代初期に、二つの魅力的な研究によってカオスは再発見された。古くポアンカレが予想したカオスの存在が、電子計算機の利用によって多くの研究者の前に提示されたのである。一つは恒星系力学に於けるヘノンーハイレスの仕事、もう一つはベナール対流系に関するローレンツの仕事である。ハミルトニア

ン$H=(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2)/2+q_1^2q_2-q_2^3/3$の自由度２の系を考える。軌道と$q_1=0$面との交点（$q_2$, p_2）の座標を逐次プロット（ポアンカレ写像）したものが図１である。エネルギー以外に第一積分があれば、その点列は一定の曲線に乗る。エネルギーが低いときには、ほとんど全ての初期点に対して積分があるように見える。しかし、エネルギーが大きくなると、多くの初期点に対して解析的積分がなくなっている。これは保存系カオスの最初の観測であった。一方、ローレンツの系は次の微分方程式で与えられる。

$$dX/dt=\sigma(Y-X)$$
$$dY/dt=rX-Y-XZ \qquad (\sigma=10, r=28, b=8/3)$$
$$dZ/dt=-bZ+XY$$

初期値に依らず軌道は一定のアトラクターに引き込まれ、その上を非周期的に経廻る。（図２－ａ）$\dot{Z}=0$となるＺ値を逐次（Z_1, Z_2, …）とするとき、Z_iからZ_{i+1}への写像（ローレンツ・プロット）は、図２－ｂとなる。写像関数の傾きが１より常に大きいことから、軌道が不安定であることが分かる。これは散逸系カオスの最初の観測であった。

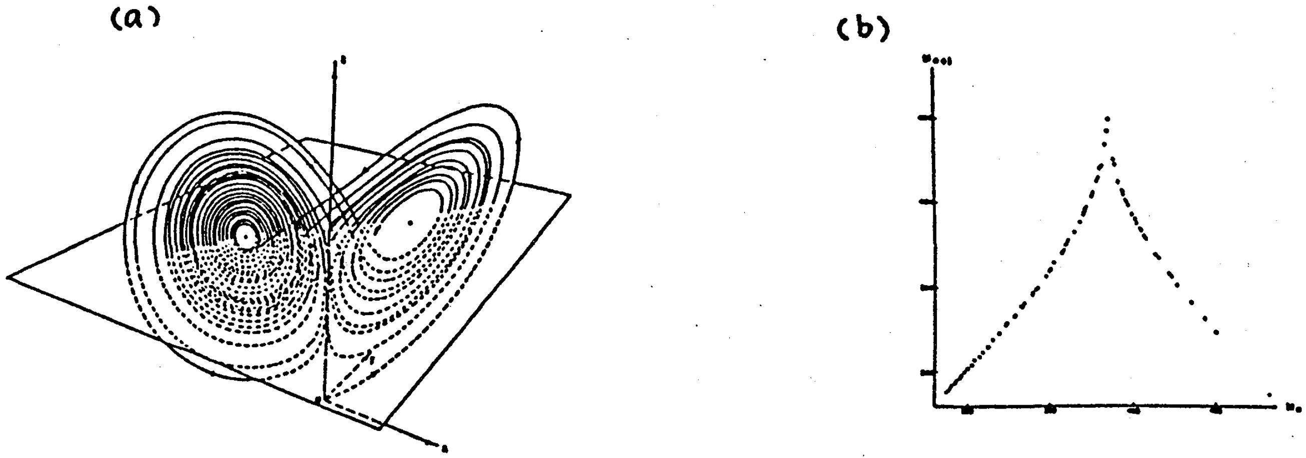


図 2. (a) 熱対流運動を少数自由度で近似して得られる Lorentz 系のアトラクター
(b) (a)の時系列からローレンツプロットして得られる写像

カオスの発生機構

上でみた二つのカオスは、保存系と散逸系の違いはあるが、共通の性質がある。それは、初期条件の僅かな違いが指数関数的に増幅されることである。これをカオスの初期条件敏感性という。カオスを生み出す基本機構はスメールの馬蹄型力学系である。（図３） ＡＢＣＤ領域を一度引き伸ばしてＡ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′のように

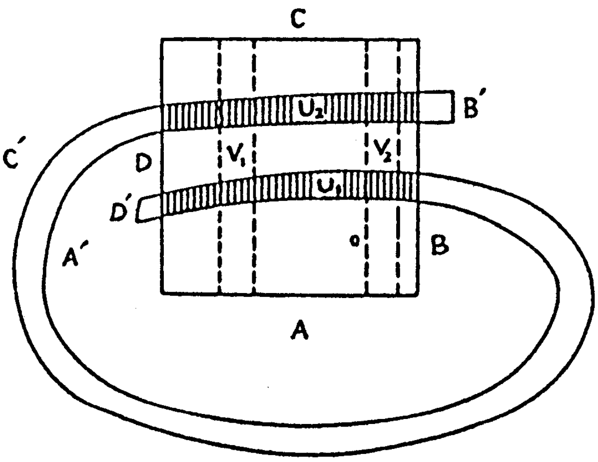


図 3. スメールの馬蹄型

変換する力学系を考える。ほとんどの点は基本領域ＡＢＣＤの外に出てしまうが、いつまでもＡＢＣＤ内に残っている不変集合は二次元のカントール集合となる。領域U_1，U_2の中に入っているときを、それぞれコイン投げの表裏に対応させると、ランダムなコイン投げの系列に対応する軌道が、この不変集合上に常に存在する。しかも、ほとんど全ての軌道はランダム・コイン投げに対応するエルゴード的測度に従っている。力学系毎に多様な表情を見せるカオスも、基本機構はこのように単純なものである。しかし、無数の測度が相空間の中に埋め込まれるとき、カオスの様相は果てしなく複雑になる。

２．エルゴード論的概念

エルゴード仮定

熱平衡状態の存在を主張する経験則は、熱力学第０法則と呼ばれる。ボルツマンは、力学系の長時間的振舞いが初期条件を速やかに忘却し（ 非可逆性 ）、ついには一定の統計法則に従うなら第０法則は成立するものと予想し、その様な性

質を<u>エルゴード性</u>とよんだ。散逸力学系も含めて、カオスの研究は以下に述べるエルゴード論的概念を軸にして進められている。

測度可還性

相空間をM、時間発展をφ_tとかくと、<u>不変測度</u>μについて、$\mu(m)=0$又は1以外の不変集合（$\varphi_t\ m=m,\ m\subset M$）が存在しないとき、その力学系は測度$\mu$について<u>測度可還的</u>（又は、単に<u>エルゴード的</u>）という。トーラス上の運動（<u>ワイルの流れ</u>）は、その簡単な例である。エルゴード的な系では、可積分関数の時間平均は相平均と一致する。（バーコフ・スミスの定理） しかし、初期に近くにいた二つの軌道はいつまでも近くにいることになり、ボルツマンの期待した非可逆性をこの系はもっていない。非可逆性を理解するには、測度可還性より強い次の性質が必要になる。

混合性

部分集合A,B（$\subset M$）について、

$$\mu(\varphi_n A\cap B)=\mu(A)\cdot\mu(B)\qquad(n\to\infty)$$

となる系を、μについて<u>混合的</u>という。 混合的であれば、測度可還的である。<u>パイこね変換</u>はその簡単な例である。Aに入っていた初期点は、長時間後にはM全体に散らばり、初期の記憶を失っていく。これは熱力学第二法則とは異質なものではあるが、熱平衡分布の実現を保証するものである。

混合性と測度可還性の中間に入る<u>弱混合的</u>力学系は、次の性質を満たすものである。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{\mu(\varphi_n A\cap B)-\mu(A)\cdot\mu(B)\right\}=0$$

これは、力学量fの<u>時間相関</u>が$n\to\infty$で消えることを保証する性質であり、ヒンチンはそのようなfをエルゴード的力学量と呼んだ。

力学系のエントロピー

混合的系の軌道は、あたかも水にたらした一滴のインクのように相空間全体に拡散していく。その混合拡散していく速さは力学系の特性量で、<u>エントロピー</u> h と呼ばれる。２本の軌道間の平均距離は、時間nとともに指数関数的（$\propto \exp[h\cdot n]$）にはなれていく。エントロピーは次のように定義される。Mを

覆う可測な部分集合 $\{A_i\}$, ($M=\bigcup A_i$, $\mu(A_i \cap A_{i+1})=0$) をMの分割と呼ぶ。分割 α と β とを重ねた細分割を $\alpha \vee \beta$ とかく。分割 α のエントロピーを、

$$h(\alpha)=-\Sigma_i \ \mu(A_i)\log\mu(A_i)$$

で定義すると、時間発展による細分割のエントロピー増大率は、

$$h(\varphi,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(\varphi_n\cdot\alpha \vee \varphi_{n-1}\cdot\alpha \vee \cdots \vee \alpha)$$

で与えられる。ここで可測な分割 α の中で最大のものを力学系のエントロピーと呼ぶ。

$$h(\varphi)= \sup_{\alpha} h(\varphi,\alpha)$$

K ― 系

エントロピーは、定義から常に非負である。$h(\varphi)>0$ の系は混合的であるが、ワイルの流れのように測度可遷性しかない系は $h(\varphi)=0$ である。相空間Mを一点毎に分ける分割を $\hat{1}$、M自身からなる分割を0とするとき、

$$\bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n\cdot\alpha = 1, \qquad \bigwedge_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n\cdot\alpha = 0$$

を満たす分割 α が存在する系をコルモゴロフ（K）系という。ここで $\alpha \wedge \beta$ は、α, β より粗い（ β を α で粗視可して見たときの ）最小の分割である。K－系は正のエントロピーを持つ。(コルモゴロフ・シナイの定理)

C ― 系

初期条件をわずかに変えたとき、その変位（ 接ベクトル ）$\delta\mathbf{X}$ の時間変化は、軌道の安定性を決める。$\delta\mathbf{X}$ 全体を、$\mathbf{X}$ の接ベクトル空間という。接ベクトル空間が、常に指数関数的に伸びる方向（不安定）と縮む方向（安定）を同時に持っている系を、C－系（ アノソフ系 ）という。写像によるC－系は、先のK－系であり、連続時間のC－系も、運動の恒量が存在しないときはK－系である。(ローリン・シナイの定理) 安定方向と不安定方向が互いに横断的に交差している構造を双曲性という。力学系に微少摂動を加えてもその構造は保たれるので、

C－系は構造安定である。

バイこね変換や負曲率リーマン空間の測地流は、C－系である。しかし、ハミルトン系をはじめ多くの例はC－系ではない。その様な力学系に対しても有効な特性量が、次に述べるリャプノフ数である。

リャプノフ指数

N次元接ベクトル空間でのn次元体積を $v(t)$ とすると、その膨張率

$$K_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{V_n(t)}{V_n(0)} \right|$$

は軌道毎に一定値に収斂する。（オスレディクのエルゴード定理） $K_0 = 0$ とおいて、

$$\lambda_i = K_i - K_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

で与えられる $\{\lambda_i ; \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_N\}$ をリャプノフ（指数）スペクトルという。力学系がエルゴード的であれば、$\{\lambda_i\}$ は軌道に依らない特性量となる。力学系が保存量を持つとき、その拘束条件の数だけ零固有値（$\lambda_i = 0$）をもつ。$\lambda_i \gtrless 0$ がそれぞれ不安定、安定方向を決める。$\lambda_i \gtrless 0$ のスペクトルを同時にもつ系を弱C－系と呼ぶ。C－系のもっていた相空間の各点毎の双曲性を、時間平均での双曲性におきかえたものである。

現在、正のリャプノフ指数をもつ軌道をカオスと定義するのが一応の習慣になっている。その理由は、正のリャプノフ指数の総和が力学系のエントロピー $h(\varphi)$ と等しいことが予想されているからである。（ルエルの予想） この予想が正しいとしても、はたしてカオスの定義として $h(\varphi) > 0$ だけで十分かどうか問題が残る。実際、$f^{-\nu}$ スペクトルを持つカオスには $h(\varphi) = 0$ となるものもある。その場合にはA・エントロピーによって複雑さを計る必要が生じる。さらに、軌道不安定性をもたないカオスでは、軌道の位相的な複雑さ（トポロジカル・エントロピーや軌道の絡み方）で定量化する試みも必要となる。

3.　保存系のカオス

ポアンカレの定理

N自由度のハミルトニアン系（$H(p_1, \cdots, p_N ; q_1, \cdots, q_N)$）に、互

いに可換な第一積分 f_1, f_2, …, f_N が存在し, $\det|\partial f_i/\partial p_j|\neq 0$ を満たすとき、この系はN次元トーラスからなる変数分離系になり、有限回の積分操作で解を求めることができる。(リュービル・アーノルドの定理) その様な系を積分可能系と呼ぶ。

ポアンカレは積分可能系に微少摂動を加えた系、

$$H(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = H_0(\mathbb{P})+\mu H_1(\mathbb{P},\mathbb{Q})+\mu^2 H_2(\mathbb{P},\mathbb{Q})+\cdots$$

が、$\det|\partial^2 H_0/\partial p_i\,\partial p_j|\neq 0$ を満たすときは、ハミルトニアン以外に($\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, μ)について解析的積分は存在しないことを証明した。ここで μ は摂動パラメターである。この定理は、積分可能系の付近には積分不可能系が無数にあることを示す。フェルミはこの定理から、ほとんどの力学系ではボルツマンの仮定が正しいであろうと論じたが、次に述べるように事情はもっと複雑である。

KAMの定理

作用-角(I-θ)変数に依って与えられるハミルトニアン、

$$H(I,\theta)=H_0(I)+\mu H_1(I,\theta)$$

は正準母関数 $\mu S(I^{(1)},\theta)$ によって、ハミルトニアン、

$$H(I^{(1)},\theta^{(1)})=H_0^{(1)}(I^{(1)},\mu)+O(\mu^2)$$

に書き換えることが出来る。このとき母関数Sは、角周波数 $\omega_i=(\partial H_0/\partial I_i)$、整数 k_i を使って

$$S \propto \frac{B_{k_1 k_2\cdots k_N}}{\sum_i k_i\omega_i} \quad \left(=\frac{B_{\vec{k}}}{\vec{k}\cdot\vec{\omega}}\right)$$

と表される。摂動のオーダーを μ から μ^2 へ落とすそのような正準変換を、無限回繰り返すことによって

$$H^{(\infty)}(I^{(\infty)},\theta^{(\infty)}) = H_0^{(\infty)}(I^{(\infty)},\mu)$$

のような可積分系に帰着できる。$\vec{k}\cdot\vec{\omega}$ 0を共鳴条件という。共鳴条件から十分離れていれば、その収斂速度は従来の摂動計算とは比較にならないほど速い。一方、共鳴条件に近い領域では、その繰り込み変換は可積分系に収束しない。相空間におけるこのような領域を、ジーゲルト・ギャップと呼ぶ。

アーノルドは、共鳴条件からのずれが

$$(\vec{k}\cdot\vec{\omega}) \geqq C/|k|^{\alpha} \qquad (\alpha,\ C\text{は正の値})$$

で抑えられる領域では、ハミルトニアンは μ について連続的に $H^{(\infty)}(I^{(\infty)},\mu)$ に収束し、かつそのような領域が相空間中に有限の測度を持つことを証明した。同じ

定理はコルモゴロフとモーザーによっても与えられているので、これをKAMの定理と呼ぶ。摂動に対して安定なトーラス（ $I^{(\infty)}(\mu)=$一定 ）をKAMトーラス（ 又は不変トーラス ）という。

ホモクリニック点の形成とカオス

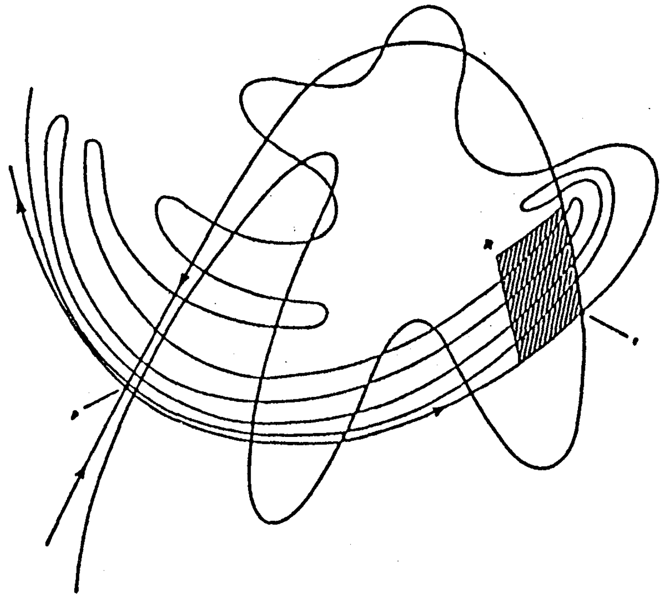
相空間は、ジーゲルト・ギャップとKAMトーラスによって稠密に覆われている。カオス軌道はジーゲルト・ギャップの中に無数に存在する。この事実は、不安定帯の理論（ ポアンカレ、メルニコフ、アーノルド、ゼンダー ）と馬蹄型力学の理論（ スメール ）から理解できる。

不安定周期軌道（ A，B ）同士を漸近的に結ぶ軌道を、セパラトリックスと呼ぶ。周期点から離れてゆくセパラトリックスをAの不安定多様体Γ^{+}、周期点に漸近する方を安定多様体Γ^{-}という。積分可能系ではΓ^{+}とΓ^{-}は一致する。しかし、微少摂動の下ではΓ^{+}とΓ^{-}はともに変形して、適当な条件の下で互いに横断的に交差する。AとBが同一点の場合、その交点をホモクリニック点と呼び、AとBが違う点のときをヘテロクリニック点という。ホモ（ヘテロ）クリニック点が一つ生じれば、無数のホモ（ヘテロ）クリニック点が同時に存在することがわかっている。ホモ（ヘテロ）クリニック点が稠密に存在する相空間の領域を不安定（軌道）帯と呼ぶ。

図４に示すようにホモ（ヘテロ）クリニック構造の中の基本領域Rに注目すれば、これはスメールの馬蹄型を作り出す構造に他ならないことがわかる。

ジーゲルト・ギャップの中には不安定周期軌道が存在する。（ ポアンカレ・バーコフの定理 ） それらの安定・不安定多様体もホモ（ヘテロ）クリニック構造

図４. セパラトリックスと ホモクリニックの様子



を作り、そこでもカオスの存在が証明される。（ゼンダーの定理） 不安定帯ではC－系のような双曲性を持ち、正のリャプノフ指数を持つことは殆ど確かであろうと考えられている。

セパラトリックス付近から不安定帯が形成される様子は、図1にも示されている。楕円的なKAMトーラスの中心付近にも、目には見えない不安定帯が幾層にも存在する。

アーノルド拡散とネコロシェフの定理

自由度2の力学系では、一つのKAMトーラスの内側と外側の不安定帯は分離され、各々不変集合となっている。従ってエルゴード性はない。しかし、自由度n≧3では事情は少し複雑になる。KAMトーラスの次元がエネルギー一定の超曲面の界面を作れない場合（ $2n-1>n+1$ ）、KAMトーラスが存在しても、それは相空間のエルゴード性を否定することにはならない。アーノルドは、一つのKAMトーラスに接するカオス軌道は、μ^{-m}（ mは適当な値、μは摂動パラメーター ）の時間スケールで他のKAMトーラスの近傍を通過することを指摘した。この様なゆっくりした運動をアーノルド拡散という。一般に不変集合近傍で軌道は淀み運動をする。その一つがアーノルド拡散である。ネコロシェフはその淀み時間$T(\mu)$が

$$T(\mu)\propto \exp[\mu^{-a}]/\mu^{b} \qquad (a,b\text{は正})$$

のように長いことを証明した。

自己相似構造と$\omega^{-\nu}$スペクトル

ひとつのKAMトーラスのまわりには、小さなKAMトーラスがまつわりついている。この階層構造は無限小のKAMトーラスまで続いている。図5はある二次元写像の様子である。不安定帯を一辺εのセルで覆うとき、その体積$V(\varepsilon)$は一般に、

$$V(\varepsilon)=V(0)+A\varepsilon^{B} \qquad (A,B\text{は正})$$

と表せる。ファット・フラクタル指数BはKAMトーラスの分布を決定する。相空間の自己相似性を仮定すると、体積vとv＋dvのKAM領域の分布は

$$P(v)dv\propto v^{-(1-D')}dv \qquad (B=2(1-D'))$$

となる。また、適当な力学量の時間列のパワースペクトル$S(\omega)$は、$\omega\ll 1$で

$$S(\omega)\propto \omega^{-(3-1/D')}$$

となる。このようなスペクトルの出現は、先に述べたKAMトーラス付近での淀

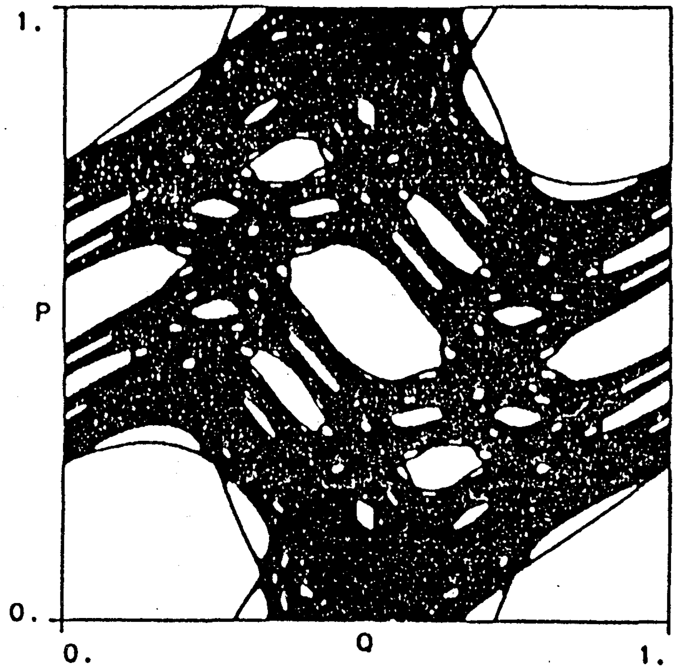


図5. スタンダード写像の例 (B ≒ 0.54)

み運動の直接的反映である。

4. 散逸系のカオス

ストレンジアトラクター

アトラクターX上で接ベクトル空間が双曲性を持ち、かつXの中に周期軌道が稠密に存在するとき、XをＡｘｉｏｍ Ａ－アトラクターと呼ぶ。このとき次のエルゴード定理がなりたつ；連続関数ｆ（ｘ）に対して、

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x(t'))\,dt' = \int f(x)\,\mu(dx)$$

となる測度μが存在する。一般のアトラクターはＡｘｉｏｍ Ａではないが、適当な測度に対してエルゴード的であり正のリャプノフ指数を持つとき、それらをストレンジ・アトラクターといい、その上の非周期軌道を散逸系カオスという。ここでも正のリャプノフ指数の総和がエントロピーに一致することが予想されている。ストレンジ・アトラクターは、スメールの馬蹄型で見たようにカントール集合であるのが普通である。

アトラクターの次元

一辺εのセルでアトラクターを覆うのに必要最小なセルの個数をＭ(ε)とする。

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon^{\alpha}\cdot M(\varepsilon) = \begin{cases} \infty & (\alpha<\alpha_c) \\ 0 & (\alpha>\alpha_c) \end{cases}$$

を満たす$D=\alpha_c$をアトラクターのハウスドルフ次元（$D<N$）という。アトラクター上の一点Pを中心に、半径εの球にはいる点の多さ（適当な測度で測る）が$\varepsilon\to0$で$\varepsilon^{D'}$と変わるとき、D'を点Pでの局所次元という。

アトラクターをε-セルに分け、i番目のセルに入る測度をP_i（$i=1,2,\cdots,M(\varepsilon)$）とする。次の量をレニイ次元(関数)と呼ぶ。

$$D(q)=\frac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\log\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)}P_i^q}{\log\varepsilon} \qquad (-\infty<q<+\infty)$$

$D(0)$はハウスドルフ次元で、$D(1)$，$D(2)$は情報次元、相関次元と呼ばれる。$D(q)$はqの単調減少関数である。

次元のゆらぎ

i番目のセルの局所次元をα_iとする。（$P_i\propto\varepsilon^{\alpha_i}$）　$\{\alpha_i\}$の分布関数は$\varepsilon^{-f(\alpha)}$とスケールされると仮定して、先の$D(q)$の表現に代入すると、$\varepsilon\to0$の最大項近似により、

$$D(q)=\frac{1}{q-1}\{\,q\,\alpha(q)-f(\alpha(q))\}$$

となり、$D(q)$の関数から次元αの分布（ゆらぎ）$f(\alpha)$が決まる。但し、

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}(q-1)D(q)$$

リャプノフ指数のゆらぎ

相空間のε-セルを$i_1,i_2,\cdots,i_n$の順に通る軌道（これを$\{i_j\}$の筒集合という）の確率P（$=P(i_1,i_2,\cdots,i_n)$）は、強いエルゴード系では、

$$P_i\propto\exp[-h\cdot n] \qquad (n\to\infty)$$

を満たす。hは力学系のエントロピーである。（シャノン・マクミラン・ブライマンの定理）　次の量をレニィ・エントロピー（関数）と呼ぶ。

$$H(q)=\frac{-1}{q-1}\lim\frac{\log\sum_i P_i^q}{n} \qquad (-\infty<q<+\infty)$$

i番目の筒集合に含まれる軌道の正のリャプノフ指数の総和をχ_iとし、（P_i

$\propto \exp[-\chi_i \cdot n])$ $\{\chi_i\}$ の分布関数が $\exp\{h(\chi)\cdot n\}$ とスケールされると仮定する。H(q)の表現に代入すると、やはり最大項近似により、

$$H(q)=\frac{1}{q-1}\{q\chi(q)-h(\chi(q))\}$$

となり、H(q)の関数からリャプノフ指数の分布(ゆらぎ)h(χ)が決まる。但し、

$$\chi(q)=\frac{d}{dq}(q-1)H(q)$$

カオスに至る道筋

散逸系でのカオスの存在は、保存系と同様にホモクリニック点の出現によって保証される。しかし、散逸系の安定・不安定多様体は横断的に交差せず、往々にして互いに接することが多い。(接線型ホモクリニック) そのとき多くの安定周期軌道 (ニューハウス・シンク) が作り出され、相空間の構造は複雑になる。

系のパラメーター変化に伴うアトラクターの変化を研究するのが分岐理論である。周波数 ω_1 の周期運動に、$\omega_2, \omega_3, \cdots$ (ω_i, ω_j は互いに素) の周期的モードが逐次生まれてくる分岐をホップ分岐という。散逸系にも ($\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$) で決まるn次元トーラスT のアトラクターが存在する。nが大きくなると複雑な概周期運動となる。流体乱流の発生もその極限として理解しようというのが、ランダウ・ホップの考え方である。一方、ルエル・ターケンス・ニューハウスは T^3 トーラスでも或る種の摂動の下では不安定化し、容易にカオスへ転移することを証明した。この様な道筋で発生する乱流も実験的に見つかっている。

閉軌道の周期が $2, 2^2, 2^3, \cdots$ 倍と逐次倍化してゆく分岐を周期倍分岐という。これは閉軌道の接ベクトルの一つの固有値が−1になるとき生じる。2^∞ 周期のアトラクターはカントール集合であり、その時の臨界パラメーターを越すところには常にカオスが存在する。流体系の実験でも周期倍分岐を経て乱流が発生する場合がある。

相空間中にアトラクターやリペラが共存するとき、多様な道筋が観測される。周期点の安定多様体とカオス領域が交差するとカオスは突然消滅する。(カタストロフィー) また、周期点の不安定多様体とカオスが突然衝突するとカオスの性質が著しく変化する。(クライシス) 更に、観測不可能なカオス (ストレンジ・リペラ) が、その外にある周期解の不安定化によって観測可能なカオスに変化することもある。(間欠性カオスの一種) これらの突然の変化も、相空間の構造から予測できる事柄である。

5． カオスの普遍則

ファイゲンバウム定数

周期倍分岐が無限回生じる系では、次の一次元写像系

$$X_{n+1} = a\,(1 - X_n)\,X_n$$

と本質的に同じ普遍則がある。aの値を変えて、有限領域で安定な不変集合を書いたものが図6である。a_c ≒3．56以下で、周期倍分岐が生じている。X＝1／2を通る2^n周期軌道を持つパラメターをa_nとし、X＝1／2から一番近い軌道上の点までの距離をd_nとすると、次の比は、

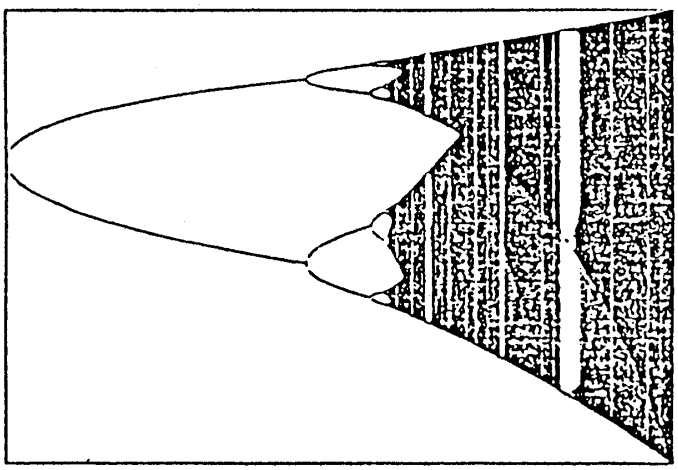


図6．一次元写像の分岐図

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \quad (\fallingdotseq -2.503)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \delta \quad (\fallingdotseq 4.669)$$

に収斂する。これは力学系によらず、普遍（ファイゲンバウム）定数である。直感的には、図に示される熊手状の周期倍分岐が、（ α， δ ）倍すると相似性をもつことを意味する。$a = a_c$ で2^∞周期軌道となり、そのアトラクターはハウスドルフ次元D＝$-\log 2 / \log(1/2\alpha + 1/2\alpha^2)$ ≒0．537のカントール集合である。

窓構造

a_cを越してaを増加すると、バンド状のカオスが生じる。ここにも普遍則がある。さらにaを増加すると、突然奇数周期アトラクター（ 例えば3周期 ）が

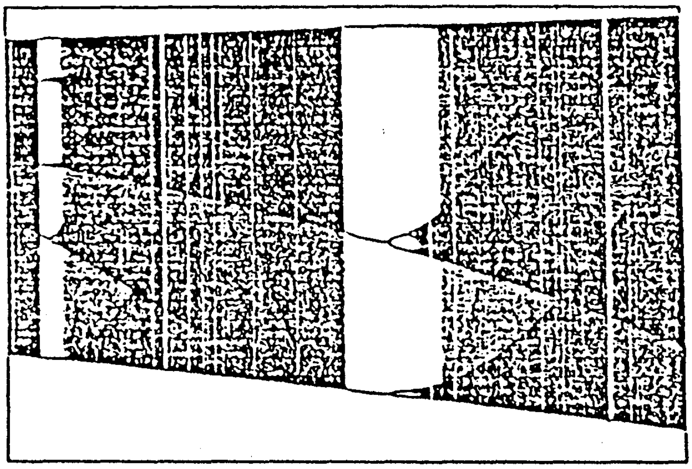


図7. 窓構造
（図6の拡大）

出現する。（図７）これは先に述べた間欠性カオスの消滅に対応するもので３周期の安定化によって観測可能なカオスが観測不可能なカオスに変化した結果である。この３周期解も3×2、3×2^2、・・・と周期倍分岐をしてバンドカオスに移行する。a≒３．８６でそのカオスが突然変化するのはクライシスによっている。このような奇数$\times 2^n$周期解の窓の出現はシャルコフスキーの定理に従っている。奇数周期解が出現する直前のカオスは、一般に間欠性カオスと呼ばれ、パワースペクトルは$\omega^{-\nu}$則（νは適当な値）に従うことも知られている。

トーラスの周期倍分岐

保存系にも周期倍分岐がある。ポアンカレ写像でみると、楕円型周期点が不安定化し、２周期の楕円型周期点が生じる。一般に新しい楕円型不動点は対称軸上に生じるものと、それと垂直方向に生じるものがペアになっている。2^n周期点が不安定化するパラメーター値をa_nとして、それらの対称軸上での距離をX_n、他方の対称軸からの最短距離をY_nとすると、次の比は、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \delta \quad (\fallingdotseq 8.721)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{X_{n+1}} = -\alpha \quad (\fallingdotseq -4.018)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Y_n}{Y_{n+1}} = \beta \quad (\fallingdotseq 16.363)$$

に収斂する。これらも普遍定数である。

トーラスの崩壊と軌道の拡散

摂動パラメターを変えると、KAMトーラスは共鳴条件を満たすものから順次崩壊してゆく。２自由度系ポアンカレ写像上の回転数ωを連分数で表すと、

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

但しp_n ／q_n は連分数をｎ次で打ち切った有理数

或るｋ以上で$a_K = 1$となるトーラスのωは、有理数から離れているため最後まで安定に残る。ω＝（－１＋$\sqrt{5}$）／２（黄金比）の<u>最後のトーラス</u>が崩壊するときは、そのまわりのトーラスも全て崩壊しており、軌道はトーラス内から外に拡散する。臨界パラメターを$a = a_c$ とし、$\omega = p_n / q_n$ のトーラスから拡散する軌道の割合（ルベーグ測度で測る）$R(a_c - a, q_n)$を評価すると、

$$R(a_c - a, q_n) \propto q_n^{-d_0} \exp[-\gamma q_n (a_c - a)^{\nu}] \quad (a < a_c)$$

となる。d_0 ≒３．０２６，ν≒０．９８７やＲの関数形は、力学系によらぬ普遍的なものと考えられている。

一つのトーラス上には無数の測度が共存している。そして、トーラスが崩壊した直後でも特殊なカントール的測度が元のトーラスの近傍に残ることが確かめられており、それを<u>カントーラス</u>という。散逸系のω＝黄金比のトーラスでは、先に述べた次元の分布関数ｆ（α）が普遍関数であることが確認されている。（図８）これに対応して保存系のトーラス崩壊がどの様な測度論的な普遍則を持つのか興味が持たれている。

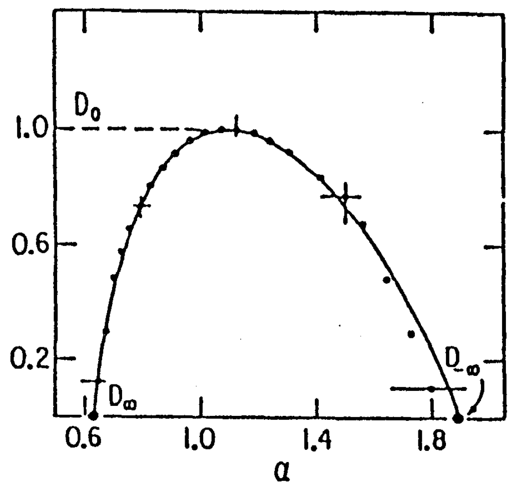


図８．トーラスのｆ(α)曲線（理論と実験）