

Title	The Magnetic Properties of Superconducting Alloys III : Abrikosov Structure (2)
Author(s)	真木, 和美
Citation	物性研究 (1964), 2(3): 111-118
Issue Date	1964-06-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/85597">http://hdl.handle.net/2433/85597</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

The Magnetic Properties of Superconducting Alloys III.  
Abrikosov Structure (2)

真木和美(京大数理研)

(4月21日受理)

1° ここでは  $H_{c1}$  での相転移の様子やこの点の近くでの Abrikosov structure をしらべてみることにする。一般の議論は非常に困難なので  $\kappa \gg 1$  の場合にのみ話を限ることにする。以下の議論は  $T=0^\circ\text{K}$  について行なわれるが一般の温度の様子にそれから容易に推測できる。 $\kappa \gg 1$  の極限でかつ  $H_{c1}$  の近傍だけに話を限るとするならば以下に見られるように、Tewordt や Tsuzuki によつて導かれた一般化された Ginzburg-Landau 方程式を用いて取り扱うことができるのであるけれども、我々は電子の平均自由行路の短い場合(合金の場合)に興味をもっているので平均自由行路の効果をはじめからとり入れた式から出発しなければならない。このような時

( $1/\epsilon_0 \ll 1$ )には電磁場の効果は  $q \rightarrow q \pm 2eA$  の置きかえによつて完全に理論の中にとり入れることができるので我々は最初  $A=0$  の場合の式をみちびくことにしよう。我々は 1)  $A$  の場所による変化はゆるやかであること 2)  $A = A_0 + A_1$  のように分解したとき  $A_1$  のみが場所によるとすれば  $A_1$  を摂動と考えることができる、の二つの仮定をおく。1)は  $\kappa \gg 1$  のときに一般に成立すると考えられるし、2)は  $H_{c1}$  の近くに話を限れば十分に満足されると考えられる。このときには Collective mode への平均自由行路の影響を論じたとき<sup>1)</sup>と同様な考察によつて  $A$  について

$$\left\{ \ell^n \frac{A}{A_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left( \frac{4n}{T} \right) + 2\pi T \sum \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + A^2}} - \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + A^2 + a}} \right) \right\} A = 0 \quad (1)$$

$$\text{ここに } a = \frac{\tau_{rr}}{\sigma} v^2 (i\vec{\nabla} + 2eA)^2$$

の式を得る。電流については Abrikosov et Gor'kov<sup>2)</sup>の結果を用いて

真木和美

$$j = \frac{\tau_{rr} e^2 N}{m} \pi A \tanh\left(\frac{A}{2T}\right) \vec{A} \quad (2)$$

がえられる。仮定1) を用いると(1)式はさらに

$$\left\{ \ln A/A_{00} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0\left(\frac{An}{T}\right) + \frac{\pi}{2A} \tanh\left(\frac{A}{2T}\right) a \right\} A(r) = 0 \quad (3)$$

のようになる。

2°  $\kappa \gg 1$  のときには完全反磁性をもつた状態から混合状態への転移の次数は一般に温度によらず二次になることが期待される。以下、話を簡単にするため  $T = 0^\circ K$  に限ることとする。

Abrikosov に従つてまず bulk の中に単位磁束をもつた渦糸をつくるのに必要なエネルギーを計算してみよう。  $A = A_{00} e^{i\varphi} f$  とし、また  $A = \nabla\phi/2e$  の絶対値に等しい scalar 量  $Q$  を導入すると(3), (2)式は

$$(1-f) f + \frac{\pi \tau_{rr} v^2}{12 A_{00}} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + 4e^2 Q^2 f^2 \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rQ) \right) = \frac{4\pi^2 \tau_{rr} e^2}{m} N A_{00} f Q, \quad (5)$$

また磁場  $H$  は  $Q$  を用いて

$$H = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rQ), \quad (6)$$

から求められる。渦糸の中心の極く近くを除いては  $f$  は殆んど1になるので(5)式はとけて

$$Q = \frac{a}{2e} K_1(\alpha r), \quad (7)$$

$$\alpha = \left( \frac{4\pi^2 \tau_{rr} e^2}{m} N A_{00} \right)^{1/2},$$

また(6)式から

$$H = \frac{a^2}{2e} K_0(a r) \quad , \quad (8)$$

がえられる。\$K\_1\$ 及び \$K\_0\$ は第二種の変形ベッセル函数で、\$a r \ll 1\$ のときの漸近型を用いると(4)式は

$$(1-f) f + \frac{\pi \tau_{\Gamma} v^2}{12 A_{00}} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} f \right) = 0 \quad , \quad (9)$$

あるいは

$$f = 1 - \frac{\pi}{12} \frac{\tau_{\Gamma} v^2}{A_{00}} \frac{1}{r^2} \quad , \quad (10)$$

がえられる。\$\kappa \gg 1\$ のときには(10)式を用いると1本の渦糸のエネルギーを計算することができる。すなわち

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{m p_0}{2 \pi^2} A_{00}^2 \left\{ 2 \pi \int_0^{\infty} \frac{1-f^2}{2} r dr \right\} \\ &= \frac{m p_0}{2 \pi^2} A_{00}^2 \left\{ \frac{\pi^2 \tau_{\Gamma} v^2}{6 A_{00}} \ell n \frac{\left( \frac{4 \pi^2 e^2 N}{m} \tau_{\Gamma} A_{00} \right)^{-1/2}}{\left( \frac{\pi \tau_{\Gamma} v^2}{12 A_{00}} \right)^{1/2}} \right\} \quad , \\ &= \frac{m p_0}{12} A_{00} \tau_{\Gamma} v^2 \ell n \left( \frac{1}{\pi e \tau_{\Gamma} v} \left( \frac{12 m}{4 \pi N} \right)^{1/2} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

上の計算で積分の下限は \$r = \left( \frac{\pi}{12} \frac{\tau\_{\Gamma} v^2}{A\_{00}} \right)^{1/2}\$ にとつた。こうした渦糸を作ることがエネルギー的に可能であるためには外場の強さを \$H\_0\$ としたとき \$F\_1 - \frac{1}{4\pi} H\_0 B\$ が負でなければならない。ここで \$F\_1\$ は渦糸の単位面積あたりの数を \$n\$ としたとき

$$F_1 = n \epsilon \quad , \quad \text{で与えられまた } B \text{ は}$$

$$B = \overline{H} = n \int H ds = n \phi A d \ell \quad \text{になるが、(8)式を用いると}$$

$$B = \frac{2\pi}{2e} n = \frac{\pi n}{e} \quad , \quad (12)$$

になる。これから \$H\_{c1}\$ は

真木和美

$$H_{cl} = 4e\epsilon = \frac{emp_0}{3} d_{00} r_{rr} \left( \pi \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \kappa \right) , \quad (13)$$

あるいは

$$H_{cl} / \sqrt{2} H_C = \frac{1}{2\kappa_3} \ell^n \kappa_3 , \quad (14)$$

$$\text{で } \kappa_3 = \pi \left( \frac{2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} \kappa = 1.53 \kappa , \quad (15)$$

のようにかける。

3° 上の議論では  $H_{cl}$  は  $n$  によらずにきまつたが相転移が二次のときには常にこのような事情になつている。実際には渦糸の間に反撥力が働らくので  $n$  は  $H_0$  の函数としてきめることができる。以下の計算は Abrikosov によつてすでに行なわれているので詳しくはやらないけれど Magnetization  $B$  について次のような結果がえられる。

$$\kappa_3 (H_0 - H_{cl}) = H_C \sum_{l,m} \left[ 2\kappa_0(x_{l,m}) + x_{l,m} \kappa_1(x_{l,m}) \right] \quad (16)$$

で三角形の格子に対しては

$$x_{l,m} = a \sqrt{\frac{2\pi(l^2 + m^2 + lm)}{\sqrt{3}eB}} , \quad (17)$$

正方形の格子に対しては

$$x_{l,m} = a \sqrt{\frac{\pi(l^2 + m^2)}{eB}} , \quad (18)$$

の式がえられる。上の式から  $H_{cl}$  の近くでの Abrikosov の構造は一つのパラメーター  $\kappa_3$  を用いて完全に記述されることがわかる。したがつて  $\kappa_3$  の温度依存性を求めれば  $H_{cl}$  の近くでの混合状態は温度によらずその  $\kappa_3$  を用いることによつて、もとの Abrikosov の理論でもつて議論できることが期待される。任意の温度での  $\kappa_3$  は3式から

$$\kappa_3 = 2\pi(7\zeta(3))^{-1/2} \kappa \frac{\left\{ \int_0^A A^2 dh \right\}^{1/2}}{A \tanh\left(\frac{A}{2T}\right)}, \quad (19)$$

$$\text{で } h = \ell^n A / d_{00} + 2\Sigma(-1)^{n+1} \kappa_0 \left(\frac{An}{T}\right), \quad (20)$$

から与えられる。漸近的には

$$\kappa_3(T) = \kappa_3(0) \left\{ 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{T}{A}\right)^2 \right\}^{1/2}, \quad T \ll T_c \quad (21)$$

$$= \kappa \left( 1 + 0.32 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \right), \quad |T - T_c| \ll T_c \quad (22)$$

のようになる。この  $\kappa_3(T)$  を用いると

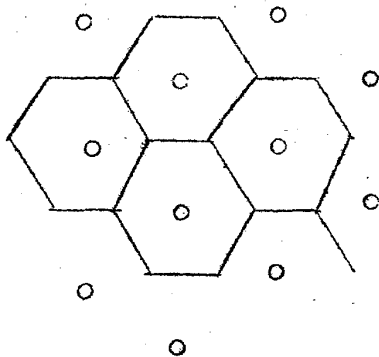
$$H_{c1}(T) / \sqrt{2} H_c(T) = \frac{1}{2\kappa_3(T)} \ell^n \kappa_3(T), \quad (21)$$

が成立する。また  $H_{c1}$  の近くでの Abrikosov の構造は  $\kappa_3$  だけで記述できることが示される。(21)式及び(19)式から  $\kappa$  の大きなときには

$$H_{c1}(T) = \frac{\text{emp}_0}{3} \tau_{\text{r}} v^2 \ell^n \kappa \left( A \tanh \frac{A}{2T} \right) \quad (22)$$

のようにかけることがわかる。

4°  $\kappa \gg 1$  のときには中間領域を次のようにしてとりあつかうことができる。 $H_0 > H_{c1}$  になると独立した渦糸の集まりと考えることはもはやできないが、渦糸間の距離が  $\left(\frac{\pi}{12} \frac{\tau_{\text{r}} v^2}{d_{00}}\right)^{1/2}$  にくらべてずっと大きい時には、1つの渦糸を考えるとき他の渦糸の影響は近似的に渦糸の点での磁場でおきかえることができる。この時具体的に解くには下図のような bulk を同等な



一つの渦糸を含むような cell に分けて、一つの cell について考察すれば十分である。(こゝでは三角格子のときのみ考える。)

渦糸の中心部を除いては  $A$  の変化はごく小さいと考えられるので、これらの磁場の存在は

真木和美

$\Delta$  を小さくすること、それからこうした問題に常に起こる励起スペクトラムのずれとして理論の中にとり入れることができる。 $T = 0^\circ K$  のときには  $\Delta$  及び  $j$  についての式は、

$$\left\{ \ln \Delta / \Delta_{00} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{\Delta} (a + b(q + 2ieA)^2) \right\} \Delta' = 0, \quad (23)$$

$$j = \frac{e^2 N \tau}{m} \left( \pi \Delta - \frac{4}{3\pi} a \right) A, \quad (24)$$

になり

$$a = \frac{\tau_{\tau} v^2}{3} (4e^2 Q^2) = \frac{\tau_{\tau} v^2}{3} a^2 \left[ \sum_{m \neq 0} \kappa_1 (\alpha |r - r_m|) \right]^2, \\ b = \frac{\tau_{\tau} v^2}{3} \quad (25)$$

であらわされる。このとき平均操作は一つの cell についてとるものとする。 $a$  はパラメーターと考え後で self consistent に後できめるものとする。

(24) 式と Maxwell の式から、

$$H = \frac{a^2}{2e} \sum_m \kappa_0 (\alpha |r - r_m|), \quad (26)$$

$$\text{で } a = \left( \frac{4\pi^2 e^2 N}{m} \tau_{\tau} \left( \Delta_0 - \frac{4}{3\pi} a \right) \right)^{1/2}, \quad (27)$$

また (23) 式から

$$f = 1 - \frac{\pi b}{4 \left( \Delta_0 - \frac{\pi}{4} a \right)} \frac{1}{r^2}, \quad (28)$$

これを用いて 1 本の渦糸のエネルギー  $\epsilon'$  は

$$\epsilon' = \frac{\Delta_0}{\Delta_{00}} \epsilon, \quad (29)$$

のようになる。 $\Delta_0$  は

$$\ln \Delta_0 / \Delta_{00} = - \frac{\pi}{4\Delta_0} a \quad (30)$$

から求められる。

a の Explicit な形は、I)  $a |r_m| \gg 1$  のときには非常に簡単で、

$$\kappa_1(a |r-r_m|) = \exp\{-i a \arcsin(\frac{|r| \sin \varphi}{|r-r_m|})\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \kappa_{1+v} (a |r_m|) J_r(a |r|) e^{i v \varphi}$$

,  $|r_m| > |r|$

の展開を用いると

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\tau_{TF} v^2}{3} a^2 (\sum_m \kappa_0(a |r_m|))^2 \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r dr (J_1(a |r|))^2 \\ &= \frac{\tau_{TF} v^2}{3} a^2 (\sum_m \kappa_0(a |r_m|))^2 [(J_1(a |r_0|))^2 - J_0(a |r_0|) J_2(a |r_0|)] \\ &\cong \frac{\tau_{TF} v^2}{3} a^2 \left\{ 6 \sqrt{\frac{\pi}{2a\sqrt{3}eB}} \exp\left\{-\frac{a\sqrt{\frac{\pi}{3eB}}}{\sqrt{3}eB}\right\} \right\}^2 \left(\frac{2}{\frac{\pi a}{2\sqrt{3}eB}}\right) \\ &\cong \frac{\tau_{TF} v^2}{3} \cdot 72 \left(\frac{\sqrt{3}eB}{\pi}\right) \exp\left\{-\frac{2a\sqrt{\frac{\pi}{3eB}}}{\sqrt{3}eB}\right\} \end{aligned} \quad (31)$$

一方渦糸がかなりつまつてきて  $a\sqrt{\frac{\pi}{3eB}} < 1$  のときには (もちろんまだ渦糸の構造が見えないくらいにはなれているとする。) II の議論から

$$a = \frac{\tau_{TF} v^2}{3} eB \quad (32)$$

になることが期待される。これらの表式を用いる中間領域についてもかなり立ち入った議論が期待されるが、ここでは最も重要だと思われる励起スペクトラムの gap のふるまいを考えよう。一般に電子自由行路が短い場合、時間反転に対しての不変性をやぶるような相互作用があるときには、励起スペクトラムの gap は  $\Delta$  でなく、(ここでの notation を用いれば)

$\omega_0 = \{ \Delta^{2/3} - a^{2/3} \}^{3/2}$  でかけることがわかっている<sup>3)</sup>。もつとも今考えている系では渦糸の中心は正常状態であるのでこゝでは  $\Delta = 0$  になるが、これらは比熱その他に殆んど寄与を与えないので (極く低温を除いては)、指数項は  $e^{-\frac{\omega_0}{T}}$  のようになることが期待される。すなわち

$$\left( s = \frac{m p_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} T^{-1/2} \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} \Delta^{-1/3} \omega_0^{11/6} e^{-\omega_0/T} \right), \quad (33)$$



真木和美

で与えられる。注意すべきことは、 $H_{c2}$  の近くで  $|A|^2$  が finite でも空間的に一様に励起スペクトラムの gap が消えた状態 (gapless superconductivity) があらわれることである。この磁場  $H'$  はほぼ

$$\Delta H = H_{c2} - H' \simeq \frac{2\kappa^2 - 1}{96\pi\kappa^2} H_{c2}$$

で与えられる。したがってこのような状態では混合状態にあるにもかかわらず比熱は温度に線型にふるまう。(実際にはもつと低い磁場のもつとで線型の項があらわれることが期待される。

文 献

- 1) K. Maki and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 163
- 2) A.A. Abrikosov and L.P. Gor'kov, JETP 35 (1958), 1558
- 3) K. Maki, to be published in Prog. Theor. Phys.

又は物性研究 1, (1963) 1を見よ。