数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 132-136

微小低次項を持つ代数方程式の根の大きさについて

筑波大学数学系　佐々木　建昭(Tateaki SASAKI) *
筑波大学数学系　照井　　　章(Akira TERUI) †

概　要

1 変数多項式を $P(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$ とする。ただし、微小正数 ε に対して $|c_{m-i}| \leq \varepsilon^{i/m}, 0 < m < n,$ のように低次項の係数が小さい場合を考える。($x \to 1/x$ と変換することにより、高次項の係数が小さい多項式も扱える)。このような多項式は特異点の近傍などで現れる。$P(x)$ の根は、絶対値の小さな根とそうでない根に分けられるが、小さな根の上界とそうでない根の下界を ε の関数として与える美しい公式を導いたので報告する。

0　研究の動機

筆者らは 10 年ほど前から、**近似代数** (Approximate Algebra) なる概念を提唱し、種々の近似代数的算法を開発してきた。近似代数では、厳密に成立する代数的関係式に微小な摂動項が加わったものを扱う。例として 1 変数多項式の根を考えよう。1 変数多項式 $\tilde{P}(x)$ が m 重根を持つとき、$\tilde{P}(x)$ の係数に微小な摂動を加えた多項式 $P(x)$ を考える。m 重根を原点に選ぶならば、$P(x)$ と $\tilde{P}(x)$ は次式となる。

$$\left\{\begin{array}{l} P(x) = c_n x^n + \cdots + c_{m+1}x^{m+1} + x^m + \varepsilon_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \varepsilon_0, \\ \qquad\qquad |\varepsilon_i| \ll 1 \ \ (i = m-1, \ldots, 0), \\ \tilde{P}(x) = \tilde{c}_n x^n + \cdots + \tilde{c}_{m+1}x^{m+1} + x^m, \\ \qquad\qquad |c_i| \approx |\tilde{c}_i| \ \ (i = n, \ldots, m+1). \end{array}\right. \tag{1}$$

$P(x)$ の根のうち m 個は原点付近にあり、その大きさもオーダー的にはすぐに分かるが、では具体的に $\varepsilon_{m-1}, \ldots, \varepsilon_0$ がどの程度ならば、これら m 個の微小根は他の $n-m$ 個の根から区別できるのか? 文献には根の絶対値の上界あるいは下界を与える公式は多く記載されているが、微小根の絶対値の上界とそうでない根の絶対値の下界（あるいは巨大根の下界とそうでない根の上界）を与える公式は見当たらない。そのような公式は近似代数の種々の局面で必要となる。実際、$P(x)$ に対する Sturm 列を計算して実根数を確定する際に

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp
†terui@math.tsukuba.ac.jp

そのような公式が必要になる。そこで、そのような公式を作ることにした。なお、本稿は論文 [TS00] の Appendix を抜き出したものである。

1 問題設定と主定理

ε を正の微小数とし、(1) における $P(x)$ の係数は次の条件を満たすとする。

$$\begin{cases} \max\{|c_n|,\cdots,|c_{m+1}|\}=1, \quad c_n \neq 0, \\ \sqrt[m]{\varepsilon}=\max\{\sqrt[1]{|\varepsilon_{m-1}|}, \sqrt[2]{|\varepsilon_{m-2}|},\cdots, \sqrt[m]{|\varepsilon_0|}\}. \end{cases} \tag{2}$$

(2) の第二の条件より、微小項の係数は次の不等式を満たす。

$$|\varepsilon_{m-i}| \leq (\sqrt[m]{\varepsilon})^i \quad (i=1,\ldots,m). \tag{3}$$

簡単のため $e=\sqrt[m]{\varepsilon}$ とおき、本論では下記の定理を証明する。

定理 1 (主定理) $P(x)$ の n 根を $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ とし、次のように順序づける。

$$|\zeta_1| \leq \cdots \leq |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}| \leq \cdots \leq |\zeta_n|. \tag{4}$$

ε が不等式 $\sqrt[m]{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} e \leq 1/9$ を満たすならば、$|\zeta_m|$ と $|\zeta_{m+1}|$ は次式で押えられる。

$$|\zeta_m| < \frac{1+3e}{4}\left[1-\sqrt{1-\frac{16e}{(1+3e)^2}}\right], \qquad |\zeta_{m+1}| > \frac{1+3e}{4}\left[1+\sqrt{1-\frac{16e}{(1+3e)^2}}\right]. \tag{5}$$

上記の上界と下界は次式のように有理式で表すこともできる。

$$|\zeta_m| < 2e\cdot\left[\frac{1}{1+3e}+\frac{16e}{(1+3e)^3}\right], \qquad |\zeta_{m+1}| > \frac{1}{2}\left[1-\frac{e(1-9e)}{1+3e}-\frac{64e^2}{(1+3e)^3}\right]. \tag{6}$$

2 証明の準備

本稿では次のよく知られた定理を基礎とする（証明は例えば Mignotte [Mig91] を参照されたい)。

定理 2 $A(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ は $a_na_0\neq 0$ なる複素係数多項式とし、その根を $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ とする。このとき根に対して次の不等式が成立する。

$$\begin{cases} \max\{|\zeta_1|,\cdots,|\zeta_n|\} \leq \dfrac{|a_n|+\max\{|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}}{|a_n|}, \\ \min\{|\zeta_1|,\cdots,|\zeta_n|\} \geq \dfrac{|a_0|}{|a_0|+\max\{|a_1|,\cdots,|a_n|\}}. \end{cases} \tag{7}$$

定理 2 を用いて $P(x)$ の根を大雑把に調べておく。$P'(x)$ と $P''(x)$ を次なる多項式とする。

$$\begin{aligned} P'(x) &= x^m + \varepsilon_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \varepsilon_0, \\ P''(x) &= c_n x^{n-m} + \cdots + c_{m+1}x + 1. \end{aligned} \tag{8}$$

$P(x) \approx P''(x)P'(x)$ であるから、$P'(x)$ と $P''(x)$ の根全体は $P(x)$ の根全体を近似するといえる。上記の定理 2 を $\varepsilon^{-1}P'(\sqrt[m]{\varepsilon}x)$ と $P''(x)$ に適用すれば、次の系 3 と系 4 が直ちに得られる。

系 3 $P'(x)$ の根を $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_m$ とすれば、$\max\{|\zeta'_1|, \cdots, |\zeta'_m|\} \le 2\sqrt[m]{\varepsilon}$ が成立する。

系 4 $P''(x)$ の根を $\zeta''_{m+1}, \ldots, \zeta''_n$ とすれば、$\min\{|\zeta''_{m+1}|, \cdots, |\zeta''_n|\} \ge 1/2$ が成立する。

以上より、$P(x)$ は大きさ $\lesssim 2\sqrt[m]{\varepsilon}$ の m 個の根と大きさ $\gtrsim 1/2$ の $n-m$ 個の根を持つことが解る。

3 主定理の証明

まず、$P(x)$ の根のうち $|\zeta| \lesssim 2\sqrt[m]{\varepsilon}$ なるものを考える。$\zeta = e\bar{\zeta}$ $(= \sqrt[m]{\varepsilon}\bar{\zeta})$ なる変換で $|\zeta| \lesssim 2\sqrt[m]{\varepsilon} \Rightarrow |\bar{\zeta}| \lesssim 2$ となり、$P(\zeta) = 0$ は次式となる。

$$c_n e^{n-m}\bar{\zeta}^n + \cdots + c_{m+1}e\bar{\zeta}^{m+1} + \bar{\zeta}^m + (\varepsilon_{m-1}/e)\bar{\zeta}^{m-1} + \cdots + (\varepsilon_0/e^m)\bar{\zeta}^0 = 0. \tag{9}$$

$e \ll 1$ ゆえ、上式の $|\bar{\zeta}| \lesssim 2$ なる根に対しては先頭の $n-m$ 項、すなわち $c_{m+j}e^j\bar{\zeta}^{m+j}$ $(j = 1, \ldots, n-m)$ は微小補正項とみなせて、$|\bar{\zeta}| \lesssim 2$ なる根は次数 $\le m$ の項からほぼ定まる。そこで上式を

$$(c_n e^{n-m}\bar{\zeta}^{n-m} + \cdots + c_{m+1}e\bar{\zeta} + 1)\bar{\zeta}^m + (\varepsilon_{m-1}/e)\bar{\zeta}^{m-1} + \cdots + (\varepsilon_0/e^m)\bar{\zeta}^0 = 0 \tag{10}$$

と書き換え、この式を主係数が $(c_n e^{n-m}\bar{\zeta}^{n-m} + \cdots + c_{m+1}e\bar{\zeta} + 1)$ で次数が m の方程式と解釈する。(このことは次の説明で納得できるだろう。$\bar{\zeta}_{\max}$ を $|\zeta_m/e|$ の上界とし、次の方程式を考える。

$$\begin{cases} a_m z^m + (\varepsilon_{m-1}/e)z^{m-1} + \cdots + (\varepsilon_0/e^m)z^0 = 0, \\ a_m \in \{1 + c_{m+1}e\bar{z} + \cdots + c_n e^{n-m}\bar{z}^{n-m} \mid |\bar{z}| \le \bar{\zeta}_{\max}\}. \end{cases} \tag{11}$$

a_m が無限有界集合の要素であるから、上記二つの式全体として、主係数がその有界集合の要素で次数が m の無限個の方程式集合を表すことになる。明らかに $\bar{\zeta} = \zeta_m/e$ はこれら無限個の中の一つの方程式の根であるから、これら方程式集合全体に成立する根の上界を

求めれば、それは (9) 式の $|\bar{\zeta}|$ に対する上界になる)。上記の解釈の下で、定理 2 を (10) に適用すると次のように $|\bar{\zeta}|$ の上界が計算できる。

$$\begin{aligned} |\bar{\zeta}| &\le 1+\max\{|\varepsilon_{m-1}/e|,\cdots,|\varepsilon_0/e^m|\}/|a_m| \\ &\le 1+\frac{1}{1-|e\bar{\zeta}|-\cdots-|e\bar{\zeta}|^{n-m}} \\ &< 1+\frac{1}{1-|e\bar{\zeta}|/(1-|e\bar{\zeta}|)} = \frac{2-3|e\bar{\zeta}|}{1-2|e\bar{\zeta}|}. \end{aligned}$$

$\bar{\zeta}$ から ζ に戻すと、上式から次の不等式を得る。

$$|\zeta| < \frac{2e-3e|\zeta|}{1-2|\zeta|} \Longrightarrow 2|\zeta|^2-(1+3e)|\zeta|+2e>0. \tag{12}$$

2 次方程式 $2z^2-(1+3e)z+2e=0$ は $e\le 1/9$ のときに限り 2 実根をもつ。その 2 実根を z_-, z_+ とし、$z_-\le z_+$ とする。$e\ll 1$ のとき $z_-\simeq 2e, z_+\simeq (1-e)/2$ ゆえ、$e\le 1/9$ のとき $|\zeta|<z_-$、すなわち次なる上界が得られた。

$$|\zeta| < \frac{(1+3e)}{4}\left[1-\sqrt{1-\frac{16e}{(1+3e)^2}}\right] \quad \text{for } e\le 1/9. \tag{13}$$

上記平方根関数を有理式で近似する。$e\le 1/9$ のとき $16e/(1+3e)^2\le 1$ となるから、$0\le x\le 1$ で成立する不等式 $\sqrt{1-x}\ge 1-x/2-x^2/2$ を用いると、次の上界が得られる。

$$|\zeta| < \frac{1+3e}{4}\left[1-1+\frac{8e}{(1+3e)^2}+\frac{128e^2}{(1+3e)^4}\right] = 2e\cdot\left[\frac{1}{1+3e}+\frac{16e}{(1+3e)^3}\right]. \tag{14}$$

次に、$P(x)$ の根のうち $1/2\lesssim|\zeta|$ なるものを考える。$P(\zeta)=0$ を ζ^m で割ると次式が得られる。

$$c_n\zeta^{n-m}+\cdots+c_{m+1}\zeta+1+\varepsilon_{m-1}/\zeta+\varepsilon_{m-2}/\zeta^2+\cdots+\varepsilon_0/\zeta^m = 0. \tag{15}$$

$|\varepsilon_{m-j}|\ll 1$ $(j=1,\ldots,m)$ であり $1/2\lesssim|\zeta|$ ゆえ、上記方程式の $|\zeta|\gtrsim 1/2$ なる根は先頭の $n-m+1$ 項からほぼ決まり、後ろの m 項 $\varepsilon_{m-j}/\zeta^j$ $(j=1,\ldots,m)$ は微小補正項とみなせる。したがって、(9) に対すると同様の解釈で、上式を定数項が $a_0=1+\varepsilon_{m-1}/\zeta+\cdots+\varepsilon_0/\zeta^m$ で次数が $n-m$ の方程式とみなし、定理 2 を適用すると次のように下界が計算できる。

$$\begin{aligned} |\zeta| &\ge \frac{1}{1+\max\{|c_n|,\cdots,|c_{m+1}|\}/|a_0|} \\ &\ge \frac{1}{1+1/(1-|e/\zeta|-\cdots-|e/\zeta|^m)} \\ &> \frac{1}{1+\frac{1}{1-|e/\zeta|/(1-|e/\zeta|)}} = \frac{1-2|e/\zeta|}{2-3|e/\zeta|}. \end{aligned}$$

この不等式は次の不等式に書き換えられる。

$$2|\zeta|^2-(1+3e)|\zeta|+2e>0. \tag{16}$$

これは (12) の不等式と全く同じゆえ、今度は $|\zeta|>z_+$、すなわち $|\zeta|$ の下界として次式が得られる。

$$|\zeta|\;>\;\frac{(1+3e)}{4}\left[1+\sqrt{1-\frac{16e}{(1+3e)^2}}\right]\quad\text{for }\; e\leq 1/9. \tag{17}$$

さらに平方根関数を前と同様に近似すると、次式が得られる。

$$|\zeta|\;>\;\frac{1+3e}{4}\left[1+1-\frac{8e}{(1+3e)^2}-\frac{128e^2}{(1+3e)^4}\right]\;=\;\frac{1}{2}\left[1-\frac{e(1-9e)}{1+3e}-\frac{64e^2}{(1+3e)^3}\right]. \tag{18}$$

証明終

4 感想

上記証明をみると、$|\zeta|\lesssim 2\sqrt[m]{\varepsilon}$ なる根と $|\zeta|\gtrsim 1/2$ なる根に対して一見異なる方程式を扱いながら、得られた上下界の不等式は (13) と (17) のように、完全に対称的になるのが興味深い。また、e に対する条件も $e\leq 1/9$ と極めて簡単になるのが美しい。本稿で得られた結果は数学的には底の浅いものであるが、美しい結果は後世に残るのではないかと思う。

参 考 文 献

[Mig91] M. Mignotte: *Mathematics for Computer Algebra*, Springer-Verlag, 1991.

[TS00] A. Terui and T. Sasaki: "Approximate Zero-points" of Real Univariate Polynomial with Large Error Terms, 情報処理学会論文誌 (IPSJ Journal), Vol. 41 (2000), 974–989.