数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 79-85

On Singular Inner Functions of L^1-Type

新潟大学大学院自然科学研究科　丹羽典朗 (Norio Niwa)

本講演は泉池敬司先生と私の共著論文 [9] を基にしている.

2 つの異なる singular inner functions の $H^\infty+C$ における division を考えるために, singular inner function の性質を調べることを目的としている. そのため singular inner function の $\mathfrak{M}\setminus D$ における "零点" や "その絶対値が 1 より小さくなっているところ" を調べる必要があるように思われる.

$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $\partial D=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ とする. H^∞ を D 上の bounded analytic functions 全体からなる Banach algebra とし, $\mathfrak{M}$ を H^∞ の maximal ideal space ; H^∞ 上の nonzero な multiplicative linear functional 全体からなる空間とする. $\mathfrak{M}$ に weak-* topology を入れることで, $\mathfrak{M}$ は compact Hausdorff space となる. よく知られているように, $D\subset\mathfrak{M}$ (homeomorphic) であり, D は $\mathfrak{M}$ において dense である. $f\in H^\infty$ とその Gelfand 変換 $\hat{f}$ を同一視する (以後, 記号の区別をしない). そのとき, H^∞ は $C(\mathfrak{M})$ の closed subalgebra とみなすことができる.

また, H^∞-function とその boundary function を同一視することで, H^∞ を $L^\infty=L^\infty(\partial D)$ の closed subalgebra とみなすことができる. そのとき, $H^\infty+C$ (C は ∂D 上の complex-valued continuous functions 全体) は L^∞ と H^∞ との間の proper な closed subalgebra で, その maximal ideal space は $\mathfrak{M}_{H^\infty+C}=\mathfrak{M}\setminus D$ であることが知られている.

μ を ∂D 上の (nonzero な) positive singular measure (with respect to the Lebesgue measure on ∂D) とし, そのような measure μ の全体を M_s^+ と書くことにする. $\mu\in M_s^+$ によって定義される関数 :

$$\psi_\mu(z)=\exp\left(-\int_{\partial D}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(e^{i\theta})\right),\quad z\in D$$

は singular inner function と呼ばれる. また, $S(\mu)$ を μ の closed support とする. さらに

$$\begin{aligned}
M_{s,c}^+&=\{\mu\in M_s^+:\mu\text{ is a continuous measure}\},\\
M_{s,d}^+&=\{\mu\in M_s^+:\mu\text{ is a discrete measure}\},\\
L_+^1(\mu)&=\{\nu\in M_s^+:\nu\text{ is positive, }\nu\ll\mu\}
\end{aligned}$$

とする. $\mu\in M_s^+$ に対して, $L_+^1(\mu)$ を用いることにより, singular inner functions の family $\{\psi_\nu:\nu\in L_+^1(\mu)\}$ が得られる. この family を measure μ に対する singular inner functions of L^1-type と呼ぶことにする.

次の補題はよく用いる ([3,5] 参照). 記号を簡単にするため, $f \in H^\infty$ に対して

$$\{|f| < 1\} = \{x \in \mathfrak{M} \setminus D : |f(x)| < 1\}, \quad Z(f) = \{x \in \mathfrak{M} \setminus D : f(x) = 0\}$$

とおく.

Lemma 1. b を *interpolating Blaschke product*, ψ_μ を *singular inner function* とする. もし $Z(b) \subset Z(\psi_\mu)$ であれば, $\{|b| < 1\} \subset Z(\psi_\mu)$ が成り立つ.

$\zeta \in \partial D$ に対して, $\mathfrak{M}_\zeta = \{x \in \mathfrak{M} : z(x) = \zeta\}$ を ζ 上の $\mathfrak{M}$ の fiber という. $\mu \in M_s^+$ とする. ψ_μ は $\partial D \setminus S(\mu)$ に連続的に拡張できるので, $\partial D \setminus S(\mu)$ の各点 ξ の fiber $\mathfrak{M}_\xi$ 上で ψ_μ は constant である. $Z(\psi_\mu)$ や $\{|\psi_\mu| < 1\}$ なる集合は$\bigcup_{\zeta \in S(\mu)} \mathfrak{M}_\zeta$ に現われる.

Proposition 2. $\mu \in M_s^+$, δ_ζ を点 ζ ($\zeta \in \partial D$) の *unit point mass* とする. もし $\mu \perp \delta_\zeta$ ならば, $\mathfrak{M}_\zeta \cap \{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たす $\nu \in L^1_+(\mu)$ が存在する.

Proof. $\zeta \notin S(\mu)$ のとき $\mathfrak{M}_\zeta \cap \{|\psi_\mu| < 1\} = \phi$ となり自明である. したがって $\zeta \in S(\mu)$ の場合を考える. $\bigcap_{n=1}^\infty J_n = \{\zeta\}$ を満たす ∂D の decreasing open subsrcs の sequence $\{J_n\}_n$ をとる. $\mu_n = \mu|_{J_n}$ (μ の J_n への制限) とおくと $\|\mu_n\| \neq 0$ である. $\mu \perp \delta_\zeta$ であるので $\|\mu_n\| \to 0$ ($n \to \infty$) である. このことから $\sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty$ と仮定してもよい. positive numbers の sequence $\{p_n\}_n$ で $\sum_{n=1}^\infty p_n \|\mu_n\| < \infty$ かつ $p_n \to \infty$ ($n \to \infty$) を満たすものをとり, $\nu = \sum_{n=1}^\infty p_n \mu_n$ とおく. そのとき $\mu_n \in L^1_+(\mu)$, $\|\nu\| \le \sum_{n=1}^\infty p_n \|\mu_n\| < \infty$ であるので $\nu \in L^1_+(\mu)$ となる. fiber $\mathfrak{M}_\zeta$ 上で $|\psi_{\mu_n}| = |\psi_\mu|$ であることに注意すると, $|\psi_\nu| \le |\psi_{\mu_n}|^{p_n} = |\psi_\mu|^{p_n}$ が成り立つ. これがすべての n について成り立つので, $p_n \to \infty$ ($n \to \infty$) より結論を得る. □

ここで, 次の記号を導入する :

$$\mathcal{R}(\mu) = \bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)} \{|\psi_\nu| < 1\}, \quad \mathcal{R}_0(\mu) = \bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)} Z(\psi_\nu).$$

Proposition 3. $\mu \in M_{s,c}^+$ ならば, $\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}_0(\mu)$ が成り立つ.

Proof.

$$\mathcal{R}_0(\mu) \subset \mathcal{R}(\mu) \subset \bigcup_{\zeta \in S(\mu)} \mathfrak{M}_\zeta$$

は明らかである. 逆向きの包含を示すために $\nu \in L^1_+(\mu)$, $\zeta \in S(\mu)$ とする. Proposition 2 より, $\sigma \in L^1_+(\nu)$ が存在して

$$\mathfrak{M}_\zeta \cap \{|\psi_\nu| < 1\} \subset Z(\psi_\sigma) \tag{1}$$

が成り立つ. $\sigma \in L^1_+(\nu) \subset L^1_+(\mu)$ だから (1) より $\mathfrak{M}_\zeta \cap \{|\psi_\nu| < 1\} \subset \mathcal{R}_0(\mu)$. したがって, 任意の $\zeta \in S(\mu)$ に対して $\mathfrak{M}_\zeta \cap \mathcal{R}(\mu) \subset \mathcal{R}_0(\mu)$. よって逆向きの包含を得る. □

次の定理が本講演での MAIN RESULT である.

Theorem 4. $\mu \in M_s^+$, $\mu = \mu_c + \mu_d$ ($\mu_c \in M_{s,c}^+, \mu_d \in M_{s,d}^+$) とする. また, $\mu_d = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{e^{i\theta_n}}$ ($a_n > 0$) とする. そのとき, 次の条件は同値である.

(i) $\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}_0(\mu)$.

(ii) 各 n に対して $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_n})$ を満たす $\nu_n \in L_+^1(\mu)$ が存在する.

(iii) 各 n に対して $S(\lambda_n) \subset S(\mu)$ かつ $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\lambda_n})$ を満たす $\lambda_n \in M_s^+$ が存在する.

この定理の証明のために次の補題を必要とする.

Lemma 5. $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{e^{i\theta_n}} \in M_{s,d}^+$ ($a_n > 0$) とする. そのとき,

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}_0(\mu) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\}.$$

Proof.

$$\mathcal{R}_0(\mu) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset \mathcal{R}(\mu)$$

は明らか. 逆向きの包含を示すために, $\mathcal{R}(\mu) \neq \mathcal{R}_0(\mu)$ と仮定する. $x \in \mathcal{R}(\mu) \setminus \mathcal{R}_0(\mu)$ とする. この x に対して, ある $\nu \in L_+^1(\mu)$ が存在して

$$0 < |\psi_\nu(x)| < 1 \tag{2}$$

となる. ある n に対して $|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}(x)| < 1$ となっていることを示せばよい. これを示すために, すべての n に対して

$$|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}(x)| = 1 \tag{3}$$

と仮定する. $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{e^{i\theta_n}}$ ($b_n \geq 0$) とおくと, (2) と (3) より無限個の n に対して $b_n > 0$ であることが分かる. したがって, すべての n で $b_n > 0$ と仮定しても一般性を失わない. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ なので, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n b_n < \infty$ かつ $p_n \to \infty$ ($n \to \infty$) を満たすような increasing positive numbers の sequence $\{p_n\}_n$ がとれる. $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} p_n b_n \delta_{e^{i\theta_n}}$ とおくと $\sigma \in L_+^1(\mu)$. 各 positive integer k に対して $\nu_k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n \delta_{e^{i\theta_n}}$ とおく. 各 k に対して $\sigma \geq p_k \nu_k$ であり, (3) より

$$|\psi_\sigma(x)| \leq |\psi_{\nu_k}(x)|^{p_k} = |\psi_\nu(x)|^{p_k}$$

である. これがすべての k で成り立つので $p_k \to \infty$ ($n \to \infty$) とすると (2) より $x \in Z(\psi_\sigma)$ を得る. したがって $x \in \mathcal{R}_0(\mu)$ となり矛盾. □

上の補題と Proposition 3 を対比すると discrete type と continuous type の違いがわかる.

Lemma 6. $\mu \in M_s^+$. $e^{i\theta} \in \partial D$ とし $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}| < 1\} \subset Z(\psi_\mu)$ を満たすとする. $\mu_1 = \mu - \mu(\{e^{i\theta}\})\delta_{e^{i\theta}}$ とおくと, $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\mu_1})$ が成り立つ.

Proof. r $(0 < r < 1)$ に対して

$$b(z) = \frac{\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}(z) - r}{1 - r\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}(z)}, \quad z \in D$$

とおくと, b は interpolating Blaschke product になる ([4] 参照). $\{w_n\}_n$ を b の零点列とすると, 各 n で $\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}(w_n) = r$ である. 仮定より $\overline{\{w_n\}_n} \setminus \{w_n\}_n = Z(b)$ 上で $\psi_{\mu_1} = 0$ である ($\overline{\{w_n\}_n}$ は $\mathfrak{M}$ における closure). したがって, Lemma 1 より $\{|b| < 1\} \subset Z(\psi_{\mu_1})$ となり, b の定義より $\{|b| < 1\} = \{|\psi_{\delta_{e^{i\theta}}}| < 1\}$ なので結論を得る. □

Proof of Theorem 4. (i) $\Rightarrow$ (ii) $n = 1$ の場合を証明しておけばよい. r $(0 < r < 1)$ に対して

$$b(z) = \frac{\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}}(z) - r}{1 - r\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}}(z)}, \quad z \in D$$

とおく. そのとき b は interpolating Blaschke product であり,

$$\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}} = r \quad \text{on} \quad Z(b). \tag{4}$$

$\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}}| < 1\} \subset \bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)}\{|\psi_\nu| < 1\}$ であるので $Z(b) \subset \bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)}\{|\psi_\nu| < 1\}$ である. 条件 (i) より, $x \in Z(b)$ に対して $\sigma_x \in L^1_+(\mu)$ が存在して $\psi_{\sigma_x}(x) = 0$ を満たす. いま $\delta_{e^{i\theta_1}} \perp \sigma_x$ と仮定することができる. (なぜなら, $\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_x(\{e^{i\theta_1}\})\delta_{e^{i\theta_1}}$ とおくと, $\sigma'_x \in L^1_+(\mu)$, (4) より $\psi_{\sigma'_x}(x) = 0$ であり, $\delta_{e^{i\theta_1}} \perp \sigma'_x$ となるので). $Z(b)$ は $\mathfrak{M}$ の compact set なので $Z(b) \subset \bigcup_{j=1}^k\{|\psi_{\sigma_j}| < 1\}$ なる有限個の $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in L^1_+(\mu)$ をとることができる. 上のことより $\delta_{e^{i\theta_1}} \perp \sigma_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ としてもよい. $\lambda = \sum_{j=1}^k \sigma_j$ とおくと, $\lambda \in L^1_+(\mu)$, $\delta_{e^{i\theta_1}} \perp \lambda$ であり, $Z(b) \subset \{|\psi_\lambda| < 1\}$ である. そのとき, Proposition 2 より, $\mathfrak{M}_{e^{i\theta_1}} \cap \{|\psi_\lambda| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ なる $\nu \in L^1_+(\lambda)$ が存在する. $\lambda \in L^1_+(\mu)$ なので $\nu \in L^1_+(\mu)$ である. $Z(b) \subset \mathfrak{M}_{e^{i\theta_1}}$ なので $Z(b) \subset Z(\psi_\nu)$ である. b は interpolating Blaschke product なので Lemma 1 より $\{|b| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$. $\{|b| < 1\} = \{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}}| < 1\}$ であることに注意すると $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_1}}}| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 明らかに

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}(\mu_c) \cup \mathcal{R}(\mu_d), \quad \mathcal{R}_0(\mu) = \mathcal{R}_0(\mu_c) \cup \mathcal{R}_0(\mu_d)$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mu) &= \mathcal{R}_0(\mu_c) \cup \mathcal{R}(\mu_d) \quad \text{by Proposition 2} \\
&= \mathcal{R}_0(\mu_c) \cup \left(\mathcal{R}_0(\mu_d) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\}\right) \quad \text{by Lemma 5} \\
&\subset \mathcal{R}_0(\mu) \quad \text{by (ii)}.
\end{aligned}$$

逆向きの包含 $\mathcal{R}_0(\mu) \subset \mathcal{R}(\mu)$ は明らかなので結論を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) は明らかである.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) この証明にはさらに準備が必要となるので省略する ([9] 参照). $\square$

Theorem 4 において μ を discrete な measure の場合に限ると次の定理を得る.

Theorem 7. $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{e^{i\theta_n}} \in M_{s,d}^+$ $(a_n > 0)$ とする. そのとき, 次の条件は同値である.

(i) $\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}_0(\mu)$.

(ii) 各 n に対して $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_n})$ を満たす $\nu_n \in L_+^1(\mu)$ が存在する.

(iii) 各 n に対して $S(\lambda_n) = S(\mu)$ かつ $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\lambda_n})$ を満たす $\lambda_n \in M_s^+$ が存在する.

(iv) $\{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たす $\nu \in L_+^1(\mu)$ が存在する.

(v) $S(\lambda) = S(\mu)$ かつ $\{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\lambda)$ を満たす $\lambda \in M_s^+$ が存在する.

Proof. (i),(ii),(iii) の同値性は Theorem 4 による.

(iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii) は明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) 各 n に対して $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_n})$ を満たす $\nu_n \in L_+^1(\mu)$ が存在すると仮定する. 任意の正数 c に対して $Z(\psi_{\nu_n}) = Z(\psi_{c\nu_n})$ であるので $\sum_{n=1}^{\infty} \|\nu_n\| < \infty$ とすることができる. $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$ とおくと $\lambda \in L_+^1(\mu)$. よって λ も discrete な measure なので,

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{e^{i\theta_n}}, \quad \text{ただし}, \ b_n \geq 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$$

と書くことにする. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(a_n + b_n) < \infty$ かつ $p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ なる increasing positive integers の sequence $\{p_n\}_n$ をとり $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a_n + b_n)\delta_{e^{i\theta_n}}$ とおくと, $\nu \in L_+^1(\mu)$ である. この ν が求めたい measure であることを示すには, $|\psi_\mu(x)| < 1$ なる $x \in \mathfrak{M}\backslash D$ に対して $\psi_\nu(x) = 0$ であることを示せばよい. $\nu \geq \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \geq \nu_n$ より, 各 n に対して $\mathfrak{M}\backslash D$ 上で $|\psi_\nu| \leq |\psi_{\nu_n}|$ である. ある n に対して $|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}(x)| < 1$ であれば, 仮定 (ii) より $x \in Z(\psi_\nu)$ を得る. 次にすべての n に対して

$$|\psi_{\delta_{e^{i\theta_n}}}(x)| = 1 \tag{5}$$

であるとする.

$$\nu_n' = \sum_{j=n}^{\infty} p_j(a_j + b_j)\delta_{e^{i\theta_j}}, \quad \mu_n' = \sum_{j=n}^{\infty} a_j \delta_{e^{i\theta_j}}$$

とおくと，$\nu_n' \geq p_n \sum_{j=n}^{\infty} a_j \delta_{e^{i\theta_j}} = p_n \mu_n'$ である．したがって，各 n に対して $\mathfrak{M} \setminus D$ 上で $|\psi_{\nu_n'}| \leq |\psi_{\mu_n'}|^{p_n}$ である．よって，

$$\begin{aligned} |\psi_\nu(x)| &= |\psi_{\nu_n'}(x)| \prod_{j=1}^{n-1} |\psi_{\delta_{e^{i\theta_j}}}(x)|^{p_j(a_j+b_j)} \\ &= |\psi_{\nu_n'}(x)| \quad \text{by (5)} \\ &\leq |\psi_{\mu_n'}(x)| \\ &= |\psi_\mu(x)|^{p_n} \quad \text{by (5).} \end{aligned}$$

これがすべての n で成り立つので，$p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ とすると $\psi_\nu(x) = 0$ を得る． □

最後に例として Theorem 7 の条件 (ii) を満たす measure を構成する．

Example. P. Gorkin の論文 [3] より，すべての $\nu \in M_s^+$ に対して $\{|\psi_\nu| < 1\} \subset Z(\psi_\lambda)$ を満足する $\lambda \in M_{s,d}^+$ が存在することがわかる．ここで，λ の total variation $\|\lambda\|$ は十分小さくとることができる．

$\nu_0 \in M_{s,d}^+$, $\|\nu_0\| \leq 1$ とする．そのとき，$\nu_1 \in M_{s,d}^+$ が存在して $\{|\psi_{\nu_0}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_1})$ かつ $\|\nu_1\| \leq 1/2$ を満たす．さらに，$\nu_2 \in M_{s,d}^+$ が存在して $\{|\psi_{\nu_1}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_2})$ かつ $\|\nu_2\| \leq (1/2)^2$ を満たす．これを帰納的に用いると，

$$\{|\psi_{\nu_{k-1}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_k}) \tag{6}$$

かつ $\|\nu_k\| \leq (1/2)^k$ を満たすような discrete な positive singular measures の sequence $\{\nu_k\}_k$ を得る．いま

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k$$

とおくと，$\mu \in M_{s,d}^+$ で各 k で $\nu_k \in L_+^1(\mu)$ である．$\mu(\{e^{i\theta_0}\}) > 0$ と仮定すると $\nu_k(\{e^{i\theta_0}\}) \neq 0$ となる positive integer k が存在する．そのとき，$\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_0}}}| < 1\} \subset \{|\psi_{\nu_k}| < 1\}$ であり，(6) より $\{|\psi_{\delta_{e^{i\theta_0}}}| < 1\} \subset Z(\psi_{\nu_{k+1}})$ を得る．この measure μ は Theorem 7 の条件 (ii) を満たしている．

References

[1] S. Axler and P. Gorkin, *Divisibility in Douglas algebras*, Michigan Math. J. **31**(1984), 89–94.

[2] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Gorkin, *Singular functions and division in $H^\infty + C$*, Proc. Amer. Math. Soc. **92**(1984), 268–270.

[4] ______ and K. Izuchi, *Some counterexamples in subalgebras of $L^\infty(D)$*, Indiana Univ. Math. J. **40**(1991), 1301–1313.

[5] C. Guillory, K. Izuchi and D. Sarason, *Interpolating Blaschke products and division in Douglas algebras*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **84**(1984), 1–7.

[6] ______ and D. Sarason, *Division in $H^\infty + C$*, Michigan Math. J. **28**(1981), 173–181.

[7] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[8] K. Izuchi, *Weak infinite powers of Blaschke products*, J. Anal. Math. **75**(1998), 135–154.

[9] ——— and N. Niwa, *Singular inner functions of L^1-type*, J. Korean Math. Soc. **36**(1999), 787–811.